UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

EVERTON DE SOUSA SANTOS

Ensino-Aprendizagem da Trigonometria no Ensino Médio: um olhar para os livros didáticos

CAMPINA GRANDE-PB
2014

EVERTON DE SOUSA SANTOS

Ensino-Aprendizagem da Trigonometria no Ensino Médio: um olhar para os livros didáticos

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências legais para a obtenção do título de licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Silvano de Andrade

CAMPINA GRANDE – PB

2014

S237e Santos, Everton de Sousa.
Ensino-aprendizagem da trigonometria no Ensino Médio [manuscrito] : um olhar para os livros didáticos / Everton de Sousa Santos. - 2014.
89 p. : il. color.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2014.
"Orientação: Prof. Dr. Silvanio de Andrade, Departamento de Matematica".

1. Ensino de matemática. 2. Trigonometria. 3. Livro didático. I. Título.

21. ed. CDD 372.7

Ensino-Aprendizagem da Trigonometria no Ensino Médio: um olhar para os livros didáticos

Trabalho de Conclusão de Curso aprovado em 06 de agosto 2014

Banca Examinadora:

Silvanio de Andrade

Prof.Dr. Silvanio de Andrade - UEPB
Orientador

Prof. Dr. José Lamartine da Costa Barbosa - UEPB

Maria José Neves de Amorim Moura

Prof.MSc. Maria José Neves de Amorim Moura- UEPB

Bem-aventurados os Puros de coração, porque eles verão a Deus. (MT 5, 8).

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a DEUS, por abençoar a minha vida.

Á minha família pelo apoio.

Ao meu orientador professor Dr.Silvanio de Andrade pelo seu apoio e sua paciência.

Aos meus amigos pelo incentivo.

Aos demais professores que tanto me ajudaram durante a minha formação acadêmica.

À Universidade Estadual da Paraíba (UEPB) e à coordenação do curso de Matemática.

Em qualquer tempo que eu temer, confiarei em ti.

Salmos 56:3

RESUMO

Este trabalho faz uma análise sobre a apresentação do tópico de trigonometria nos livros didáticos, visto que o livro didático é um dos principais recursos da educação escolar e que auxiliatanto osalunos como o professor. No levantamento de dados, foram analisados quatro livros didáticos de Matemática do ensino médio. Para fazer a análise de livros, levamos em consideração os critérios que estão sendo motivos de pesquisa, tais como: conhecimentos prévios, a metodologia adotada pelo autor, aspectos históricos, tipos de exercícios e tecnologia, pois esses critérios muitos autores de livros didáticosjá os estão adotando. Ainda foram ouvidos, por meio de um questionário de 10 perguntas, 23 alunos do oitavo período de um curso de Licenciatura Plena em Matemática na UEPB.O objetivodestequestionário é identificar quais as principais dificuldades enfrentadas pelos alunos no ensino-aprendizagem de trigonometria. Dentre os resultados e conclusões destacamos que muitas das dificuldades relacionadas com o ensino-aprendizagem da trigonometria advêm do fato de que muitos professores não procuram trabalhar outras metodologias em suas aulas e é preocupante o fato de que até mesmos muitos alunos da universidade pensam dessa forma, depois de tudo que aprenderam.

Palavras-Chave: Trigonometria; Ensino-Aprendizagem; Livro Didático.

Sumário

1. Introdução

O estudo do conteúdo de trigonometria, ultimamente vem sendo muito discutido.É comum quando alguém fala de trigonometria outro dizer: que não gosta, que a trigonometria é muito difícil, entre outras coisas. Ultimamente vários pesquisadores vêm fazendo diversos trabalhos para auxiliar os professores no trabalho com novas metodologias, visto que, este conteúdo tem trazido muitas dificuldades para os alunos, tanto da educaçãobásica quanto ao ensino superior; pois muitos professores ainda utilizam o tradicional método de ensino, o qual o se baseia em aulas expositivas e uma série de exercícios.

Um dos recursos mais utilizados pelos professores e alunos da educação básica é o livro didático, pois este recurso é o mais próximo de ambos e na maioria das vezes o professor se baseia pelo livro e o aluno o segue fazendo os exercícios. Contudo,os livros didáticos que estão sendo usados hoje pelas escolas, propõem novas metodologias para auxiliar no ensino. Por isto é necessário que o professor utilize um bom livro didático que tenha as tendências atuais do ensino de matemática tais como: uma boa metodologia, aspectos histórico da matemática, tecnologia, entre outros. Assim irá proporcionar ao aluno um aprendizado agradável, dinâmico e relevante, proporcionando ao mesmo um desenvolvimento intelectual.

Em virtude do conteúdo de trigonometria ser muito difícil de ser compreendido e muitos alunos reclamar da forma como o autor aborda esse conteúdo nos livros didáticos, este trabalho, faz uma reflexão sobre os livros didáticos utilizados pelos professores e alunos do ensino médio, esobre algumas dificuldades vivenciadas pelos alunos e professores em relação ao estudo de trigonometria no ensino médio. Embora os mesmos façam uma relação das dificuldades de alunos do ensino médio e do ensino superior e tragam algumas alternativas de ensino, baseadas em pesquisas de outros autores que foram relevantes e hoje estão sendo muito utilizados nos livros didáticos.

O capítulo 2 faz uma reflexão sobre o ensino-aprendizagem da trigonometria e sua importância para a sociedade. Além disso, traz um questionário que foi aplicado a 23 alunos do curso de Licenciatura Plena em Matemática da UEPB e sua análise. Através dessa análise foi possível abordar algumas dificuldades sentidas pelos alunos e professores em relação ao ensino de trigonometria.

O capitulo 3 aborda algumas metodologias para o ensino, que ultimamente tem sido alvo de muitas pesquisas e estão fazendo uma grande diferença para o ensino.

O capítulo 4 relata os principais aspectos históricos da trigonometria, Desde seus primórdios até o tempo de Euler no século XVIII, que foi um grande matemático e muito colaborou para o ensino de trigonometria.

Por fim, o capitulo 5 traz uma análise de 4 livros didáticos do ano de 2010 que, atualmente, estão sendo adotados para o ensino nas escolas brasileiras, visto que, os livros didáticos muito influenciam no processo de ensino-aprendizagem. É importante ressaltar que nesta análise, abordamos os novos aspectostrabalhados pelos pesquisadores, tais como: se o livro traz conhecimentos prévios antes de iniciar um novo assunto ao aluno; como é trabalhada a metodologia do autor; como são abordados os exercícios e se os mesmo trazem alguma inovação; se é utilizada a história da matemática no ensino e se incentiva o uso de tecnologia.

2. Ensino-aprendizagem de trigonometria

Sabemos que a matemática sempre foi de grande importância para a sociedade. Se formos acompanhar a história da humanidade e sua evolução, podemos observar que a matemática sempre fez parte dessa história. Baseado no avanço da sociedade, a matemática faz parte de inúmeras atividades do cotidiano das pessoas. É “interessante ressaltar que uma grande parte da matemática do cotidiano pode ser aprendida em atividades práticas, sem necessariamente haver uma contribuição da escola”. Numa feira, por exemplo, alguns feirantes nunca estudaram, porém na parte da matemática financeira, a qual eles usam bastante, têm grande habilidade, e muitas vezes são mais rápidos nos cálculos do que outras pessoas que já têm uma base escolar. Outro exemplo é o de um mestre de obras, que aprende a calcular a quantidade de material preciso para a construção de uma casa, a partir de sua experiência como profissional.

Vemos que existem várias experiências de pessoas que nunca estudaram em uma escola, mas que aprenderam suas habilidades que envolvem a matemática com outras pessoas. Contudo, é fundamental para uma pessoa ter uma base escolar, pois desta forma vai estar mais preparado para lidar com diversos problemas do dia-a-dia.

> A matemática é bastante valorizada. Está presente em todos os currículos do ensino fundamental e do ensino médio, nos exames de admissão à universidade, naqueles de admissão a emprego etc. é tida como uma disciplina básica na escola e como conhecimento indispensável para a realidade de várias atividades próprias do sistema produtivo. (Soares, 2010, p. 7).

Conforme Soares (2010), se uma pessoa quer ter um progresso na sociedade é necessário que ela se esforce para aprender a matemática, pois em nossa sociedade, como em muitos países do mundo, as profissões que mais são valorizadas são aquelas que requerem que as pessoas saibam lidar com “informações escritas, decifrem símbolos gráficos, realizem cálculos, etc.”. Assim se uma pessoa não tem algum domínio dessas habilidades citadas, pode enfrentar algumas restrições em nossa sociedade.

Em dados levantados pelos diversos sistemas de ensinos, nacionais e internacionais, podemos observar que o Brasil precisa avançar no tocante ao de ensino da matemática. Em minha experiência trabalhando numa escola do estado da

Paraíba, como agente administrativo, pude observar a grande dificuldade dos alunos na disciplina de matemática e que essas dificuldades levaram a graves problemas, tais como: desinteresse do aluno pela disciplina, deixar de assistir aula, evasão escolar, entre outros, o que resulta num significativo número de reprovação.

Assim vemos o grande desafio que os professores precisam enfrentar, para solucionar esses problemas e o Brasil cresça na sua forma de ensino. No intuito de minimizar estas questões, a educação matemática, através de suas pesquisas procura meios de facilitar o ensino para que todas as pessoas possam aprender matemática, e sabemos que esses conhecimentos foram descobertos por vários estudiosos se aplicam a todos os assuntos de matemática. Entretanto, trataremos de alguns desses pensamentos apenas para o ensino da trigonometria, o qual há muito tempo vem sendo transmitido de forma inadequada para ás pessoas. O que leva ao crescimento dos problemas citados anteriormente, já que o conteúdo de trigonometria, apresentado nos livros didáticos é muito extenso e exige o conhecimento de muitas fórmulas.

A importância da trigonometria no contexto social

Ao acompanharmos as aplicações da trigonometria na sociedade, aprenderemos que a trigonometria é aplicada em diversas atividades no cotidiano, embora que muitas pessoas não percebam. Uma das amostras mais práticas seria: como calcular a altura de um prédio, deuma arvore, de um poste, e outros. Certamente as pessoas que não têm o conhecimento da trigonometria iriam usar uma escala para coisas simples ou sua própria noção de tamanho e esses cálculos seriam bem mais simples se elas tivessem a noção de trigonometria. Além disso, trigonometria é muito aplicada em várias profissões como: astronomia (onde os conhecimentos trigonométricos são bases), a mecânica, a física, e outros. Esse conhecimento de trigonometria é essencial. Enquanto estudava o ensino fundamental, o qual estudei numa escola pública não tive a oportunidade de ver a trigonometria, assim como não tive no 1° ano do ensino médio. Isso resultou numa grande dificuldade para o ensino de física, pois determinadosconteúdodo primeiro ano precisavam de uma noção de trigonometria.

2.1. Dificuldades do ensino da Trigonometria: que dizem os alunos

Atualmente, o ensino da trigonometria tem sido muito discutido, quando se aborda esse tema, tanto no nível fundamental como no médio e superior. Pois as dificuldades são imensas, tanto para o professor, quanto para os alunos. Isto pode ser dado pelo fato de que o conteúdo de trigonometria, trabalhado no Ensino Médio, émuito extenso e possui muitas fórmulas onde é utilizado o algebrismo. Outro fator que pode contribuir para este grande problema é que maioria dos professores que já estão a mais tempo trabalhando no ensino fundamental e médio se formaram na época do formalismo, e esta foi uma característica de sua época. No qual o ensino era baseado em memorização das formulas e resolução de exercícios que não são aplicados ao dia-a-dia. Esse tipo de ensino não aplica atividades e situações práticas vividas pelas pessoas. Com isso deixa o aluno ou o professor longe da realidade, o que impede o aluno de aprender os reais significados dos conceitostrigonométricos e saber aplicá-los em outros contextos.

Segundo Brito e Morey (apud oliveira 2006), na década 80 o ensino de trigonometria e geometria não fazia parte do currículo escolar do ensino de 1° grau, o qual inicializou um grande esforço por parte dos estudiosos e dos organismos oficiais de ensino, para mostrar para os docentes a importância do estudo de geometria e da trigonometria no 1° grau. Contudo, houve uma resistência por parte dos professores. O que ocasionou que o estudo desse tema continuou fora das aulas de matemática. O motivo da resistência foi pela deficiência no ensino de trigonometria e geometria predominante no tempo de sua formação no segundo grau e até mesmo na sua formação acadêmica.

> Analisando as dificuldades encontradas pelos professores podemos afirmar que tais dificuldades estão intimamente relacionadas à formação das décadas de 70 e 80 caracterizadas, entre outros aspectos, pelo descaso com a geometria e a trigonometria, pela formalização precoce de conceitos geométricos e trigonométricos- quando esses eram estudados- e pela memorização de procedimentos sem a compreensão deles (Brito; Moreyapud Oliveira, 2006, P. 20).

Tendo como objetivo conhecer essas dificuldades, experimentadas por alunos tanto do Ensino Médio quanto da universidade, resolvemos fazer uma pesquisade cunho qualitativo, por meio de um questionário de dez questões. A qual foi feita na Universidade Estadual da Paraíba, na cidade de Campina Grande, com 23 alunos do oitavo período do curso de Licenciatura Plena em Matemática.

O objetivo dessa pesquisa é avaliar como foi transmitido o conteúdo de trigonometria aos alunos da UEPB, uma vez que os alunos da Universidade Estadual da Paraíba são de diferentes regiões. Desta forma poderemos saber que metodologias foram usadas para o ensino desses alunos, suas dificuldades, suas opiniões e contribuições para o ensino da trigonometria; como os mesmos avaliam o conteúdo de trigonometria nos livros didáticos e, além disso, esta pesquisa mostra como os futuros professores ou professores atuantes na área pensam sobre o assunto. Para isto foi aplicado o seguinte questionário:

Questionário Aplicado aos alunos da UEPB

Considerando que muitos dos alunos que chegam à universidade não apresentam um conhecimento satisfatório do conteúdo de trigonometria para poderem prosseguir seus estudos com sucessos e que muito sequer parecem ter visto esse conteúdo no ensino médio. Então, decidirmos, ouvir alunos que já estavam no ensino superior. Para isso, aplicamos um questionário em torno desses pontos, cujas perguntas foram as seguintes:

1. Você estudou o conteúdo de trigonometria no ensino médio? ( ) sim ( ) Não
2. Como lhe foi ensinado tal conteúdo no ensino médio?
3. Como lhe foi ensinado tal conteúdo na universidade?
4. Você teve facilidades ou dificuldades com o aprendizado da trigonometria? Quais? E seus colegas?
5. Você teve mais dificuldades ou facilidades com a trigonometria do ensino médio ou da universidade? Qual diferença do que você estudou de trigonometria no ensino médio e na universidade?
6. Qual a importância de estudarmos o conteúdo de trigonometria?
7. Como o que você estudou sobre trigonometria pode contribuir na sua formação como professor de Matemática e na sua prática de sala de aula?
8. Como podemos colaborar para um melhor aprendizado dos alunos na trigonometria? Como auxiliá-los na superação das suas possíveis dificuldades?
9. Para você, o que seria um bom ensino de trigonometria?
10. Como você avalia o conteúdo e a forma de apresentação da trigonometria no livro didático? Justifique sua resposta.

(Anexo 1 e 2 do questionário, p.66-67)

Análise do questionário

Questão 1

Questão 1 refere-se ao conteúdo de trigonometria no ensino médio, se os participantes viram ou não.

Resposta dos participantes

Sim: 21 não: 2

Questão 2 e 3

Questão 2 e 3 refere-se a metodologia de ensino.

As resposta dadas pelos participantes às questões 2 e 3 referem-se a quantidade de conteúdo estudado, a clareza na transmissão dos conteúdos.

Com relação a quantidade de conteúdo estudado, no ensino médio os participantes afirmam terem estudado o básico do básico, dando a entender a trigonometria do triângulo retângulo, a tabela trigonométrica e uma breve introdução as funções seno, cosseno e tangente. Em alguns poucos casos, foi-se um pouco além, como as demais funções trigonométricas, identidades trigonométricas, etc. Em outros casos, não estudaram absolutamente nada.

Embora, os participantes, na grande maioria, afirmam terem estudado o básico do básico, quando observamos os PCNs do ensino médio esse básico está de acordo com o que é proposto pelos PCNs. Entretanto, na proposta dos PCN, há uma preocupação com a aplicação da trigonometria ao cotidiano e uma valorização de conceitos e ideias em vez de apenas fórmulas, definições e exercícios. Já, os livros do ensino médio, de modo geral trazem o conteúdo de trigonometria de uma forma mais aprofundada, trabalhando tópicos como transformações trigonométricas, as funções secante, cossecante e cotangente, equações trigonométricas, etc.

> Alguns tópicos usualmente presentes no estudo da trigonometria podem ser dispensados, como, por exemplo, as outras três razoes trigonométricas, as formulas para sen(a+b) e cos(a+b), que tanto exigem dos alunos para serem memorizadas. (Brasil, 2006, P. 74).

Em relação ao modo de transmissão-assimilação do conteúdo, observa-se que tanto no ensino médio quanto na universidade foi apenas do tipo aula expositiva, em que o professor explicava os conceitos e definições, passava exemplos e em seguida uma lista de exercícios do conteúdo ensinado. Diferente da abordagem propostas pelos PCN que coloco foco em situações-problemas com desencadeadoras do conteúdo a ser ensinado.

Resposta dos participantes

Participante	Ensino médio (questão 2)	Universidade (questão 03)
Q01	Vi o básico do básico	Com muita clareza
Q 02	O básico da trigonometria	Foi bem melhor de uma forma clara e objetiva
Q 03	Foi visto apena s a tabela do seno, cosseno e tangente e seus respectivos valores	Teve um pouco de dificuldade devido não ter visto direito no ensino médio. Como o professor ensinou bem detalhado foi bom
Q 04	Através de aulas expositivas e material didático	Através de aulas expositivas
Q 05	Foi mal ensinado	Foi bem ensinado
Q 06	Não viu	Aulas expositivas
Q 07	Não viu	De maneira clara, com demonstração de teoremas
Q 08	De maneira superficial, trazendo só conhecimentos básicos	Foi trabalhado de forma minuciosa
Q 09	Rápido e de modo incompleto	Foi ensinado muito bem. Tive um pouco de dificuldade por não ter visto uma base boa no ensino médio
Q 10	Foi bom, o professor explicou os conteúdos bem detalhadamente.	Foi ensinado em um nível mais avançado
Q 11	Aulas expositivas	De uma maneira muito boa
Q 12	Na forma tradicional, utilizando como base o triangulo retângulo	De uma forma mais ampla
Q 13	Tive um bom aprendizado de trigonometria, pois o professor buscou expor o conteúdo com a mais clareza possível	Foi ensinado com tanta clareza
Q 14	De uma maneira vaga, pois professor não passava o conteúdo da maneira ideal	Foi passado de uma maneira mais aprofundada
Q 15	Foi ministrado incompleto e prologado, devido à dificuldade apresentada pela maioria da turma	De forma mais aprofundada e completa
Q 16	De uma forma deficiente	De uma forma deficiente, porque alguns conteúdos não vi no ensino médio
Q 17	Aprendizado falho	A didática da aula não foi boa
Q 18	De uma forma rápida em pouco tempo. De forma expositiva	De forma mais detalhada e avançada
Q 19	Foi um bom ensino, mas não foi passado o conteúdo completo	Um bom ensino
Q 20	Foi apresentado as primeiras noções d seno, cosseno e tangente, com a utilização de triângulos retângulos	De maneira direta, pois já deveríamos ter uma boa base nesse conteúdo
Q 21	Foi trabalhado de forma bastante básica e de forma incompleta	Foi trabalhado de maneira mais aplicada
Q 22	O conteúdo foi explicado com eficiência	Semelhante ao ensino médio, porem de uma forma precária, poderia ter aprofundado e elevado o nível dos alunos

Q 23	Q.23 foi ensinado de forma incompleta, de acordo com a grade curricular, no entanto o que foi ensinado foi bem passado	Foi passado também de forma incompleta, no entanto foi acordo de maneira clara

Tabela1. Referente as respostas das questões 2 e 3 do questionário.

Questão 4

A questão 4 refere-se ao aprendizado de trigonometria na universidade e as dificuldades ou facilidades sentidas pelos alunos.

Dos 23 participantes 14 disseram que tiveram dificuldades, isto devido há alguns fatores, tais como: não ter visto no ensino médio, a metodologia usada pelo professor, nas demonstrações, o conteúdo de trigonometria ser amplo. Alguns especificaram o assunto que tiveram dificuldades, tais como: na apresentação da tangente, secante cossecante, ângulos ou até em boa parte do conteúdo.

Dos 23 participantes 9 disseram que tiveram facilidade. Um especificou que teve facilidade por ter tido bons professores no ensino médio.

Resposta dos participantes

Q 01 um pouco de dificuldade na parte que relaciona tangentes secantes e cossecantes, alguns de meus colegas tiveram outros não.

Q02 tive um pouco de dificuldade por não ter visto e aprendido direito na escola e quando chegamos aqui vemos de forma mais objetivas e por isso sentimos dificuldades, já os meus colegas foram também da mesma forma.

Q 03 tive um pouco de dificuldade por não ter visto no ensino médio.

Q 04 facilidade.

Q 05 tive um pouco de dificuldade de compreender a metodologia do professor, meus colegas também tiveram.

Q 06 tive dificuldade, pois não tinha visto no ensino médio, meus colegas tiveram mais facilidade.

Q 07 um pouco de dificuldade, nas demonstrações. Meus colegas também tiveram.

Q 08 bastante dificuldade por não ter visto com detalhes no ensino médio e pela quantidade de formulas. Meus colegas também tiveram dificuldade.

Q 09 no início tive um pouco de dificuldade, a parte dos ângulos. Meus colegas também tiveram.

Q 10 tiver um pouco de dificuldade. Meus colegas também tiveram.

Q 11 facilidade. Meus colegas não sei.

Q 12 deu a entender que foi um pouco de dificuldade em alguns assuntos.

Q 13 tive facilidade.

Q 14 eu tive facilidade e acredito que meus colegas também tiveram.

Q 15 Facilidade. Maioria dos colegas tanto do nível médio e da universidade tiveram dificuldades.

Q 16 um pouco de dificuldade. “Os meus colegas não tiveram muitas dificuldades porque viram na escola em que estudaram”.

Q 17 tive várias dificuldades na compreensão do conteúdo.

Q 18 dificuldade, pois não tive um bom ensino médio.

Q 19 facilidade.

Q 20 foi um pouco difícil, pois a trigonometria é muito ampla.

Q 21 facilidades. Meus colegas mostraram bastantes dúvidas.

Q 22 facilidade, por ter tido bons professores no ensino médio, porem alguns de meus colegas tiveram dificuldades por terem um ensino médio deficiente.

Q 23 tive facilidade.

Questão 5

A questão 5 refere-se se os participantes tiveram mais dificuldade na universidade ou no ensino médio ou tiveram mais facilidade na universidade ou no ensino médio.

Alguns dos participantes disseram que tiveram mais dificuldade na universidade devido ao conteúdo ser passado pelo professor de forma ampla e com o uso de demonstrações. Outros disseram que tiveram dificuldade na universidade por não ter tido uma boa base no ensino médio. Um dos participantes falou que teve mais dificuldade no ensino médio por que o professor tinha pouco domínio do conteúdo.

Alguns dos participantes falaram que teve mais facilidade no ensino médio por não ser tão aprofundado quanto na universidade. Outros participantes falaram que tiveram mais facilidade na universidade e um especificou que teve essa facilidade por que o professor ensinou de forma bastanteexplicativa e desafiadora.

Resposta dos participantes

Q 01 o da universidade, pois foi onde vi toda parte da trigonometria.

Q 02 deu a entender que foi semelhante. Disse que na da escola viu só uma introdução do que é trigonometria.

Q 03 da universidade por ter sido mais completa.

Q 04 o que diferenciou, foi no caso das demonstrações.

Q 05 tive no ensino médio devido ao pouco domínio do professor. O professor da universidade transmitia com mais clareza.

Q 06 não respondeu.

Q 07 não estudou no ensino médio, só na universidade.

Q 08 tive mais facilidade no ensino médio por não ser aprofundado como o dar universidade.

Q 09 tive mais facilidade na universidade, o conteúdo foi ensinado de maneira pratica.

Q 10 tive mais dificuldade na universidade, pois o conteúdo aprofundado.

Q 11 deu a entender que ele teve mais dificuldade na universidade por causa das demonstrações e aplicações.

Q 12 foi de forma razoável. Na universidade o conteúdo é mais amplo.

Q 13. A pessoa não entendeu a pergunta.

Q 14. Não deixou clara a resposta.

Q 15 não tive dificuldade em nenhum dos níveis. A diferença foi que na universidade o professor se preocupou com o conteúdo.

Q 16 um pouco de facilidade no médio porque o conteúdo era mais flexível. Na universidade vimos o conteúdo a do de uma forma mais rigorosa.

Q 17 deu a entender que foi difícil tanto no ensino médio como na universidade. No ensino médio a base foi mal absorvida, na universidade vemos o conteúdo mais aprofundado.

Q 18 mais facilidade na universidade, pois o ensino foi de forma bastante explicativa e desafiadora.

Q 19 tiver mais facilidade. A diferença do médio para universidade foi o requisito demonstração das propriedades e teoremas.

Q 20 mais dificuldade na universidade. Por causa das demonstrações, que não são passadas no ensino médio.

Q 21 deu a entender que não teve dificuldade em nenhum.

Q 22 teve dificuldade em ambos. A diferença era que na universidade usava demonstrações. Deu a entender que a forma de ensino é semelhante nos dois casos.

Q 23 tiver mais facilidade na universidade. Diferença foi o rigor apresentado na universidade.

Questão 6

A questão6 Refere-se a importância do estudo da trigonometria

A maioria dos participantes responderam que é importante estudar a trigonometria para sabe-la aplica-la ao cotidiano. Outros falaram que é importante para compreender outros conteúdo. Outro deu a entender que é importante para ter o domínio do conteúdo. Outro para o desenvolvimento do raciocínio logico-cognitivo. Outro para a vida profissional.

Resposta dos participantes.

Q 01 é de grande importância para vida profissional.

Q 02 é muito importante pois muitos outros conteúdos dependem da trigonometria.

Q 03 faz parte da disciplina de nossa graduação. Está presente no dia-a-dia.

Q 04 não escreveu a resposta.

Q 05 é uma parte fundamental da matemática.

Q 06 deu a entender que facilitara a compreensão de outros conteúdos.

Q 07 podemos utilizar no nosso cotidiano, para resolver problemas.

Q 08 não entendeu a pergunta.

Q 09 trabalhar o espaço e suas transformações.

Q 10 ampliar o conhecimento na área de educação, como também no cotidiano dos alunos.

Q 11 suas utilidades.

Q 12 no dia-a-dia.

Q 13 de enxergarmos determinadas relações, presentes no cotidiano, também conseguir lidar com outros assuntos.

Q 14 com os conhecimentos resolver problemas do dia-a-dia.

Q 15 o desenvolvimento do raciocínio logico-cognitivo. Desenvolvimento esse que no ajudará na compreensão dos fenômenos naturais do mundo em que vivemos.

Q 16 É importante porque é a base da construção de toda a matemática e a compreensão de teoremas assim como suas aplicações no ensino da matemática na sala de aula.

Q 17 na compreensão de alguns fatos observados no dia-a-dia, bem como para o aproveitamento acadêmico em algumas áreas.

Q 18 suas aplicações no cotidiano.

Q 19 aplicações.

Q 20 deu a entender para a compreensão de outros conteúdos.

Q 21 aplicação no dia-a-dia.

Q 22 para dominá-la.

Q 23 pelas muitas aplicações do cotidiano.

Questão 7

A questão refere-se ao que o aluno aprendeu na universidade vai contribuir na sua formação profissional como professor de matemática e na sua pratica em sala de aula.

Essa questão uma boa parte dos alunos não responderam ou não entenderam a pergunta. Contudo a maioria dos que responderam disseram que o que aprenderam na universidade vai ajuda-los para ter um melhor domínio do conteúdo e saber transmitir de uma forma adequada para o aluno.

Respostas dos participantes

Q 01 não respondeu.

Q 02 não respondeu.

Q 03 deu entender que a trigonometria vai ajudar a ter um melhor domínio, o que facilita a transmissão para o aluno.

Q 04 não respondeu.

Q 05 não respondeu.

Q 06 não respondeu.

Q 07 deu a entender que a trigonometria vai ajudar a melhorar o domínio do conteúdo, o que vai ajudar na sala com os alunos.

Q 08 não entendeu a pergunta.

Q 09 deu a entender que a trigonometria contribui para entender os fenômenos do mundo.

Q 10 deu a entender que dar mais segurança, e a compreender certos fenômenos da natureza, que envolver o conteúdo de trigonometria.

Q 11 não respondeu.

Q 12 deu a entender que ajudar a ter uma boa base para poder ensinar.

Q 13 deu a entender que vai ajudar a ter uma compreensão melhor para poder transmitir para o aluno.

Q 14 não respondeu.

Q 15 deu a entender que o conhecimento adquirido vai ajudar estar preparado para outros assuntos que envolver a trigonometria, e vai dar uma segurança maior na transmissão do conhecimento para o aluno.

Q 16 deu a entender que o conhecimento de trigonometria vai ajudar na aplicação do dia-a-dia, assim como no conhecimento de teoremas e definições.

Q 17 não respondeu.

Q 18 o domínio do conteúdo.

Q 19 deu a entender que deu a preparação para poder ministrar o conteúdo de maneira segura e proveitosa.

Q 20 deu a entender que ajudou o suficiente para ser colocado em pratica no ensino médio.

Q 21 deu a entender que o conhecimento que adquiriu vai facilitar para a transmissão para o aluno em futuras aulas.

Q 22 deu a entender que o conhecimento adquirido vai auxiliar para uma boa base na sala de aula.

Q 23 não respondeu.

Questão 8

A questão 8 refere-se a como os participantes podem colaborar para um melhor aprendizado do ensino da trigonometria e como auxiliar os alunos na superação dos mesmos.

Na respostas dos participantes tivemos: mostrar o conteúdo de forma interessante, ensinar de forma clara e objetiva, fazer o uso dos materiais concretos, melhorar a didática, mostrar a importância do conteúdo dado, utilizar jogos matemáticos, fazer o uso da história da matemática, fazer o uso da tecnologia nas aulas para deixa-las interativas, tentar compreender as dificuldades dos alunos e ajuda-los a supera-las, trabalhar com questões do cotidiano.

Resposta dos participantes.

Q 01 deu a entender mostrar o conteúdo de maneira interessante que chame a atenção e desperte seu interesse.

Q 02 explicando de forma clara e objetiva e usando exemplos do cotidiano.

Q 03 deu a entender que se deve passar o conteúdo com matériais concretos, além das aulas expositivas. Tentando percebe quais são as dificuldades dos alunos e focar nessas deficiências para ajudá-los.

Q 04 não respondeu.

Q 05 tendo um bom domínio do conteúdo.

Q 06 deu a entender que se deve passar a aula para o aluno com exemplos concretos e fáceis de ser compreendidos.

Q 07 deu a entender que melhorando a didática e trabalhando com exemplos do cotidiano.

Q 08 trabalhando em cima das dúvidas dos alunos.

Q 09 deu a entender que se deve proporcionar e despertar a curiosidade do aluno e ainda trazendo questões do cotidiano.

Q 10 deu a entender que se deve ensinar de forma clara, e mostrando que o conteúdo é importante para a formação do aluno.

Q 11 deu a entender que para ajudar a compreender melhor utilizando jogos e materiais didáticos voltado a temática.

Q 12 usar programas computacionais para deixar as aulas interativas.

Q 13 deu a entender que devemos ter um bom domínio do conteúdo, tendo uma boa pratica pedagógica e pesquisando novas metodologias.

Q 14 deu a entender ensinando a trigonometria com mais detalhes, fazendo o uso de jogos matemáticos.

Q 15 deu a entender que se deve desenvolver a teoria com o uso da história e materiais concretos.

Q 16 relacionar o conteúdo dado com materiais lúdicos e ajudar a superar suas dificuldades.

Q 17 deu a entender que se deve melhorar a didática, usando situações claras do dia-a-dia com exercícios inteligentes.

Q 18 buscando na tecnologia uma forma de apresentar resultados de forma mais dinâmica.

Q 19 deu a entender que se deve trabalhar o conteúdo dado de acordo com seu meio de convivência, superando suas dificuldades.

Q 20 com demonstrações simples.

Q 21 deu a entender que se deve trabalha o conteúdo de uma forma pratica e interessante com exercícios do cotidiano.

Q 22 deu a entender que se deve ensinar de forma mais eficaz e compreender onde está a dificuldade do aluno e focar em sua superação.

Q 23 deu a entender que se deve ser fiel ao conteúdo dado, dando um significado maior aos teoremas propostos.

Questão 9

A questão 9 é referente ao que seria um bom ensino da trigonometria.

As resposta dos participantes foram bastante diversificadas como as seguintes: quando é ensinado com clareza, com simplicidade, com cotidiano do aluno, com a história da matemática, com aulas interativas, com demonstrações e conceitos, por completo.

Respostas dos participantes.

Q 01 deu a entender quando é mostrado de forma clara e objetiva.

Q 02 deu a entender quando é usados exemplos do cotidiano e mais objetivo.

Q 03 deu a entender quando o conteúdo é relacionado com o cotidiano do aluno.

Q 04 deu a entender que quando o conteúdo é relacionado com o cotidiano do aluno.

Q 05 seria um ensino em que os alunos aprendessem o conteúdo sem muitas dificuldades.

Q 06 deu a entender quando é dado com aulas que abordassem exemplos concretos.

Q 07 deu a entender que quando é ensinado com conceitos, demonstrações e exercícios.

Q 08 deu a entender aquele que o aluno aprende as regras trigonométricas.

Q 09 deu a entender que é aquele onde o aluno pudesse realmente entender e saber por completo o conteúdo.

Q 10 deu a entender que é aquele quando os alunos passar a entender que o que é visto em sala de aula é importante para a vida deles, tornando o aluno conhecedor de conceitos e definições.

Q 11 deu a entender que quando o conteúdo é partido de uma construção e é mostrado suas características e aplicações.

Q 12 deu a entender que quando é aplicado com aulas interativas.

Q 13 deu a entende que é quando o ensino é abordado com clareza, com método que seja eficiente e esteja ao nível do aluno.

Q 14 deu a entender um ensino envolvendo vários recursos, como por exemplo: os jogos matemáticos.

Q 15 aquele que abordasse fatos históricos e científicos.

Q 16 deu a entender que seria aquele que é apresentado de forma simples, que facilitasse o entendimento do conteúdo para o aluno e o mesmo aplicasse no cotidiano.

Q 17 deu a entender que quando é apresentado com aulas expositivas com muitos exemplos e usasse uma forma de avaliação continua.

Q 18 deu a entender que seria aquele ensino que fizesse com que os alunos relacionasse os conceitos com a vida real. E adquirisse uma boa base para a universidade.

Q 19 deu a entender quando o conteúdo é transmitido por completo, de maneira clara.

Q 20 deu a entender quando é passado com demonstrações.

Q 21 deu a entende que quando o ensino é voltado para uma aplicação na realidade do aluno.

Q 22 não respondeu.

Q 23 quando é passado com seriedade e prazer.

Questão 10

A questão 10 é referente a como os participantes avalia o conteúdo e a forma apresentado nos livros didáticos.

As respostas dos participantes foram as seguintes: que os livros são bons e claros, são complexo, regular, simples.

Alguns dos participantes deram as seguintes sugestões de como deveriam ser melhorado na apresentação: mais aprofundado, trabalhar mais com o cotidiano, usar a história da matemática, mostrar mais o material concreto, ser mais claro, ter uma linguagem melhor, ser mais detalhados.

Respostas dos participantes

Q 01 bom, fácil de se entender.

Q 02 bom, com vários exemplos e bem clara as respostas.

Q 03 bom, pois começa com o básico e vai aprofundando. É o necessário para aluno do ensino médio, se dado completamente.

Q 04 simplório. Deveria ser de forma mais sofisticada.

Q 05 deu a entender que cada uma transmite de uma forma diferente.

Q 06 alguns livros de maneira muito complexa.

Q 07 bastante resumido e não é muito aprofundado.

Q 08 não tão boa, pois precisa-se trabalhar mais com o cotidiano do aluno.

Q 09 de maneira clara em certas ocasiões. Há livros que facilitam o entendimento do aluno, pois "conversa" com o aluno.

Q 10 é bom, mas precisa ser mais claro.

Q 11 aceitável, porém deve ser melhorado.

Q 12 deu a entender que ótimos, pois os problemas estão na aplicação do conteúdo.

Q 13 há livros que são bons e completos e outros que nem tanto.

Q 14 de uma maneira vaga, pois deveriam ser mais detalhados.

Q 15 muito bom quando aborda a história. Mas podendo melhorar com o uso do material concreto.

Q 16 bom, mas precisa-se de modificações.

Q 17 muito complicado, deixando de expor os detalhes.

Q 18 bom, pois a linguagem estar melhor.

Q 19 bom. Os livros trazem todo o conteúdo necessário e previsto nos PCN.

Q 20 deu a entender que é regular pois a explicação deveria ser mais detalhada.

Q 21 depende. Temos autores didáticos, já outros não.

Q 22 deu a entender de forma complexa, por não ser a realidade do aluno.

Q 23 não respondeu.

Por meio desta pesquisa podemos concluir de um modo geral, certas dificuldades continuam acontecendo no ensino da trigonometria por vários fatores. É preocupante o fato que muitos professores e alunos da universidade, que até mesmo já estão trabalhando como professores, não procura utilizar o que foi aprendido, nas disciplinas de educação matemática, na universidade, como podemos acompanhar nos dados obtidos das questões sete e oito. Assim para que o ensino-aprendizagem possa ser melhoradoe as dificuldades diminuídas, é preciso que os professores procurem por novas metodologias de ensino.

3. Metodologias alternativas para o ensino da trigonometria

Diante dos aspectos citados anteriormente, percebemos o quanto o ensino da trigonometria pode se tornar bastante complicado para os alunos compreenderem, por isso é necessário uma metodologia alternativa que possa ajudar aqueles estudantes que têm mais dificuldade de assimilação do conteúdo. Nos últimos anos,algum pesquisador vem buscando encontrar novas metodologias para o ensino de matemática, as quais estão fazendo uma grande diferença na aprendizagem e estão facilitando a aprendizagem do aluno.

Conhecimentos Prévios

Em uma nova proposta para o ensino de trigonometria criada por Briguenti (2003), na qual a autora se baseia na teoria de David Ausubel sobre a aprendizagem significativa de uma sequência de atividades que valoriza o conhecimento que os alunos haviam adquirido em conteúdos anteriores. Esse conhecimento prévio é chamado de subsunçor. Segundo a autora, os subsunçores motivam os alunos para a aprendizagem de um novo assunto, também os prepara para desenvolveremações extraclasses como, por exemplo: medir a altura de uma arvore no pátio da escola.

> Assim, podemos entender que a aprendizagem significativo é um processo por meio do qual um novo conceito é ancorado a estrutura cognitiva, particular, previa, a qual é conhecida como subsunçor. Dessa forma podemos entender que na estrutura cognitiva do aluno já possui conceitos relevantes e que dessa forma vai ajudá-lo a organizar os novos conhecimentos. Por isso é de fundamental importância o papel do professor e que suas aulas haja uma interação com o aluno, assim o professor ajuda o aluno a construir novos subsunçores e ao mesmo tempo modificar os velhos. Para Briguenti os subsunçores não devem ser vistos apenas como conceito suporte da nova informação e sim como um conceito claro e com estabilidade que proporciona a integração entre o novo e o antigo conhecimento, facilitando aprendizagem (Briguenti, 2003, p. 22).

Em minha experiência na universidade pude observar que utilizando sempre o conhecimento prévio ajuda-se o aluno a estar mais preparado para receber novos conhecimentos e ao mesmo tempo aprofundar o conhecimento que ele já tem. Enquanto estudava uma disciplina de cálculo avançado na universidade, pude observar que a professora usava essa teoria e que ajudou muito para que os alunos participassem da aula e aumentasse o conhecimento que eles já tinham. Dessa forma,a maioria dos alunos não teve dificuldade para entender o novo conteúdo.

> Para entendermos os conceitos trigonométricos no ciclo é necessário que o aluno tenha realizado uma aprendizagem significativa dos conceitos razões trigonométrica no triângulo retângulo e para que estes sejam interiorizados sugere-se que os mesmos sejam iniciados pelo uso do organizador prévio que relacione os conceitos conhecidos pelos alunos e, ao mesmo tempo, seja um instrumento motivador do novo conhecimento (Briguenti, 2003 p. 24).

Em um artigo da revista de “Cálculos” de título uma passagem para o mundo secreto do triangulo, a professora Cerri diz o seguinte:

> Os estudantes acham as aulas de trigonometria difíceis porque não compreendem a ideia de proporção. Cerri não culpa o aluno; diz que vários professores usam a ideia de proporção quando ensinam vários tópicos, mas não chamam a atenção do aluno. Em geral, o professor só percebe que deixou de sublinhar uma ideia fundamental quando apresenta um problema e a classe se perde, pois não tem a base, e esse é o caso da trigonometria. Para compreendê-la bem, o estudante precisa reconhecer os momentos em que está usando uma ideia fundamental ou que está perseguindo um objetivo fundamental. “Seno, cosseno e tangente são proporções “diz Cristina “se o aluno não souber o que isso significa, não entenderá nada de trigonometria”. (Cálculos, 2013, p. 35).

Assim, vemos que além do professor, simplesmente um transmitir um conteúdo para o aluno, que podemos chamá-lo de conhecimento prévio, é fundamental que ele destaque a importância de aquele conteúdo e como vai ajuda os alunos estarem mais preparados para uma melhor compreensão de outros tópicos.

Resolução e exploração de problemas

Durante meu estágio da universidade em uma turma do 6° ano, tive a oportunidade de observar como a maioria dos alunos tinha uma certa dificuldade em interpretar alguns problemas que aparentemente, para mim, pareciam simples. Através disso pude perceber o quanto é necessário para o professor trabalhar com este tema em sala de aula e esta metodologia vai ajudar para que os alunos sejam seus próprios produtores de conhecimento.

Nos últimos anos alguns pesquisadores tem desenvolvido importantes trabalhos acadêmicos sobre a resolução e exploração de problemas em sala de aula. De acordo com Nascimento:

> Ao proporcionar um ensino de matemática através da resolução e exploração de problemas, suscita a reflexão de que a sociedade é constituída, assim como a resolução de problemas. Se o aluno observa que apropriação do conhecimento é feita através de regras, o aluno enxergará uma sociedade hierárquica, onde não tem voz e vez. Mas, se propormos um

> ensino numa perspectiva onde o aluno formula conjecturas, pensa sobre sua própria ação, avalia o seu próprio processo, taremos instigando o ser político adormecido, na perspectiva da construção de um ser humano reflexivo (2014 p. 36-37).

Tic aplicadas para o ensino da trigonometria

Um dos instrumentos de grande importância para o avanço da educação é uso da tecnologia na educação. Podemos observar que a cada dia o mundo vem se modernizado e são inseridas novas tecnologias no mercado. A educação precisa crescer junto com a tecnologia e os professores precisam aprender a trabalhar com ela. Sabemos que isso não é uma tarefa fácil, mas a metodologia precisa ser mudada e não ser mais apenas simples aulas com giz e o quadro.

Desde 1981 vem sendo feito programas governamentais de implementação da informática na escola. Assim de lá até aqui foram implantados diversos programas para a criação do laboratório de informática. Hoje já existem muitas escolas com laboratórios, embora que ainda não seja usado em muitas escolas da forma correta. É importante ressaltar que a tecnologia deve ser vista como uma forma de melhorar o ensino e assim uma transformação para a pratica educativa.

Quando o uso da tecnologia é feito adequadamente, ajuda o aluno para que ele mesmo possa ser produto do seu próprio conhecimento, deixando de ser alunos passivos e passando a ser alunos ativos, capazes de resolver problemas, exercitarem o pensamento e o raciocínio. Para isso É necessário que a escola juntamente com o professor possa criar situações que exija a participação do aluno. Desta forma a escola vai proporcionar aos seus alunos um conhecimento matemático capaz de inseri-los no mundo e eles vão estar preparados para lidar com diversos problemas do cotidiano.

> No uso de tecnologia para o aprendizado da Matemática, a escolha de um programa torna-se um fator que determina a qualidade do aprendizado. É com a utilização de programas que oferecem recursos para a exploração de conceitos e ideias matemáticas que estar fazendo um interessante uso da tecnologia para o ensino de matemática. (Brasil, 2006, p. 89-90).

Hoje ainda existem muitos professores que ainda não aprenderam como fazer o uso da tecnologia em suas aulas. É importante ressaltar que hoje existem diversos programas do governo que dá incentivo para que o professor obtenha as informações necessárias para que possa ter o domínio do computador. Em muitos casos o governo oferece um programa de formação continuada e até dá um notebook para cada professor e uma bolsa. Cabe que cada professor faça sua parte e comece fazer o uso desta grande tecnologia.

Existem diversos programas de computador (software) que pode ser um grande suporte para o professor. Contudo é importante que ele faça a escolha de um bom software e que seja fácil para os alunos compreenderem e o professor torne-se familiarizado com o software.

O uso de materiais didáticos

O uso dos materiais didáticos manipuláveis é um importante recurso para o professor em sala de aula. Através deles as aulas podem torna-se mais compreensíveis e dinâmicas.

ConformeLorenzato (2006) a implementação desses materiais em sala de aula, no início não foi fácil. Teve uma rejeição por parte dos professores, pois muitos não sabiam fazer o uso adequado dos materiais ou até mesmo cria-los. Contudo em alguns lugares houve um grande esforço dos professores e alunos para construírem o laboratório de matemática. É importante frisar que o "material didático é qualquer instrumento útil ao processo de ensino-aprendizagem". Hoje muitas escolas já possuem um laboratório de qualidade, pois houve um empenho do governo para a criação desses laboratórios. Contudo acontece um grande problema, que os professores não estão adotando esta metodologia para ensino, isto pode ser dado pelo fato de os professores não conhecerem os materiais. Por isto é importante cada professor faça sua parte e aprenda como utiliza-los.

> A atuação do professor é determinante para o sucesso ou fracasso escolar. Para que os alunos aprendam significamente, não basta que o professor disponha de um laboratório de matemática. Tão importante quanto à escola possuir um laboratório de matemática é o professor saber utilizar corretamente os materiais didáticos, pois estes, como outros instrumentos, tais como o pincel, o revolver, a enxada, a bola, o bisturi, o quadro-negro, o batom, o ensino, exigem conhecimento especifico de quem utiliza. (Lorenzato, 2006, p.23).

Hoje muitas escolas já possuem um laboratório de qualidade, pois houve um empenho, do governo do Brasil de modo geral, para a criação desses laboratórios. Contudo acontece um grande problema, que os professores não estão adotando esta metodologia para ensino, isto pode ser dado pelo fato de os professores não conhecerem os materiais. Por isto é importante cada professor faça sua parte e aprenda como utiliza-los.

A importância dahistória para o ensino de trigonometria

O uso da História da Matemática em sala de aula é mais importante recurso que o professor tem para desenvolver um melhor ensino. Através dele o aluno tem a oportunidade de relacionar a matemática com a vida, de estabelece comparações entre a forma como os conceitos matemáticos eram ensinados no passado e como são ensinados hoje. Reconhecerá que a matemática é uma criação humana, que começou com o objetivo de buscar soluções para problemas do cotidiano. Problema esses que para o povo de determinadas épocas era muitos difíceis de ser compreendidos e hoje para a gente se torna mais fácil.

É importante salienta que existem várias formas de um professor trabalhar a história da matemática em sala de aula, como por exemplo: na introdução de um conteúdo e durante seu desenvolvimento, em pesquisas, pode trabalhar as formas como outros povos faziam seus cálculos e outros. Assim com o uso da história os alunos vão desperta uma curiosidade e vão ver a matemática de uma forma diferente. Sendo assim o ensino da matemática vai ficar mais prazeroso e ainda vão poder desperta o interesse por outras disciplinas.

> Nosso estudo pretende utilizar a história da matemática na elaboração de objetivos e procedimentos de ensino-aprendizagem visando possibilitar a seleção e aplicação de problemas práticos, curiosos ou recreativos a serem incorporados de maneira episódica e investigativa nas aulas de matemática de modo a possibilitar uma aprendizagem significativa. (Mendes apud Oliveira, 2006, P. 18).

Quando iniciei meu curso na universidade, estudei uma disciplina chamada matemática básica I. Durante o tempo que a estudei pude aprender muitas coisas sobre a história da matemática, pois o professor tinha um grande conhecimento da história da matemática. Para mim aquela metodologia era nova, mas foi muito proveitosa e pode facilitar o aprendizado.

> A utilização da História da Matemática em sala de aula também pode ser vista como um elemento importante no processo de atribuição de significados aos conceitos matemáticos. É importante, porém, que esses recurso não fique não fique limitado a descrição de fatos ocorridos no passado ou à apresentação de biografias de matemáticos famosos. A recuperação do processo histórico de construção do conhecimento matemático pode se tornar um importante de contextualização dos objetos de conhecimento que vão entrar na relação didática. A História da Matemática pode contribuir também para que o professor compreenda algumas dificuldades dos alunos, que, de certa maneira, podem refletir históricas dificuldades presentes também na construção do conhecimento matemático. (Brasil, 2006, p. 86).

Além dessas metodologias que foram citadas, existem muitas outras que podem ser trabalhada em sala de aula. Contudo é necessário que o professor procure conhecer seus alunos para que assim possa saber a qual é preciso ser usada para adaptação do ensino. Desta forma pode fazer uma grande contribuição para uma aprendizagem significativa.

4. História da trigonometria

A trigonometria assim como outros ramos da matemática, teve contribuições de importantes povos da antiguidade, que de início desenvolveram conhecimentos trigonométricos em primeiro momento para suprir suas necessidades práticas. Um exemplo desses povos foram os egípcios, que construíram as pirâmides, a qual precisou de um grande conhecimento trigonométrico.

O significado da palavra trigonometria vem do grego (trigonon, “triangulo” e metria “medida”.

Muitos matemáticos gregos estudaram as relações entre as retas e círculos e as aplicaram vários problemas da astronomia. Contudo **Hiparco de Niceia** (180-125 a.c) foi o primeiro matemático que compilou a primeira tabela trigonométrica, por isso ele foi chamado “o pai da trigonometria”.

Outro grande matemático, que certamente foi o maior astrônomo grego da antiguidade que contribui muito para a história da trigonometria foi **Claudio Ptolomeu (**85-165 d.C.), que em uma de suas obras conhecida como o **Almagest**, que é uma coleção de treze livros, “contém uma descrição do modelo grego do universo analisando o movimento do sol, da lua e dos planetas”.

Outro passo importante para a história da trigonometria foi dado pelos matemáticos da Índia. Segundo Berlinghoff (2010), Por meio de um trabalho que foi escrito no começo do século V d.C, encontraram uma tabela de “meias-cordas”. “Isso refletiu uma importante percepção. Ao passo que a corda era o modomais fácil de relacionar um segmento de uma reta com um ângulo, pois se verificou que, em muitas situações, a necessidade era usar a metade da corda do dobro do ângulo”.

Os árabes tinham umconhecimento de trigonometria baseada na função seno, visto que os mesmo adquiriram seus conhecimentos trigonométricos dos hindus. Os árabes acrescentaram ao assunto de trigonometria, assim como em outros suas próprias ideias. Assim a trigonometria árabe tornou-se bem sofistica. Eles descobriram as conexões entre a trigonometria e a álgebra. Um dos matemáticos de grande destaque foi **ABU´L-WEFA**, que logos depois de acrescentar suas ideias a função tangente tornou-se bem conhecida.

A história da trigonometria desde o período da antiguidade até o século XVIII passou por grandes transformaçõese grandes matemáticos contribuíram para o seu avanço. Contudo os matemáticos do século XVII e XVIII fizeram contribuições significativas, que de certa forma influenciaram muito para o ensino do conteúdo de trigonometria de hoje.

No século XVIII foi o período do grande avanço da trigonometria pois até então a trigonometria era bem diferente do que conhecemos hoje e ninguém até então tinha pensando no seno como função no sentido moderno da palavra. Destacamos como o grande matemático deste tempo **Leonhard Euler** (1707-1783), e não foi só um matemático, mas também um físico, um filosofo, teólogo, um doutor em medicina e grande conhecedor da astronomia e línguas orientais. Assim, Euler foi um grande gênio do século XVIIl. Na trigonometria trouxe importantes contribuições, como: os símbolos que conhecemos hoje, o uso das letras minúsculas a, b, c para os lados de um triangulo e outros. "Euler convenceu as pessoas de que deveriam pensar no seno como função do arco em um círculo unitário". Isto significa que deveriam pensar como função do ângulo medido em radianos. Assim sua influência foi de grande importância, e é por causa de seu trabalho que conhecemos e estudamos a trigonometria nos dias atuais, pois ele mostrou que a trigonometria poderia ser entendida de uma forma mais fácil.

Observamos que desde a antiguidade até o presente momento a trigonometria é essencial para a sociedade. Assim, podemos saber que nem sempre foi fácil de ser aprender a trigonometria e que a mesma passou por grandes transformações durante sua história. Ultimamente grandes pesquisadores têm contribuído significamente para o ensino-aprendizagem da trigonometria e certamente hoje podemos aprender a trigonometria de uma forma mais simplificada.

5. A trigonometria nos livros didáticos

Neste capitulo faremos uma abordagem dos livros didáticos. Sabemos que a maioria dos alunos das escolas brasileiras tem uma grande dificuldade na aprendizagem de matemática e já vimos que isso ocorre por diversos fatores. Sabemos também que quando um aluno brasileiro participa de um teste com alunos de outros países, ele não alcança boa posição. Se formos pesquisar sobre o desenvolvimento da educação no Brasil, veremos que a educação passou por algumas etapas até chegar ao ponto que conhecemos hoje. Um exemplo disso é que a maioria das pessoas tem ou já tiveram pais ou avos que nunca frequentaram a escola, pois a educação nesse tempo só era para alguns.

Nesse percurso da educação, o Brasil teve um avanço e hoje pode disponibilizar escola para todos. Embora que em certas regiões do país ainda seja muito difícil o acesso à escola. Um dos grandes meios que temos hoje transmitir a educação é o livro didático. Porém, há uma preocupação com o livro didático, pois o governo disponibiliza o mesmo livro para todas as regiões do Brasil e isso é um fator preocupante, pois sabemos que cada região do país vive diferentes realidades. Com isso é preciso que haja um trabalho particular dos professores em adaptar os livros didáticos para as diferentes regiões e até mesmo diferentes tipos de alunos, como por exemplo, se comparamos um aluno da manhã e um da noite, veremos que cada um vive uma realidade diferente.

O ensino da trigonometria é em particular muito difícil. Quando eu estava estudando o ensino médio em uma escola de campina grande-PB, o professor teve umacerta dificuldade em transmitir o assunto, pois ele precisou começar desde o inícioporque a maioria dos alunos não chegaram a ver geometria e a trigonometria no fundamental, o que levou a uma seria deficiência por parte dos alunos.

Essa deficiência dos alunos em matemática também é muito comum em outros conteúdos. Contudo sabemos que o governo tenta mudar essa realidade pouco a pouco. Uma das coisas que pude observar em uma escola na qual fiz meu estagio é que a escola recebeu um bom laboratório de matemática. Sabemos que um bom laboratório de matemática pode fazer uma grande diferença para o avanço na educação da matemática para os alunos. Também percebi uma certa dificuldade dos professores em adaptar aquele material ao seu ensino e ainda a escola tinha o laboratório, mas o manteve fechado.

Livros abordados

Como o livro didático é um material de fácil acesso tanto para o professor como para o aluno e quase sempre o professor usa como aprincipal ferramenta. Faremos uma abordagem de quatros livros didáticos do ensino médio.

Livros didáticos	**Referências**
LD1	Smole, Katia Cristina Stocco; Diniz, Maria Ignez de Souza. **Matemática: ensino médio.** 6 ed. São Paulo: Saraiva, 2010. (Volume 1 e 2).
LD2	Iezzi, Gelson. Et al. **Matemática: ciências e aplicações.** 6 ed. São Paulo Saraiva, 2010. (Volume 1 e 2).
LD3	Dante, Luís Roberto. **Matemática: contexto e aplicações**. 1 ed. São Paulo: Ática, 2010. (Volume 1 e 2).
LD4	Souza, Joamir Roberto de. **Novo olhar matemática.** 1 ed. São Paulo: FTD, 2010. (Volume 1 e 2).

Tabela 2. Livros didáticos analisados e os respectivos referenciais.

Observamos que hoje já existem coleções de livros mais atualizadas do que as fora escolhida para análise. Contudo, destacamos que as coleções que foram escolhidas, são as que as escolas brasileiras estão utilizando para o ensino no ano de 2014.

Vale salientar que todos os livros que foram analisados do ensino médio incluem a trigonometria de uma forma geral, como certamente é passada aos alunos do segundo ano médio. É importante frisar que os autores usaram, para o ensino da trigonometria, uma parte no livro do 1° ano (volume 1) e no livro do 2° ano (volume 2), exceto Smole e Diniz que utilizam os três volumes. Nesta análise julgamos alguns critérios que são de fundamental importância para trazer uma compreensão melhor para os alunos. Esses critérios são baseados em pesquisas feitas por autores e que, sem dúvida, fizeram uma grande diferença parao ensino da trigonometria. Os critérios analisados foram:

A) Conhecimentos prévios;

B) Metodologia;

C) Aspectos históricos;

D) Problemas e exercícios;

E) Tecnologia.

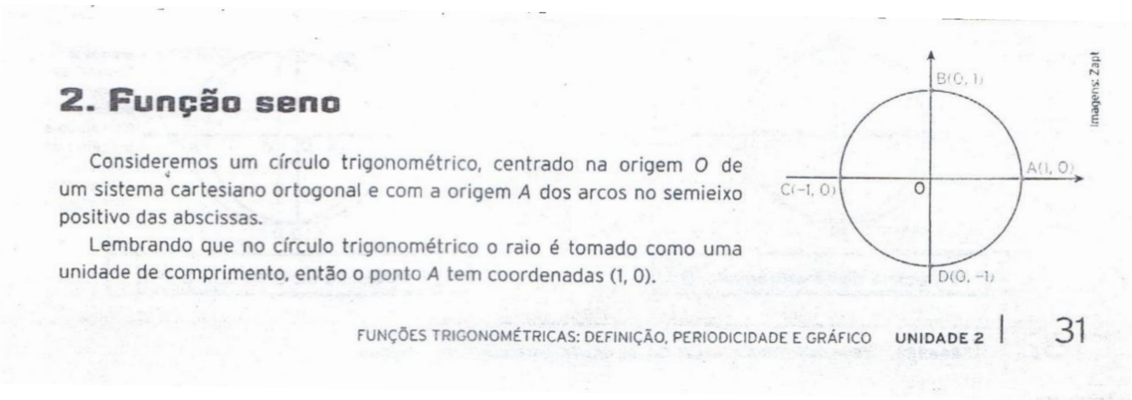
5.1. Abordagem do livro didático LD1 (Smole e Diniz)

Conhecimentos prévios

Nesta parte as autorasdão uma grande ênfase no início, que é aprimeira parte do ensino da trigonometria no livro do primeiro ano. Onde é trabalhado com dois capítulos (capitulo 10 e 11)focando os pontos principais, como por exemplo: a trigonometria no triângulo retângulo, onde é focado a semelhança de triângulos, que é uma dos meios principais para a compreensão do conteúdo e então poder trabalhar com as leis do seno e cosseno.

Metodologia

Para abordamos a metodologia usada pelas autoras, escolhemos um conteúdo aleatoriamente, pois quase todos os conteúdos são trabalhados da mesma forma, então escolhemos a função seno. O conteúdo é trabalhado da seguinte maneira: inicia-se com a ideia de uma figura, um ciclo trigonométrico no plano cartesiano ortogonal, com centro na origem e as extremidades tem as seguintes coordenadas: à direita tem A (0,1), à cima tem B(1,0), à esquerda tem C(-1,0) e abaixo tem D(O, -1) e lembra que ciclo trigonométrico o raio é tomado como uma unidade de comprimento, como mostra a seguir.


2. Função seno

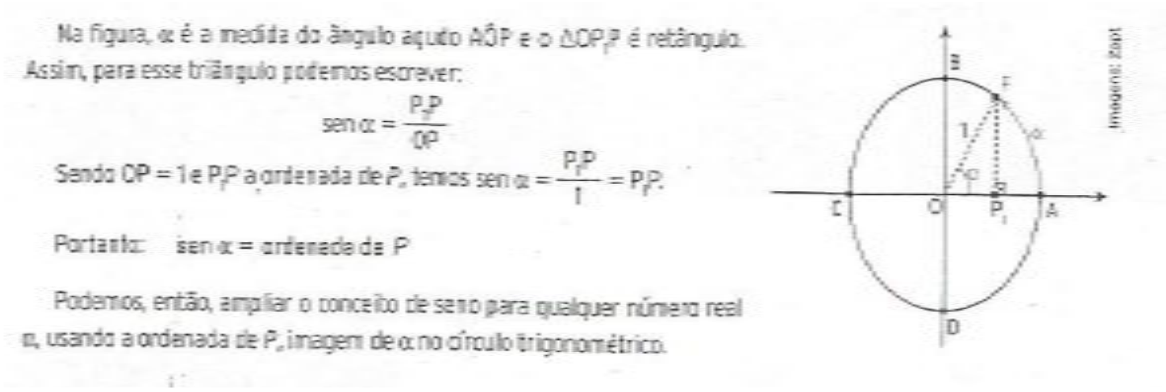
Consideremos um círculo trigonométrico, centrado na origem O de um sistema cartesiano ortogonal e com a origem A dos arcos no semieixo positivo das abscissas.

Lembrando que no círculo trigonométrico o raio é tomado como uma unidade de comprimento, então o ponto A tem coordenadas (1, 0).

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS: DEFINIÇÃO, PERIODICIDADE E GRÁFICO UNIDADE 2 | 31

(Anexo 3, p.68)

Em seguida apresentamuma segunda Figura de um ciclo trigonométrico no plano cartesiano ortogonal com as extremidades A, B, C e D. semelhante a primeira Figura, mas sem as coordenadas. Tomando assim um ponto P na extremidade do ciclo trigonométrico ao qual forma um ângulo agudo AÔP queela chamou de α. Depois elas tomaram um ponto P_1 no eixo das abcissas que é ortogonal ao ponto P formando assim o triangulo retângulo OP_1P. Logo então escrevem o senα= p_1p/op e escrevem que como op=1, pois é o raio da circunferência e escrevem e p_1p a ordenada de P, temos sen α =$p_1p/1$ = p_1p, portanto, elas dizem que sen α = ordenada de P e amplia o conceito de seno para qualquer número real α, usando a ordenada de P, imagem de α no círculo trigonométrico, como pode ser verificado na Figura a seguir:



Na figura, α é a medida do ângulo agudo AÔP e o ΔOP_1P é retângulo. Assim, para esse triângulo podemos escrever:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{P_1P}{OP}$$

Sendo OP = 1 e P_1P a ordenada de *P*, temos $\text{sen}\,\alpha = \frac{P_1P}{1} = P_1P$.

Portanto: sen α = ordenada de *P*

Podemos, então, ampliar o conceito de seno para qualquer número real α, usando a ordenada de *P*, imagem de α no círculo trigonométrico.

(Anexo 4, p.69)

Em seguida dão a definição formal. Função seno (sen) é a função, de R em R, que a todo número α associa a ordenada do ponto P, imagem de α no ciclo trigonométrico. Logo usando uma terceira figura semelhante a segunda, mas agora com as ordenadas A (1,0), B(0,1), C(-1,0) e D(0, -1) e tomando o ponto p_2 no eixo Ou, o qual é alinhado com p. logo então é escrito que op_2 é a média algébrica do segmento op_2 quando o raio é tomado como unidade. Elas mostram também que op_2é o seno de AÔP e indicam sem AÔP = OP_2. E escreve que a partir de então o eixo Oy passa a ser denominado **eixo dos senos,** como mostrado a seguir:

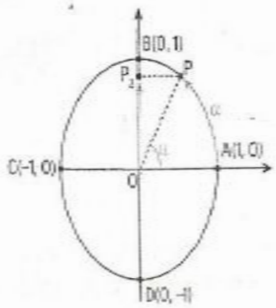
Função seno (sen) é a função, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, que a todo número α associa a ordenada do ponto P, imagem de α no círculo trigonométrico.

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{sen}: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \quad \alpha \mapsto \text{sen}\,\alpha = OP_2 \end{array}}$$

OP_2 é a medida algébrica do segmento OP_2 quando o raio é tomado como unidade.
Dizemos também que OP_2 é o seno de $A\hat{O}P$ ou de $\widehat{AP}$ e indicamos:

$$\boxed{\text{sen}\, A\hat{O}P = \text{sen}\, \widehat{AP} = OP_2}$$

O eixo Oy passa a ser denominado **eixo dos senos**.



(Anexo 4, p.69).

As autoras ainda trabalham com o sinal da função seno e alguns valores de ângulos notáveis, para então trabalhar com uma lista exercícios e problemas.

A linguagem do livro aparenta ser semiformal. Pois as autoras apresentam definições e regras e ainda a trazem textos para dar uma compreensão melhor para o aluno como, por exemplo: um pouco da história, conexão matemática e outros. A autora antes de dar uma definição, trabalha com uma ideia. Tudo isso pode ajudar o aluno, para que a linguagem esteja mais próxima do aluno e assim possa compreender os conteúdos matemáticos.

Aspectos históricos

O volume 1 traz um pouco da história da trigonometria. Como exemplo: na pág. 239, onde está sendo trabalhado o teorema de Pitágoras, as autoras apresentam um pouco de tales de mileto. Como é mostrado a seguir:

Tales de Mileto (640-546 a.C.) é conhecido como o primeiro dos "sete sábios" da Grécia Antiga.

Considerado o primeiro filósofo, é a ele que se atribui a introdução na Grécia do estudo de Geometria. Era um homem de reconhecida inteligência, que se dedicou a diversas atividades. Foi comerciante, homem de Estado, filósofo, engenheiro, astrônomo e matemático. Em sua meia-idade, dedicou-se ao comércio e suas atividades o levaram ao Egito, onde estudou as ciências físicas e matemáticas com os sacerdotes. Os historiadores da época relatam que Tales não demorou a superar seus mestres e a conquistar a admiração do rei Amásis, por ter sido capaz de medir as alturas das pirâmides a partir das sombras daqueles monumentos.

As aplicações da Geometria em situações práticas foram um de seus grandes feitos. Ele usou conhecimentos sobre triângulos semelhantes para calcular distâncias inacessíveis, como a distância de navios à praia.

Com Tales tem início o estudo científico da Astronomia. Ele se tornou célebre ao prever um eclipse solar, que viria a ocorrer em 585 a.C. Conta-se dele que, enquanto caminhava durante uma noite contemplando as estrelas, caiu em um fosso. Uma senhora que o acudiu comentou: "Como pode saber das coisas do céu quando não sabe o que passa sob seus pés?".

(Anexo 5, p.70)

O livro vai dar uma ênfase maior para a história da trigonometria no início do volume 2. Onde é transmitidaa trigonometria e a astronomia. Contudo sabemos que a história é um requisito de grande importância para ajudar no aprendizado do aluno e este é um item que não está muito presente na parte de trigonometria. Vale destaca que a autoras deram uma ênfase maior para as aplicações da trigonometria.

Exercícios

O livro, na parte do ensino da trigonometria, traz muitos exercícios desafiadores e que incentiva o aluno a participar na construção do seu conhecimento como por exemplos: nas seções especiais “Para recorda”, “invente você”, “Saia Dessa”, “Projetos”. O Livro traz ainda questões do Enem e de vestibulares. É importante frisar que após ter sido passado as definições, regras e alguns exercícios resolvidos, as autoras trazem uma seção de problemas e exercício para o aluno. Geralmente esta fase do trabalho tem muitos exercícios de fixação e contextualizados. Como é apresentado a seguir:

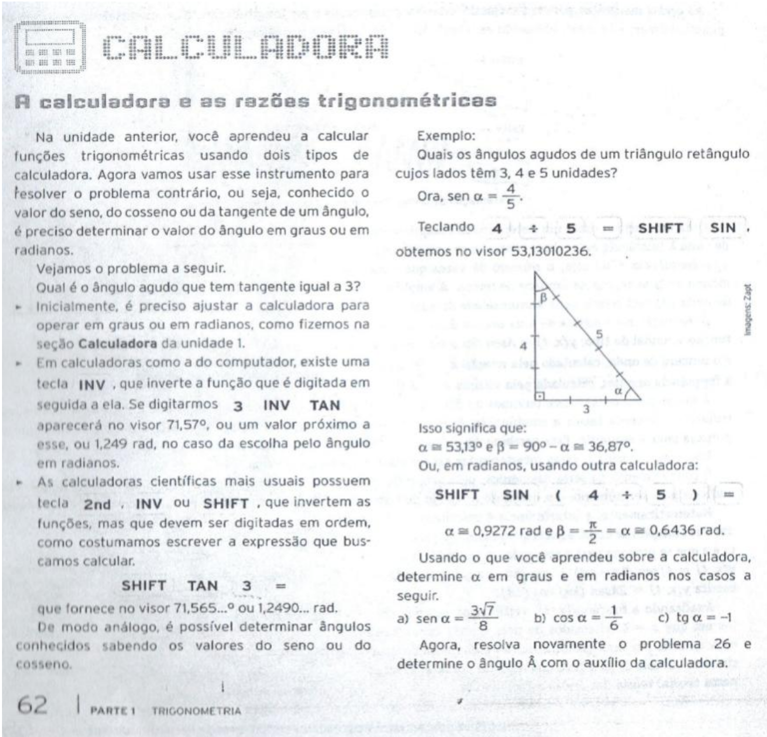
21. Em um triângulo retângulo, um cateto mede 10 cm e o cosseno do ângulo agudo adjacente a ele vale 0,6. Calcule as medidas dos outros lados.

22. Em um triângulo retângulo, os catetos medem 9 m e $9\sqrt{3}$ m. Calcule os ângulos agudos desse triângulo.

(Anexo 6, p. 71)

Tecnologia

O livro traz o uso das calculadoras que é muito importante para o aluno, pois muitos não sabem usar calculadoras, que precisam de um pouco mais de conhecimento, como por exemplo: a calculadora cientifica. Um detalhe é que o livro ensina os passos para fazer os cálculos. Outra tecnologia que o livro traz é o uso do software Winplot na construção do gráfico da função seno, que assim como na calculadora, também ensina os passos para o uso do programa. Vejamos a seguir uma atividade em que a autoras ensinam a calcular as razoes trigonométricas na calculadora cientifica:



CALCULADORA

A calculadora e as razões trigonométricas

Na unidade anterior, você aprendeu a calcular funções trigonométricas usando dois tipos de calculadora. Agora vamos usar esse instrumento para resolver o problema contrário, ou seja, conhecido o valor do seno, do cosseno ou da tangente de um ângulo, é preciso determinar o valor do ângulo em graus ou em radianos.

Vejamos o problema a seguir.

Qual é o ângulo agudo que tem tangente igual a 3?

- Inicialmente, é preciso ajustar a calculadora para operar em graus ou em radianos, como fizemos na seção **Calculadora** da unidade 1.
- Em calculadoras como a do computador, existe uma tecla **INV**, que inverte a função que é digitada em seguida a ela. Se digitarmos **3 INV TAN** aparecerá no visor 71,57º, ou um valor próximo a esse, ou 1,249 rad, no caso da escolha pelo ângulo em radianos.
- As calculadoras científicas mais usuais possuem tecla **2nd**, **INV** ou **SHIFT**, que invertem as funções, mas que devem ser digitadas em ordem, como costumamos escrever a expressão que buscamos calcular.

SHIFT TAN 3 =

que fornece no visor 71,565...º ou 1,2490... rad.

De modo análogo, é possível determinar ângulos conhecidos sabendo os valores do seno ou do cosseno.

Exemplo:

Quais os ângulos agudos de um triângulo retângulo cujos lados têm 3, 4 e 5 unidades?

Ora, sen $\alpha = \frac{4}{5}$.

Teclando **4 ÷ 5 = SHIFT SIN**, obtemos no visor 53,13010236.

β
5
4
α
3

Imagens: Zapt

Isso significa que:

$\alpha \cong 53{,}13^\circ$ e $\beta = 90^\circ - \alpha \cong 36{,}87^\circ$.

Ou, em radianos, usando outra calculadora:

SHIFT SIN (4 ÷ 5) =

$\alpha \cong 0{,}9272$ rad e $\beta = \frac{\pi}{2} = \alpha \cong 0{,}6436$ rad.

Usando o que você aprendeu sobre a calculadora, determine α em graus e em radianos nos casos a seguir.

a) sen $\alpha = \frac{3\sqrt{7}}{8}$ b) cos $\alpha = \frac{1}{6}$ c) tg $\alpha = -1$

Agora, resolva novamente o problema 26 e determine o ângulo Â com o auxílio da calculadora.

62 | PARTE 1 TRIGONOMETRIA

(Anexo 7, p.72)

5.2. Abordagem do livro didático LD2 (Iezzi et al.)

Conhecimentos prévios

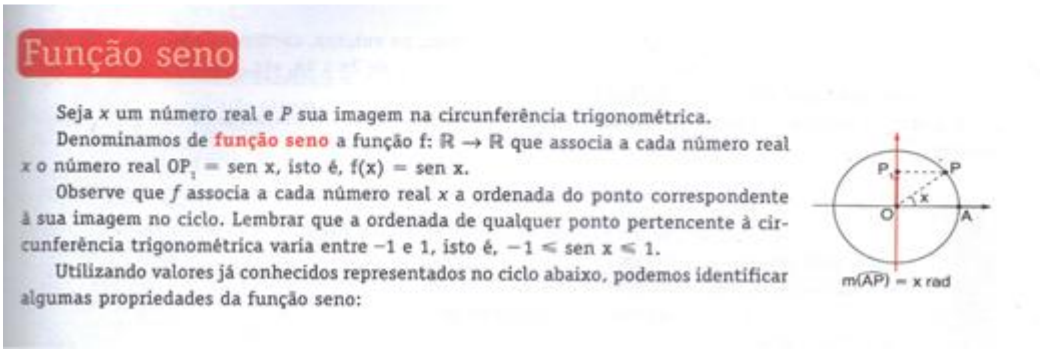
No livro do 1° ano os autores reservaram um capitulo (capitulo 13) sobre trigonometria, no qual trabalham asrazoem trigonométricas. Contudo antes deste capitulo os autores acharam prudente trazer um capitulo (capitulo 12) sobre semelhança de triângulos. Esse capitula 12, ainda mesmo que os autores tenham deixado a parte do conteúdo de trigonometria, consideramos como conhecimento prévio para introduzir o assunto.

No livro do 2° ano os autores dedicaram 5 capítulos para o estudo de trigonometria. No primeiro capítulo falam sobre circunferência trigonométrica, no segundo fala sobre razoes trigonométricas na circunferência e no terceiro capitulo fala sobre triângulos quaisquer (lei dos senos e lei dos cossenos). Não sabemos o porquê que os autores decidiram colocar triângulos quaisquer no 3° capitulo do 2° ano, mas o ideal, para que o aluno possa ter uma compreensão melhor já que é uma parte fundamental da trigonometria, é que esse assunto seja trabalhado junto com semelhança de triângulos e razoes trigonométrica. O autor também deu pouca relevância para esse assunto, pois segundo Elon Lages Lima “as leis dos senos e dos cossenos são o que de mais útil a trigonometria possui nas aplicações práticas para o aluno do ensino médio”.

Metodologia

Escolhemos como conteúdo, para analisar a metodologia, a função seno. A definição formal é dada logo no início da seguinte forma. Seja **x** um número real e **P** sua imagem na circunferência trigonométrica. Denominamos de **Função Seno** a função $f: R \to R$ que associa a cada$número$ real x o número real op_1= sen x, isto é, $f(x) = sen\, x$. Vale salientar que ao lado da definição, vem uma figura de uma circunferência no plano cartesiano, onde o ponto **o** é o centro da circunferência, tomando um ponto P na circunferência e um ponto P_1 no eixo Y e paralelo ao ponto P e x um ângulo formado com o eixo das abcissas e o ponto P.

Em seguida traz uma observação: que f associado a cada número real x, a ordenada do ponto correspondente à sua imagem no ciclo, e lembra que a ordenada de qualquer ponto pertencente à circunferência trigonométrica e varia entre -1 e 1, isto é, $-1 \leq \; sen\, x \; \leq 1$. Conforme descrito a seguir:


Função seno

Seja x um número real e P sua imagem na circunferência trigonométrica.

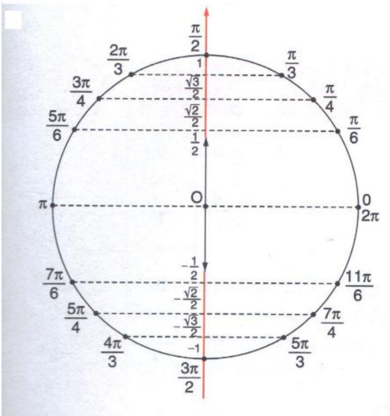
Denominamos de função seno a função f: ℝ → ℝ que associa a cada número real x o número real OP_1 = sen x, isto é, f(x) = sen x.

Observe que f associa a cada número real x a ordenada do ponto correspondente à sua imagem no ciclo. Lembrar que a ordenada de qualquer ponto pertencente à circunferência trigonométrica varia entre −1 e 1, isto é, −1 ≤ sen x ≤ 1.

Utilizando valores já conhecidos representados no ciclo abaixo, podemos identificar algumas propriedades da função seno:

(anexo 8, p. 73)

Em seguida é trabalhado com sinal da função. Onde é dada uma circunferência no plano cartesiano com centro em **o** e os seguintes pontos respetivamente 0, $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \pi, \frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{4}, \frac{11\pi}{6}, 2\pi$.Os autores descrevem que o sinal da funçãof dada por $f(x) = sen\, x$ é positivo quando x pertence ao 1° e 2° quadrante; e é negativo quando x pertence ao 3° e 4°. Em seguida descreve que 1° e 4° quadrante a função é crescente e no 2° e 3° a mesma é decrescente. Como descrito a seguir:



- O **sinal** da função f dada por $f(x) = \text{sen } x$ é positivo quando x pertence ao 1º e 2º quadrantes; e é negativo quando x pertence ao 3º e 4º quadrantes.
- No 1º quadrante, a função f é crescente, pois, à medida que x aumenta, os valores de sen x aumentam de 0 até 1; no 2º e 3º quadrantes, f é decrescente: à medida que x aumenta, os valores de $y = \text{sen } x$ diminuem de 1 (valor máximo) até -1 (valor mínimo); no 4º quadrante, a função retoma o crescimento e seus valores aumentam de -1 a 0.

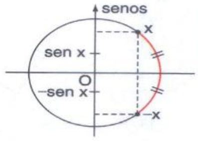
Em resumo, no 1º e 4º quadrantes f é **crescente** e no 2º e 3º quadrantes f é **decrescente**.

(Anexo 8, p.73)

Prosseguindo os autores descreve que a função seno é periódica e seu período é 2π. Mostrando que os números, para k inteiro, tem a mesma imagem no ciclo, logo $sen\, x = sen(x + k \cdot 2\pi)$. Descreve mais o domínio e ocontradomínio, que são iguais a R e o conjunto imagem da função seno, que tem como intervalo real [-1, 1], para todos x ϵ R. logo, temos que: $-1 \leq sen\, x \leq 1$.

Em seguida fala do gráfico da função, onde f é uma função ímpar, pois para todos $x \in IR$, temos $sen\,(-x) = -sen\, x$.Logo então é construído o gráfico de f, dado por $f(x) = sen\, x$, que recebe o nome de senoide. Isto considerando as propriedades anteriores. O autor ainda enfatiza que representa apenas um período de f, e que a senoíde continua para esquerda de 0 e para direita de 2π. Como descrito a seguir:

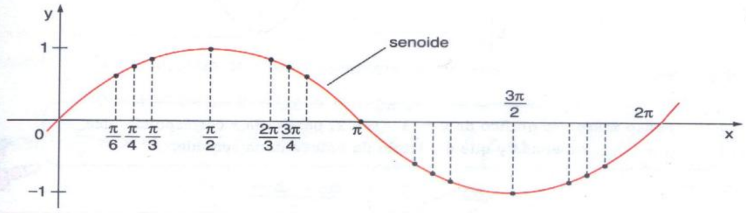
- A função seno é **periódica** e seu período é 2π.
De fato, os números reais x e $x + k \cdot 2\pi$, para k inteiro, têm a mesma imagem no ciclo e, portanto, $\text{sen } x = \text{sen } (x + k \cdot 2\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Assim, f é periódica e seu período p corresponde ao menor valor positivo de $k \cdot 2\pi$, que é 2π.
- O domínio e o contradomínio de f são iguais a $\mathbb{R}$.
No entanto, o conjunto imagem da função seno é o intervalo real $[-1, 1]$, pois $\forall\, x \in \mathbb{R}$, temos que: $-1 \leq \text{sen } x \leq 1$.



Pense nisto: A função seno é injetora? E sobrejetora?

- f é uma função **ímpar**, pois $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\text{sen } (-x) = -\text{sen } x$.

Levando em consideração todas as propriedades anteriores, construímos o gráfico de f, dado por $f(x) = \text{sen } x$, que recebe o nome de **senoide**.



(Anexo 8, p. 73)

Após ter trabalhado a explicação do conteúdo, os autores trazem uma lista de exercícios resolvidos, para então, trazer outra lista de exercícios e problemas para o aluno.

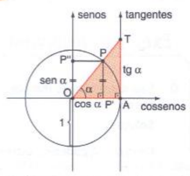
A linguagem do livro aparenta ser formal. Os autores definem o assunto trabalhado e algumas regras básicas e muitas vezes usam também uma linguagem matemática. Sabemos que muitos alunos do ensino médio possuem uma grande deficiência e este tipo de linguagem pode se torna difícil para sua compreensão. Como mostrado a seguir em explicação dos autores sobre relação entre tangente, seno e cosseno na pag. 33 e 34 no volume 2.

Relação entre tangente, seno e cosseno

Vamos estabelecer uma importante relação da trigonometria envolvendo as três razões apresentadas até aqui: seno, cosseno e tangente.

Seja α um número real, com $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ e $\alpha \neq \frac{3\pi}{2}$.

- Vamos supor que α seja distinto de 0, π e 2π. O número real α tem imagem em P, extremidade do arco de α rad.
Observando a figura ao lado, temos:
$OP' = \cos \alpha$ $\quad AT = \text{tg } \alpha$
$OP'' = PP' = \text{sen } \alpha$ $\quad OP = 1$ (raio)



Os triângulos OP'P e OAT são semelhantes, pois possuem em comum, além do ângulo reto, também o ângulo de medida α. Podemos, então, estabelecer a relação:

$$\frac{OP'}{OA} = \frac{P'P}{AT} \Rightarrow \frac{\cos \alpha}{1} = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{tg } \alpha} \Rightarrow \text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}$$

| 33 |

(Anexo 9, p. 74)

Se o ponto P pertence ao 2º, 3º ou 4º quadrantes, chega-se à mesma relação, usando procedimento análogo.

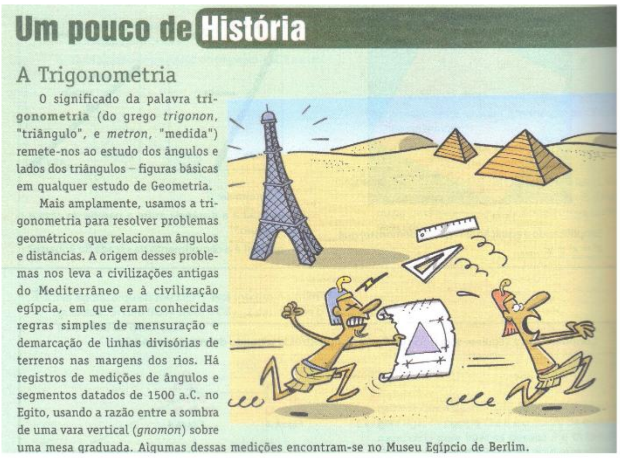
- Se $\alpha \in \{0, \pi, 2\pi\}$, temos que $\text{tg } \alpha = 0$, $\text{sen } \alpha = 0$ e $\cos \alpha \neq 0$; daí $\text{tg } \alpha = 0 = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}$.
- Se $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ou $\alpha = \frac{3\pi}{2}$, não se define a tangente.

Desse modo, se $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ e $\alpha \neq \frac{3\pi}{2}$, vale a relação $\boxed{\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}}$.

(Anexo 10, p. 76)

Historia

No volume 1 os autores trazem um resumo geral da história da trigonometria. No volume 2 na pag. 19 os autores trazem uma aplicação que envolve um pouco mais da história da trigonometria e da astronomia. Contudo percebemos que os autores não deram muita ênfase para a história da trigonometria já que no livro do 1° ano tem um capitulo e no livro do 2° tem 5 capítulos e quase nada está sendo trabalhado com a história da matemática. É descrito um pouco da históriavolume 1, como é apresentado a seguir:



Um pouco de História

A Trigonometria

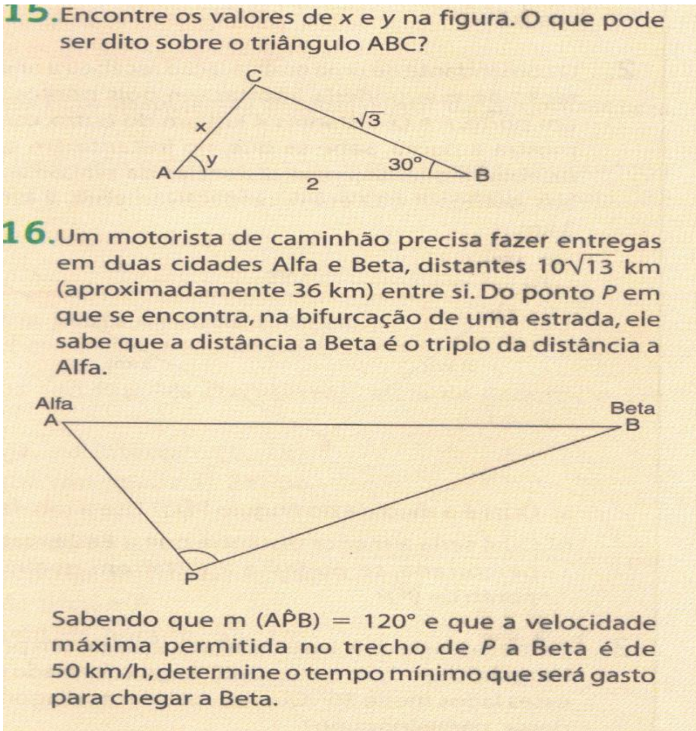
O significado da palavra **trigonometria** (do grego *trigonon*, "triângulo", e *metron*, "medida") remete-nos ao estudo dos ângulos e lados dos triângulos – figuras básicas em qualquer estudo de Geometria.

Mais amplamente, usamos a trigonometria para resolver problemas geométricos que relacionam ângulos e distâncias. A origem desses problemas nos leva a civilizações antigas do Mediterrâneo e à civilização egípcia, em que eram conhecidas regras simples de mensuração e demarcação de linhas divisórias de terrenos nas margens dos rios. Há registros de medições de ângulos e segmentos datados de 1500 a.C. no Egito, usando a razão entre a sombra de uma vara vertical (*gnomon*) sobre uma mesa graduada. Algumas dessas medições encontram-se no Museu Egípcio de Berlim.

(Anexo 11, p. 76)

Exercícios

Sabemos que hoje é importante um livro que valorize o papel do aluno. Porém, os autores deste livro deram pouca importância para isto. Na parte de trigonometria que foram analisadas no livro do 1° e 2° ano, observamos quevieram poucas aplicações e 2 desafios para o aluno. É importante frisar que o autor dedica ao conteúdo de trigonometria no livro do 1° ano da pag. 262 a 279 e no livro do 2° ano dedica 5 capítulos que vai da pag.8 a 78. Assim o livro traz algumas poucas questões de vestibular distribuídas entre os exercícios. Do Enem não traz nenhuma questão, embora que no manual do professor os autores afirmarem que a coleção foi uma referência para o ENEM. Enfim o livro traz muitos exercícios de fixação e contextualizados. Como é mostrado a seguir:



15. Encontre os valores de x e y na figura. O que pode ser dito sobre o triângulo ABC?

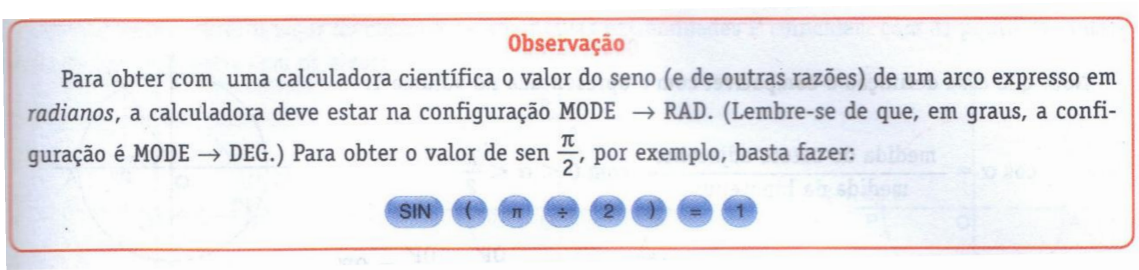
16. Um motorista de caminhão precisa fazer entregas em duas cidades Alfa e Beta, distantes $10\sqrt{13}$ km (aproximadamente 36 km) entre si. Do ponto P em que se encontra, na bifurcação de uma estrada, ele sabe que a distância a Beta é o triplo da distância a Alfa.

Sabendo que m $(A\hat{P}B)$ = 120° e que a velocidade máxima permitida no trecho de P a Beta é de 50 km/h, determine o tempo mínimo que será gasto para chegar a Beta.

(Anexo 12, p. 77)

Tecnologia

Nesta parte os autores não deram muita ênfase. Pois em algumas partes apenas é enfatizado o uso da calculadora cientifica. O bom é que, é mostrado como deve ser o procedimento para fazer o uso da calculadora cientifica. Como é indicado a seguir:



Observação

Para obter com uma calculadora científica o valor do seno (e de outras razões) de um arco expresso em *radianos*, a calculadora deve estar na configuração MODE → RAD. (Lembre-se de que, em graus, a configuração é MODE → DEG.) Para obter o valor de sen $\frac{\pi}{2}$, por exemplo, basta fazer:

SIN (π ÷ 2) = 1

(Anexo 13 p. 78)

5.3. Abordagem do livro didático LD3 (Dante)

Conhecimentos prévios

No volume 1, o autor considerou prudente trazer um capítulo sobre trigonometria. Onde ele trabalha com a ideia da tangente, do seno e cosseno e suas definições. Em seguida trabalha com a semelhança de triângulos. Neste capítulo, observamos que o autor está trabalhando com conhecimentos prévios.

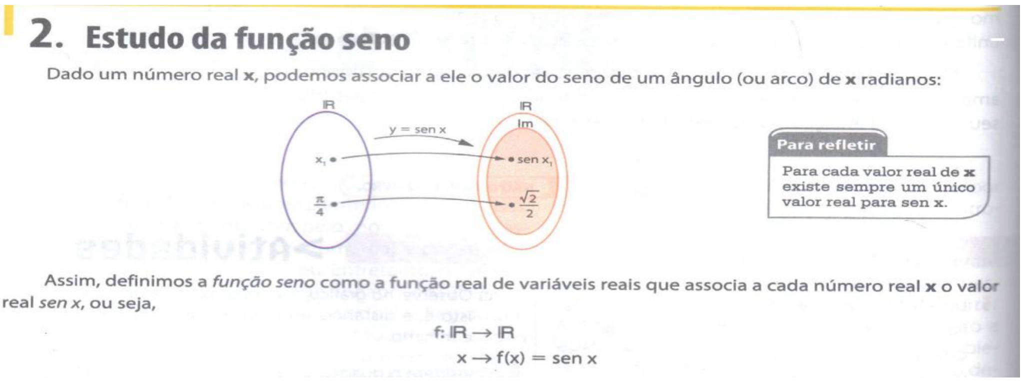
No livro do 2° ano o autor traz mais seis capítulos referentes ao conteúdo de trigonometria. Onde o primeiro capitula é referente a resolução de triângulos quaisquer. Frisando que antes de iniciar as leis do seno e do cosseno, conteúdo essencial para o ensino de trigonometria, o autor dar mais uma revisão sobre triângulos retângulos. Podemos observar a importância que o autor dar para esses conteúdos, que são necessários para que o aluno tenha uma boa compreensão de todo conteúdo de trigonometria.

Metodologia

O autor inicia a introdução do conteúdo com uma ideia, onde ele traz duas figuras que conhecemos como diagrama de flechas, assim como foi passado a ideia de função no primeiro ano do ensino médio. Onde ele traz como o domínio os seguintes elementos x_1 e$\frac{\pi}{4}$ e como contradomínio e imagem os seguintes elementos x_1 e $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Em seguida dá a definição formal. Definimos a função seno como a função de variáveis reais que associa a cada número real **x o** valor real sem x, ou seja, $f : R \to R$

X→ $f(x) = sen\ x$

Como descrito aseguir:


2. Estudo da função seno

Dado um número real **x**, podemos associar a ele o valor do seno de um ângulo (ou arco) de **x** radianos:

Assim, definimos a *função seno* como a função real de variáveis reais que associa a cada número real **x** o valor real *sen x*, ou seja,

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to f(x) = \text{sen } x$$

(Anexo 14, p. 79)

Em seguida é trabalhado o gráfico da função seno, onde o autor constrói uma tabela com os respectivos radianos, que ele chama de x, o, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \pi, \frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{4}, \frac{11\pi}{6}, 2\pi$. E seus respectivos valores, que ele chamou de $sen\ x$, 0,$\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}$, 1, $\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}$, o, - $\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}$, -1, - $\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}$, o. O autor acrescentou ainda na tabela os valores aproximados de $sen\ x$,que são os respectivos valores 0; 0,5; 0,7; 1; 0,9; 0,7; 0,5; 0; -0,5; -0,7; -0,9; -1; -0,9; -0,7; -0,5; 0. É importante frisar que o autor construiu o gráfico dessa forma por que ele já havia trabalhado esse assunto no capítulo 3 do livro do 2° ano. Em seguida o autor constrói o gráfico para $x \in R$.

Gráfico da função seno

Para construir o gráfico da função seno vamos construir uma tabela com valores de **x** da 1ª volta positiva. O seno, em alguns casos, será usado com valores aproximados.

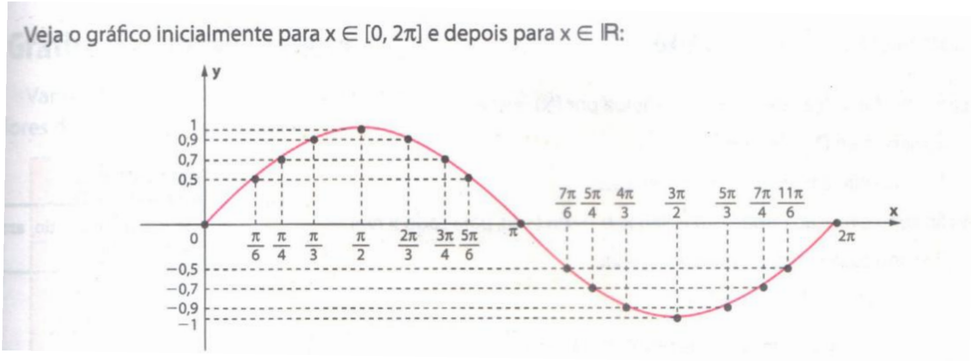
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
sen x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
sen x	0	0,5	0,7	0,9	1	0,9	0,7	0,5	0

x	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
sen x	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
sen x	$-0,5$	$-0,7$	$-0,9$	-1	$-0,9$	$-0,7$	$-0,5$	0

Matemática

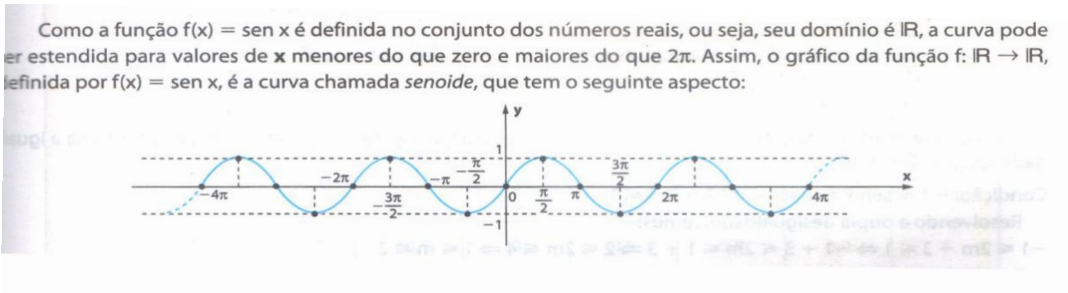
(Anexo 14, p. 79)

Vale salienta que o autor ainda descreve que $F(x) = sen\ x$ é definida nos conjuntos reais, isto é seu domínio é R, a curva pode ser estendida para valores menores que zero e ainda maiores que 2π. Sendo assim o gráfico da função $f: IR \rightarrow IR$, que é definida por $f(x) = sen\ x$, é uma curva chamada senoíde, que tem o aspecto descrito a seguir:



(Anexo 15, p. 80)

Em seguida o autor descreve a periodicidade da função seno, onde ele mostrar o gráfico da função que tem o intervalo de -2π a 4π e frisar que observando o gráfico vemos que a função é periodicamente nos respectivos intervalos ...,$[-2\pi. 0], [o, 2\pi], [2\pi, 4\pi]$, ...daí descreve que a função é periódica, como mostrado a seguir:



(Anexo 15, p. 81)

Continuando o autor trabalha com o sinal da função seno onde ele traz uma circunferência no plano cartesiano com o sinal de positivo + no primeiro e segundo quadrante e o sinal – no terceiro e quarto quadrante. Em seguida descreve que a função é positiva no 1° e 2° quadrante e negativa no 3° e 4° quadrante.

Finalizando o conteúdo da função seno o autor traz um resumo da função seno, onde ele descreve 6 itens. No primeiro que a função seno é uma função de IR em IR por $f(x) = sen\, x$. No segundo que o $D = IR\ e\ Im =$ [-1, 1]. No terceiro que a função seno não injetiva nem sobrejetiva. No quarto que a função seno é ímpar. No quinto que a função seno é periódica. No sexto $sen\, x\ =\ 0$, para x = Kπ, com k ∈ Z. $sen\, x\ >\ o$, para x do 1° e 2° quadrantes e para x = $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, com k ∈ Z. $sen\, x\ <\ o$Para x do 3° e 4° quadrantes e para $x\ =\ \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, com k ∈ Z. Como descrito a seguir:

Resumo sobre a função seno

1º) Função seno é a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = \text{sen } x$.

2º) A função seno tem $D = \mathbb{R}$ e $Im = [-1, 1]$.

3º) A função seno não é injetiva nem sobrejetiva.

4º) A função seno é função ímpar, isto é, $\text{sen } x = -\text{sen }(-x)$, para todo **x** real.

5º) A função seno é periódica de período $p = 2\pi$.

6º)
- $\text{sen } x = 0$, para $x = k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.
- $\text{sen } x > 0$, para **x** do 1º e 2º quadrantes e para $x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.
- $\text{sen } x < 0$, para **x** do 3º e 4º quadrantes e para $x = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

(Anexo 16, p. 81)

Após ter trabalhado com a explicação do conteúdo o autor traz uma questão resolvida e uma pequena lista de exercícios para o estudante. É importante frisar que o autor já havia trabalhado com o seno em capítulos anteriores.

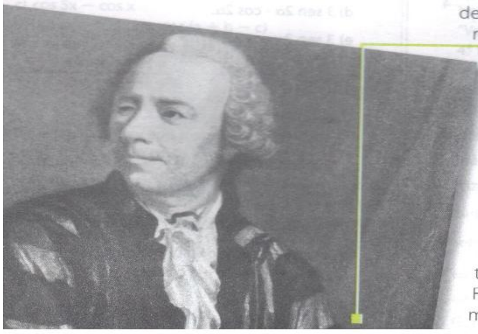
A linguagem aparenta ser informal, pois o autor traz conteúdos onde sãodadas as definições e regras. Contudo o autor trabalha com ideias, e faz o uso de figuras para auxiliar as definições. Também traz um pouco da história e alguns textos para ajudar a aproximação do aluno ao conteúdo.

Historia

Observamos que o autor deu grande importância para a história da matemática. Como já tínhamos falando antes o autor traz um capítulo sobre trigonometria no volume 1 e seis capítulos no volume 2. Foi observado que em cada capitulo o autor traz um pouco da história relacionada ao conteúdo transmitido. Podemos concluir com isso, que o autor procurou passar a história da matemática em conexão ao conteúdo dado. Um exemplo disso é que na introdução do sexto capitulo do volume 2, o autor traz texto um texto que aborda um pouco da história da trigonometria relacionada as funções trigonométricas.Em seguida, o mesmo introduziu as funções trigonométricas, como descritas a seguir:

De acordo com relatos de historiadores, em tempos muito distantes, anteriores à era cristã, o interesse do homem pelo movimento dos astros deu origem à Trigonometria, e por séculos esse vínculo permaneceu. Entretanto, no século XV, o matemático alemão Johannes Müller von Königsberg, também conhecido por Regiomontano, apresentou uma exposição sistemática dos métodos para resolver triângulos em seu trabalho De *Triangulis Omnimodis*, que foi considerado o marco do renascimento da Trigonometria por torná-la uma disciplina independente da Astronomia.

Mais tarde, em meados do século XVI, François Viète, advogado francês dedicado à pesquisa matemática, destacou-se por recorrer sistematicamente ao círculo trigonométrico e aplicar a Trigonometria na resolução de problemas algébricos, contribuindo, assim, com o desenvolvimento da Matemática. Todo esse processo culmina com a introdução do conceito de seno, cosseno e tangente como números reais, feita por Leonhard Euler (século XVIII), quando ele passa a considerar a circunferência trigonométrica de raio unitário.



A representação das relações trigonométricas na circunferência de raio unitário levou os matemáticos a estudarem seu comportamento, esboçando-as graficamente. Assim, foram identificadas como funções, sendo Gilles Roberval (matemático francês do século XVII) o primeiro a esboçar a curva do seno. O estudo das funções trigonométricas teve seu ápice com Joseph Fourier, no século XIX, no campo dos movimentos periódicos.

(anexo 17, p. 82)

Exercícios

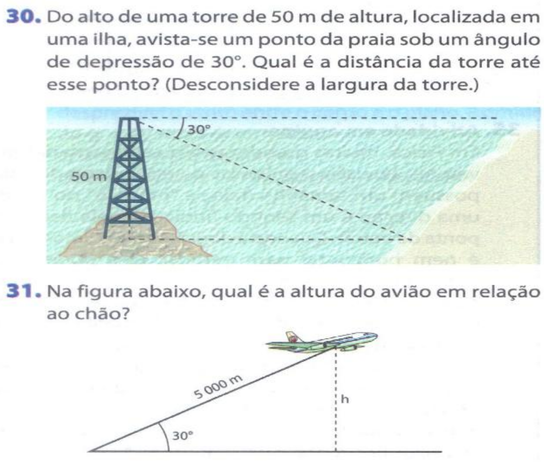
Durante os 7 capítulos relacionados ao conteúdo de trigonometria, que foram trabalhados tanto no volume 1 quanto no volume 2, observamos que o autor antes de começar a explicação de um determinado conteúdo, traz um atividade diferencial, onde ele convidar o aluno a participar com materiais manipulativos. Como é apresentado em uma das questões, a seguir:

2. Faça o que se pede em cada item:
   a) Construa, com régua e compasso, um triângulo ABC, sendo $\hat{A} = 45°$ e $\hat{B} = 75°$ (escolha um valor para a medida do lado $\overline{AB}$).
   b) Calcule a medida do terceiro ângulo desse triângulo.
   c) Meça com régua os comprimentos dos lados $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$.
   d) Procure na tabela trigonométrica da página 27 os valores dos senos dos ângulos desse triângulo.
   e) Divida a medida de cada lado pelo valor do seno do ângulo oposto a ele. Compare os resultados obtidos.
   f) Neste capítulo você verá que essa relação é verdadeira para qualquer triângulo. Crie um enunciado para ela.

(anexo 18, p. 83)

Este tipo de questão é muito bom, pois ajuda o aluno a pensar e fazer parte da construção do seu conhecimento, mas um detalhe que observamos, é que o autor acha que o aluno já conhece os materiais manipuláveis. Isso pode ser um grande problema, pois muitos alunos não têm o domínio desses materiais. O livro traz ainda uma “seção especial” chamada Tim-Tim por Tim-Tim. Nesta seção o autor traz um problema que vai investigar com aluno, onde incentivar a participação do aluno, além disso, no final de cada capitulo traz uma seção chamada A MATEMATICA E AS PRATICAS SOCIAIS, onde traz um texto de aplicação e incentiva a participação do aluno.

No final de cada capitulo o livro traz uma sequência de questões de vestibulares de todas as regiões do Brasil.O livro não traz questões do ENEM. Além disso, depois que é apresentando um conteúdo o livro traz muitos exercícios de fixação e questões contextualizadas, isto depois de ter sido apresentada as definições, regras e formulas relacionada ao assunto estudado. Como apresentado a seguir:



(anexo 19, p. 84)

Tecnologia

O autor não deu importância para o uso da tecnologia. O autor apenas convidar os leitores a ver mais sobre o assunto apresentado pesquisando em sites. Como mostrado a seguir:

VEJA MAIS SOBRE O ASSUNTO

Procure mais informações em jornais, revistas e nos *sites* www.zenite.nu, http://educacao.uol.com.br/biografias/ptolomeu.jhtm e www.mat.ufrgs.br/~portosil/aplcom1a.html.

(Anexo 20, p. 85)

5.4. Abordagem do livro didático LD4 (Joamir Roberto Souza)

Conhecimentos prévios

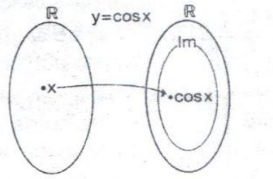
O autor apresentou o conteúdo de toda trigonometria em três capítulos. Um no volume 1 e dois capítulos no volume 2. O autor no volume 1 apresentou a trigonometria no triangulo, onde ele reapresentou o Teorema Tales, que também é trabalhado no ensino fundamental, que pode ser trabalhado com semelhança de triângulos. Embora que ele não tenha apresentado o conteúdo como semelhança de triângulos formalmente. Depois trabalhou com as leis dos senos e cossenos. Observamos que esses conteúdos são fundamentais para uma melhor compreensão. No volume 2 no primeiro capítulo o autor apresentou as funções circulares, e 2° capitulo apresentou o restante do conteúdo. Apesar de que o autor introduziu o conteúdo em apenas três capítulos, ele apresentou corretamente, pois tem os conhecimentos prévios que o aluno precisa para ter um bom desenvolvimento dos conteúdos.

Metodologia

Para a análise da metodologia escolhemos a função cosseno, onde logoao iniciar a apresentação do assunto, o autor dá a definição formal. Definimos como função cosseno a função f: $R \rightarrow R$, que associa cada numero real x ao correspondente cosseno de x, ou seja, $f(x) = cos\, x$. Seguido de uma figura do diagrama de flechas, como apresentado a ideia de função no primeiro ano. Onde apresenta o x como o domínio e o cosseno como a imagem. Como mostra a seguir:

Função cosseno

Definimos como **função cosseno** a função f: ℝ → ℝ, que associa cada número real x ao correspondente cosseno de x, ou seja, $f(x) = \cos x$.



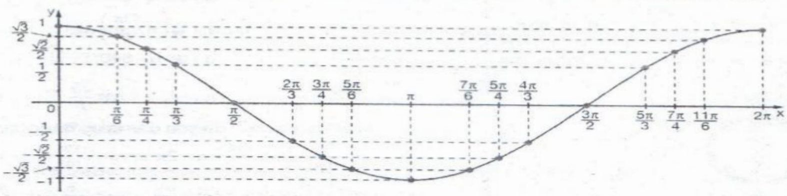
(Anexo 21, p. 86)

Em seguida o autor apresenta a construção do gráfico da função $f(x) = cosx$, onde ele construiu uma tabela com os seguintes elementos para x o, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \pi, \frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{4}, \frac{11\pi}{6}, 2\pi$ e para $Y = cos\, x$ seus respectivos valores 1, $\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}$, 0, $-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}$, - $\frac{\sqrt{3}}{2}$, -1, - $\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}$, - $\frac{1}{2}$, 0, $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e 1. O a autor ainda na mesma tabela constroi os valores de x e seus respectivos valores em Y (x,y) seguindo os seguintes pares ordenados (0,1), ($\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}$), ($\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}$), ($\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2}$), ($\frac{\pi}{2}$,0), ($\frac{2\pi}{3}$, $-\frac{1}{2}$), ($\frac{3\pi}{4}$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}$), ($\frac{5\pi}{6}$, $-\frac{\sqrt{3}}{2}$), (π,-1), ($\frac{7\pi}{6}$, - $\frac{\sqrt{3}}{2}$), ($\frac{5\pi}{4}$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}$), ($\frac{3\pi}{2}$,0), ($\frac{5\pi}{3}, \frac{1}{2}$), ($\frac{7\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}$), ($\frac{11\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}$), ($2\pi$, 0). Assim o gráfico inicia no eixo de y com o valor de 1 e vai decaindo, no ponto $\frac{\pi}{2}$ o gráfico atinge o valor de 0 e continua decaindo ante chegar ao ponto π onde atinge o valor de -1, em seguida o gráfico começa a crescer chegando ao valor 0 no ponto $\frac{3\pi}{2}$ e 1 no ponto 2π. Como mostra a seguir:

Inicialmente, vamos construir o gráfico $f(x) = \cos x$ para $x \in [0, 2\pi]$.

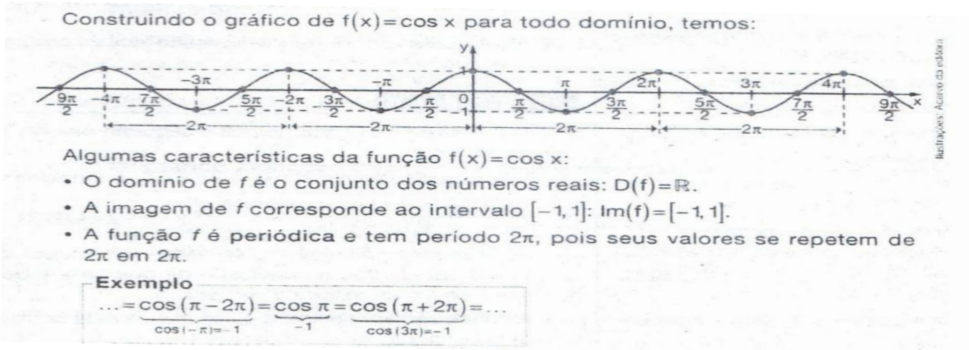
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
y = cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
(x, y)	(0, 1)	$\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$	$\left(\frac{2\pi}{3}, -\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{3\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(\frac{5\pi}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$(\pi, -1)$

x	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
y = cos x	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
(x, y)	$\left(\frac{7\pi}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\left(\frac{5\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(\frac{4\pi}{3}, -\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$	$\left(\frac{5\pi}{3}, \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{7\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(\frac{11\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$(2\pi, 1)$



(Anexo 21, p 86)

Continuando o autor apresenta o gráfico para todo domínio da função a direita de 0 e a esquerda de 0. Logo depois apresenta algumas características, como: domínio de f D(f)=R; a imagem Im(f)=[-1, 1]; o período 2π; que o gráfico da função cosseno é semelhante ao da função seno, Se o gráfico da função seno é transladado $\frac{\pi}{2}$ para esquerda; a função é par, pois para todo x ∈ D(f), f(x)=f(-x); que a função é crescente para x ∈ [-π+2kπ, 2kπ] e decrescente para x ∈ [2kπ, π+2kπ], para k ∈ Z; e ainda para k ∈ Z f(x)>0 para x∈]- $\frac{\pi}{2}$+2kπ,$\frac{\pi}{2}$+2kπ[e f(x)=<0 para x ∈]$\frac{\pi}{2}$+2kπ,$\frac{\pi}{2}$+2kπ[. Como é apresentado a seguir:


Construindo o gráfico de $f(x)=\cos x$ para todo domínio, temos:

Algumas características da função $f(x)=\cos x$:

- O domínio de f é o conjunto dos números reais: $D(f)=\mathbb{R}$.
- A imagem de f corresponde ao intervalo $[-1, 1]$: $Im(f)=[-1, 1]$.
- A função f é periódica e tem período 2π, pois seus valores se repetem de 2π em 2π.

Exemplo

$$\ldots=\underbrace{\cos(\pi-2\pi)}_{\cos(-\pi)=-1}=\underbrace{\cos\pi}_{-1}=\underbrace{\cos(\pi+2\pi)}_{\cos(3\pi)=-1}=\ldots$$

(Anexo 21, p. 86)

Para complementar o que foi trabalhado o autor traz duas atividades resolvidas e depois uma lista de exercícios.

Podemos ver que o autor apresenta o conteúdo de forma reduzida. É importante frisar que o autor na função seno trabalhou com uma ideia para dar a definição, já nas outras funções ele apresenta de uma forma direta.

A linguagem utilizada pelo o autor é menos formal, pois é uma linguagem acompanhada com problemas do cotidiano, um pouco da história em alguns conteúdos dados, e ainda alguns textos sobre a aplicação de trigonometria.

Historia

Nesta parte o autor traz um pouco da história em alguns pontos. Observamos que houve uma preocupação do autor em tenta relacionar o conteúdo trabalhado com a história. Como apresentado a seguir:

Os sete sábios da Antiguidade

Seja por sua influência, sabedoria, seja por suas grandes ideias, alguns estudiosos se destacaram na história. Dentre eles estão Biante, Cleóbulo, Mison, Pítaco, Quilon, Sólon e Tales. Esse grupo ficou conhecido como os sete sábios da Antiguidade, título proposto pelo filósofo grego Platão.

Séc. IV a.C. Museu Arqueológico Nacional, Nápoles. Foto: Raffaello Bencini/Alinari Archives/Other Images

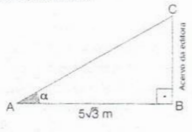
(Anexo 22, p. 87)

Exercícios

Ao autor no final de cada livro traz uma seção só de questões do ENEM e dos vestibulares. Além disso, o autor traz desafios e uma seção “explorando o tema” que ajuda o aluno pensar um pouco e participar da construção de seu conhecimento. Ele ainda após a apresentação de cada conteúdo, isto é das definições, regras formulas e atividades resolvidas, traz atividades de fixação e questões contextualizadas. Como apresentado a seguir:

ATIVIDADES Anote as respostas no caderno

38 Sabendo que no triângulo retângulo ABC, $\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{2}$ e $AB = 5\sqrt{3}$ m, calcule:



a) $\cos\alpha$

b) $\operatorname{tg}\alpha$

c) a medida da hipotenusa

d) a medida do cateto oposto a α

39 Se α e β são ângulos complementares, mostre que $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\beta}$.

Note que $\cos\beta = \frac{1}{\frac{1}{\cos\beta}}$.

40 **Desafio**

Em um triângulo retângulo de ângulos agudos α e β, a tangente de α é igual a $\frac{2}{3}$. Determine o seno de β.

277

(anexo 23, p. 88)

Tecnologia

Nesta parte o autor não deu muita ênfase para o uso da tecnologia. Nos três capítulos relacionados ao ensino da trigonometria ele só utilizou apenas uma vez a calculadora cientifica para obter o valor do seno e cosseno de 55°. Conforme pode ser observado a seguir:


Calculadora

Para o cálculo do seno ou do cosseno de um ângulo agudo, além da tabela trigonométrica, podemos utilizar uma calculadora científica. Veja o procedimento utilizado para o cálculo do seno e do cosseno de 55°.

Inicialmente pressionamos a tecla seno: sin

Oriente os alunos sobre como verificar se a calculadora está operando com a unidade de medida de ângulos em graus.

Em seguida, inserimos o número 55, correspondente a 55°: 5 → 5

Caso não haja calculadoras para todos os alunos, reúna-os em grupos para que possam realizar a atividade ou, então, veja a possibilidade de trazer algumas calculadoras para a sala de aula.

Por fim, pressionamos = para obter o valor de sen55°.

Para calcular cos55°, procedemos de maneira semelhante, utilizando desta vez a tecla cosseno:

cos → 5 → 5 → =

Peça aos alunos que comparem os resultados obtidos na calculadora científica com aqueles da tabela trigonométrica apresentada no início desta seção.

(anexo 24, p. 89)

6. Considerações finais

O objetivo deste trabalho foi fazer uma reflexão de comoos livros didáticos aborda o tópico de trigonometria no ensino médio, enfatizando que o conteúdo de trigonometria nos livros atuais vem uma pequena parte no livro do 1° ano médio ou no volume 1 e os demais conteúdos vem no livro do 2° ano ou no volume 2, exceto na coleção de Smole e Diniz, que trabalha o conteúdo de trigonometria nos três volumes. Faremos uma reflexão geral sobre os aspectos analisados particularmente em cada livro, pois os mesmos fazem parte de algumas das perspectiva e discussões atuais sobre o ensino- aprendizagem em matemática.

Observamos que os quatros livros analisados trazem os conhecimentos prévios necessários para a introdução de alguns conteúdos de trigonometria. Contudo faremos algumas observações da forma como cada livro aborda os conteúdos.

Na coleção de Smole e Diniz na primeira parte elas trazem dois capítulos onde o primeiro é sobre trigonometria no triangulo retângulo e o segundo é sobre as relações trigonométricas em um triângulo qualquer. Na segunda parte as autoras trazem quatro capítulos, onde no primeiro elas trazem algumas recordações sobre o triangulo retângulo para então introduzir o conteúdo de arcos de circunferências e os demais conteúdos.

Na coleção de Iezzi et al. observamos que no volume 1 os autores trazem um capítulo sobre a trigonometria no triangulo retângulo, contudo antes deste capitulo os mesmos trazem um capitulo aparte sobre semelhança de triângulos retângulos. No volume 2 os autores trazem mais cinco capítulos sobre o ensino de trigonometria, onde no primeiro ele trabalha a circunferência trigonométrica, no segundo razoes trigonométricas na circunferência, no terceiro triangulo quaisquer no restante os demais conteúdos. Observamos que seria melhor se os autores tivessem trabalhado os triângulos quaisquer junto com os dois capítulos do volume 1, pois este conteúdo é essencial para a compreensão dos conceitos da trigonometria.

Na coleção de Dante no volume 1 o autor traz um capítulo sobre a trigonometria no triangulo retângulo. No volume 2 o autor traz mais seis capítulos, onde o primeiro é trabalhado sobre a resolução de triângulos quaisquer e em seguida trabalha os demais conteúdos.

Na coleção Sousa o autor no volume 1 traz um capítulo sobre o ensino da trigonometria, onde é trabalhado a trigonometria no triangulo retângulo e no triangulo qualquer. No volume 2 são trabalhados mais dois capítulos, onde é trabalhado restante dos conteúdos.

Observamos que ao introduzir um assunto, Dante e Smole começam com uma ideia, e algumas considerações para então dar a definição formal do conteúdo. Iezzi et al.dá em primeiro lugar a definição formal do conteúdo, em seguida traz uma algumas considerações e uma figura para ilustração do assunto trabalhado. Sousa dá a definição formal e em seguida faz algumas considerações sobre o assunto trabalhado.

Sabemos que uma boa metodologia é fundamental para o envolvimento do aluno com o conteúdo trabalhado. Por isso é muito importante que a linguagem usada pelo autor seja uma linguagem mais próxima o possível do aluno. Dos livros analisados todos trouxeram conceitos e definições e regras relacionadas ao assunto trabalhado. Contudo autores: Smole, Dante e Souza fizeram um esforço a mais para aproximar a linguagem do aluno.

Todos os livros trazem a história da matemática. Contudo Dante sempre ao iniciar um novo capitula traz um pouco da história da matemática relacionada ao assunto trabalhado, com isso podemos entender que o autor relaciona a história da matemática ao conteúdo. Sousa, embora que não tenha trazido a história da matemática em cada capitulo como Dante fez, ele trouxe um pouco da história de acordo com alguns conteúdos que estava sendo trabalhado. Iezzi e Smole, embora que tenha trazido a história da matemática, não houve uma intenção dos autores em relacionar a história ao conteúdo trabalhado. Vejamos por exemplo Iezzi que traz um pouco da história trigonometria apenas no único capitulo trabalhado no volume 1. Vale salienta que em alguns textos de aplicação do assunto o autor relaciona algumas ideias de matemáticos do passado com atualidade.

Todos os livros analisados trazem vários problemas e exercícios de fixação. Trazem também questões de vestibulares e do ENEM. Exceto o de Iezzi e et al. que não traz questões do Enem. É importante frisar que todos os livros trazem bons exercícios que fazem que o aluno participe e seja o produto do seu conhecimento. Contudo Smole deu uma grande ênfase para esta parte onde ela trouxe em seu livro algumas “sessões especiais” que dá uma valorização maior para o aluno e que sem dúvidas isto diferencia dos demais livros.

Observamos que, embora que a tecnologia seja um tópico essencial que deve ser trabalhado no ensino médio, nos livros didáticos ainda não está sendo muito utilizada. Nas coleções de Souza e Iezzi trazem apenas um exercício do uso da calculadora cientifica. Na coleção de Dante, o autor não dá ênfase para o uso da tecnologia. A única coleção que trabalha a tecnologia de uma forma melhor é de Smole, pois a mesma traz algumas atividades ensinando o uso da calculadora cientifica e até mesmo uma atividade sobre o uso software winplot para a construção do gráfico da função seno.

Observa-se que de uma maneira geral nenhum dos livros analisados está totalmente de acordo com as novas diretrizes curriculares. Contudo podemos concluir que os livros da coleção de Smole e Diniz, são os que mais se aproxima dos PCNs para o ensino médio.

Na pesquisa percebemos que muitas das dificuldades relacionadas ao ensino-aprendizagem estão ligadas a metodologia adotada pelo professor e que muitas delas diminuirão, certamente, se os professores procurassem trabalhar com outras metodologias, além de aulas expositivas e exercícios.

Deste trabalhopodemos concluir de um modo geral, que se os professores continuarem adotando apenas os livros didáticos para o ensino, dificilmente vão procurar inserir novas metodologias em suas aulas.Por isso é necessário que haja um esforço maior dos professores em procurar conhecer novas metodologiaspara auxiliá-los no ensino, pois como podemos acompanhar na parte das metodologias alternativas deste trabalho, existem diferentes meios que vai ajudar os alunos a desenvolverem uma aprendizagem significativa.

7. Referencias

Berlinghoff, Willian P. **A matemática através dos tempos: um guia fácil e prático para professores e entusiastas**. 2ª ed. São Paulo, Blucher, 2010.

Boyer, Carl B. **História da matemática**. Revista por Uta C. Merzbach;

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica.**Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias**.Brasília, 2006. 135 p. (orientações curriculares para o ensino médio; volume 2)

Cajorin, Florian. **Uma História da Matemática**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda.,2007.

Dante, Luís Roberto. **Matemática: contexto e aplicações**. 1 ed. São Paulo: Ática, 2010. (Volume 1 e 2).

FURASTÉ. **Normas técnicas para o trabalho cientifico**. 17ª ed.

Iezzi, Gelson. Et al. **Matemática: ciências e aplicações.** 6 ed. São Paulo Saraiva, 2010. (Volume 1 e 2).

LIMA, Elon Lages. **Análise de livros de matemática para o ensino médio**, Rio de Janeiro, 2001.

LINDEGGER, Luís Roberto de Moura. **Construindo os conceitos básicos da trigonometria no triangulo retângulo**: uma proposta a partir da manipulação de modelos. Dissertação (mestrado em educação), PUC, São Paulo, 2000.

Lorenzato, Sergio**. O laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. – Campinas, SP: Autores Associados, 2006. (Coleção formação de professores)

NASCIMENTO, Mauricio Alves. **ENSINO-APRENDIZAGEM DE TRIGONOMETRIA ATRAVES DA RESOLUÇAO E EXPLORAÇAO DE PROBLEMAS E COTIDIANO ESCOLAR**. Dissertação (mestrado em educação), Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Estadual da Paraíba, Campina grande, 2014.

OLIVEIRA, Francisco Canindé. **DIFICULDADES NO PROCESSO ENSINO APRENDIZAGEM DE TRIGONOMETRIA POR MEIO DE ATIVIDADES**. Dissertação (mestrado em educação), Centro de Ciências Exatas e da Terra, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2006.

PEREIRA, Cicero da Silva. **APRENDIZAGEM EM TRIGONOMETRIA NO ENSINO MEDIO**: CONTRIBUIÇOES DA TEORIA DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA. 2011. Dissertação (mestrado em educação). Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2011.

Smole, Kátia Cristina Stocco; Diniz, Maria Ignez de Souza. **Matemática: ensino médio.** 6 ed. São Paulo: Saraiva, 2010. (Volume 1, 2 e 3).

Soares, Eduardo Sarquis. **Ensinar matemática-desafios e possibilidades**. Belo Horizonte: dimensão, 2009.

Souza, Joamir Roberto de. **Novo olhar matemática.** 1 ed. São Paulo: FTD, 2010. (Volume 1 e 2).

UMA PASSAGEM secreta para o mundo do triângulo. **Cálculos.** São Paulo: Segmento, n. 24, janeiro, 2013.

8. Anexo

Anexo 1 - primeira parte do questionário aplicados aos alunos da UEPB.

Universidade ESTADUAL DA PARAÍBA

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA

CAMPUS I- CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMATICA

O presente instrumento de pesquisa é parte integrante de trabalho de conclusão de curso(TCC) de Licenciatura Plena em Matemática, referente ao ensino-aprendizagem de trigonometria.

Acadêmico: Everton de Sousa Santos

Orientador: Prof. Dr. Silvanio de Andrade

QUESTIONÁRIO SOBRE A EXPERIÊNCIA DE ALUNOS UNIVERSITÁRIOS COM O ENSINO-APRENDIZAGEM DA TRIGONOMETRIA

Questões

1. Você estudou o conteúdo de trigonometria no ensino médio? ( ) sim ( ) Não
2. Como lhe foi ensinado tal conteúdo no ensino médio?
3. Como lhe foi ensinado tal conteúdo na universidade?
4. Você teve facilidades ou dificuldades com o aprendizado da trigonometria? Quais? E seus colegas?
5. Você teve mais dificuldades ou facilidades com a trigonometria do ensino médio ou da universidade? Qual diferença do que você estudou de trigonometria no ensino médio e na universidade?

Anexo 2- segunda parte do questionário aplicados aos alunos da UEPB.

6. Qual a importância de estudarmos o conteúdo de trigonometria?
____
____
____

7. Como o que você estudou sobre trigonometria pode contribuir na sua formação como professor de Matemática e na sua prática de sala de aula?
____
____
____

8. Como podemos colaborar para um melhor aprendizado dos alunos na trigonometria? Como auxiliá-los na superação das suas possíveis dificuldades?
____
____
____

9. Para você, o que seria um bom ensino de trigonometria?
____
____
____

10. Como você avalia o conteúdo e a forma de apresentação da trigonometria no livro didático? Justifique sua resposta.
____
____
____
____

Anexo 3 - pagina 31 do livro: Smole, Kátia Cristina Stocco; Diniz, Maria Ignez de Souza. **Matemática: ensino médio.** 6 ed. São Paulo: Saraiva, 2010. (volume 2).

UNIDADE 2

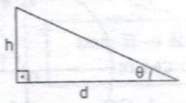
Funções trigonométricas: definição, periodicidade e gráfico

A definição das funções trigonométricas seno, cosseno e tangente é o foco desta unidade, assim como a análise das principais características dessas funções para utilização na próxima unidade, para a resolução de equações e inequações trigonométricas.

Peter Christopher/Masterfile/Other Images

1. Funções trigonométricas

No ciclismo, é comum representar a inclinação de um trecho na forma de uma percentagem. Essa porcentagem é a tangente do ângulo da subida (θ na figura a seguir), expressa como percentagem. Um trecho plano tem 0% de inclinação; uma subida de 45° ($tg(\theta) = 1$) tem 100% de inclinação.



$$tg\,\theta = \frac{h}{d}$$

Em provas como o Tour de France, é comum dar classificações aos trechos de subida. A classificação varia de prova para prova. No Tour de France, por exemplo, existem subidas Cat 4 (mais fácil), Cat 3, Cat 2, Cat 1 e HC (mais difícil). A sigla HC significa *hors catégorie* (sem categoria) e corresponde a subidas muito acentuadas com 15 km a 20 km de comprimento e com inclinações passando de 10%. Qual será a inclinação θ de uma subida de categoria HC nessa famosa prova de ciclismo?

Nesta unidade, serão estudadas as funções **seno, cosseno** e **tangente** nos círculos trigonométricos e voltaremos para responder a essa questão.

Essas funções têm aplicações não apenas dentro dos estudos da Matemática. Por exemplo, a Física as utiliza bastante em suas fórmulas, como:

$$v_x = v \cdot \cos\theta \qquad v_y = v \cdot \text{sen}\,\theta$$

$$a = g \cdot tg\,\theta \qquad F_{at} = \mu \cdot P \cdot \cos\theta$$

$$tg\,\theta = \frac{v^2}{R \cdot g} \qquad \tau_F = F \cdot d \cdot \cos\theta \quad \text{etc.}$$

Essas são algumas das fórmulas estudadas na Cinemática e na Dinâmica – partes da Mecânica que analisam os movimentos.

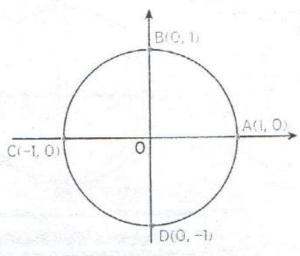
PARA LER

Se você estiver lendo *O jeito matemático de pensar*, de Renato J. Costa Valladares, leia o capítulo 3, que fala sobre a relação entre a Matemática, questões culturais e questões técnicas.

2. Função seno

Consideremos um círculo trigonométrico, centrado na origem O de um sistema cartesiano ortogonal e com a origem A dos arcos no semieixo positivo das abscissas.

Lembrando que no círculo trigonométrico o raio é tomado como uma unidade de comprimento, então o ponto A tem coordenadas (1, 0).



Imagens: Zapt

Anexo 4- pagina 32 do livro: Smole, Kátia Cristina Stocco; Diniz, Maria Ignez de Souza. **Matemática: ensino médio.** 6 ed. São Paulo: Saraiva, 2010. (Volume 2).

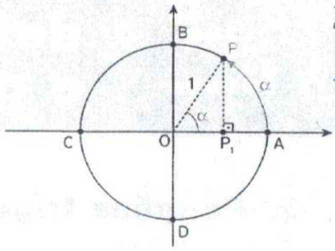
Na figura, α é a medida do ângulo agudo $A\hat{O}P$ e o $\triangle OP_1P$ é retângulo. Assim, para esse triângulo podemos escrever:

$$\text{sen } \alpha = \frac{P_1P}{OP}$$

Sendo $OP = 1$ e P_1P a ordenada de P, temos $\text{sen } \alpha = \frac{P_1P}{1} = P_1P$.

Portanto: sen α = ordenada de P

Podemos, então, ampliar o conceito de seno para qualquer número real α, usando a ordenada de P, imagem de α no círculo trigonométrico.



Imagens: Zapt

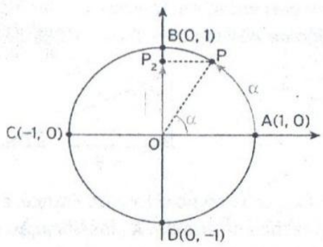
Função seno (sen) é a função, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, que a todo número α associa a ordenada do ponto P, imagem de α no círculo trigonométrico.

$$\boxed{\begin{aligned} \text{sen}: \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ \alpha &\mapsto \text{sen } \alpha = OP_2 \end{aligned}}$$

OP_2 é a medida algébrica do segmento OP_2 quando o raio é tomado como unidade.

Dizemos também que OP_2 é o seno de $A\hat{O}P$ ou de $\overset{\frown}{AP}$ e indicamos:

$$\boxed{\text{sen } A\hat{O}P = \text{sen } \overset{\frown}{AP} = OP_2}$$



O eixo Oy passa a ser denominado **eixo dos senos**.

Casos particulares

No quadro anterior, a figura nos permite observar que, quando α assume os valores zero, $\frac{\pi}{2}$, π ou $\frac{3\pi}{2}$, o ponto P coincide, respectivamente, com A(1, 0), B(0, 1), C(–1, 0) e D(0, –1). Nesse caso, temos:

$$\text{sen } 0 = \text{sen } 0° = 0 \qquad \text{sen } \pi = \text{sen } 180° = 0$$

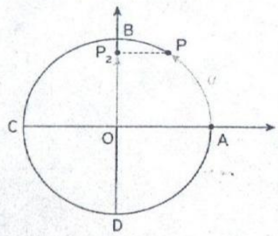
$$\text{sen } \frac{\pi}{2} = \text{sen } 90° = 1 \qquad \text{sen } \frac{3\pi}{2} = \text{sen } 270° = -1$$

Usualmente, as três funções (seno, cosseno e tangente) são apresentadas de uma só vez. No entanto, conhecendo a dificuldade dos alunos para compreender a passagem do sen α, com α no círculo trigonométrico, para a função seno, optamos por desenvolver uma função de cada vez, detalhando mais a primeira delas (a função seno) e deixando mais espaço para que o próprio aluno desenvolva o estudo das outras duas. Dessa forma, o aluno tem três chances distintas para se familiarizar com as funções trigonométricas e, portanto, mais possibilidade de aprender.

Sinal da função seno

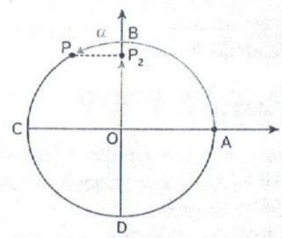
Vamos analisar o sinal de sen α quando P, imagem de α no círculo trigonométrico, pertence a cada um dos quadrantes. Em cada figura, P_2 é a projeção ortogonal de P sobre o eixo dos senos.

P no 1º quadrante



$$\boxed{P_2 \text{ acima de O} \Rightarrow \text{sen } \alpha > 0}$$

P no 2º quadrante



$$\boxed{P_2 \text{ acima de O} \Rightarrow \text{sen } \alpha > 0}$$

Sempre que possível, oriente os alunos a "lerem" as imagens do livro. Isso ajuda a perceberem que o livro é um recurso para estudo.

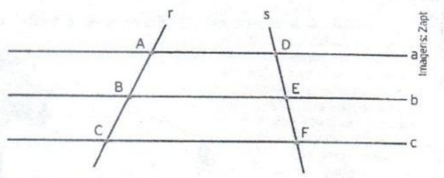
32 | PARTE 1 TRIGONOMETRIA

Anexo 5- pagina 239 do livro: Smole, Kátia Cristina Stocco; Diniz, Maria Ignez de Souza. **Matemática: ensino médio.** 6 ed. São Paulo: Saraiva, 2010. (volume 1).

3. Teorema de Tales

Tales de Mileto, um dos primeiros matemáticos dos quais temos notícia, formulou um importante teorema para a Geometria, que está relacionado com grandezas diretamente proporcionais.

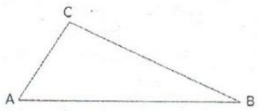
Na figura ao lado, temos um feixe de retas paralelas cortadas por duas transversais.



Segundo o teorema de Tales, se um feixe de retas paralelas é cortado por duas transversais *r* e *s*, então as medidas dos segmentos de *r* determinados pelo feixe são diretamente proporcionais aos comprimentos dos segmentos correspondentes de *s*.

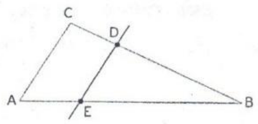
$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF} \quad \text{ou} \quad \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$$

Uma consequência do teorema de Tales aparece em uma propriedade geométrica relacionada à semelhança de triângulos.



Lembrando que dois triângulos são semelhantes quando os lados de um são proporcionais aos lados do outro e os ângulos correspondentes são congruentes, considere um triângulo qualquer cortado por uma reta paralela a um dos lados.

Se $\overline{DE} \,//\, \overline{AC}$, então $\frac{BE}{AB} = \frac{BD}{CB} = \frac{DE}{AC}$ e os ângulos correspondentes dos $\triangle BDE$ e $\triangle BCA$ são congruentes.



Podemos então dizer que, dividindo um triângulo com uma reta paralela a qualquer um dos seus lados, os triângulos resultantes são semelhantes. No exemplo dado, representamos essa relação de semelhança assim: $\triangle BDE \sim \triangle BCA$.

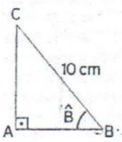
> **Tales de Mileto** (640-546 a.C.) é conhecido como o primeiro dos "sete sábios" da Grécia Antiga.
>
> Considerado o primeiro filósofo, é a ele que se atribui a introdução na Grécia do estudo de Geometria. Era um homem de reconhecida inteligência, que se dedicou a diversas atividades. Foi comerciante, homem de Estado, filósofo, engenheiro, astrônomo e matemático. Em sua meia-idade, dedicou-se ao comércio e suas atividades o levaram ao Egito, onde estudou as ciências físicas e matemáticas com os sacerdotes. Os historiadores da época relatam que Tales não demorou a superar seus mestres e a conquistar a admiração do rei Amásis, por ter sido capaz de medir as alturas das pirâmides a partir das sombras daqueles monumentos.
>
> As aplicações da Geometria em situações práticas foram um de seus grandes feitos. Ele usou conhecimentos sobre triângulos semelhantes para calcular distâncias inacessíveis, como a distância de navios à praia.
>
> Com Tales tem início o estudo científico da Astronomia. Ele se tornou célebre ao prever um eclipse solar, que viria a ocorrer em 585 a.C. Conta-se dele que, enquanto caminhava durante uma noite contemplando as estrelas, caiu em um fosso. Uma senhora que o acudiu comentou: "Como pode saber das coisas do céu quando não sabe o que passa sob seus pés?".

Anexo 6- pagina 244 do livro: Smole, Kátia Cristina Stocco; Diniz, Maria Ignez de Souza. **Matemática: ensino médio.** 6 ed. São Paulo: Saraiva, 2010. (Volume 1).

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

ER8. Em um triângulo retângulo, a hipotenusa mede 10 cm e o seno de um dos ângulos agudos vale 0,8. Calcule as medidas dos catetos.

Resolução



Seja sen $\hat{B} = 0,8$. Então:

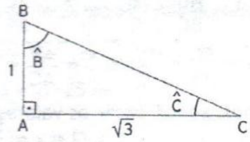
sen $\hat{B} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow 0,8 = \frac{AC}{10} \Rightarrow AC = 8$ cm

Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$(AB)^2 + (AC)^2 = (BC)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (AB)^2 + 8^2 = 10^2 \Rightarrow AB = 6$ cm

ER9. Calcule as medidas dos ângulos agudos do triângulo retângulo.



Resolução

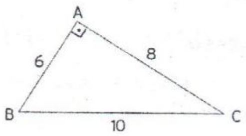
tg $\hat{B} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow$ tg $\hat{B} = \sqrt{3} \Rightarrow \hat{B} = 60°$

Como $\hat{B} + \hat{C} = 90°$, então $\hat{C} = 30°$.

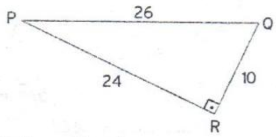
PROBLEMAS E EXERCÍCIOS

18. Calcule o seno, o cosseno e a tangente de cada ângulo agudo.

a)

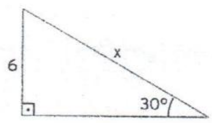


b)

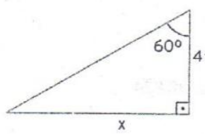


19. Calcule o valor de x.

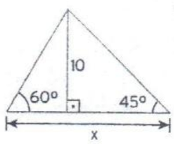
a)



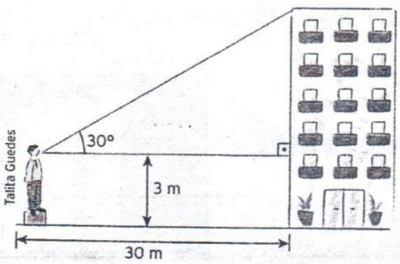
b)



c)



20. (FOC-SP) Para determinar a altura de um edifício, um observador coloca-se a 30 m de distância e assim o observa segundo um ângulo de 30°, conforme mostra a figura.



Dados:

sen $30° = \frac{1}{2}$ e

cos $30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Calcule a altura do edifício medida a partir do solo.

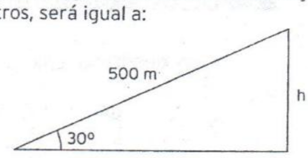
21. Em um triângulo retângulo, um cateto mede 10 cm e o cosseno do ângulo agudo adjacente a ele vale 0,6. Calcule as medidas dos outros lados.

22. Em um triângulo retângulo, os catetos medem 9 m e $9\sqrt{3}$ m. Calcule os ângulos agudos desse triângulo.

23. Em um retângulo, uma diagonal mede 12 m e forma um ângulo de 30° com um dos lados. Calcule o perímetro desse retângulo.

24. (PUC-MG – 2007) Um avião levanta voo sob um ângulo de 30°. Então, depois que tiver percorrido 500 m, conforme indicado na figura, sua altura h em relação ao solo, em metros, será igual a:

a) 250.
b) 300.
c) 400.
d) 435.



Considere sen 30° = 0,50 ou cos 30° = 0,87.

25. Em um triângulo retângulo ABC, a hipotenusa $\overline{BC}$ e o cateto $\overline{AB}$ medem 14 cm e 8 cm, respectivamente. Nesse triângulo, é traçada a altura $\overline{AH}$. Calcule AH e CH.

26. (UECE) A base de um triângulo isósceles mede 12 cm, e o ângulo oposto à base mede 120°. Então, determine a medida dos lados congruentes do triângulo.

27. Em um paralelogramo de dimensões 6 cm e 8 cm, um ângulo mede 30°. Calcule as medidas das alturas desse paralelogramo.

Anexo 7- pagina62 do livro: Smole, Kátia Cristina Stocco; Diniz, Maria Ignez de Souza. **Matemática: ensino médio.** 6 ed. São Paulo: Saraiva, 2010. (Volume 2).

palavras-chave

As palavras-chave desta unidade são:

- **Função seno**
- **Função cosseno**
- **Função tangente**

Escreva sobre elas em seu caderno e ilustre com exemplos e com os gráficos dessas funções.

Um bom resumo pode auxiliá-lo a rever tudo que foi estudado e se tornar fonte de consulta para a continuidade do estudo da Trigonometria na próxima unidade.

CALCULADORA

A calculadora e as razões trigonométricas

Na unidade anterior, você aprendeu a calcular funções trigonométricas usando dois tipos de calculadora. Agora vamos usar esse instrumento para resolver o problema contrário, ou seja, conhecido o valor do seno, do cosseno ou da tangente de um ângulo, é preciso determinar o valor do ângulo em graus ou em radianos.

Vejamos o problema a seguir.

Qual é o ângulo agudo que tem tangente igual a 3?

- Inicialmente, é preciso ajustar a calculadora para operar em graus ou em radianos, como fizemos na seção **Calculadora** da unidade 1.
- Em calculadoras como a do computador, existe uma tecla **INV**, que inverte a função que é digitada em seguida a ela. Se digitarmos **3** **INV** **TAN** aparecerá no visor 71,57º, ou um valor próximo a esse, ou 1,249 rad, no caso da escolha pelo ângulo em radianos.
- As calculadoras científicas mais usuais possuem tecla **2nd**, **INV** ou **SHIFT**, que invertem as funções, mas que devem ser digitadas em ordem, como costumamos escrever a expressão que buscamos calcular.

SHIFT **TAN** **3** **=**

que fornece no visor 71,565...º ou 1,2490... rad.

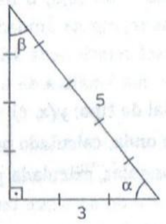
De modo análogo, é possível determinar ângulos conhecidos sabendo os valores do seno ou do cosseno.

Exemplo:

Quais os ângulos agudos de um triângulo retângulo cujos lados têm 3, 4 e 5 unidades?

Ora, sen $\alpha = \frac{4}{5}$.

Teclando **4** **÷** **5** **=** **SHIFT** **SIN**, obtemos no visor 53,13010236.



Isso significa que:

$\alpha \cong 53{,}13º$ e $\beta = 90º - \alpha \cong 36{,}87º$.

Ou, em radianos, usando outra calculadora:

SHIFT **SIN** **(** **4** **÷** **5** **)** **=**

$\alpha \cong 0{,}9272$ rad e $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha \cong 0{,}6436$ rad.

Usando o que você aprendeu sobre a calculadora, determine α em graus e em radianos nos casos a seguir.

a) $\text{sen}\ \alpha = \frac{3\sqrt{7}}{8}$ b) $\cos \alpha = \frac{1}{6}$ c) $\text{tg}\ \alpha = -1$

Agora, resolva novamente o problema 26 e determine o ângulo $\hat{A}$ com o auxílio da calculadora.

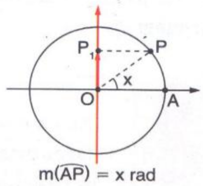
Anexo 8- pagina 57 do livro: Iezzi, Gelson. Et al. **Matemática: ciências e aplicações.** 6 ed. São Paulo Saraiva, 2010. (Volume 2)

Função seno

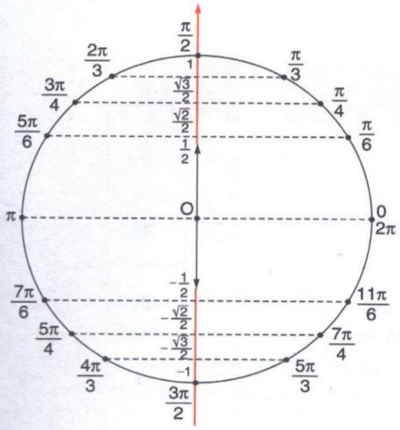
Seja x um número real e P sua imagem na circunferência trigonométrica.

Denominamos de **função seno** a função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que associa a cada número real x o número real OP_1 = sen x, isto é, f(x) = sen x.

Observe que f associa a cada número real x a ordenada do ponto correspondente à sua imagem no ciclo. Lembrar que a ordenada de qualquer ponto pertencente à circunferência trigonométrica varia entre −1 e 1, isto é, $-1 \leq \text{sen } x \leq 1$.



Utilizando valores já conhecidos representados no ciclo abaixo, podemos identificar algumas propriedades da função seno:



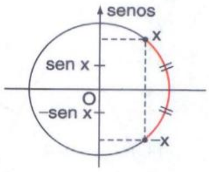
- O **sinal** da função f dada por f(x) = sen x é positivo quando x pertence ao 1º e 2º quadrantes; e é negativo quando x pertence ao 3º e 4º quadrantes.
- No 1º quadrante, a função f é crescente, pois, à medida que x aumenta, os valores de sen x aumentam de 0 até 1; no 2º e 3º quadrantes, f é decrescente: à medida que x aumenta, os valores de y = sen x diminuem de 1 (valor máximo) até −1 (valor mínimo); no 4º quadrante, a função retoma o crescimento e seus valores aumentam de −1 a 0.

  Em resumo, no 1º e 4º quadrantes f é **crescente** e no 2º e 3º quadrantes f é **decrescente**.

- A função seno é **periódica** e seu período é 2π.

  De fato, os números reais x e $x + k \cdot 2\pi$, para k inteiro, têm a mesma imagem no ciclo e, portanto, sen x = sen $(x + k \cdot 2\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Assim, f é periódica e seu período p corresponde ao menor valor positivo de $k \cdot 2\pi$, que é 2π.

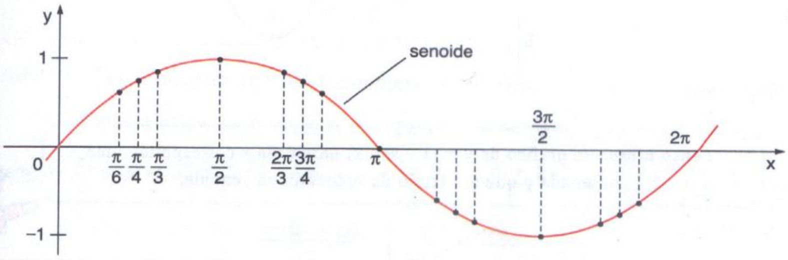
- O domínio e o contradomínio de f são iguais a $\mathbb{R}$. No entanto, o conjunto imagem da função seno é o intervalo real [−1, 1], pois $\forall\, x \in \mathbb{R}$, temos que: $-1 \leq \text{sen } x \leq 1$.



Pense nisto: A função seno é injetora? E sobrejetora?

- f é uma função **ímpar**, pois $\forall\, x \in \mathbb{R}$, sen (−x) = −sen x.

Levando em consideração todas as propriedades anteriores, construímos o gráfico de f, dado por f(x) = sen x, que recebe o nome de **senoide**.



| 57 |

Anexo 9- pagina 33 do livro: Iezzi, Gelson. Et al. **Matemática: ciências e aplicações.** 6 ed. São Paulo Saraiva, 2010. (Volume 2).

Exercício resolvido

5. Com o auxílio da tabela, encontre o valor de tg 290°.

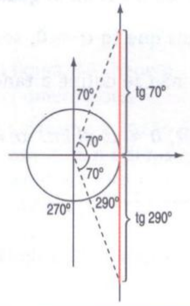
Solução:

Da figura, concluímos que tg 290° = – tg 70°;

observe que 360° – 70° = 290°.

Consultando a tabela, vem:

$$\text{tg } 290° = -2{,}74748$$



Exercícios

28. Calcule, se existir:

a) tg 120°
b) tg 180°
c) tg 210°
d) tg 90°
e) tg 240°

29. Calcule, se existir:

a) $\text{tg } \frac{3\pi}{2}$
b) tg 0
c) $\text{tg } \frac{5\pi}{3}$
d) $\text{tg } \frac{3\pi}{4}$
e) $\text{tg } \frac{11\pi}{6}$

30. Sendo x = 30°, calcule o valor da expressão:

$$y = \frac{2 \text{ sen } x - 4 \cos x + \text{tg } 2x}{\cos 4x - \text{sen } 2x}$$

31. Dê o sinal de:

a) tg 200°
b) tg 310°
c) tg 4
d) tg 2
e) tg 1

32. Classifique como verdadeiras (V) ou falsas (F) as afirmações seguintes:

a) tg 100° < tg 105°
b) tg 20° > tg 25°
c) Existem dois números reais no intervalo $[0, 2\pi[$ cuja tangente vale 3.
d) tg 80° < sen 80°
e) tg 250° > 0
f) tg 2π não existe.

33. Mostre, geometricamente, que $\text{tg } \frac{\pi}{4} = 1$.

Relação entre tangente, seno e cosseno

Vamos estabelecer uma importante relação da trigonometria envolvendo as três razões apresentadas até aqui: seno, cosseno e tangente.

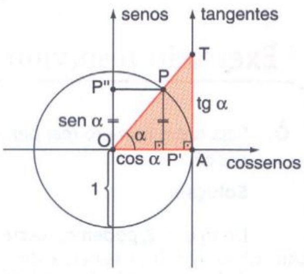
Seja α um número real, com $0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ e $\alpha \neq \frac{3\pi}{2}$.

- Vamos supor que α seja distinto de 0, π e 2π. O número real α tem imagem em P, extremidade do arco de α rad.

Observando a figura ao lado, temos:

OP' = cos α AT = tg α

OP'' = PP' = sen α OP = 1 (raio)



Os triângulos OP'P e OAT são semelhantes, pois possuem em comum, além do ângulo reto, também o ângulo de medida α. Podemos, então, estabelecer a relação:

$$\frac{OP'}{OA} = \frac{P'P}{AT} \Rightarrow \frac{\cos \alpha}{1} = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{tg } \alpha} \Rightarrow \text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}$$

Anexo 10–pagina 34 do livro: Iezzi, Gelson. Et al. **Matemática: ciências e aplicações.** 6 ed. São Paulo Saraiva, 2010. (Volume 2).

Se o ponto P pertence ao 2º, 3º ou 4º quadrantes, chega-se à mesma relação, usando procedimento análogo.

- Se $\alpha \in \{0, \pi, 2\pi\}$, temos que $\text{tg}\ \alpha = 0$, $\text{sen}\ \alpha = 0$ e $\cos \alpha \neq 0$; daí $\text{tg}\ \alpha = 0 = \dfrac{\text{sen}\ \alpha}{\cos \alpha}$.
- Se $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ ou $\alpha = \dfrac{3\pi}{2}$, não se define a tangente.

Desse modo, se $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$, $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2}$ e $\alpha \neq \dfrac{3\pi}{2}$, vale a relação $\boxed{\text{tg}\ \alpha = \dfrac{\text{sen}\ \alpha}{\cos \alpha}}$.

Observação

Quando estudamos a trigonometria no triângulo retângulo, no volume 1 desta coleção, definimos, para um ângulo agudo α:

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}$$

Note que essa definição é compatível com a relação apresentada.

De fato, considerando o triângulo retângulo OPP' da figura anterior, temos:

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{\overset{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{PP'}}{\underset{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}{OP'}} = \frac{OP''}{OP'} = \frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos \alpha}$$

4 Exemplo

- Se $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$, então $\text{tg}\ \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\text{sen}\ \frac{\pi}{3}}{\cos \frac{\pi}{3}} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$.
- Se $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$, então $\text{tg}\ \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\text{sen}\ \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{4}} = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$.
- Se $\alpha = 40°$, então $\text{tg}\ 40° = \dfrac{\text{sen}\ 40°}{\cos 40°}$

Consultando a tabela trigonométrica, obtemos:

$$\text{tg}\ 40° = \frac{0{,}64279}{0{,}76604} = 0{,}83910762\ \ldots \text{ (compare com o valor da tabela).}$$

Exercício resolvido

6. Seja α um número real pertencente ao intervalo $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Sabendo que $\text{tg}\ \alpha = 2$, qual é o valor de $\text{sen}\ \alpha$? E de $\cos \alpha$?

Solução:

De $\text{tg}\ \alpha = 2$, podemos escrever $\dfrac{\text{sen}\ \alpha}{\cos \alpha} = 2 \Rightarrow \text{sen}\ \alpha = 2 \cdot \cos \alpha$.

Aplicando a relação fundamental da trigonometria ($\text{sen}^2\ \alpha + \cos^2 \alpha = 1$), vem:

$$(2 \cos \alpha)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow 4 \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow 5 \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos \alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{5}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$$

Como $\alpha \in$ 1º quadrante, temos $\cos \alpha > 0$ e, assim, $\cos \alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$ e $\text{sen}\ \alpha = 2 \cdot \dfrac{\sqrt{5}}{5} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

| 34 |

Anexo 11–pagina 262do livro: Iezzi, Gelson. Et al. **Matemática: ciências e aplicações.** 6 ed. São Paulo Saraiva, 2010.(volume 1).

MILTON RODRIGUES

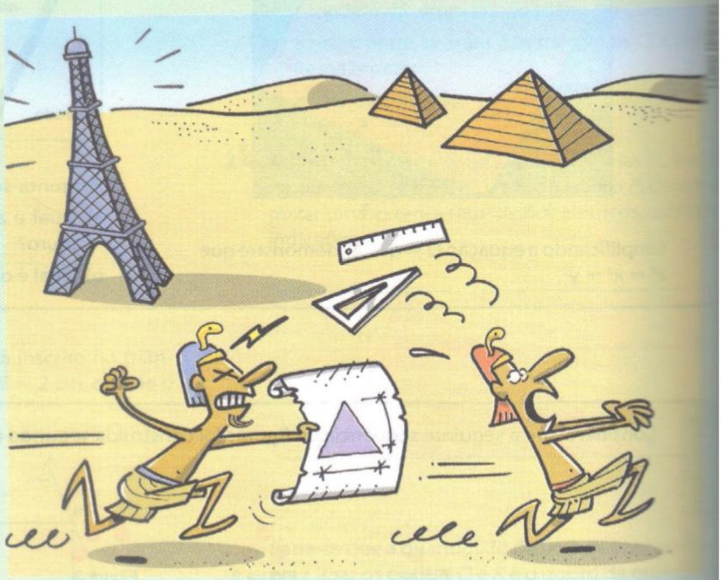
Trigonometria no triângulo retângulo 13

Neste capítulo, antes de iniciar o estudo da Trigonometria no triângulo retângulo, vamos conhecer um pouco da história do desenvolvimento desta importante área da Matemática.

Um pouco de História

A Trigonometria

O significado da palavra **trigonometria** (do grego *trigonon*, "triângulo", e *metron*, "medida") remete-nos ao estudo dos ângulos e lados dos triângulos – figuras básicas em qualquer estudo de Geometria.



Mais amplamente, usamos a trigonometria para resolver problemas geométricos que relacionam ângulos e distâncias. A origem desses problemas nos leva a civilizações antigas do Mediterrâneo e à civilização egípcia, em que eram conhecidas regras simples de mensuração e demarcação de linhas divisórias de terrenos nas margens dos rios. Há registros de medições de ângulos e segmentos datados de 1500 a.C. no Egito, usando a razão entre a sombra de uma vara vertical (*gnomon*) sobre uma mesa graduada. Algumas dessas medições encontram-se no Museu Egípcio de Berlim.

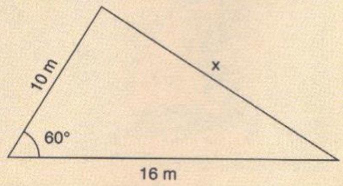
Também teria surgido no Egito um dos primeiros instrumentos conhecidos para medir ângulos, cham groma, que teria sido empregado na construção das grandes pirâmides.

Anexo 12- pagina 49 do livro: Iezzi, Gelson. Et al. **Matemática: ciências e aplicações.** 6 ed. São Paulo Saraiva, 2010. (Volume 2).

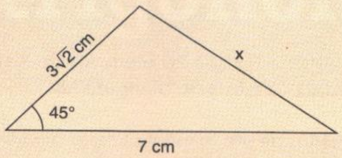
Exercícios

10. Determine o valor de x em cada caso:

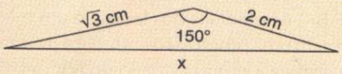
a)



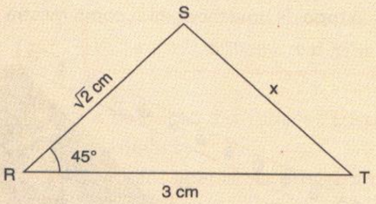
b)



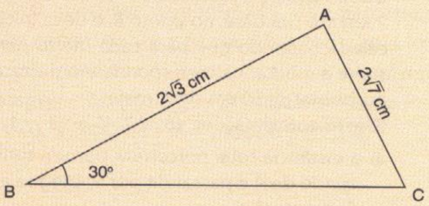
c)



11. Obtenha o perímetro do triângulo RST seguinte.

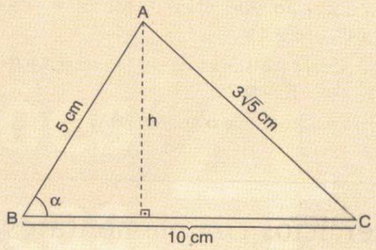


12. Calcule a medida do lado $\overline{BC}$ do triângulo seguinte.



13. O acesso ao aeroporto de uma cidade é feito por duas vias de contorno retilíneo que se cruzam segundo um ângulo de 53°. A primeira tem 2,1 km de extensão, e a outra, 3,5 km de extensão. As vias têm origem em dois postos de gasolina. Qual é a distância entre esses postos? Use a aproximação $\cos 53° = 0,6$.

14. Na figura, sendo m $(A\hat{B}C) = \alpha$, determine:

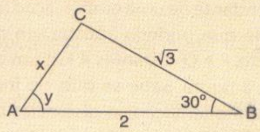


a) $\cos \alpha$.

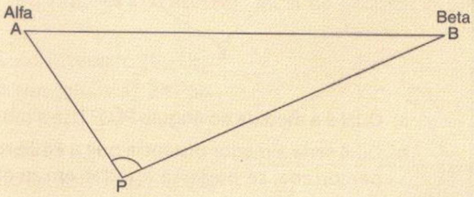
b) o valor de h.

c) a área do triângulo ABC.

15. Encontre os valores de x e y na figura. O que pode ser dito sobre o triângulo ABC?

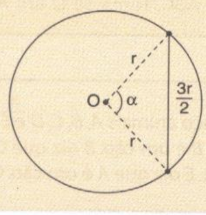


16. Um motorista de caminhão precisa fazer entregas em duas cidades Alfa e Beta, distantes $10\sqrt{13}$ km (aproximadamente 36 km) entre si. Do ponto P em que se encontra, na bifurcação de uma estrada, ele sabe que a distância a Beta é o triplo da distância a Alfa.



Sabendo que m $(A\hat{P}B) = 120°$ e que a velocidade máxima permitida no trecho de P a Beta é de 50 km/h, determine o tempo mínimo que será gasto para chegar a Beta.

17. (F.C.M. Santa Casa-SP) Considerando a figura abaixo, qual o valor de sen α?



Anexo 13- pagina 25 do livro: Iezzi, Gelson. Et al. **Matemática: ciências e aplicações**6 ed. São Paulo Saraiva, 2010. (Volume 2).

Observação

Para obter com uma calculadora científica o valor do seno (e de outras razões) de um arco expresso em *radianos*, a calculadora deve estar na configuração MODE $\rightarrow$ RAD. (Lembre-se de que, em graus, a configuração é MODE $\rightarrow$ DEG.) Para obter o valor de sen $\frac{\pi}{2}$, por exemplo, basta fazer:

SIN (π ÷ 2) = 1

Exercícios

1. Calcule o valor da seguinte expressão:

$$y = \frac{\text{sen } 0 + \text{sen } \frac{\pi}{2} - \text{sen } \frac{3\pi}{2}}{2 \cdot \text{sen } \frac{\pi}{6}}$$

2. Dê o valor de:

a) sen $\frac{3\pi}{2}$
b) sen π
c) sen 120°
d) sen 150°
e) sen 225°
f) sen 300°
g) sen 2π
h) sen 330°

3. Localize os números reais $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ e $\frac{5\pi}{3}$ na circunferência trigonométrica. Em seguida, forneça o seno de cada um deles.

4. Identifique os pares de medidas de arcos que possuem o mesmo seno:

$\frac{2\pi}{3}$ rad $\frac{5\pi}{4}$ rad $\frac{4\pi}{3}$ rad

$\frac{5\pi}{3}$ rad $\frac{7\pi}{4}$ rad $\frac{\pi}{3}$ rad

5. Sem consultar a tabela, compare os pares de valores seguintes:

a) sen 75° e sen 85°
b) sen 100° e sen 170°
c) sen 260° e sen 250°
d) sen 300° e sen 290°

6. Com auxílio da tabela do início do livro, calcule:

a) sen 130°
b) sen 230°
c) sen 320°
d) sen $\frac{\pi}{5}$
e) sen $\frac{3\pi}{5}$

7. Determine o sinal de:

a) sen 3°
b) sen 3
c) sen 5
d) sen 100°
e) sen 200°

8. Sabendo que sen $\frac{\pi}{7} = a$, responda:

a) $a > 0$ ou $a < 0$?
b) qual é o valor de sen $\frac{8\pi}{7}$, em função de *a*?

9. Resolva as equações seguintes, sendo $U = [0, 2\pi[$.

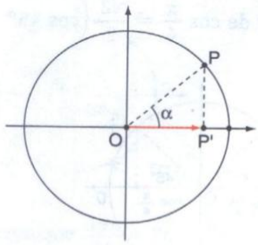
a) sen $x = \frac{1}{2}$
b) sen $x = 0$
c) sen $x = -1$
d) sen $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Cosseno

Seja *P* um ponto sobre a circunferência trigonométrica, imagem do número real α, $0 \leq \alpha \leq 2\pi$.

Ao projetarmos ortogonalmente esse ponto *P* sobre o eixo horizontal, obtemos o ponto *P'*.

À medida algébrica do segmento $\overline{OP'}$, considerando a orientação do eixo, damos o nome de **cosseno de α**.



m $(\widehat{AP}) = \alpha$ rad
m $(A\hat{O}P) = \alpha$ rad

Escrevemos:

$\boxed{\cos \alpha = OP'}$ ou $\boxed{\cos \widehat{AP} = OP'}$ ou $\boxed{\cos A\hat{O}P = OP'}$

A partir desse momento, o eixo horizontal será chamado **eixo dos cossenos**.

Pense nisto: cos α = abscissa do ponto *P*.

25

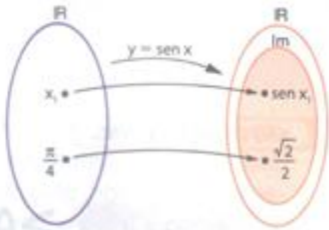
Anexo 14- pagina 80 do livro: Dante, Luís Roberto. **Matemática: contexto e aplicações**. 1 ed. São Paulo: Ática, 2010. (volume 2).

1. Introdução

Agora que sabemos como obter valores de senos, cossenos e tangentes para números reais, podemos defini-los como *funções trigonométricas*. Essencialmente, é apenas uma formalização maior em torno do que foi visto no capítulo 3, agora sob o ponto de vista de funções. Assim, estudaremos neste capítulo a *função seno*, a *função cosseno* e outras decorrentes destas.

2. Estudo da função seno

Dado um número real **x**, podemos associar a ele o valor do seno de um ângulo (ou arco) de **x** radianos:



Para refletir

Para cada valor real de **x** existe sempre um único valor real para sen **x**.

Assim, definimos a *função seno* como a função real de variáveis reais que associa a cada número real **x** o valor real *sen x*, ou seja,

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to f(x) = \text{sen } x$$

Já estudamos o processo que permite associar um número real **x** à medida **x** de um ângulo (ou arco) para posterior obtenção do valor sen x. Estudamos também como obter os valores sen x para quaisquer valores **x** de medidas de ângulos (ou arcos). Lembramos que **x**, medida de ângulo (ou arco), é expresso em radianos.

Gráfico da função seno

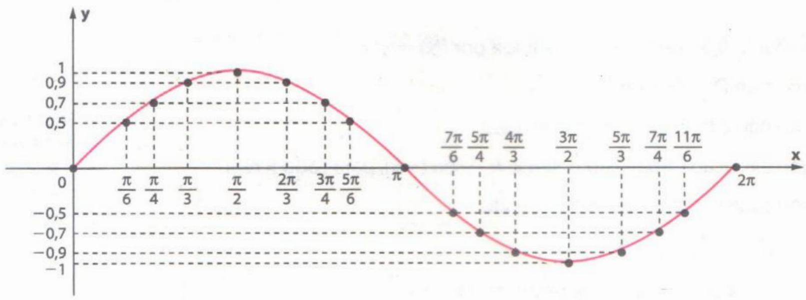
Para construir o gráfico da função seno vamos construir uma tabela com valores de **x** da 1ª volta positiva. O seno, em alguns casos, será usado com valores aproximados.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
sen x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
sen x	0	0,5	0,7	0,9	1	0,9	0,7	0,5	0

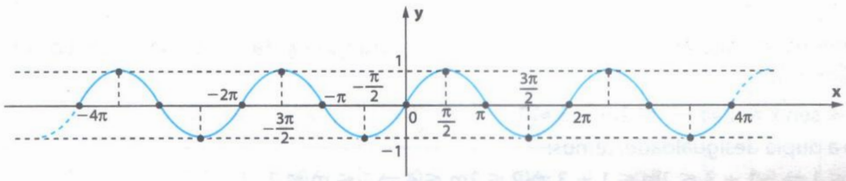
x	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
sen x	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	−1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
sen x	−0,5	−0,7	−0,9	−1	−0,9	−0,7	−0,5	0

Anexo 15- pagina 81 do livro: Dante, Luís Roberto. **Matemática: contexto e aplicações**. 1 ed. São Paulo: Ática, 2010. (Volume 2).

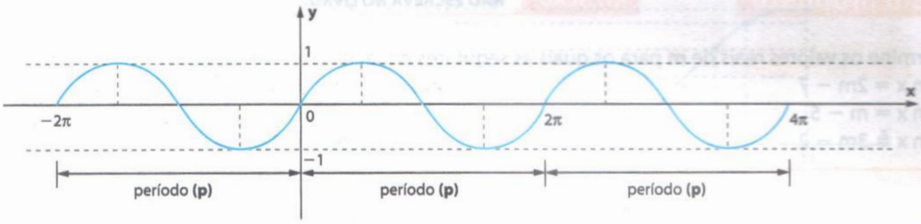
Veja o gráfico inicialmente para $x \in [0, 2\pi]$ e depois para $x \in \mathbb{R}$:



Como a função $f(x) = \text{sen } x$ é definida no conjunto dos números reais, ou seja, seu domínio é $\mathbb{R}$, a curva pode ser estendida para valores de **x** menores do que zero e maiores do que 2π. Assim, o gráfico da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \text{sen } x$, é a curva chamada *senoide*, que tem o seguinte aspecto:



Periodicidade da função seno



Observando o gráfico da função seno, vemos que a função repete periodicamente seus valores nos intervalos ..., $[-2\pi, 0]$, $[0, 2\pi]$, $[2\pi, 4\pi]$, ... Daí dizermos que a função seno é *periódica*.

Observe no gráfico que:

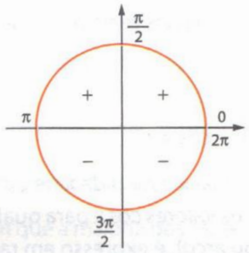
$$\text{sen } x = \text{sen } (x + 2\pi) = \text{sen } (x + 4\pi) = \ldots \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

Dizemos então que o *período* da função seno é 2π e indicamos assim: $p = 2\pi$.

Para encontrar o período basta observar no gráfico o deslocamento horizontal necessário para que ele comece a se repetir.

Sinal da função seno

Observando o sinal da função seno, vemos que a função é *positiva* para valores do 1º e 2º quadrantes e *negativa* para valores do 3º e 4º quadrantes.



Para refletir

Quais são os valores de sen x para $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \pi$, $x = \frac{3\pi}{2}$ e seus arcos côngruos?

Anexo 16- pagina 82 do livro: Dante, Luís Roberto. **Matemática: contexto e aplicações**. 1 ed. São Paulo: Ática, 2010. (Volume 2).

Resumo sobre a função seno

1º) Função seno é a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = \text{sen}\, x$.

2º) A função seno tem $D = \mathbb{R}$ e $Im = [-1, 1]$.

3º) A função seno não é injetiva nem sobrejetiva.

4º) A função seno é função ímpar, isto é, $\text{sen}\, x = -\text{sen}\,(-x)$, para todo **x** real.

5º) A função seno é periódica de período $p = 2\pi$.

6º)
- $\text{sen}\, x = 0$, para $x = k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.
- $\text{sen}\, x > 0$, para **x** do 1º e 2º quadrantes e para $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.
- $\text{sen}\, x < 0$, para **x** do 3º e 4º quadrantes e para $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Para refletir

x é a medida d

em radianos.

Exemplo:

Vamos determinar os valores reais que **m** pode assumir para que exista um número real **x** que satisfaça a igualdade $\text{sen}\, x = 2m - 3$.

Condição: $-1 \leq \text{sen}\, x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq 2m - 3 \leq 1$

Resolvendo a dupla desigualdade, temos:

$-1 \leq 2m - 3 \leq 1 \Rightarrow -1 + 3 \leq 2m \leq 1 + 3 \Rightarrow 2 \leq 2m \leq 4 \Rightarrow 1 \leq m \leq 2$

Logo, os valores de **m** são dados pelo conjunto $\{m \in \mathbb{R} \mid 1 \leq m \leq 2\}$.

Exercício proposto

ATENÇÃO! NÃO ESCREVA NO LIVRO.

1. Determine os valores reais de **m** para os quais as seguintes equações tenham solução:

a) $\text{sen}\, x = 2m - 7$

b) $\text{sen}\, x = m - 5$

c) $\text{sen}\, x = 3m - 2$

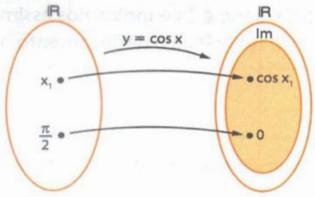
d) $\text{sen}\, x = m^2 + m - 1$

e) $\text{sen}\, x = m^2 - 1$

f) $4m + \text{sen}\, x = 1$

3. Estudo da função cosseno

Dado um número real **x**, podemos associar a ele o valor do cosseno de um ângulo (ou arco) de **x** radianos:



Para refletir

Para cada valor real de **x** existe sempre um único valor real para cos x.

Assim, definimos a *função cosseno* como a função real de variáveis reais que associa a cada número real **x** o valor real *cos x*, ou seja,

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \rightarrow f(x) = \cos x$$

Já estudamos o processo que permite associar um número real **x** à medida **x** de um ângulo (ou arco) para posterior obtenção do valor cos x. Estudamos também como obter os valores cos x para quaisquer valores **x** de medidas de ângulos (ou arcos). Lembramos que **x**, medida de ângulo (ou arco), é expresso em radianos.

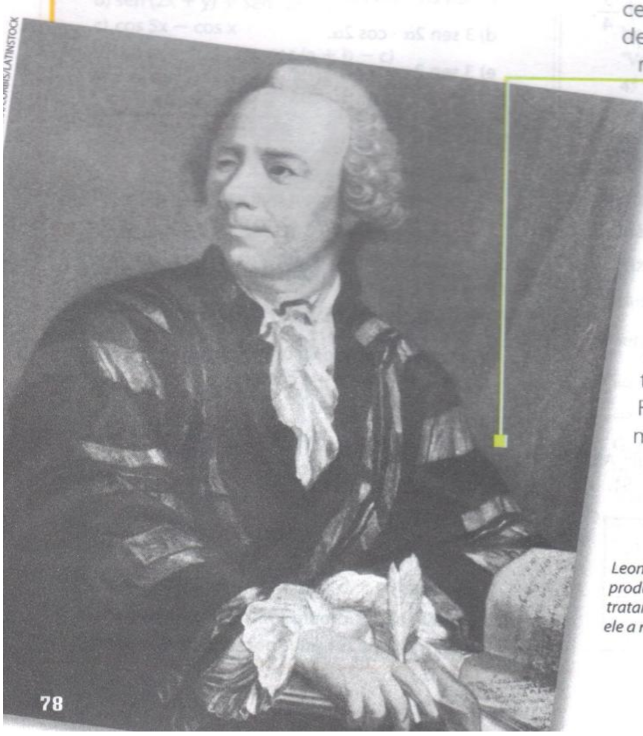
Anexo 17- pagina 78 do livro: Dante, Luís Roberto. **Matemática: contexto e aplicações**. 1 ed. São Paulo: Ática, 2010. (Volume 2).

AS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

De acordo com relatos de historiadores, em tempos muito distantes, anteriores à era cristã, o interesse do homem pelo movimento dos astros deu origem à Trigonometria, e por séculos esse vínculo permaneceu. Entretanto, no século XV, o matemático alemão Johannes Müller von Königsberg, também conhecido por Regiomontano, apresentou uma exposição sistemática dos métodos para resolver triângulos em seu trabalho De *Triangulis Omnimodis*, que foi considerado o marco do renascimento da Trigonometria por torná-la uma disciplina independente da Astronomia.

Mais tarde, em meados do século XVI, François Viète, advogado francês dedicado à pesquisa matemática, destacou-se por recorrer sistematicamente ao círculo trigonométrico e aplicar a Trigonometria na resolução de problemas algébricos, contribuindo, assim, com o desenvolvimento da Matemática. Todo esse processo culmina com a introdução do conceito de seno, cosseno e tangente como números reais, feita por Leonhard Euler (século XVIII), quando ele passa a considerar a circunferência trigonométrica de raio unitário.

A representação das relações trigonométricas na circunferência de raio unitário levou os matemáticos a estudarem seu comportamento, esboçando-as graficamente. Assim, foram identificadas como funções, sendo Gilles Roberval (matemático francês do século XVII) o primeiro a esboçar a curva do seno. O estudo das funções trigonométricas teve seu ápice com Joseph Fourier, no século XIX, no campo dos movimentos periódicos.



Leonhard Euler (1707-1783), matemático mais produtivo de todos os tempos. Foi o primeiro a tratar seno e cosseno como funções. Devemos a ele a notação f(x) para uma função.

78

Matemática

Anexo 18- pagina 9 do livro: Dante, Luís Roberto. **Matemática: contexto e aplicações**. 1 ed. São Paulo: Ática, 2010. (Volume 2).

Há inúmeras aplicações das relações trigonométricas em triângulos quaisquer — na Física, por exemplo, para determinar a intensidade da força à qual fica sujeito um fio que suspende um objeto em equilíbrio.

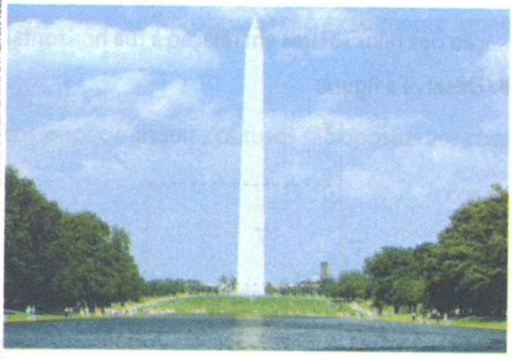
Até a descoberta dessas relações, problemas que envolvessem triângulos eram geralmente resolvidos com o que se sabia das relações no triângulo retângulo, mas a prática mostrou que isso era insuficiente ou tornava os cálculos muito trabalhosos.

A determinação das medidas dos ângulos e dos comprimentos dos lados de um triângulo qualquer, sem recorrer aos triângulos retângulos, foi possível com a evolução da Trigonometria. As novas relações, chamadas *lei dos senos* e *lei dos cossenos*, trariam ferramentas fundamentais para os problemas que envolviam esses triângulos. Vamos estudá-las neste capítulo.

ATENÇÃO! NÃO ESCREVA NO LIVRO.

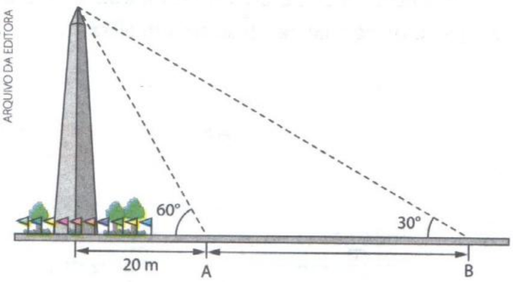
>Atividades

1. Observe a foto abaixo:



BILL BROOKS/ALAMY/OTHER IMAGES

Esse obelisco é um monumento construído na cidade de Washington em homenagem a George Washington, primeiro presidente dos Estados Unidos. Na figura seguinte você vê sua representação:



FORMATO COMUNICAÇÃO/ ARQUIVO DA EDITORA

No ponto **A** coloca-se um teodolito a 20 m de distância do pé do obelisco, que acusa um "ângulo de visada" de 60°.

a) Quantos metros o teodolito deve ser afastado do ponto **A** para que acuse um "ângulo de visada" de 30°?

b) Qual é a distância do topo do obelisco ao ponto **B** em que o teodolito se posicionou ao ser afastado de **A**?

2. Faça o que se pede em cada item:

a) Construa, com régua e compasso, um triângulo ABC, sendo $\hat{A} = 45°$ e $\hat{B} = 75°$ (escolha um valor para a medida do lado $\overline{AB}$).

b) Calcule a medida do terceiro ângulo desse triângulo.

c) Meça com régua os comprimentos dos lados $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$.

d) Procure na tabela trigonométrica da página 27 os valores dos senos dos ângulos desse triângulo.

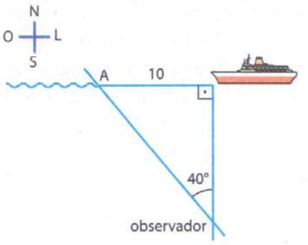
e) Divida a medida de cada lado pelo valor do seno do ângulo oposto a ele. Compare os resultados obtidos.

f) Neste capítulo você verá que essa relação é verdadeira para qualquer triângulo. Crie um enunciado para ela.

Anexo 19- pagina 381 do livro: Dante, Luís Roberto. **Matemática: contexto e aplicações**. 1 ed. São Paulo: Ática, 2010. (Volume 1).

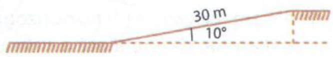
Exercícios propostos

26. Um navio está situado exatamente 10 milhas a leste de um ponto **A**. Um observador, situado exatamente ao sul do navio, vê o ponto **A** sob um ângulo de 40°. Calcule a distância entre o observador e o navio. (Dados: sen 40° = 0,64; cos 40° = 0,76 e tg 40° = 0,83.)



ILUSTRAÇÕES: FORMATO COMUNICAÇÃO/ ARQUIVOS DA EDITORA

27. Um caminhão sobe uma rampa inclinada de 10° em relação ao plano horizontal. Se a rampa tem 30 m de comprimento, a quantos metros o caminhão se eleva, verticalmente, após percorrer toda a rampa? (Dados: sen 10° = 0,17; cos 10° = 0,98 e tg 10° = 0,18.)

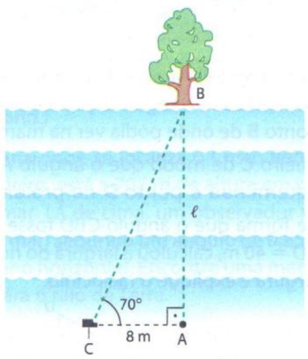


28. *Distância inacessível*

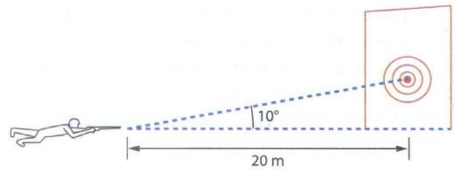
Queremos saber a largura ℓ de um rio sem atravessá-lo. Para isso, adotamos o seguinte processo:

- marcamos dois pontos, **A** (uma estaca) e **B** (uma árvore), um em cada margem;
- marcamos um ponto **C**, distante 8 m de **A**, onde fixamos o aparelho para medir ângulos (teodolito), de tal modo que o ângulo no ponto **A** seja reto;
- obtemos uma medida de 70° para o ângulo ACB.

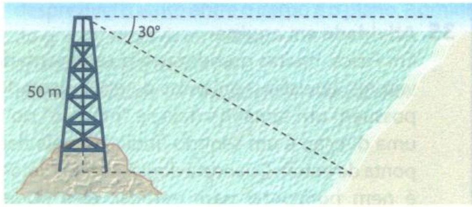
Nessas condições, qual a largura ℓ do rio? (Dados: sen 70° = 0,94; cos 70° = 0,34 e tg 70° ≃ 2,75.)



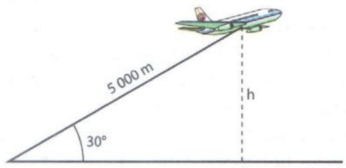
29. Em um exercício de tiro esportivo, o alvo se encontra numa parede e sua base está situada a 20 m do atirador. Sabendo que o atirador vê o alvo sob um ângulo de 10° em relação à horizontal, calcule a que distância o centro do alvo se encontra do chão. (Dados: sen 10° = 0,17; cos 10° = 0,98 e tg 10° = 0,18.)



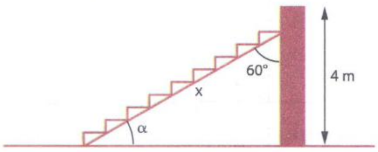
30. Do alto de uma torre de 50 m de altura, localizada em uma ilha, avista-se um ponto da praia sob um ângulo de depressão de 30°. Qual é a distância da torre até esse ponto? (Desconsidere a largura da torre.)



31. Na figura abaixo, qual é a altura do avião em relação ao chão?



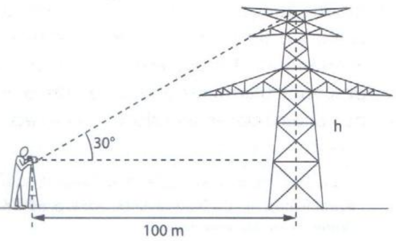
32. Observe a figura a seguir e responda:



a) Qual é o comprimento da escada?

b) Qual o ângulo formado pela escada e o chão?

33. Para determinar a altura de uma torre, um topógrafo coloca o teodolito a 100 m da base e obtém um ângulo de 30°, conforme mostra a figura. Sabendo que a luneta do teodolito está a 1,70 m do solo, qual é aproximadamente a altura da torre? (Dados: sen 30° = 0,50; cos 30° = 0,87 e tg 30° = 0,58.)



Anexo 20- pagina 41 do livro: Dante, Luís Roberto. **Matemática: contexto e aplicações**. 1 ed. São Paulo: Ática, 2010. (Volume 2).

4. Os britânicos são conhecidos por sua pontualidade. Em Londres, no alto de uma torre de 98 metros, está o Big Ben, um dos relógios mais famosos do mundo.

Ele possui quatro mostradores com ponteiros que medem 2,7 m (ponteiro das horas) e 4,7 m (ponteiro dos minutos). O relógio é ajustado segundo o Observatório de Greenwich, que determina também os fusos horários de todo o mundo.

a) Calcule, em metros, a menor e a maior distância possível entre os extremos dos ponteiros de um dos mostradores do relógio.

b) Em 24 horas, qual é a distância percorrida pela extremidade do ponteiro dos minutos de um dos mostradores do relógio?

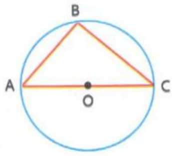
5. Duas inglesas marcaram um encontro para o chá da tarde às 17 horas. Uma chegou pontualmente ao local combinado. A outra olhou para o Big Ben e viu que estava 20 minutos atrasada. Nesse instante, qual era o menor ângulo formado pelos ponteiros do relógio?

6. O ciclismo é um dos mais tradicionais esportes olímpicos e faz parte dessa competição há mais de um século. A bicicleta é também utilizada por muitas pessoas como meio de transporte. Somente na China estimava-se algo perto de meio bilhão de bicicletas no começo do século XXI. É atribuído a Leonardo da Vinci o primeiro projeto de uma bicicleta, mas esse projeto só foi descoberto em 1966, quando a bicicleta já estava difundida no mundo inteiro.

O modelo abaixo, de James Starley, foi patenteado em 1870. Suponha que nesse modelo o diâmetro da roda maior seja de 110 cm e o diâmetro da roda menor seja de 35 cm. Qual é o número mínimo de voltas completas que a roda pequena deve dar para que a roda grande também gire um número inteiro de voltas?

BOB THOMAS/POPPERFOTO/GETTY IMAGES/CONTRIBUTOR

7. O gradiano, mais comumente chamado de grado, é uma medida angular onde a circunferência é dividida em 400 partes iguais e, como já vimos, cada ângulo central de uma dessas partes equivale a 1 grado. Quando a circunferência é dividida em 300 partes iguais, cada ângulo central de uma dessas partes equivale a 1 trento. Determine em graus, em trentos e em grados a medida do ângulo $\hat{B}$ abaixo.



PESQUISANDO E DISCUTINDO

8. O valor da razão entre a medida da circunferência e a medida de seu diâmetro, que é o π (pi), é uma das constantes mais procuradas da história. O π é um número irracional que aparece em diversas fórmulas matemáticas. Pesquise e discuta com seus colegas onde ou em quais fórmulas a constante π é utilizada.

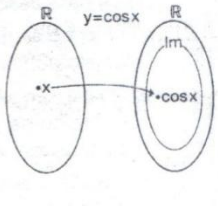
VEJA MAIS SOBRE O ASSUNTO

Procure mais informações em jornais, revistas e nos *sites* www.zenite.nu, http://educacao.uol.com.br/biografias/ptolomeu.jhtm e www.mat.ufrgs.br/~portosil/aplcom1a.html.

Anexo 21- pagina 27 do livro: Souza, Joamir Roberto de. **Novo olhar matemática.** 1 ed. São Paulo: FTD, 2010. (Volume 2).

Função cosseno

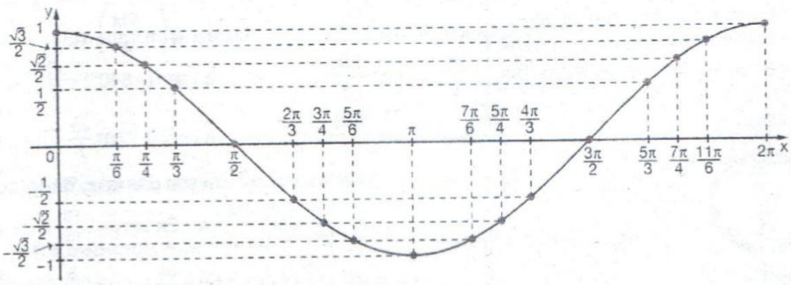
Definimos como **função cosseno** a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, que associa cada número real x ao correspondente cosseno de x, ou seja, $f(x) = \cos x$.



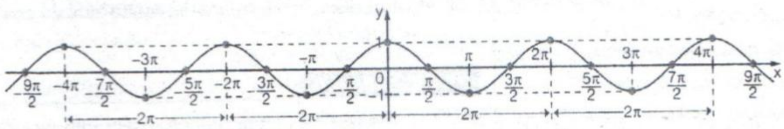
Inicialmente, vamos construir o gráfico $f(x) = \cos x$ para $x \in [0, 2\pi]$.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
y = cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
(x, y)	$(0, 1)$	$\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$	$\left(\frac{2\pi}{3}, -\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{3\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(\frac{5\pi}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$(\pi, -1)$

x	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
y = cos x	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
(x, y)	$\left(\frac{7\pi}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\left(\frac{5\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(\frac{4\pi}{3}, -\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$	$\left(\frac{5\pi}{3}, \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{7\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(\frac{11\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$(2\pi, 1)$



Construindo o gráfico de $f(x) = \cos x$ para todo domínio, temos:



Ilustrações: Acervo da editora

Algumas características da função $f(x) = \cos x$:

- O domínio de f é o conjunto dos números reais: $D(f) = \mathbb{R}$.
- A imagem de f corresponde ao intervalo $[-1, 1]$: $Im(f) = [-1, 1]$.
- A função f é **periódica** e tem período 2π, pois seus valores se repetem de 2π em 2π.

Exemplo

$$\ldots = \underbrace{\cos(\pi - 2\pi)}_{\cos(-\pi) = -1} = \underbrace{\cos \pi}_{-1} = \underbrace{\cos(\pi + 2\pi)}_{\cos(3\pi) = -1} = \ldots$$

Anexo 22- pagina 262 do livro: Souza, Joamir Roberto de. **Novo olhar matemática.** 1 ed. São Paulo: FTD, 2010. (Volume 1).

Teorema de Tales

O grego Tales de Mileto, que viveu por volta da primeira metade do século VI a.C., é considerado o pai da *Geometria Demonstrativa*, na qual se faz necessário justificar, por meio de demonstrações lógicas, os conhecimentos geométricos. Os estudos de Tales contribuíram em diversas áreas do conhecimento, como Matemática, Filosofia e Astronomia, tornando-o conhecido como um dos sete sábios da Antiguidade.

Acredita-se que Tales tenha vivido parte de sua vida no Egito, onde se deparou com um problema: calcular a altura de uma pirâmide; e ao resolvê-lo, tornou-se muito admirado.

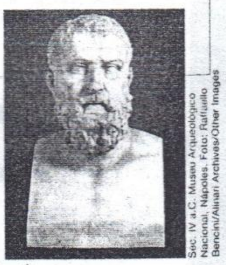
Na resolução desse problema, Tales utilizou conhecimentos acerca de semelhança de triângulos. O método empregado por ele resultou no que atualmente denominamos **Teorema de Tales**.

Tales de Mileto

Diga aos alunos que a atividade 7 apresenta mais detalhes acerca do método utilizado por Tales no cálculo da altura da pirâmide.

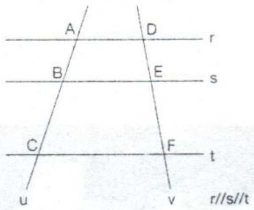
Os sete sábios da Antiguidade

Seja por sua influência, sabedoria, seja por suas grandes ideias, alguns estudiosos se destacaram na história. Dentre eles estão Biante, Cleóbulo, Mison, Pítaco, Quilon, Sólon e Tales. Esse grupo ficou conhecido como os sete sábios da Antiguidade, título proposto pelo filósofo grego Platão.



Sólon

Para enunciar o Teorema de Tales, consideraremos inicialmente um feixe de retas paralelas *r*, *s* e *t*, e as retas transversais *u* e *v*.



> Um feixe de retas paralelas é um conjunto de três ou mais retas contidas em um mesmo plano.

Na figura, temos:

- *A* e *D*, *B* e *E*, *C* e *F*, determinados nas retas transversais pela mesma reta paralela, denominados pontos correspondentes;
- $\overline{AB}$ e $\overline{DE}$, $\overline{BC}$ e $\overline{EF}$, $\overline{AC}$ e $\overline{DF}$, determinados nas retas transversais pelo mesmo par de retas paralelas, denominados segmentos correspondentes.

De acordo com o Teorema de Tales:

> Se duas retas transversais são cortadas por um feixe de retas paralelas, então a razão entre quaisquer dois segmentos determinados em uma das transversais é igual à razão entre os segmentos correspondentes da outra transversal.

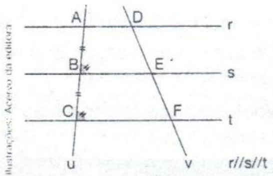
A partir deste teorema, em relação à figura anterior, temos:

- $\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$
- $\frac{AC}{AB}=\frac{DF}{DE}$
- $\frac{AC}{BC}=\frac{DF}{EF}$

Para demonstrar o Teorema de Tales, consideraremos dois casos:

- 1º caso

Considerando um feixe de retas paralelas *r*, *s* e *t*, que divide duas transversais *u* e *v* de maneira que $\overline{AB}\equiv\overline{BC}$, vamos demonstrar que $\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$.



Anexo 23- pagina 277 do livro: Souza, Joamir Roberto de. **Novo olhar matemática.** 1 ed. São Paulo: FTD, 2010. (Volume 1).

- $\text{sen}\alpha = \cos\beta$

Essa relação estabelece que o seno de um ângulo agudo é igual ao cosseno do complementar desse ângulo, e vice-versa.

A demonstração dessa relação é imediata. Do triângulo ABC, temos:

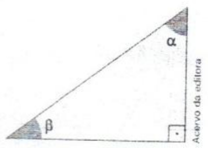
$$\text{sen}\alpha = \frac{c}{a} = \cos\beta \Rightarrow \text{sen}\alpha = \cos\beta$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{a} = \text{sen}\beta \Rightarrow \cos\alpha = \text{sen}\beta$$

> Dois ângulos são complementares quando a soma de suas medidas é 90°. Logo, podemos interpretar a relação $\text{sen}\alpha = \cos\beta$ como $\text{sen}\alpha = \cos(90° - \alpha)$ e $\cos\alpha = \text{sen}(90° - \alpha)$, para $0° < \alpha < 90°$.

ATIVIDADES RESOLVIDAS

R7 Calcule $\text{tg}\beta$ no triângulo retângulo a seguir, sabendo que $\text{sen}\alpha = 0{,}8$.



> As relações trigonométricas $\text{sen}\alpha$, $\cos\alpha$ e $\text{tg}\alpha$ são sempre positivas no triângulo retângulo, pois são calculadas a partir das medidas de seus lados.

Resolução

Da relação $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, temos:

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow 0{,}8^2 + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - 0{,}64 \Rightarrow \cos^2\alpha = 0{,}36 \Rightarrow \underbrace{\cos\alpha}_{\cos\alpha > 0} = 0{,}6$$

Como α e β são complementares, temos $\text{sen}\beta = \cos\alpha$ e $\cos\beta = \text{sen}\alpha$. Para calcular $\text{tg}\beta$, podemos utilizar a relação $\text{tg}\beta = \frac{\text{sen}\beta}{\cos\beta}$:

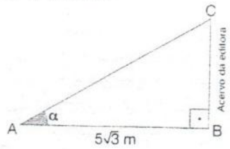
$$\text{tg}\beta = \frac{\text{sen}\beta}{\cos\beta} = \frac{\overbrace{\cos\alpha}^{\text{sen}\beta = \cos\alpha}}{\underbrace{\text{sen}\alpha}_{\cos\beta = \text{sen}\alpha}} \Rightarrow \text{tg}\beta = \frac{0{,}6}{0{,}8} \Rightarrow \text{tg}\beta = 0{,}75$$

> Note que, de maneira geral, $\text{sen}^2\alpha \neq \text{sen}\alpha^2$, pois:
> - $\text{sen}^2\alpha = (\text{sen}\alpha)^2 = \text{sen}\alpha \cdot \text{sen}\alpha$
> - $\text{sen}\alpha^2 = \text{sen}(\alpha^2) = \text{sen}(\alpha \cdot \alpha)$

ATIVIDADES

Anote as respostas no caderno

38 Sabendo que no triângulo retângulo ABC, $\text{sen}\alpha = \frac{1}{2}$ e $AB = 5\sqrt{3}$ m, calcule:



a) $\cos\alpha$

b) $\text{tg}\alpha$

c) a medida da hipotenusa

d) a medida do cateto oposto a α

39 Se α e β são ângulos complementares, mostre que $\text{tg}\alpha = \frac{1}{\text{tg}\beta}$.

> Note que $\cos\beta = \frac{1}{\frac{1}{\cos\beta}}$.

40 *Desafio*

Em um triângulo retângulo de ângulos agudos α e β, a tangente de α é igual a $\frac{2}{3}$.

Determine o seno de β.

277

Anexo 24- pagina 284 do livro: Souza, Joamir Roberto de. **Novo olhar matemática.** 1 ed. São Paulo: FTD, 2010. (Volume 1).

ATIVIDADES

Anote as respostas no caderno

53 Utilizando a tabela trigonométrica, determine o seno, o cosseno e a tangente de: Respostas no final do livro.

a) 78° b) 5° c) 52°

54 Determine a medida aproximada do ângulo agudo:

a) cujo seno é 0,21 12°

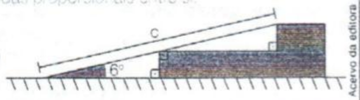
b) cujo cosseno é 0,239 76°

c) cuja tangente é 0,858 41°

55 (ETE-SP) O acesso a um edifício é feito por uma escada de dois degraus, sendo que cada um tem 16 cm de altura. Para atender portadores de necessidades especiais, foi construída uma rampa.

Respeitando a legislação em vigor, a rampa deve formar, com o solo, um ângulo de 6°, conforme a figura. Para uma melhor representação, a figura não possui as medidas proporcionais entre si.

(Dados:
sen6° = 0,10 e
cos6° = 0,99.)



Acervo da editora

A medida *c* do comprimento da rampa é, em metros, igual a: e

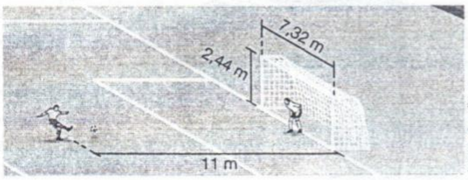
a) 1,8 b) 2,0 c) 2,4 d) 2,9 e) 3,2

56 Desafio

Um dos esportes mais populares do mundo é o futebol. Como em muitos outros esportes, há várias regras que regem sua prática, dentre elas algumas referentes às medidas e marcações do campo de jogo.

Corel Stock Photo

Veja no esquema algumas das medidas de um campo de futebol.



Acervo da editora

De acordo com as medidas indicadas no esquema, e supondo que a bola siga uma trajetória retilínea após um chute da marca do pênalti, responda:

a) Em relação ao centro do gol, qual é o ângulo em que um jogador deve chutar a bola para que ela atinja o canto inferior esquerdo? aproximadamente 18°

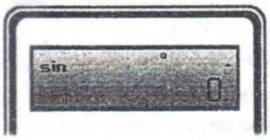
b) Em relação ao plano do chão, qual é o ângulo em que deve ser chutada a bola para que ela atinja o centro do gol, na parte superior? aproximadamente 12°

c) Se um jogador chutar a bola num ângulo maior que 30° em relação ao centro do gol, ela atingirá a área interna às traves? Por quê? Não, pois o maior ângulo possível para acertar o gol é de aproximadamente 22°, ângulo quando a bola é chutada em direção ao canto superior esquerdo do gol.

57 Calculadora

Para o cálculo do seno ou do cosseno de um ângulo agudo, além da tabela trigonométrica, podemos utilizar uma calculadora científica. Veja o procedimento utilizado para o cálculo do seno e do cosseno de 55°.

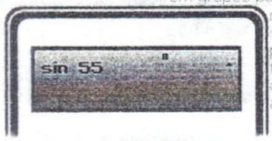
Inicialmente pressionamos a tecla seno: sin



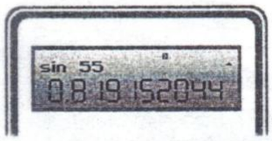
Oriente os alunos sobre como verificar se a calculadora está operando com a unidade de medida de ângulos em graus.

Em seguida, inserimos o número 55, correspondente a 55°: 5 → 5

Caso não haja calculadoras para todos os alunos, reúna-os em grupos para que possam realizar a atividade ou, então, veja a possibilidade de trazer algumas calculadoras para a sala de aula.

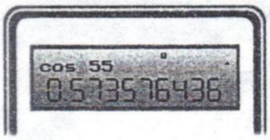


Por fim, pressionamos = para obter o valor de sen55°.



Para calcular cos55°, procedemos de maneira semelhante, utilizando desta vez a tecla cosseno:

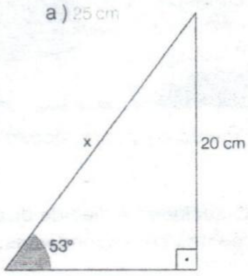
cos → 5 → 5 → =



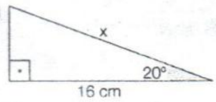
Peça aos alunos que comparem os resultados obtidos na calculadora científica com aqueles da tabela trigonométrica apresentada no início desta seção.

Utilize uma calculadora científica para determinar o valor aproximado de *x* em cada figura.

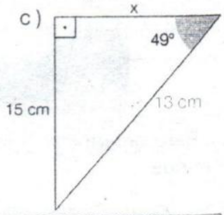
a) 25 cm



b) 17 cm



c)



Ilustrações: Acervo da editora

› *Sin* e *cos* são abreviações das palavras inglesas *sine* e *cosine*, que correspondem a seno e cosseno, respectivamente.

284