UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

O TEOREMA DO PONTO FIXO DE BANACH E APLICAÇÕES

WEILLER FELIPE CHAVES BARBOZA

CAMPINA GRANDE

Julho de 2014

WEILLER FELIPE CHAVES BARBOZA

O TEOREMA DO PONTO FIXO DE BANACH E APLICAÇÕES

Trabalho Acadêmico Orientado apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática do Departamento de Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba em cumprimento às exigências legais para obtenção do título de licenciado em Matemática.

Orientador: Dr. Aldo Trajano Lourêdo

CAMPINA GRANDE

Julho de 2014

B239t Barboza, Weiller Felipe Chaves.
O teorema do ponto fixo de Banach e aplicações [manuscrito] / Weiller Felipe Chaves Barboza. - 2014.
52 p. : il.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2014.
"Orientação: Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo, Departamento de Matemática".

1. Ponto Fixo. 2. Contração. 3. Teorema do Ponto Fixo de Banach. I. Título.

21. ed. CDD 510

WEILLER FELIPE CHAVES BARBOZA

O TEOREMA DO PONTO FIXO DE BANACH E APLICAÇÕES

Aprovado em: 25 / 07 / 2014

COMISSÃO EXAMINADORA

Aldo Trajano Lourêdo

Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo

Dpto. Matemática - CCT/UEPB

ORIENTADOR

Manuel Milla M

Prof. Dr. Manuel Antolino Milla Miranda

Dpto. Matemática - CCT/UEPB

EXAMINADOR

Luciana Roze de Freitas

Prof. Dra. Luciana Roze de Freitas

Dpto. Matemática - CCT/UEPB

Dedicatória

Dedico o presente trabalho a toda minha família. Dedico, especialmente, ao meu pai, o Sr. José Alberis de Lima Barbosa, à minha mãe, Srª Maria de Fátima Chaves Barboza e a minha namorada, Rayzza Tavares Gomes que em momento algum deixaram de me incentivar para que eu chegasse até aqui.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus glorioso, por ter me dado forças e permitido que eu chegasse até aqui. Por ter me proporcionado ótimos momentos nesses quatro anos de universidade.

Agradeço a toda minha família, ao meu pai José alberis, minha mãe Maria de Fátima, pela educação que me deram, pelo incentivo nos estudos e pela compreensão nas minhas escolhas durante todo percurso da graduação. Agradeço também a minha namorada, Rayzza Tavares que em momento algum deixou de me apoiar. Essas pessoas tiveram um papel fundamental para que eu chegasse até o final da minha graduação e consequentemente, para que terminasse essa monografia.

Agradeço ao meu Orientador Dr. Aldo Trajano Lourêdo pela atenção, compreensão e todo tempo dedicado para que eu pudesse ter concluído o trabalho com êxito.

Agradeço aos professores Manuel Milla Miranda e Luciana Roze de Freitas por terem aceitado fazer parte da minha banca, e principalmente pelas ajudas que me deram durante a pesquisa bem como na graduação. Deste modo agradeço por todos os momentos que quando precisei da professora Luciana Roze de Freitas ela estava sempre a disposição para ajudar e tirar minhas dúvidas, e pela ótima professora e Coordenadora que foi comigo e com todos meus colegas durante o curso.

Agradeço aos meus colegas de graduação: Maxwell Aires, Tayrone Araújo, Janailson Marinho, Flavia Shirley, Júnior Diniz, Janaina Aparecida, Elen Marques, Ataiz de Souza, Hemmerson Gueba, Alan, Gábio, entre outros, que conviveram comigo durante esses quatro anos, e que de alguma forma foram importantes na minha trajetória no curso, ora estudando, ora dando forças. E me sinto grato por ter tido a oportunidade de conquistar suas amizades verdadeiras.

Aos professores (José Elias da Silva, Wanderson Rodrigo Guimarães, Joselma Soares, Vandenberg Lopes Vieira, Fernando Luiz, Leoupoudo Maurício, José Ginaldo) que tive a oportunidade de conhecer e conviver durante o curso, pois de forma direta ou indireta, contribuíram para uma formação acadêmica de qualidade, principalmente pelos incentivos e apoios dados.

"Quando o homem baixa a cabeça e diz perdi as esperanças, Deus também baixa a cabeça e diz perdi um homem."

(Autor Desconhecido)

Resumo

No presente trabalho estudamos o Teorema do Ponto Fixo de Banach e algumas de suas aplicações. O Teorema estudado garante a existência e unicidade de solução para vários tipos de equações. Aplicamos o Teorema do Ponto Fixo de Banach em Equação Funcional (a equação $senx = x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$), Equações Diferenciais Ordinárias (Teorema de Picard) e em Equações Integrais (Equações de Fredholm e Volterra) dos tipos:

$$x(t) - \mu \int_a^b k(t,\xi)x(\xi)d\xi = v(t)$$

e

$$x(t) - \mu \int_a^t k(t,\xi)x(\xi)d\xi = v(t)$$

Palavras-chave: Teorema do Ponto fixo de Banach, Ponto Fixo, Contração.

Abstract

In the present work we studied the Banach Fixed Point Theorem and some of its applications. This theorem guarantees existence and unicity of solution to many kinds of equations. Apply the Banach Fixed Point Theorem in Functional Equation (equation $senx = x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$), Ordinary Differential Equations (Picard's Theorem) in Integral Equations (Fredholm and Volterra Equations) Types:

$$x(t) - \mu \int_a^b k(t,\xi)x(\xi)d\xi = v(t)$$

and

$$x(t) - \mu \int_a^t k(t,\xi)x(\xi)d\xi = v(t)$$

Keywords: Banach Fixed Point Theorem, Fixed Point, Contraction.

Sumário

Introdução

Esta pesquisa apresenta uma revisão bibliográfica, em que a base de desenvolvimento é a teoria do Ponto Fixo. Dois dos ramos principais da Teoria do Ponto Fixo são a Teoria Topológica do Ponto Fixo e Teoria Métrica do Ponto Fixo. Essa teoria teve início com o Teorema do Ponto Fixo de Banach, cuja afirmação é que, uma contração, definida num espaço métrico completo possui um único ponto fixo.

Na Análise Funcional, o Teorema de Ponto Fixo foi proposto por Stefan Banach em 1922 sendo também conhecido como o princípio de contração. Esse Teorema pode ser utilizado em cálculo numérico, para provar a existência e unicidade para soluções de equações de diversos tipos. Um exemplo típico do seu uso é no cálculo por aproximações sucessivas de raízes de funções.

Entre os vários trabalhos de Stefan Banach, destacam-se a sua contribuição para a teoria das séries ortogonais e inovações na teoria da medida e integração. Dos trabalhos publicados por Banach, o **Théorie desopérations linéaires** (Teoria das operações lineares) (1932) é o mais importante. Outro trabalho considerado de grande importância da época, o **Théorie de Sept Reverse** (Teoria do sete reverso) (1934) acabou sendo considerado incompleto na década seguinte. Na tentativa de generalizar equações integrais, Banach introduziu o conceito de Espaços Vetoriais Normados, além de provar vários teoremas dessa área. Dentre os Teoremas que recebem o nome de Banach, os mais conhecidos são: Teorema de Hahn-Banach, Teorema de Banach-Steinhaus, Teorema de Banach-Alaoglu, Teorema de Banach-Schauder e Teorema do Ponto Fixo de Banach.

Desta forma, o trabalho ficou dividido na seguinte estrutura:

No Capítulo I estudamos alguns conteúdos necessários que servirão para o entendimento da demonstração do Teorema do Ponto Fixo de Banach, bem como suas aplicações, tais como: Espaço Métrico, Sequência de Cauchy, Espaço Métrico Completo, Espaço Vetorial Normado, Função Contínua, Ponto Fixo, Contração, etc.

No Capítulo II estudamos o Teorema do Ponto Fixo de Banach, no qual introduzimos conceitos de Ponto Fixo e Contração. Em seguida fizemos a demonstração do Teorema estudado.

No Capítulo III fizemos as aplicações do Teorema do Ponto Fixo de Banach, no entanto realizamos aplicações em Equação Funcional, Equações Diferenciais e Equações Integrais, para mostrar que estas possuem solução única através do Teorema do Ponto Fixo de Banach.

O objetivo principal desse trabalho é mostrar o Teorema do Ponto Fixo de Banach com a sua respectiva demonstração, e apresentar também algumas de suas várias aplicações em equações que possuem única solução.

Na sessão de anexos apresentamos alguns resultados que utilizamos em nosso trabalho.

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo contêm algumas definições e resultados de espaços métricos, sequências em espaços métricos, sequência de Cauchy, espaços métricos completos, função contínua, ponto fixo e contração. Tais definições serão necessárias para o entendimento da demonstração do Teorema do Ponto Fixo de Banach e suas aplicações apresentadas no presente trabalho.

1.1 Métricas

Definição 1.1 (**Métrica**). *Dado um conjunto $M \neq \varnothing$, seja $d : M \times M \longrightarrow [0, +\infty)$ uma aplicação e indicaremos por $d(x,\ y)$ a imagem de um par genérico $(x,\ y) \in M \times M$, através da função d. Dizemos que d é* ***métrica*** *sobre M se as seguintes condições se verificam para quaisquer $x,y,z \in M$:*

M_1) $d(x, x) = 0$;

M_2) se $x \neq y$, então $d(x, y) > 0$;

M_3) $d(x, y) = d(y, x)$;

M_4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Definição 1.2 (**Espaço Métrico**). *Um* ***espaço métrico*** *é um par (M, d), onde M é um conjunto não vazio e d é uma métrica em M.*

Definição 1.3 (**Subespaço métrico**). *Seja $E \subset M$ um subconjunto de um espaço métrico M e d uma métrica em M. A restrição d_1 de d a $E \times E$ é uma métrica em E. Dizemos então que (E, d_1) é um* ***subespaço métrico*** *de (M, d).*

Exemplo 1.1 (**Métrica usual da reta**). *Verifique que* $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty)$ *definida por* $d(x, y) = |x - y|$ *é uma métrica.*

Demonstração: Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}$

$M_1)$ $d(x, x) = |x - x| = |0| = 0$.

$M_2)$ Se $x \neq y$, então $d(x, y) > 0$. De fato,

$$x \neq y \Longrightarrow x - y \neq 0 \Longrightarrow |x - y| > 0.$$

Logo, $d(x, y) = |x - y| > 0$.

$M_3)$ $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in \mathbb{R}$. Com efeito,

$$d(x, y) = |x - y| = |y - x| = d(y, x).$$

Portanto, $d(x, y) = d(y, x)$.

$M_4)$ $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. De fato, usando a desigualdade triangular obtemos:

$$d(x, z) = |x - z| = |x - y + y - z| \leq |x - y| + |y - z| = d(x, y) + d(y, z).$$

Logo, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. Consequentemente de $M_1)$ - $M_4)$, segue-se que d é uma métrica. ■

Exemplo 1.2 (**Métrica discreta zero-um**). *É o mais simples exemplo de métrica que se pode considerar. Dado* $(M \neq \varnothing)$ *define-se* $d : M \times M \longrightarrow [0, +\infty)$ *do seguinte modo:*

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & se\ x \neq y \\ 0, & se\ x = y \end{cases}$$

Mostra-se que a função d, assim definida, é uma métrica. Por exemplo, ao verificar a propriedade (M_4) um dos casos é aquele em que,

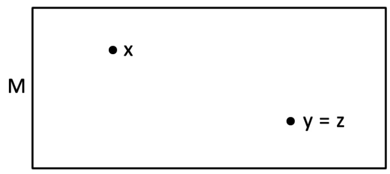

Figura 1: Métrica zero um.

$x \neq y$ e $y = z$. Quando isto ocorre temos $d(x, y) = 1$, $d(x, z) = 1$ e $d(z, y) = 0$. Logo, neste caso, $d(x, y) = d(x, z) + d(z, y)$. O espaço assim obtido é, às vezes chamado **espaço discreto**.

Exemplo 1.3 (**O Espaço** $\mathbb{R}^n$). *O conjunto* $\mathbb{R}^n$ *é formado por todas as n-uplas (sequências finitas)* $(x_1, x_2, ..., x_n)$, *onde cada* $x_i \in \mathbb{R}$. *Existem três métricas importantes sobre* $\mathbb{R}^n$ *e que, posteriormente mostremos que são equivalentes.*

Sendo $x = (x_1, ..., x_n)$ e $y = (y_1, ..., y_n)$ pontos arbitrários do $\mathbb{R}^n$, são essas métricas definidas do seguinte modo:

$$D(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2} = \left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2\right]^{1/2}$$

$$D_1(x, y) = |x_1 - y_1| + ... + |x_n - y_n| = \sum_{i=1}^{n}|x_i - y_i|$$

$$D_2(x, y) = max\{|x_1 - y_1|, ..., |x_n - y_n|\} = \max_{1\leq i\leq n}|x_i - y_i|.$$

A métrica D é chamada **métrica euclidiana** e naturalmente se inspira na fórmula da distância entre dois pontos no espaço usual. As Métricas D_1 e D_2, apesar de não parecerem tão naturais, pelo menos no primeiro exame, do ponto de vista prático são visivelmente vantajosas. Agora mostremos que $D(x, y)$ é uma métrica.

Demonstração: Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}^n$.
$M_1)$ $d(x, x) = \sqrt{(x_1 - x_1)^2 + \ldots + (x_n + x_n)^2} = \sqrt{0^2 + \ldots + 0^2} = 0.$

$M_2)$ Se $x \neq y$, então $d(x, y) > 0$.
Se $x \neq y \implies x_i \neq y_i$, para algum $i \in \{1, \ldots, n\}$. Assim, para $x_i - y_i \neq 0$, temos que $(x_i - y_i)^2 > 0$. Logo,

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2} \geq \sqrt{(x_i - y_i)^2} > 0.$$

Logo, $d(x, y) > 0$.

$M_3)$ $d(x, y) = d(y, x)$. Sabemos que $(x_i - y_i)^2 = (y_i - x_i)^2, \forall i \in \{1, \ldots, n\}$. Logo,

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2} = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \ldots + (y_n - x_n)^2} = d(y, x).$$

$M_4)$ Para mostrar esta propriedade, vamos utilizar a **desigualdade de Cauchy-Schwarz** em $\mathbb{R}^n$.

Proposição 1.1 (**Desigualdade de Cauchy-Schwarz**). *Seja* $(x_1, \ldots, x_n)$ *e* $(y_1, \ldots, y_n)$ *números reais arbitrários, então*

$$\sum_{i=1}^{n}|x_iy_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} . \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{1/2}$$

Demonstração: Note que $r^2 + s^2 \geq 2rs, \forall r, s \in \mathbb{R}$, pois $0 \leq (r-s)^2 = r^2 - 2rs + s^2$. Assim,

$$2.\frac{|x_i|}{p}.\frac{|y_i|}{q} \leq \frac{x_i^2}{p^2} + \frac{y_i^2}{q^2},$$

para quaisquer $i(1 \leq i \leq n)$. Somando em relação ao índice i teremos

$$\frac{2}{p.q}\sum_{i=1}^{n}|x_iy_i| \leq \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{p^2} + \sum_{i=1}^{n}\frac{y_i^2}{q^2} \leq 1+1=2$$

o que implica

$$\sum_{i=1}^{n}|x_iy_i| \leq p.q = \left(\sqrt{x_1^2+...+x_n^2}\right).\left(\sqrt{y_1^2+...+y_n^2}\right) \tag{1.1}$$

que é a desigualdade de Cauchy-Schwarz em $\mathbb{R}^n$.

■

Agora podemos provar a desigualdade triangular no que se refere a D. Sejam $x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n)$ e $z = (z_1, ..., z_n)$ pontos do $\mathbb{R}^n$. Então:

$$\begin{aligned}
d(x,y)^2 &= \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i + z_i - y_i)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2 + 2\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)(z_i - y_i) + \sum_{i=1}^{n}(z_i - y_i)^2 \\
&\stackrel{(1.1)}{\leq} \sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2 + 2[\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2]^{1/2}.[\sum_{i=1}^{n}(y_i - y_i)^2]^{1/2} + \sum_{i=1}^{n}(z_i - y_i)^2 \\
&= \left[\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(z_i - y_i)^2}\right]^2 \\
&= [d(x,z) + d(z,y)]^2.
\end{aligned}$$

Logo, $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$. Portanto, de $(M_1) - (M_4)$, segue-se que D é uma métrica.

■

Definição 1.4 (Métricas Equivalentes). *Duas métricas d_1 e d_2 em um espaço métrico X são **equivalentes**, quando existem constantes $a > 0$ e $b > 0$ tais que:*

$$ad_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq bd_1(x,y), \quad \forall x, y \in X;$$

Proposição 1.2. *Sejam D, D_1 e D_2 as métricas definidas no exemplo anterior. Quaisquer que sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$, tem-se*

$$D_2(x,y) \leq D(x,y) \leq D_1(x,y) \leq nD_2(x,y)$$

Demonstração: I) Primeiramente vamos mostrar que $D_2(x,y) \leq D(x,y)$, por definição temos: Primeiro suponhamos que $\max\{|x_1 - y_1| \ldots |x_i - y_i| \ldots |x_n - y_n|\} = |x_i - y_i|$. Logo,

$$\begin{aligned} D_2(x,y) &= max\{|x_1 - y_1|, ..., |x_n - y_n|\} = |x_i - y_i| = \sqrt{|x_i - y_i|^2} \\ &\leq \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2 + \ldots + |x_i - y_i|^2 + \ldots + |x_n - y_n|^2} \\ &= D(x,y). \end{aligned}$$

II) Agora mostremos que $D(x,y) \leq D_1(x,y)$.

Note que por indução sobre n, prova-se a igualdade abaixo:

$$(|x| + |y|)^2 = |x|^2 + |y|^2 + 2|x||y|$$

$$(|x| + |y| + |z|)^2 = |x|^2 + |y|^2 + |z|^2 + 2(|x||y| + |x||z| + |y||z|)$$

$$\vdots$$

$$(|x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|)^2 = |x_1|^2 + |x_2|^2 + \ldots + |x_n|^2 + 2\sum_{i \neq j} |x_i||y_i| \tag{1.2}$$

De (1.2) e do fato que $a^2 = |a|^2$, podemos escrever:

$$\begin{aligned} [D(x,y)]^2 &= (x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2 \\ &\leq (x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2 + 2\sum_{i \neq j} |x_i - y_i|.|x_i - y_i| \\ &= (|x_1 - y_1| + \ldots + |x_n - y_n|)^2 \\ &= [D_1(x,y)]^2. \end{aligned}$$

III) Por fim mostremos $D_1(x,y) \leq nD_2(x,y)$

$$\begin{aligned} D_1(x,y) &= |x_1 - y_1| + \ldots + |x_n - y_n| \\ &\leq \underbrace{\max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i| + \ldots + \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|}_{n \text{ parcelas}} \\ &= n.\max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i| \\ &= n.\max_{1 \leq i \leq n} \{|x_1 - y_1| + \ldots + |x_n - y_n|\} \\ &= n.D_2(x,y). \end{aligned}$$

Portanto, as métricas D_1, D_2 e D_3 são equivalentes.

$\blacksquare$

Definição 1.5 (**Espaços Vetorias Normados**). *Dizemos que um conjunto* $E \neq \varnothing$*, munido de duas operações, uma "soma" e uma "multiplicação por escalar".*

$$\begin{aligned} + \;:\; & E \times E \longrightarrow E \\ & (u, v) \longmapsto u + v. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} . \;:\; & E \times E \longrightarrow E \\ & (\lambda, v) \longmapsto \lambda . v. \end{aligned}$$

é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou (*$\mathbb{K} = \mathbb{C}$*) se satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) $u + (v + w) = (u + v) + w, \forall u, v, w \in E$

(ii) $u + v = v + u, \forall u, v \in E$

(iii) *Existe* $0 \in E$ *de modo que* $0 + u = u, \forall u \in E$

(iv) $\forall v \in E$ e $\forall - v \in E$ tal que $v + (-v) = -v + v = 0$;

(v) $(\alpha.\beta)u = \alpha(\beta.u),\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *e* $\forall \in E$

(vi) $(\alpha + \beta).u = \alpha.u + \beta.u,\ \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *e* $\forall u \in E$

(vii) $\alpha(u + v) = \alpha.u + \alpha.v, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ *e* $\forall u, v \in E$

$(viii)$ $1.u = u, \forall u \in E$

Os elementos de um espaço vetorial são genericamente chamados de **vetores**. Definirmos sobre $\mathbb{R}^n$ a adição e a multiplicação por escalar do seguinte modo:

Para quaisquer $x = (x_1, ..., x_n)$ e $y = (y_1, ..., y_n)$ de $\mathbb{R}^n$ para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} & x + y = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n) \\ & \alpha.x = (\alpha.x_1, ..., \alpha.x_n) \end{aligned}$$

Obtemos, o exemplo mais importante de espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Neste espaço $0 = (0, 0, ..., 0)$ é o elemento neutro da adição e, dado $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, então $-x = (-x_1, ..., -x_n)$.

Definição 1.6 (**Norma em Espaços Vetoriais**). *Uma* ***norma*** *é uma aplicação* $\|.\|: E \longrightarrow [0, +\infty)$ *que satisfaz as propriedades:*

(n_1) $\|u\| = 0 \Longleftrightarrow u = 0$

(n_2) $\|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|,\ \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$ *e* $\forall u \in E$

(n_3) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|,\ \ \forall u, v \in E$

Um **espaço vetorial normado** real é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ dotado de uma norma. Se E é um espaço vetorial normado, então $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $d(u,v) = \|u-v\|$ é uma métrica sobre E pois:

$$d(u,v) = \|u-v\| = 0 \Longleftrightarrow u-v=0 \Longleftrightarrow u=v$$

$$d(u,v) = \|u-v\| = |(-1)|\|v-u\| = |-1|\|v-u\| = \|v-u\| = d(v,u)$$

e

$$d(u,v) = \|u-v\| = \|u-w+w-v\| \leq \|u-w\| + \|w-v\| = d(u,w)+d(w,v).$$

A métrica d assim obtida chama-se **métrica induzida** pela norma dada sobre E.

Definição 1.7 **(Normas Equivalentes).** *Duas* ***normas*** *sobre o mesmo espaço vetorial E dizem-se* ***equivalentes*** *se, e somente se, as métricas induzidas por essas normas sobre E são equivalentes.*

Se $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_1$ são as normas consideradas, d e d_1 as métricas induzidas, respectivamente, por essas normas, então a equivalência definida significa o seguinte: dada uma bola $B_d(p,\epsilon)$, com $p \in E$, existe uma bola $B_{d_1}(p,\epsilon)$ de modo que,

$$B_{d_1}(p,\epsilon) \subset B_d(p,\epsilon).$$

Proposição 1.3. *Duas normas $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_1$ sobre o mesmo espaço vetorial E são equivalentes se, e somente se, existem $a, b \in \mathbb{R}_+$ de maneira que,*

$$a\|u\| \leq \|u\|_1 \leq b\|u\|, \qquad \forall u \in E.$$

Demonstração: Ver referência [2]. ■

Definição 1.8 **(Espaços com Produto Interno).** *Se E é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, um* ***produto interno*** *em E é uma aplicação*

$$\begin{aligned} \langle .,. \rangle \quad : \quad & E \times E \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (u,v) \longrightarrow \langle u,v \rangle \end{aligned}$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

(p_1) $\langle \alpha u, v\rangle = \alpha\langle u,v\rangle,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$ *e* $\forall u,v \in E$

(p_2) $\langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle,\ \forall u,v \in E$

(p_3) $\langle u_1+u_2, v\rangle = \langle u_1,v\rangle + \langle u_2,v\rangle,\ \forall u_1,u_2,v \in E$

(p_4) $\langle u,u\rangle > 0$ sempre que $u \neq 0$.

Proposição 1.4 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz). *Seja E um espaço vetorial com produto interno, então:*

$$|\langle x,y\rangle|\leq \|x\|.\|y\|, \forall x,y\in E,$$

onde $\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}$.

Demonstração: Sejam $v=x+\lambda y$; $\lambda\in\mathbb{R}$ e $x,y\in E$. Uma vez que, $\|v\|^2\geq 0$. Ou seja,

$$\begin{aligned}
\langle v,v\rangle \geq 0 &\implies \langle x+\lambda y, x+\lambda y\rangle \geq 0\\
&\implies \langle x,x\rangle + \langle x,\lambda y\rangle + \langle \lambda y, x\rangle + \langle \lambda y,\lambda y\rangle \geq 0\\
&\implies \langle x,x\rangle + \lambda\langle x,y\rangle + \lambda\langle y,x\rangle + \lambda^2\langle y,y\rangle \geq 0\\
&\implies \|x\|^2+2\lambda\langle x,y\rangle + \lambda^2\|y\|^2\geq 0.
\end{aligned}$$

Considere o polinômio $p(\lambda)=\|y\|^2\lambda^2+2\langle x,y\rangle\lambda+\|x\|^2, \forall\lambda\in\mathbb{R}$. Logo devemos ter $\Delta\leq 0$. Assim,

$$\Delta=(2\langle x,y\rangle)^2-4\|y\|^2.\|x\|^2\leq 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
&4\langle x,y\rangle^2-4\|y\|^2.\|x\|^2\leq 0\\
&4\langle x,y\rangle^2\leq 4\|y\|^2.\|x\|^2\\
&\langle x,y\rangle^2\leq \|y\|^2.\|x\|^2\\
&|\langle x,y\rangle|\leq \|y\|.\|x\|.
\end{aligned}$$

Portanto, $|\langle x,y\rangle|\leq \|y\|.\|x\|, \quad \forall x,y\in E$.

■

Corolário 1.1 (Desigualdade Triangular). *Seja E um espaço vetorial com produto interno, então:*

$$\|x+y\|\leq \|x\|+\|y\|, \forall x,y\in E.$$

Demonstração: *Por definição, temos que:*

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle\\
&= \langle x,x\rangle+\langle x,y\rangle+\langle y,x\rangle+\langle y,y\rangle \qquad (1.3)\\
&= \|x\|^2+2\langle x,y\rangle+\|y\|^2.
\end{aligned}$$

Usando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos,

$$\langle x,y\rangle\leq|\langle x,y\rangle|\leq\|x\|\|y\|. \qquad (1.4)$$

Substituindo (1.4) *em* (1.3) *obtemos,*

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &\leq \|x\|^2+2\|x\|\|y\|+\|y\|^2\\ &= (\|x\|+\|y\|)^2.\end{aligned}$$

Ou seja, $\|x+y\|^2 \leq (\|x\|+\|y\|)^2$. *Aplicando a raiz quadrada positiva em ambos os membros obtemos,*

$$\|x+y\| \leq (\|x\|+\|y\|), \forall x, y \in E.$$

■

Definição 1.9 (**Bolas e Esferas**). *A noção de bola é fundamental no estudo dos espaços métricos. Seja p um ponto no espaço métrico M. Dado um número real $\epsilon > 0$, definimos:*

i) A **bola aberta de centro** p **e raio** ϵ, é o conjunto $B(p;\epsilon)$, dos pontos de M cuja distância ao ponto p é menor do que ϵ, ou seja,

$$B_\epsilon(p) = B(p,\epsilon) = \{x \in M \mid d(x,p) < \epsilon\}.$$

ii) A **bola fechada de centro** p **e raio** ϵ, é o conjunto $B[p;\epsilon]$, formados pelos pontos de M que estão a uma distância menor ou igual a ϵ do ponto p, ou seja

$$B_\epsilon[p] = B[p,\epsilon] = \{x \in M \mid d(x,p) \leq \epsilon\}.$$

iii) A **esfera de centro** p **e raio** ϵ, é o conjunto $S(p;\epsilon)$, formado pelos pontos $x \in M$ tais que $d(x,p) = \epsilon$. Assim,

$$S_\epsilon(p) = S(p,\epsilon) = \{x \in M \mid d(x,p) = \epsilon\}.$$

Evidentemente, $B[p,\epsilon] = B(p,\epsilon) \cup S(p,\epsilon)$, reunião disjunta. Quando a métrica d provém de uma norma no espaço vetorial E, podemos escrever:

$$B_\epsilon(p) = B(p,\epsilon) = \{x \in E; |x-p| < \epsilon\}$$

$$B_\epsilon[p] = B[p,\epsilon] = \{x \in E; |x-p| \leq \epsilon\}$$

$$S_\epsilon(p) = S(p,\epsilon) = \{x \in E; |x-p| = \epsilon\}$$

Exemplo 1.4 (**Bolas num espaço cuja métrica é a zero-um**). *Seja (M,d) um espaço discreto e consideremos $p \in M$. Há dois casos a considerar:*

- $0 < \epsilon \leq 1$. Nesse caso $B(p, \epsilon) = \{x \in M | d(x, p) < \epsilon\} = \{p\}$, porque o único ponto cuja a distância a p é menor que 1 é o próprio p.

- $1 < \epsilon$. Quando isto acontece, $B(p, \epsilon) = \{x \in M | d(x, p) < \epsilon\} = M$, porque todos os pontos de M estão a uma distância de p igual a zero ou igual a um, e portanto, menor que ϵ.

Exemplo 1.5 (Bolas na reta usual). *Na reta real a bola aberta de centro $p \in \mathbb{R}$ e raio ϵ é o conjunto*

$$B(p, \epsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - p| < \epsilon\} = \{x \in \mathbb{R} \mid p - \epsilon < X < p + \epsilon\} =]p - \epsilon, p + \epsilon[.$$

Exemplo 1.6 (Bolas no espaço $\mathbb{R}^2$). *Lembremos que, no espaço $\mathbb{R}^2$ foram já definidas três métricas, a saber: para quaisquer $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ de $\mathbb{R}^2$, tem-se*

$$D(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

$$D_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

$$D_2(x, y) = max\{|x_1 - y_1|; |x_2 - y_2|\}$$

onde $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$. As bolas $B[0; 1]$ relativamente às métricas D, D_1 e D_2 possuem respectivamente as formas da figura 2.

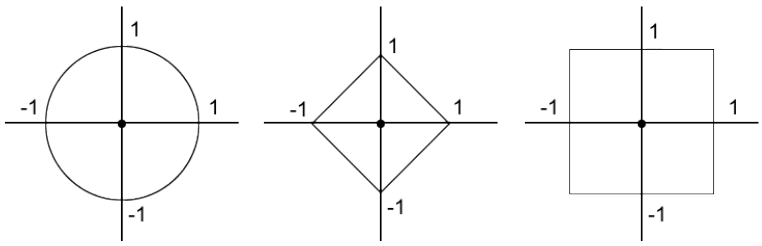

Figura 2: Representação geométrica das métricas D, D_1 e D_2.

Sendo $p = (a, b)$ um ponto fixo do $\mathbb{R}^2$, uma bola de centro p e raio $\epsilon > 0$, segundo a métrica D, é o conjunto.

$$B(p, \epsilon) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | (x - a)^2 + (y - b)^2 < \epsilon^2\}$$

cujo gráfico é um disco aberto, conforme figura mostra.

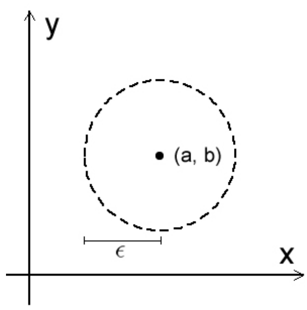

Figura 3: Circunferência de centro (a, b) e raio ϵ.

Definição 1.10 (**Conjuntos Limitados**). *Um subconjunto X de um espaço métrico M chama-se **limitado** quando existe uma constante $c > 0$ tal que,*

$$d(x, y) \leq c, \quad \forall x, y \in X.$$

*O menor desses números c será chamado o diâmetro de X. Logo podemos definir o **diâmetro** de um **conjunto limitado** $X \subset M$ como o número real,*

$$diam(X) = \sup\{d(x, y); x, y \in X\}.$$

Definição 1.11 (**Função Limitada**). *Seja X um conjunto arbitrário. Uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ chama-se **limitada** quando existe uma constante $k > 0$ tal que $|f(x)| \leq k$, para todo $x \in X$. Indicaremos por $B(X; \mathbb{R})$ o conjunto das **funções limitadas** $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, isto é*

$$B(X; \mathbb{R}) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{R};\ f \text{ é limitada}\}$$

Proposição 1.5. *Sejam $f, g \in B(X; \mathbb{R})$, então:*
$(i) f + g \in B(X; \mathbb{R})$
$(ii) f.g \in B(X; \mathbb{R})$

Demonstração: Como $f, g \in B(X; \mathbb{R})$ temos que f, g são limitadas, isto é, existem $k_1, k_2 > 0$ tais que

$$|f(x)| \leq k_1 \text{ e } |g(x)| \leq k_2, \forall x \in X.$$

(i) Mostremos que $f + g$ é limitada, ou seja, existe $k > 0$ tal que,

$$|(f + g)(x)| \leq k, \quad \forall x \in X.$$

De fato, pela desigualdade triangular, temos:

$$|(f + g)(x)| = |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \underbrace{k_1 + k_2}_{k}.$$

Considerando $k = k_1 + k_2$, temos que $|(f + g)(x)| \leq k, \forall x \in X$.
(ii) Agora mostremos que $f.g$ é limitada, ou seja, existe $k > 0$ tal que

$$|(f.g)(x)| \leq k, \forall x \in X.$$

De fato, usando o fato que $|ab|=|a||b|$ para $a, b \in \mathbb{R}$, temos:

$$|(f.g)(x)|=|f(x).g(x)|=|f(x)|.|g(x)|\leq \underbrace{k_1.k_2}_{k}$$

Considerando $k = k_1.k_2$, temos que $|(f.g)(x)|\leq k, \forall x \in X$. ■

Definição 1.12 (Métrica da convergência uniforme). *Definiremos agora uma métrica em $B(X;\mathbb{R})$ pondo, para $f, g \in B(X;\mathbb{R})$ arbitrárias*

$$d(f,g) = \sup_{x\in X}|f(x) - g(x)|.$$

*Tal métrica é chamada de "**Métrica da convergência uniforme** ou **métrica do sup**".*

Definição 1.13 (Isometrias). *Sejam M e N espaços métricos. Uma aplicação $f : M \longrightarrow N$ chama-se uma **imersão isométrica** quando $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ para quaisquer $x, y \in M$. Neste caso, diz-se que f também **preserva as distâncias**.*

Uma imersão isométrica $f : M \longrightarrow N$ é sempre injetora pois,

$$f(x) = f(y) \Longrightarrow d(x, y) = d(f(x), f(y)) = 0 \Longrightarrow x = y.$$

Uma isometria é uma imersão isométrica sobrejetiva de M sobre o subespaço $f(M) \subset N$. A composta de duas isometrias e a inversa de uma isometria são ainda isometrias. Ver [3].

Sejam X um conjunto, (M, d) um espaço métrico e $f : X \longrightarrow M$ uma aplicação injetiva. Para cada par de pontos $x, y \in X$, ponhamos:

$$d'(x, y) = d(f(x), f(y)).$$

Isto define uma métrica d' em X, chamada a **métrica induzida** por f. Ela é a única métrica em X que torna $f : X \longrightarrow M$ uma imersão isométrica. Um exemplo particular desta situação é o caso de um subconjunto $X \subset M$. A métrica que torna X um subespaço de M é induzida pela aplicação de inclusão $i : X \longrightarrow M$, tal que $i(x) = x$, para todo $x \in X$.

Um dos métodos mais frequentes de introduzir uma métrica num conjunto X é introduzi-la através de uma aplicação injetiva $f : X \longrightarrow M$, de X num espaço métrico M.

Exemplo 1.7. *Toda imersão isométrica é contínua porque, para qualquer $\epsilon > 0$, tomando $\delta = \epsilon$. temos:*

$$d(x, p) < \delta \Longrightarrow d(f(x), f(p)) = d(x, p) < \delta = \epsilon,$$

qualquer que seja $p \in M$. Observamos que uma imersão isométrica é injetora pois

$$f(x) = f(y) \Longrightarrow d(f(x), f(y)) = 0 \Longrightarrow d(x, y) = 0 \Longrightarrow x = y.$$

Em particular são contínuas as isometrias que são imersões isométricas sobrejetoras.

1.2 Sequências em Espaços Métricos

Definição 1.14 (Sequência). *Uma **sequência** num conjunto M é uma aplicação $x : \mathbb{N} \longrightarrow M$, definida no conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots, n\}$, dada por $x(n) = x_n$.*

Notações: $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou (x_n).

Definição 1.15 (Subsequência). *Uma **Subsequência** de (x_n) é uma restrição da aplicação $x : \mathbb{N} \longrightarrow M$ a um subconjunto infinito de $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots\}$ de $\mathbb{N}$.*

Notações: $(x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots)$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}'}$ ou $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$.

Definição 1.16 (Sequência limitada). *Uma sequência (x_n) no espaço métrico M chama-se **limitada** quando o conjunto dos seus termos é limitado, isto é, $x(\mathbb{N}) = \{x_n \in \mathbb{N}\}$ é um conjunto limitado.*

Observação 1.1. *Toda subsequência de uma sequência limitada é também limitada.*

Definição 1.17 (Sequência Convergente). *Seja (x_n) uma sequência num espaço métrico M. Diz-se que o ponto $a \in M$ é **limite** da sequência (x_n) quando, para todo número $\epsilon > 0$ dado arbitrariamente, pode-se obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que,*

$$n \geq n_0 \Longrightarrow d(x_n, a) < \epsilon.$$

Notações: $a = \lim x_n, \quad a = \lim_n x_n, \quad a = \lim_{n\in\mathbb{N}} x_n, \quad x_n \to a.$

Uma sequência (x_n) em um espaço métrico $X = (M, d)$ é dita **convergente** se existe um $a \in X$ tal que:

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, a) = 0.$$

Proposição 1.6. *Toda sequência convergente é limitada.*

Demonstração: Seja (x_n) uma sequência convergente, digamos que $\lim x_n = a$, ou seja dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que,

$$n > n_0 \Longrightarrow d(x_n, a) < \epsilon.$$

Assim,

$$n > n_0 \Longrightarrow x_n \in B(a, \epsilon).$$

Logo, os termos da sequência pertencem ao conjunto $\{x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}\} \cup B(a, \epsilon)$ que é limitado. Portanto, (x_n) é uma sequência limitada. ∎

1.3 Sequências de Cauchy e Espaços Métricos Completos

Definição 1.18 (**Sequência de Cauchy**)**.** *Seja (M, d) um espaço métrico. Uma sequência (x_n) de pontos de M é chamada* ***sequência de Cauchy*** *se, para todo $\epsilon > 0$, existe um índice r tal que:*

$$m, n \geq r \Longrightarrow d(x_m, x_n) < \epsilon.$$

Observação 1.2. *Toda subsequência de uma sequência de Cauchy é também uma sequência de Cauchy.*

Proposição 1.7. *Seja (x_n) uma sequência de Cauchy num espaço vetorial normado E. Então existe uma bola aberta de centro no vetor nulo que contém todos os termos da sequência.*

Demonstração: Tome $\epsilon = 1$, existe $r \in \mathbb{N}$, $r > 0$ tal que:

$$m, n \geq r \Longrightarrow d(x_m, x_n) = \|x_m - x_n\| < 1.$$

Em particular, $\|x_m - x_r\| < 1, \forall m \geq r$. Logo, pela desigualdade triangular, temos

$$\|x_m\| = \|x_m - x_r + x_r\| \leq \|x_m - x_r\| + \|x_r\|.$$

Portanto, para todo $m \geq r$ temos,

$$\|x_m\| < 1 + \|x_r\|.$$

Seja $\lambda = \max\{\|x_1\|, ..., \|x_{r-1}, \|, \|x_r\|, 1 + \|x_r\|\}$. Então, para todo índice n temos:

$$d(x_n, 0) = \|x_n\| < \lambda.$$

Onde, segue que,

$$x_n \in B(0, \lambda), \forall n \geq 1.$$

■

Definição 1.19 (**Espaço Métrico Completo**)**.** *Um espaço métrico M é chamado* ***Completo*** *se toda sequência de Cauchy desse espaço converge para um ponto de M.*

Posteriormente mostraremos alguns exemplos de espaços métricos completos.

Exemplo 1.8. *A sequência $(x_n) = \frac{1}{n}$ é de Cauchy em $\mathbb{Q}$.*

Demonstração: De fato, dado $\epsilon > 0$, pela propriedade arquimediana, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ com $n_0\epsilon > 2$, e pela desigualdade triangular, obtemos:

$$m, n > n_0 \Longrightarrow |x_m - x_n| = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| \leq \left|\frac{1}{m}\right| + \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$$

mas,

$$m > n_0 \Longrightarrow \frac{1}{m} < \frac{1}{n_0} \quad e \quad n > n_0 \Longrightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0}.$$

Logo,

$$m, n > n_0 \Longrightarrow |x_m - x_n| < \frac{1}{n_0} + \frac{1}{n_0} = \frac{2}{n_0} < \epsilon.$$

Portanto, (x_n) é uma sequência de Cauchy.

■

Proposição 1.8. *Toda sequência convergente de um espaço métrico é uma sequência de Cauchy.*

Demonstração: Seja (x_n) uma sequência tal que $\lim x_n = a$, ou seja, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que,

$$n > n_0 \Longrightarrow d(x_n, a) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Assim, pela desigualdade triangular, obtemos:

$$m, n > n_0 \Longrightarrow d(x_m, x_n) \leq d(x_m, a) + d(a, x_n) =$$

$$= d(x_m, a) + d(x_n, a) \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Portanto, (x_n) é de Cauchy. ■

Proposição 1.9. *Toda sequência de Cauchy é limitada.*

Demonstração: Seja (x_n) uma sequência de Cauchy em (X, d). Assim para $\epsilon = 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que,

$$d(x_n, x_m) < 1, \qquad \forall m, n > n_0,$$

em particular, essa desigualdade vale para $m = n_0 + 1$. Sendo $n > n_0$ temos,

$$d(x_n, x_{n_0+1}) < 1,$$

mas,

$$\forall n > n_0, \qquad d(x_n, 0) - d(x_{n_0+1}, 0) < d(x_n, x_{n_0+1}) < 1,$$

ou seja,

$$d(x_n, 0) < d(x_{n_0+1}, 0) + 1.$$

Considere,

$$k = \max\{d(x_1, 0), d(x_2, 0), \ldots, d(x_{n_0}, 0), d(x_{n_0+1}, 0) + 1\},$$

assim, $\forall n \in \mathbb{N}\ \ d(x_n, 0) \leq k$. O que resulta que (x_n) é limitada.

$\blacksquare$

Proposição 1.10 (Subsequência de sequência de Cauchy). *Seja (x_n) uma sequência de Cauchy em (X, d), (x_{n_k}) uma subsequência de (x_n). Se (x_{n_k}) é convergente, então (x_n) também converge.*

Demonstração: Seja (x_{n_k}) uma subsequência de (x_n), tal que $x_{n_k} \longrightarrow a$, com $a \in X$. Seja $\epsilon > 0$ qualquer. Como (x_n) é de Cauchy, para $\frac{\epsilon}{2}$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que,

$$d(x_n, x_m) < \frac{\epsilon}{2}, \qquad \forall m, n > n_1 \tag{1.5}$$

como $x_{n_k} \longrightarrow a$, existe $n_2 \in \mathbb{N}$, tal que

$$d(x_{n_k}, a) < \frac{\epsilon}{2}, \qquad \forall n_k > n_2. \tag{1.6}$$

Considere, $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Assim por (1.5) e (1.6), temos para todo $n > n_0$ e pela desigualdade triangular, resulta que,

$$\begin{aligned} d(x_n, a) &\leq d(x_n, x_{n_0+1}) + d(x_{n_0+1}, a) \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Desta forma, $d(x_n, a) < \epsilon, \forall n \geq n_0$. Logo $x_n \longrightarrow a$. $\blacksquare$

Exemplo 1.9. *A reta é um espaço métrico completo, ou seja toda sequência de Cauchy de números reais é convergente em $\mathbb{R}$.*

Demonstração:

Vimos que toda sequência de Cauchy é limitada (Proposição 1.9). Assim, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass[1], toda sequência limitada de números reais, possui uma subsequência convergente. Desta forma, pela (Proposição 1.10), toda sequência de Cauchy que possui subsequência convergente também é convergente. Portanto, a reta é um espaço métrico completo.

$\blacksquare$

[1]Veja o Teorema (3.4) em anexo

Exemplo 1.10. *O espaço $\mathbb{R}^n$ é completo.*

Demonstração: Ver [5]. ∎

Exemplo 1.11. *O conjunto $S = (0,1] \subset \mathbb{R}$ não é completo, pois, a sequência $\left(\frac{1}{k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em S, mas $\left(\frac{1}{k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ não converge em S.*

1.4 Funções Contínuas em Espaços Métricos

Lembramos que uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua num ponto p se, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ de maneira que:

$$|x - p| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(p)| < \epsilon.$$

Intuitivamente, estão arbitrariamente próximos de $f(p)$ os valores de f correspondentes a pontos "suficientemente" próximos de p. A definição a seguir é motivada pelo que acabamos de lembrar.

Definição 1.20 (Função Contínua). *Sejam M e N espaços métricos (cuja métricas, por comodidade, indicaremos pelo mesmo símbolo d). Uma função $f : M \longrightarrow N$ se diz **contínua** no ponto $p \in M$ se, para qualquer $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ de maneira que:*

$$d(x,p) < \delta \Longrightarrow d(f(x), f(p)) < \epsilon.$$

Dizer que f é contínua, significa que f é contínua em todos os pontos de M.

Proposição 1.11. *Uma função $f : M \longrightarrow N$ é contínua no ponto $p \in M$ se, e somente se, dada uma bola $B(f(p), \epsilon)$ existe uma bola $B(p, \delta)$ tal que*

$$f(B(p,\delta)) \subset B(f(p), \epsilon).$$

Demonstração: ($\Longrightarrow$) Note que, basta mostrar que dado um $y \in f(B(p,\delta))$ ele também pertença a $B(f(p), \epsilon)$. De fato, dado $y \in f(B(p,\delta))$, então existe um $x \in B(p,\delta)$ tal que, $f(x) = y$. Daí $d(x,p) < \delta$. Logo, pela continuidade de f temos que:

$$d(x,p) < \delta \Longrightarrow d(f(x), f(p)) < \epsilon.$$

Logo, $f(x) \in B(f(p), \epsilon)$ e portanto

$$f(B(p,\delta)) \subset B(f(p), \epsilon).$$

($\Longleftarrow$) Dado $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e $B(p, \delta)$ uma bola, de tal forma que

$$d(x, p) < \delta, \forall x \in B(p, \delta).$$

Como por hipótese $f(B(p, \delta)) \subset B(f(p, \epsilon))$ então, como $x \in B(p, \delta)$, temos

$$f(x) \in B(f(p), \epsilon) \Longrightarrow d(f(x), f(p)) < \epsilon.$$

Logo, f é contínua em p.

$\blacksquare$

Observação 1.3. *No caso particular em que $M \subset \mathbb{R}$ e $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$, dizer que f é contínua no ponto $p \in M$ significa dizer que para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $x \in M$ e $a - \delta < x < a + \delta$ implicam $f(p) - \epsilon < f(x) < f(p) + \epsilon$. Ou seja, f transforma os pontos de M que estão no intervalo aberto $(a - \delta, a + \delta)$ em pontos do intervalo abertos $(f(a) - \epsilon, f(a) + \epsilon)$.*

Definição 1.21 (Aplicação Lipschitziana). *Dada $f : M \longrightarrow N$, suponhamos que exista uma constante $c > 0$ (chamada **constante de lipschitz**), tal que*

$$d(f(x), f(y)) \leq c.d(x, y)$$

*quaisquer que sejam $x, y \in M$. Dizemos que f é uma **aplicação Lipschitziana**.*

Proposição 1.12. *Se $f : M \longrightarrow N$ é uma aplicação Lipschitziana, então f é contínua em M.*

Demonstração: De fato, dado $\epsilon > 0$, tome $\delta = \dfrac{\epsilon}{c}$ e usando o fato que f é Lipschitziana, obtemos

$$d(x, y) < \delta \Longrightarrow d(f(x), f(y)) \leq c.d(x, y) < c.\delta = c.\frac{\epsilon}{c} = \epsilon.$$

Logo, $d(f(x), f(y)) < \epsilon$, e f é contínua. $\blacksquare$

Exemplo 1.12. *A função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = senx$ é uma função lipschitziana.*

Demonstração: De fato, dados $x, y \in \mathbb{R}$, com $x < y$. Então, pelo Teorema do Valor Médio existe $c \in (x, y)$ tal que,

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x).$$

Logo,

$$|seny - senx| = |cos(c)(y - x)| = |cos(c)||y - x| \leq 1.|y - x| = |y - x|$$

Portanto, f é uma função Lipschitziana.

$\blacksquare$

Definição 1.22 (Contrações fracas). *Se $f : M \longrightarrow N$ é tal que $d(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$, quaisquer que sejam $x, y \in M$, dizemos que f é uma* ***contração fraca****.*

Vejamos agora alguns exemplos de contrações fracas:

Exemplo 1.13. *Num espaço vetorial normado E, a norma $\|.\|: E \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma contração fraca.*

Demonstração: De fato, seja $f(x) = \|x\|$, então

$$\begin{array}{rcl} d(f(x), f(y)) & = & |f(x) - f(y)| \\ & \leq & \Big| \|x\| - \|y\| \Big| \\ & \leq & \|x - y\| \\ & = & d(x, y). \end{array}$$

Logo, temos que,

$$d(f(x), f(y)) \leq d(x, y).$$

Portanto, f é uma contração fraca. ■

Exemplo 1.14. *A operação soma, $S : E \times E \longrightarrow E$; dada por $S(x, y) = x + y$, num espaço vetorial normado E é uma contração fraca, quando $\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|$.*

Demonstração: Queremos mostrar que,

$$d(S(x_1, y_1), S(x_2, y_2)) \leq d((x_1, y_1), (x_2, y_2)), \qquad \forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in E \times E$$

De fato, usando a definição de S e a desigualdade triangular temos,

$$\begin{aligned} d(S(x_1, y_1), S(x_2, y_2)) &= \Big\| S(x_1, y_1) - S(x_2, y_2) \Big\| \\ &= \Big\| x_1 + y_1 - (x_2 + y_2) \Big\| \\ &= \Big\| x_1 - x_2 + y_1 - y_2 \Big\| \\ &\leq \Big\| x_1 - x_2 \Big\| + \Big\| y_1 - y_2 \Big\| \\ &= d((x_1, y_1), (x_2, y_2)). \end{aligned}$$

Portanto,

$$d(S(x_1, y_1), S(x_2, y_2)) \leq d((x_1, y_1), (x_2, y_2)).$$

O que mostra que f é uma contração fraca.

■

Capítulo 2

O Teorema do Ponto Fixo de Banach

Neste capítulo iremos enunciar e demonstrar o Teorema do Ponto Fixo de Banach. Um dos motivos de sua importância está no fato de fornecer um método iterativo e eficiente para encontrar pontos fixos.

2.1 Ponto Fixo e Contração

Definição 2.1 (**Contração**). *Sejam X e Y espaços métricos, e indicaremos por d sua distância. Dizemos que uma aplicação $T : X \longrightarrow Y$ é uma* ***contração*** *se existe uma constante real c, com $0 \leq c < 1$, tal que, para quaisquer $x_1, x_2 \in X$, temos*

$$d(Tx_1, Tx_2) \leq cd(x_1, x_2).$$

Dizemos que c é uma constante de contração de T. Mostra-se que, uma contração é uma aplicação uniformemente contínua. Quando $Y = X$, dizemos que T é uma **contração** de X.

Notação: Para $T : X \longrightarrow X, n \in \mathbb{N}, T^n$ denotará a **n-ésima composição** de T, isto é, $T^2 = T \circ T, T^n = T \circ T^{n-1}$.

Definição 2.2 (**Ponto Fixo**). *Um* ***Ponto fixo*** *de uma aplicação $T : X \longrightarrow X$ é um ponto $\bar{x} \in X$ tal que,*

$$T\bar{x} = \bar{x}.$$

Exemplo 2.1 (**Ponto Fixo**). *Considere as funções $T : I\!R \longrightarrow I\!R$, definidas por:*

1) $T\bar{x} = \bar{x}^3$. Note que T tem { -1, 0, 1 } como ponto fixos.

2) $T\bar{x} = \bar{x}$. Observe que T possui infinitos pontos fixos.

3) $T\bar{x} = \dfrac{\bar{x}}{2} - \dfrac{1}{\bar{x}}, x \neq 0$ Note que T não possui ponto fixo.

De fato, pois se existisse teríamos:

$$\begin{aligned}
T\bar{x} = \frac{\bar{x}}{2} - \frac{1}{\bar{x}} = \bar{x} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{\bar{x}^2 - 2}{2\bar{x}} = \frac{2\bar{x}^2}{2\bar{x}} \\
&\Leftrightarrow \quad \bar{x}^2 - 2 = 2\bar{x}^2 \\
&\Leftrightarrow \quad \bar{x}^2 + 2 = 0
\end{aligned}$$

Portanto, essa função nunca será igual a zero, logo não possui Ponto Fixo.

2.2 O Teorema do Ponto Fixo de Banach

Teorema 2.1 (**Teorema do Ponto Fixo de Banach**). *Sejam X um espaço métrico completo e $T : X \longrightarrow X$ uma contração. Então:*

i) Existe um e só um $\bar{x} \in X$ tal que $T\bar{x} = \bar{x}$;

ii) Qualquer que seja $x_1 \in X$, a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde $x_{n+1} = T^n x_1$, converge para $\bar{x}$.

iii) Para todo n, temos

$$d(x_n, \bar{x}) \leq c^{n-1}\frac{d(x_1, x_2)}{1 - c},$$

onde c é uma constante de contração de T e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é a sequência definida em ii).

Demonstração: *i)* **Existência:** Seja $x_1 \in X$ qualquer e $x_{n+1} = Tx_n, n \in \{1, 2, \ldots\}$. Vamos demonstrar que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy.
Para $n > 1$, temos:

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(Tx_{n-1}, Tx_n) \leq c.d(x_{n-1}, x_n),$$

usando indução sobre n, vem que:

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq c^{n-1}.d(x_1, x_2), \tag{2.1}$$

de fato, para $n = 2$ temos:

$$d(x_2, x_3) = d(Tx_1, Tx_2) \leq c.d(x_1, x_2),$$

suponha verdade para $n = k$, então:

$$d(x_k, x_{k+1}) \leq c^{k-1}.d(x_1, x_2). \tag{2.2}$$

mostraremos que vale para $n = k + 1$. Logo,

$$\begin{aligned} d(x_{k+1}, x_{k+2}) &= d(Tx_k, Tx_{k+1}) \\ &\leq c.\underbrace{d(x_k, x_{k+1})}_{(2.2)} \\ &\leq c.c^{k-1}.d(x_1, x_2) \\ &= c^k.d(x_1, x_2) \end{aligned}$$

Portanto, por indução o resultado vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

Então, para $1 \leq n < m$, pela desigualdade triangular, temos:

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + \ldots + d(x_{m-1}, x_m) \\ &\leq c^{n-1}.d(x_1, x_2) + \ldots + c^{m-2}.d(x_1, x_2) \\ &= c^{n-1}.d(x_1, x_2).[1 + c + c^2 + \ldots + c^{m-n-1}]. \end{aligned}$$

Seja $p = m - n$, daí, rescrevendo a desigualdade temos:

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) = &c^{n-1}d(x_1, x_2)[1 + c + c^2 + \ldots + c^{p-1}] \\ &\leq c^{n-1}d(x_1, x_2)\sum_{p=1}^{\infty} c^{p-1}. \end{aligned}$$

Nota-se que a série $\sum\limits_{p=1}^{\infty} c^{p-1}$ trata-se de uma série geométrica onde a mesma converge para sua soma que é dada por $S = \dfrac{a}{1-r}$, onde neste caso converge para $\dfrac{1}{1-c}$. Logo obtemos,

$$d(x_n, x_m) = c^{n-1}d(x_1, x_2)\frac{1}{1-c}.$$

Logo,

$$d(x_n, x_m) \leq c^{n-1}\frac{d(x_1, x_2)}{1-c}.$$

Como $c^n \to 0$, pois $0 \leq c < 1$, segue que (x_n) é uma sequência de Cauchy. Sendo X completo, existe $\bar{x} \in X$ tal que,

$$x_n \to \bar{x}. \tag{2.3}$$

Vamos provar que $T\bar{x} = \bar{x}$. Para todo inteiro positivo n, temos:

$$d(T\bar{x}, x_{n+1}) = d(T\bar{x}, Tx_n) \leq c.d(\bar{x}, x_n),$$

e como, $d(\bar{x}, x_n) \to 0$, segue que

$$x_n \to T\bar{x}. \tag{2.4}$$

Por (2.3) e (2.4) e pela unicidade de limite, obtemos

$$T\bar{x} = \bar{x}.$$

Unicidade: Sejam $\bar{x}, \bar{y} \in X, \bar{x} \neq \bar{y}$, com $T\bar{x} = \bar{x}$ e $T\bar{y} = \bar{y}$. Então,

$$0 < d(\bar{x}, \bar{y}) = d(T\bar{x}, T\bar{y}) \leq c.d(\bar{x}, \bar{y})\cdot$$

Daí, obtemos:

$$(1 - c).d(\bar{x}, \bar{y}) \leq 0.$$

Como $0 \leq c < 1$ temos que $d(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ o que implica $\bar{x} = \bar{y}$, mostrando a unicidade do ponto fixo.

ii) Devemos mostrar que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definida por,

$$x_{n+1} = T^n x_1 \tag{2.5}$$

converge para $\bar{x}$. De fato, podemos observar que a sequência definida em acima é da forma $x_{n+1} = Tx_n$, pois:

$$x_2 = Tx_1$$

$$x_3 = Tx_2$$

$$\vdots$$

$$x_n = Tx_{n-1}$$

$$x_{n+1} = Tx_n.$$

Por outro lado a sequência $x_{n+1} = T^n x_1$ é da forma, $x_{n+1} = Tx_n$, pois:

$$x_2 = Tx_1$$

$$x_3 = T^2 x_1 = T(Tx_1) = Tx_2$$

$$x_4 = T^3 x_1 = T(T^2 x_1) = Tx_3$$

$$\vdots$$

$$x_n = T^{n-1} x_1 = Tx_{n-1}$$

$$x_{n+1} = T^n x_1 = T(T^{n-1} x_1) = Tx_n.$$

Ou seja, a partir disso percebemos que as sequências definidas em acima são iguais. Logo, podemos mostrar por indução que:

$$x_{n+1} = T^n x_1 = Tx_n\cdot \tag{2.6}$$

De fato, para $n = 1$ temos,

$$x_2 = Tx_1 = Tx_1\cdot$$

Suponha que o resultado seja verdadeiro para $n = k$, insto é,

$$x_{k+1} = T^k x_1 = T x_k,$$

e mostremos sua validade para $n = k + 1$. Temos,

$$x_{k+2} = T(x_{k+1}) = T(T^k x_1) = T(T x_k) = T x_{k+1}\cdot$$

Portanto, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, é da forma

$$x_{n+1} = T x_n = T^n x_1, \qquad \forall n \in \mathbb{N}\cdot$$

Logo, pela unicidade de limite ambas as sequências convergem para um único ponto, e como foi mostrado em (i) que (x_n) converge para $\bar{x}$, que é o ponto fixo, vem que $x_{n+1} = T^n x_1$ converge também para o ponto fixo $\bar{x}$.

$iii)$ Observamos que de (i) para $1 \leq n < m$, resulta que,

$$d(x_n, x_m) \leq c^{n-1}\frac{d(x_1, x_2)}{1-c}\cdot \tag{2.7}$$

Portanto, segue pela desigualdade triangular e por (2.7) que,

$$\begin{aligned} d(x_n, \bar{x}) &\leq d(x_n, x_m) + d(x_m, \bar{x}) \\ &\leq c^{n-1}\frac{d(x_1, x_2)}{1-c} + d(x_m, \bar{x})\cdot \end{aligned} \tag{2.8}$$

Como $d(x_m, \bar{x}) \to 0$, passando o limite em m quando $m \longrightarrow \infty$, obtemos:

$$d(x_n, \bar{x}) \leq c^{n-1}\frac{d(x_1, x_2)}{1-c},$$

o que prova a afirmação (iii).

■

Lema 2.1 (Ponto Fixo). *Seja $T : X \longrightarrow X$ uma função num espaço métrico completo (X, d), e suponha que T^m (m inteiro positivo) é uma contração para algum m. Então, T possui um único Ponto Fixo.*

Demonstração: Por hipótese, $B = T^m$ é uma contração em X. Daí pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, B possui um único ponto fixo $\bar{x}$ tal que, $B\bar{x} = \bar{x}$. Desta forma $B^m\bar{x} = \bar{x}$. Isto resulta pela sequência iterativa que, para qualquer $x \in X$,

$$B^n x \longrightarrow \bar{x}, \qquad n \longrightarrow \infty\cdot$$

Em particular, $\bar{x} = T\bar{x}$, visto que $B^n = T^{nm}$. Logo, temos:

$$\bar{x} = \lim_{n \longrightarrow \infty} B^n T\bar{x} = \lim_{n \longrightarrow \infty} TB^n\bar{x} = \lim_{n \longrightarrow \infty} T\bar{x} = T\bar{x}\cdot$$

Isto mostra que $\bar{x}$ é um ponto fixo de T, e este é único, pois $\bar{x}$ também é ponto fixo de T^m que, por sua vez é uma contração. ■

Capítulo 3

Aplicações do Teorema do Ponto Fixo de Banach

Neste Capítulo aplicaremos o Teorema do Ponto Fixo de Banach em Equações Diferenciais e Equações Integrais.

3.1 Aplicações em Equações Diferenciais

Sejam Ω um subconjunto aberto do espaço $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, onde $\mathbb{R}$ é a reta real e $\mathbb{R}^n$ um espaço euclidiano n-dimensional. Um ponto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ será denotado por $(t, x), t \in \mathbb{R}$ e $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ em $\mathbb{R}^n$, salvo menção em contrário, adotaremos em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ a norma: $|(t, x)|= \max\{|t|, |x|\}$, onde $|x|$ denota uma norma em E, por exemplo $|x|= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$ ou $|x|= \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$ ou ainda $|x|= |x_1|+ \ldots + |x_n|$.

Seja $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua e seja I um intervalo não degenerado na reta, isto é, um subconjunto conexo de $\mathbb{R}$ não reduzido a um ponto. O intervalo I pode ser fechado, aberto, semiaberto, limitado ou não.

Definição 3.1. *Uma função diferenciável $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ chama-se solução da equação*

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \tag{3.1}$$

no intervalo I se:

(i) o gráfico de φ em I, isto é, $\{(t, \varphi(t)); t \in I\}$ está contido em Ω e

(ii) $\dfrac{d\varphi}{dt}(t) = f(t, \varphi(t))$ para todo $t \in I$. Se t é um ponto extremo do intervalo, a derivada

é a derivada lateral respectiva.

A equação (3.1) chama-se **equação diferencial ordinária de primeira ordem** e é denotada abreviadamente por

$$x' = f(t, x)$$

Sejam $f_i : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n$ as componentes de $f; \varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ com $\varphi_i : I \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma solução de (3.1) se, e somente se, cada φ_i é diferenciável em I, $(t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)) \in \Omega$ para todo $t \in I$ e

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi_1}{dt}(t) = f_1(t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)) \\ \dfrac{d\varphi_2}{dt}(t) = f_2(t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)) \\ \vdots \\ \dfrac{d\varphi_n}{dt}(t) = f_n(t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)) \end{cases} \tag{3.2}$$

para todo $t \in I$.

Por esta rezão diz-se que a equação diferencial "vetorial"(3.1) é equivalente ao sistema de equações diferenciais escalares

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \ldots, x_n), i = 1, \ldots, n. \tag{3.3}$$

Definição 3.2 (**O problema de Cauchy**). *Consideremos inicialmente dois exemplos.*

(1) $\Omega = I \times \mathbb{R}, f(t, x) = g(t)$, onde g é uma função contínua no intervalo $I; \varphi$ é uma solução de $x' = g(t)$ em I se, e somente se,

$$\varphi(t) = c + \int_{t_0}^{t} g(s) ds$$

onde $t_0 \in I$ e c é uma constante.

(2) $\Omega = \mathbb{R}^2, f(t, x) = 3x^{\frac{2}{3}}$. Para todo $c \in \mathbb{R}$ a função $\varphi_c : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi_c(t) = \begin{cases} (t - c)^3, & t \geq c \\ 0, & t \leq c \end{cases}$$

é uma solução da equação $x' = 3x^{\frac{2}{3}}$ em $I = \mathbb{R}$, como se vê por verificação direta das condições (i) e (ii) da definição (3.1).

Mais a função constante $\varphi = 0$ também é solução desta equação. (ver imagem 3). Estes exemplos ilustram o fato de que as equações diferenciais possuem em geral uma infinidade de soluções. Porém, no exemplo (1), por cada ponto de Ω passa uma única solução, isto é, dado um ponto $(t_0, x_0) \in \Omega$ existe uma única solução φ tal que $\varphi(t_0) = x_0$.

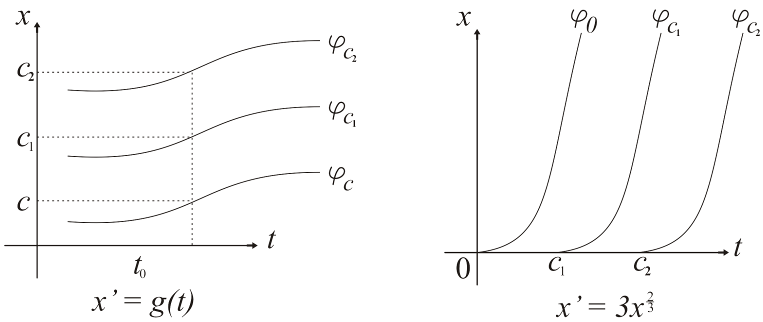

Figura 4: Exemplo (1) à esquerda e (2) à direita.

O mesmo não acontece no exemplo (2), neste caso para cada ponto da forma $(t_0, 0)$ existe uma infinidade de soluções passando por ele. Sob hipóteses bem gerais sobre f por exemplo se, f e $\frac{\partial f}{\partial x}$ são contínuas em Ω existe uma, e só uma, solução de (3.1) num intervalo que contém T_0 e tal que $\varphi(t_0) = x_0$. Uma tal φ será chamada de **solução do problema com dados iniciais** (t_0, x_0) para a equação (3.1). Este problema é também conhecido como **problema de Cauchy** e será denotado abreviadamente por

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{3.4}$$

Observação 3.1. *A equação* (3.4) *é equivalente à equação integral*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds. \tag{3.5}$$

Isto é, se $t_0 \in I$, uma função contínua $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ cujo gráfico está contido em Ω é solução de (3.5) *se, e somente se, é solução de* (3.4)*. Isto decorre do Teorema Fundamental do Cálculo.*

A equação (3.1) (ou (3.4)) admite a seguinte interpretação geométrica, ilustrada na figura 4.

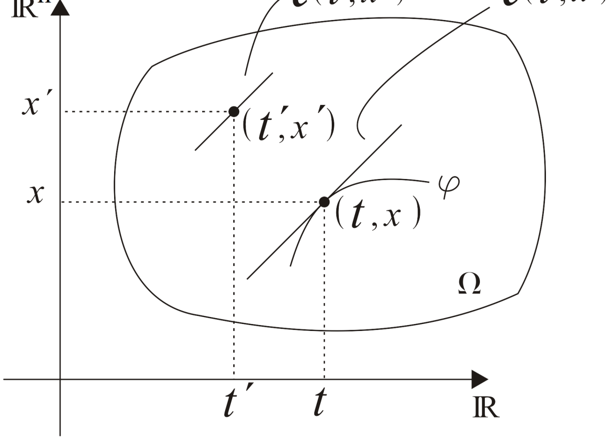

Figura 5: Interpretação geométrica.

Definição 3.3 (**Aplicação Lipschitziana com relação à segunda variável**). *Uma aplicação* $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, *chama-se* ***Lipschitziana em*** Ω ***relativamente à segunda variável*** *ou, simplesmente,* ***Lipschitziana****, se existe uma constante* k *tal que,*

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq k|x - y|$$

para todos $(t,x),(t,y) \in \Omega$. *Uma constante* k *nestas condições chama-se de* ***constante de Lipschitz de*** f.

Lema 3.1 (**Contração**). *Se* T *é uma contração, então* $T^n (n \in \mathbb{N})$ *também é uma contração.*

Demonstração: Usaremos a indução sobre n. para $n = 1$ não há o que mostrar. Suponhamos que a afirmação seja verdadeira para n_0, ou seja,

$$d(T^{n_0}x, T^{n_0}y) \leq \alpha d(x,y), \quad \text{para} \;\; 0 < \alpha < 1.$$

Mostremos que a desigualdade vale para $n_0 + 1$.

$$d(T^{n_0+1}x, T^{n_0+1}y) \leq \alpha d(x,y), \quad \text{para} \;\; 0 < \alpha < 1.$$

De fato,

$$\begin{aligned} d(T^{n_0+1}x, T^{n_0+1}y) &= d(T^{n_0}(Tx), T^{n_0}(Ty)) \\ &\leq \alpha d(Tx, Ty) \\ &\leq k_1 \alpha d(x,y), \quad \text{onde} \;\; 0 < k_1 < 1. \end{aligned}$$

Portanto,

$$d(T^{n_0+1}x, T^{n_0+1}y) \leq k d(x,y), \quad \text{onde} \;\; 0 < k < 1 \;\; e \;\; k = k_1 \alpha.$$

■

Teorema 3.1 (**Teorema de Picard**). *Seja* f *uma função contínua e Lipschitziana com relação a segunda variável em* $\Omega = I_a \times B_b$, *onde* $I_a = \{t \in \mathbb{R}; |t - t_0| \leq a\}$, $B_b = \{x \in \mathbb{R}^n; |x - x_0| \leq b\}$. *Se* $|f(t,x)| \leq M$ *em* Ω, *então existe uma única solução do problema de Cauchy,*

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

em I_α, *onde* $\alpha = \min\left\{a, \dfrac{b}{M}\right\}$.

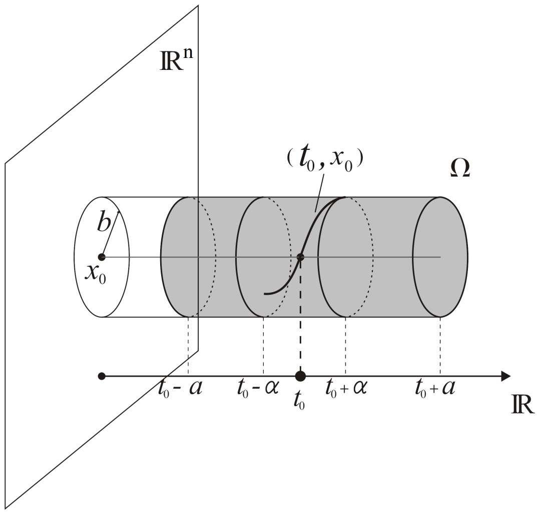

Figura 6: Teorema de Picard.

Demonstração: Seja $X = C^0(I_\alpha, B_b)$ o espaço métrico completo das funções contínuas $\varphi : I_\alpha \longrightarrow B_b$, com a métrica uniforme,

$$d(\varphi_1, \varphi_2) = \sup_{t \in I_\alpha} |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| \cdot$$

Para $\varphi \in X$, seja $F(\varphi) : I_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definida por

$$F(\varphi)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds, \qquad t \in I_\alpha \cdot$$

Assim, a correspondência $\varphi \mapsto F(\varphi)$ define uma função F com as seguintes propriedades:

1)$F(X) \subset X$;

2)F^n é uma contração, para n suficientemente grande.

Ou seja, $F : X \longrightarrow X$ é uma função tal que F^n é uma contração.

De fato, para todo $t \in I_\alpha$, usando a propriedade de integral (3.2) e o fato que $|f(t,x)| \leq M$, obtemos:

$$\begin{aligned}
|F(\varphi)(t) - x_0| &= \left| x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds - x_0 \right| \\
&= \left| \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds \right| \leq \int_{t_0}^{t} |f(s, \varphi(s))| ds \\
&= \int_{t_0}^{t} M ds = M.|t - t_0| \leq M.\alpha \leq b \cdot
\end{aligned}$$

Portanto, como

$$|F(\varphi)(t) - x_0| \leq b \Longrightarrow F(\varphi)(t) \in B[x_0, b] = B_b \cdot$$

Como $f(\varphi)(t) \in B[x_0, b]$ e $f(\varphi)$ é contínua, resulta que,

$$F(\varphi)(t) \subset X.$$

Quanto a 2) para todo par $(\varphi_1, \varphi_2) \in X$ e todo $n \geq 0$,

$$\Big|F^n(\varphi_1)(t) - F^n(\varphi_2)(t)\Big| \leq \frac{K^n.|t-t_0|^n}{n!} d(\varphi_1, \varphi_2), \qquad t \in I_\alpha, \tag{3.6}$$

onde K é a constante de Lipschitz de f. Vamos agora provar a desigualdade (3.6) por indução em n. Para $n = 1$, a desigualdade (3.6) é válida, pois.

$$\begin{aligned}
\Big|F^1(\varphi_1)(t) - F^1(\varphi_2)(t)\Big| &= \Big|F(\varphi_1)(t) - F(\varphi_2)(t)\Big| \\
&= \Big|x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi_1(s))ds - x_0 - \int_{t_0}^t f(s, \varphi_2(s))ds\Big| \\
&= \Big|\int_{t_0}^t f(s, \varphi_1(s))ds - \int_{t_0}^t f(s, \varphi_2(s))ds\Big| \\
&\leq \Big|\int_{t_0}^t \big|f(s, \varphi_1(s)) - f(s, \varphi_2(s))\big|ds\Big| \\
&\leq \Big|\int_{t_0}^t k\big|\varphi_1(s) - \varphi_2(s)\big|ds\Big| \\
&= kd(\varphi_1, \varphi_2). \int_{t_0}^t ds = k|t-t_0|d(\varphi_1, \varphi_2)\cdot
\end{aligned}$$

Suponha verdade para $n = m_0$. Logo

$$\Big|F^{m_0}(\varphi_1)(t) - F^{m_0}(\varphi_2)(t)\Big| \leq \frac{K^{m_0}.|t-t_0|^{m_0}}{m_0!} d(\varphi_1, \varphi_2)\cdot$$

Por fim mostremos que a desigualdade vale para $n = m_0 + 1$. De fato,

$$\begin{aligned}
\Big|F^{m_0+1}(\varphi_1)(t) - F^{m_0+1}(\varphi_2)(t)\Big| &= \Big|F(F^{m_0}(\varphi_1)(t) - F(F^{m_0}(\varphi_2)(t))\Big| \\
&= \left|x_0 + \int_{t_0}^t f(s, F^{m_0}(\varphi_1)(s))ds - x_0 - \int_{t_0}^t f(s, F^{m_0}(\varphi_2)(s))ds\right| \\
&= \left|\int_{t_0}^t f(s, F^{m_0}(\varphi_1)(s))ds - \int_{t_0}^t f(s, F^{m_0}(\varphi_2)(s))ds\right| \\
&= \left|\int_{t_0}^t [f(s, F^{m_0}(\varphi_1)(s)) - f(s, F^{m_0}(\varphi_2)(s))]\, ds\right|.
\end{aligned}$$

Assim, usando a definição (3.2) e o fato de f ser Lipschitziana com relação à segunda variável temos que,

$$\begin{aligned}
\left|\int_{t_0}^t [f(s, F^{m_0}(\varphi_1)(s)) - f(s, F^{m_0}(\varphi_2)(s))]\, ds\right| &\leq \left|\int_{t_0}^t \Big|f(s, F^{m_0}(\varphi_1)(s)) - f(s, F^{m_0}(\varphi_2)(s))\Big|ds\right| \\
&\leq \left|\int_{t_0}^t K\Big|F^{m_0}(\varphi_1)(s) - F^{m_0}(\varphi_2)(s)\Big|ds\right| \\
&\leq K\left|\int_{t_0}^t \frac{K^{m_0}.|s-t_0|^{m_0}}{m_0!} d(\varphi_1, \varphi_2)ds\right| \\
&= K.K^{m_0}.\frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{m_0!}.\left|\int_{t_0}^t |s-t_0|^{m_0}ds\right|.
\end{aligned}$$

Resolvendo essa integral pelo método de substituição, temos

$$\int_{t_0}^{t}(s-t_0)^{m_0}ds$$

Seja $u=(s-t_0), du=ds$, Logo

$$\int_{t_0}^{t}u^{m_0}ds=\frac{u^{m_0+1}}{m_0+1}\Bigg|_{t_0=s}^{t=s}=\frac{(t-t_0)^{m_0+1}}{m_0+1}\Bigg|_{t_0}^{t}=\frac{(t-t_0)^{m_0+1}}{m_0+1}.$$

Portanto,

$$\int_{t_0}^{t}(s-t_0)^{m_0}ds=\frac{(t-t_0)^{m_0+1}}{m_0+1}. \tag{3.7}$$

Voltanto a desigualdade de indução, segue que:

$$\begin{aligned}\left|F^{m_0+1}(\varphi_1)(t)-F^{m_0+1}(\varphi_2)(t)\right| &= K.K^{m_0}.\frac{d(\varphi_1,\varphi_2)}{m_0!}.\frac{|t-t_0|^{m_0+1}}{m_0+1}\\ &= K^{m_0+1}.\frac{|t-t_0|^{m_0+1}}{(m_0+1)!}.d(\varphi_1,\varphi_2).\end{aligned}$$

O que mostra que a desigualdade vale para qualquer $n\in\mathbb{N}$ e com $t\in I_\alpha$.

$$\left|F^{m_0+1}(\varphi_1)(t)-F^{m_0+1}(\varphi_2)(t)\right|\leq K^{m_0+1}\frac{|t-t_0|^{m_0+1}}{(m_0+1)!}d(\varphi_1,\varphi_2).$$

Logo concluímos que,

$$\left|F^{n}(\varphi_1)(t)-F^{n}(\varphi_2)(t)\right|\leq K^{n}\frac{|t-t_0|^{n}}{n!}d(\varphi_1,\varphi_2).$$

Como $|t-t_0|\leq a$, temos

$$\left|F^{n}(\varphi_1)(t)-F^{n}(\varphi_2)(t)\right|\leq \frac{K^n a^n}{n!}d(\varphi_1,\varphi_2).$$

Onde para n suficientemente grande $\dfrac{K^n a^n}{n!}<1$. Pois esse é o termo geral de uma série cuja soma é e^{ka}. De fato note que $\dfrac{(ka)^n}{n!}<1$, pois a série

$$e^{ka}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ka)^n}{n!},$$

é convergente. Assim, $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\dfrac{(ka)^n}{n!}=0$. Logo existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que $\dfrac{(ka)^n}{n!}<1$, $\forall\ n\geq n_0$. Portanto, F^n é uma contração em X, logo pelo Lema da Contração (2.1), existe um único $\varphi\in X$ tal que $F(\varphi)=\varphi$. De fato, o Ponto Fixo φ é de classe C^1 e isto prova o Teorema de Picard. ■

3.2 Aplicações em Equações Integrais

Finalmente podemos considerar o Teorema do Ponto Fixo de Banach para mostrar a **existência e unicidade** para o teorema de equações integrais. A equação integral do tipo,

$$x(t) - \mu \int_a^b f(t,\xi)x(\xi)d\xi = v(t) \tag{3.8}$$

é chamada equação de **Fredholm de segunda classe**. Aqui $[a,b]$ é um intervalo dado, x é uma função em $[a,b]$ e μ é um parâmetro. O núcleo f da equação é um função real definida em $G = [a,b] \times [a,b]$ e v é uma função real definida em $[a,b]$.
Equações integráveis podem ser consideradas em vários espaços de funções. Aqui consideremos a equação (3.8) em $C([a,b])$, o espaço de todas as funções contínuas definidas no intervalo $J = [a,b]$ com a métrica d dada por:

$$d(x,y) = \max_{t \in J} |x(t) - y(t)|. \tag{3.9}$$

Teorema 3.2 (**Equação Integral de Fredholm**). *Suponha que f e v em (3.8) são contínuas em $J \times J$ e $J = [a,b]$ respectivamente, e assuma que μ satisfaz $|\mu| < \dfrac{1}{c(b-a)}$, sendo c a constante que limita a função f. Assim, a equação (3.8) possui única solução x em J. Esta função x é o limite da sequência iterativa $(x_0, x_1, \ldots)$ definida em* (2.5), *onde x_0 é qualquer função contínua em J e para $n = 0, 1, \ldots, n, \ldots$*

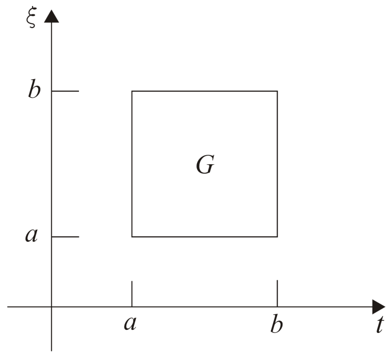

Figura 7: Domínio de definição de G do núcleo k na equação integral de Fredholm, no caso de um resultado positivo a e b.

Demonstração: Para aplicarmos o Teorema do Ponto Fixo de Banach é importante lembrar que $C([a,b])$ é completo[1]. Sejam v e f funções contínuas então f é uma função limitada em G. Logo,

$$|f(t,\xi)| \leq c, \qquad \forall (t,\xi) \in G = J \times J. \tag{3.10}$$

[1]Ver anexo (3.1)

Temos que (3.8) pode ser escrita por $x = Tx$, onde

$$Tx(t) = v(t) + \mu \int_a^b f(t,\xi)x(\xi)d\xi. \tag{3.11}$$

Visto que v e f são funções contínuas, a equação (3.11) define um operador $T : C([a,b]) \longrightarrow C([a,b])$. Mostremos que T é uma contração:

Temos que:

$$\begin{aligned}
d(Tx,Ty) &= \max_{t\in J}|Tx(t) - Ty(t)| \\
&= \max_{t\in J}\left|v(t) + \mu \int_a^b f(t,\xi)x(\xi)d\xi - v(t) - \mu \int_a^b f(t,\xi)y(\xi)d\xi\right| \\
&= \max_{t\in J}\left|\mu \int_a^b f(t,\xi)x(\xi)d\xi - \mu \int_a^b f(t,\xi)y(\xi)d\xi\right| \\
&= \max_{t\in J}\left|\mu \int_a^b \left[f(t,\xi)x(\xi) - f(t,\xi)y(\xi)\right]d\xi\right|
\end{aligned}$$

Colocando $f(t,\xi)$ em evidência, obtemos,

$$\begin{aligned}
\max_{t\in J}\left|\mu \int_a^b \left[f(t,\xi)x(\xi) - f(t,\xi)y(\xi)\right]d\xi\right| &= \max_{t\in J}\left|\mu \int_a^b f(t,\xi)\left[x(\xi) - y(\xi)\right]d\xi\right| \\
&= |\mu|\max_{t\in J}\left|\int_a^b f(t,\xi)\left[x(\xi) - y(\xi)\right]d\xi\right| \\
&\leq |\mu|\max_{t\in J}\int_a^b |f(t,\xi)||x(\xi) - y(\xi)|d\xi\cdot
\end{aligned}$$

Usando o fato de f ser limitada, temos que,

$$\begin{aligned}
d(Tx,Ty) &\leq |\mu|\max_{t\in J}\int_a^b c|x(\xi) - y(\xi)|d\xi \\
&= |\mu|\int_a^b c|x(\xi) - y(\xi)|d\xi \\
&\leq |\mu|c\int_a^b \max_{\sigma\in J}|x(\sigma) - y(\sigma)|d\xi \\
&= |\mu|c\max_{\sigma\in J}|x(\sigma) - y(\sigma)|\int_a^b d\xi \\
&= |\mu|cd(x,y)(b-a).
\end{aligned}$$

Esta desigualdade pode ser escrita na forma:

$$d(Tx,Ty) \leq \alpha d(x,y), \quad onde \quad \alpha = |\mu|c(b-a),$$

o que resulta, pela hipótese de, $|\mu| < \dfrac{1}{c(b-a)}$, que T é uma contração. Portanto pelo (T.P.F.B) a equação de Fredholm possui uma única solução. ■

Consideramos, agora a **equação integral de Volterra**.

$$x(t) - \mu \int_a^t f(t,\xi)x(\xi)d\xi = v(t), \quad tin[a,b] \tag{3.12}$$

A diferença entre (3.8) e (3.12) é que em (3.8) o limite de integração superior é uma constante, e em (3.12) é uma variável, isto é essencial. De fato, sem nenhuma restrição em μ, podemos agora seguir o teorema de existência e unicidade.

Teorema 3.3 (**Equação Integral de Volterra**). *Suponha que v em (3.12) seja contínua em $[a,b]$ e que o núcleo f seja contínua na região triangular R no plano-$t\xi$ dado por $a \leq \xi \leq t, a \leq t \leq b, t \in [a,b]$. Então, para todo μ a equação (3.12) possui única solução x em [a, b].*

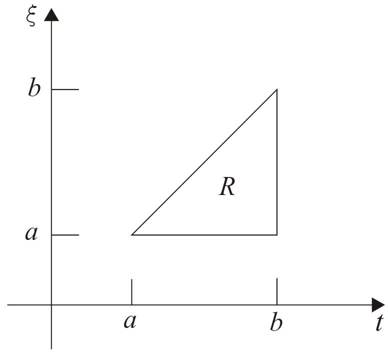

Figura 8: Região triangular R do Teorema da equação integral de Volterra, no caso positivo a e b.

Demonstração: Vejamos que (3.12) pode ser escrita como $x = Tx$ com $T : C([a,b]) \longrightarrow C([a,b])$, definida por

$$Tx(t) = v(t) + \mu \int_a^t f(t,\xi)x(\xi)d\xi \tag{3.13}$$

Visto que f é contínua em R e R é fechado e limitado logo é compacto, então f é uma função limitada em R digamos,

$$|f(t,\xi)| \leq c, \qquad \forall (t,\xi) \in R \tag{3.14}$$

Usando (3.9), obtemos para $\forall x, y \in C([a,b])$, temos

$$\begin{aligned} \Big|Tx(t) - Ty(t)\Big| &= |\mu| \left| \int_a^t f(t,\xi)[x(\xi) - y(\xi)]d\xi \right| \\ &\leq |\mu| c.d(x,y) \int_a^t d\xi \\ &= |\mu| c(t-a).d(x,y)\cdot \end{aligned}$$

Podemos ver que esta desigualdade é demonstrada de maneira análoga da Equação Integral de Fredholm. Mostremos agora por indução que,

$$\Big|T^m x(t) - T^m y(t)\Big| \leq |\mu|^m c^m \frac{(t-a)^m}{m!} d(x,y). \tag{3.15}$$

De fato, para $m = 1$ vale,

$$\Big|Tx(t) - Ty(t)\Big| \leq |\mu| c \frac{(t-a)}{1} d(x,y).$$

Suponha que vale para um certo m_0 natural, logo

$$\Big|T^{m_0}x(t) - T^{m_0}y(t)\Big| \leq |\mu|^{m_0} c^{m_0} \frac{(t-a)^{m_0}}{m_0!} d(x,y).$$

Mostremos que também vale para $m_0 + 1$. De fato, pela definição de T e pela hipótese de indução, temos

$$\begin{aligned}
\Big|T^{m_0+1}x(t) - T^{m_0+1}y(t)\Big| &= \Big|T(T^{m_0}x(t)) - T(T^{m_0}y(t))\Big| \\
&= \left|v(t) + \mu \int_a^t f(t,\xi) T^{m_0}x(\xi) d\xi - v(t) - \mu \int_a^t f(t,\xi) T^{m_0}y(\xi) d\xi\right| \\
&= \left|\mu \int_a^t f(t,\xi) T^{m_0}x(\xi) d\xi - \mu \int_a^t f(t,\xi) T^{m_0}y(\xi) d\xi\right| \\
&= |\mu| \left|\int_a^t f(t,\xi)[T^{m_0}x(\xi) - T^{m_0}y(\xi)] d\xi\right| \\
&\leq |\mu| \int_a^t |f(t,\xi)||T^{m_0}x(\xi) - T^{m_0}y(\xi)| d\xi \\
&\overset{(3.15)}{\leq} |\mu| \int_a^t c.|\mu|^{m_0} c^{m_0} \frac{(\xi-a)^{m_0}}{m_0!} d(x,y) d\xi \\
&= c^{m_0+1} |\mu|^{m_0+1} \frac{d(x,y)}{m_0!} \int_a^t (\xi - a)^{m_0} d\xi \cdot
\end{aligned}$$

Como ja foi mostrado,

$$\int_a^t (\xi - a)^{m_0} d\xi = \frac{(t-a)^{m_0+1}}{m_0 + 1}.$$

Logo, fazendo a substituição temos,

$$\begin{aligned}
\Big|T^{m_0+1}x(t) - T^{m_0+1}y(t)\Big| &\leq c^{m_0+1} |\mu|^{m_0+1} \frac{d(x,y)}{m_0!} \frac{(t-a)^{m_0+1}}{m_0+1} \\
&= |\mu|^{m_0+1} c^{m_0+1} \frac{(t-a)^{m_0+1}}{(m_0+1)!} d(x,y),
\end{aligned}$$

o que prova a desigualdade (3.15). Portanto

$$\Big|T^m x(t) - T^m y(t)\Big| \leq |\mu|^m c^m \frac{(t-a)^m}{m!} d(x,y), \qquad \forall m \in \mathbb{N}$$

como $t \in (a,b)$, temos $(t-a) \leq (b-a)$, e podemos rescrever (3.15) na forma,

$$\Big|T^m x(t) - T^m y(t)\Big| \leq |\mu|^m c^m \frac{(b-a)^m}{m!} d(x,y),$$

e considerando o máximo de $t \in J$, ficamos

$$\max_{t \in J} \Big|T^m x(t) - T^m y(t)\Big| \leq \max_{t \in J} |\mu|^m c^m \frac{(b-a)^m}{m!} d(x,y),$$

e ficamos com a expressão,

$$d(T^m x, T^m y) \leq \alpha_m d(x, y),$$

onde

$$\alpha_m = |\mu|^m c^m \frac{(b-a)^m}{m!}.$$

Para qualquer μ fixo e m suficientemente grande, temos $\alpha_m < 1$, pois o crescimento de m! é maior que o de $(|\mu| c(b-a))^m$, quando $m \longrightarrow \infty$. Desta forma T^m é uma contração em $C([a, b])$ e pelo Lema (2.1), T possui um único ponto fixo. ■

Anexo

Teorema 3.4 (**Teorema de Bolzano-Weierstrass**). *Toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência convergente.*

Demonstração: Ver [1]. ■

Proposição 3.1 (**Derivada Limitada**). *Seja $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ derivável no intervalo aberto I. Se existe $K \in \mathbb{R}$, tal que $|f'(x)| \leq k$, $\forall x \in I$, então, quaisquer que sejam $x, y \in I$, tem-se*

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

Demonstração: Ver [4]. ■

Teorema 3.5 (**Teorema do Valor Médio de Lagrange**). *Seja $f[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua. Se f é derivável em (a, b), então existe $c \in (a, b)$, tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\cdot$$

Demonstração: Ver em [1]. ■

Exemplo 3.1 (**Completeza do Espaço de Funções Contínuas**). *O espaço das funções $C([a, b])$ é completo.*

Demonstração: Ver em [3]. ■

Proposição 3.2. *Seja $f : A \subset R^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ integrável. Então, $|f(x)|$ é integrável e:*

$$\left| \int_A f(x)dx \right| \leq \int_A |f(x)|dx\cdot$$

Demonstração: Ver [5]. ■

Referências Bibliográficas

[1] CHAIM, Samuel Hoing. *Aplicações da topologia à análise*. São Paulo, Textos Universitários d0 IME - USP, 2011.

[2] DOMINGUES, Higino Hungueros. *Espaços Métricos e Introdução à Topologia*, São Paulo. Atual, 1982.

[3] LIMA, Elon Lages. *Espaços Métricos*. Rio de Janeiro: IMPA - CNPQ, Projeto Euclides, 1977.

[4] LIMA, Elon Lages. *Curso de Análise*. Volume 1. Rio de Janeiro: IMPA, Projeto Euclides, 2013.

[5] LOUREDO, Aldo Trajano. OLIVEIRA, Alexandro Marinho. LIMA, Osmundo Alves. *Cálculo Avançado*, Campina Grande: Eduepb, 2010.

[6] SOTOMAYOR, Jorge. *Equações Diferenciais Ordinárias*, São Paulo, Textos Universitários d0 IME USP 2011.

[7] KREYSZIG, Erwin. *Introductory Functional Analysis With Applications*. United States of America: Wiley Classics Library, 1978