



UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
COORDENAÇÃO DE MATEMÁTICA

KLECIO EMANUEL LIMA DE FARIAS

Estudo de uma aplicação matemática à Cosmologia Newtoniana

Campina Grande, PB

Novembro de 2011

KLECIO EMANUEL LIMA DE FARIAS

ESTUDO DE UMA APLICAÇÃO MATEMÁTICA À COSMOLOGIA NEWTONIANA

Trabalho de Conclusão do Curso Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba. Em cumprimento às exigências para obtenção do Título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dra. ANA ALICE RODRIGUES SOBREIRA

Campina Grande, PB

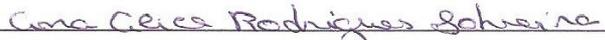
Novembro de 2011

KLECIO EMANUEL LIMA DE FARIAS

ESTUDO DE UMA APLICAÇÃO MATEMÁTICA À COSMOLOGIA NEWTONIANA

Trabalho de Conclusão do Curso Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba. Em cumprimento às exigências para obtenção do Título de Licenciado em Matemática.

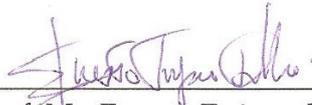
BANCA EXAMINADORA:



Prof. Dra. Ana Alice Rodrigues Sobreira
Departamento de Física - CCT/UEPB
Orientador



Prof. Dr. Juarez Dantas de Souza
Departamento de Matemática - CCT/UEPB
Co-orientador



Prof. Ms. Ernesto Trajano de Lima Filho
Departamento de Matemática - CCT/UEPB
Examinador

Campina Grande, Novembro de 2011

Agradecimentos

Primeiramente aos meus pais, que me ofereceram toda a estrutura necessária para a conclusão desse curso. A Dra. Ana Alice Rodrigues Sobreira, por ter aceitado e me orientado por este trabalho inteiro. Aos meus amigos de curso Cinthia, Idaliane e Girlan que me incentivaram a seguir em frente e me acompanharam durante praticamente todo o curso. A Catharine Quintans por todo o apoio didático e tecnológico oferecido. A Sonnale Ranielly, que em momentos difíceis sempre esteve ao meu lado. E a muitas outras pessoas que infelizmente não terei como citar mais que sabem o quanto me ajudaram nessa longa jornada.

Sumário

Introdução	3
1 Funções Matemáticas	6
1.1 Introdução	6
1.2 Derivada	6
1.3 Integral	8
1.4 Campos Vetoriais	11
1.4.1 Gradiente	12
1.4.2 Divergência e Rotacional	13
1.5 Equações diferenciais Parciais	14
1.6 Funções Hiperbólicas	17
2 Cosmologia Newtoniana	21
2.1 Cosmologia	21
2.2 Modelo discreto de universo	21
2.3 Modelo contínuo de Universo	25
2.4 Densidade crítica	30
2.5 Parâmetro de densidade	32
2.6 Propagação da luz na cosmologia Newtoniana	38
2.7 Idade do Universo	39
2.8 Soluções para a equação diferencial cosmológica com $\Lambda = 0$	40
Considerações finais	44

Introdução

A modelagem matemática é a área do conhecimento que estuda a simulação de sistemas reais a fim de prever o comportamento dos mesmos, sendo empregada em diversos campos de estudo, tais como física, química, biologia, economia e engenharia.

Os modelos matemáticos se subsidiam, por exemplo, das leis da física (como as leis de Kirchhoff para sistemas elétricos e as leis de Newton para mecânicos) ou dados experimentais.

Frequentemente, os modelos atingem grau de sofisticação suficiente para justificar ferramentas computacionais, envolvendo sistemas de equações diferenciais. Softwares como MATLAB e Scilab contam com recursos focados nas soluções de tais modelos.

Historicamente, a matemática é muito importante dentro das ciências naturais e engenharias. Contudo desde a Segunda Guerra, áreas fora das ciências físicas têm inspirado a criação de novas áreas dentro da matemática, como a teoria dos jogos e aspectos estatísticos das ciências sociais, que cresceram por sua importância estratégica e econômica.

A noção de função foi se construindo e evoluindo ao longo dos séculos. Alguns sinais da noção de função são encontrados desde a antiga babilônia, com tabuas de quadrados, de cubos e de raízes quadradas.

Os pitagóricos estabeleceram relações entre grandezas físicas como, por exemplo, alturas dos sons e comprimento de cordas vibrantes. Na época alexandrina contribuíram com a construção de tabelas de comprimento de cordas de um círculo, o tão utilizado raio.

Desde então houve diversos acontecimentos relacionados às questões de funções. No século XIV Nicolas Oresme, utilizou segmentos de reta que possibilitou a representação da velocidade de um móvel ao longo do tempo.

No século XVII o matemático e filósofo René Descartes passou a utilizar eixos cartesianos para a representação de uma função. Neste mesmo século, surgiram outros contributos para

o desenvolvimento da noção de função, onde Kepler com a descoberta das leis sobre as trajetórias planetárias e Galileu com o estudo da queda de corpos e a relação entre espaço tempo, são exemplos de contribuições.

No século XVIII, Leibniz com a invenção da linguagem matemática, distribuído em diversos termos e simbologia, foi quem utilizou pela primeira vez o termo função no desenvolvimento da análise matemática. Porém a definição de função surge mais tarde, com Leonard Euler, matemático suíço que escreveu "Se x é uma quantidade variável, então toda a quantidade que depende de x de qualquer maneira, ou que seja determinado por aquela, chama-se função da dita variável". Euler também utiliza pela primeira vez a notação $f(x)$.

Ao longo do tempo as funções matemáticas foram ganhando espaço e formas para ajudar na melhor compreensão e desenvolvimento de cálculos que antes aparentavam impossíveis, utilizando vários métodos matemáticos, onde alguns serão mostrados aqui.

Podemos verificar que as funções matemáticas, até mesmo antes de sua criação já eram usadas em diversas áreas da física, tendo um caráter importante para o desenvolvimento da física atual. Não diferente do resto da física essas funções nos mostrarão resultados para um conteúdo de física aqui estudado (o modelo cosmológico newtoniano).

A cosmologia é definida como sendo a ciência que estuda o universo como um todo, onde procura utilizando teorias e explicações, reconstruir a realidade do mundo que nos cerca. Assim como as funções, a cosmologia também era tratada pelas civilizações antigas, apontando suas idéias de como surgiu o mundo, baseado apenas em seus pensamentos. Algumas das cosmologias dessa época tinham como propostas, que o Universo teria sido criado por uma inteligência racional, enquanto outras rejeitavam qualquer noção de divindade.

Muito tempo depois desses pensadores, quando a matemática já tinha alcançado um desenvolvimento bastante considerável, surge à cosmologia newtoniana, mostrando que o universo seria governado por equações matemáticas.

Com o surgimento da teoria da relatividade geral formulada por Einstein no início do século passado, surge à cosmologia relativística, mostrando-se mais precisa e dotada de uma fenomenologia mais rica que a teoria newtoniana, porém com uma complexidade matemática bem superior. Após se passarem 15 anos da formulação da cosmologia via teoria da relatividade, no início da década de 1920, mostrou-se que vários resultados básicos dos modelos homogêneos e isotrópicos, poderiam ser obtidos através de uma perspectiva New-

toniana. Assim em 1934, foi mostrado que a teoria de Newton também poderia ser usada para estudar o problema cosmológico, ou seja, descrever a origem e evolução do universo, revertendo o então quadro de que a cosmologia só poderia ser formulada via Relatividade Geral.

Iremos apresentar nesse trabalho a cosmologia Newtoniana como exemplo de como a modelagem matemática é aplicado na física.

Capítulo 1

Funções Matemáticas

1.1 Introdução

Apresentaremos nesse capítulo, algumas ferramentas matemáticas que são utilizadas com frequência na física, química, entre outros, caracterizando-se então como elemento revelador para que a ciência moderna possa alcançar significativo avanço.

1.2 Derivada

No cálculo, a derivada representa a taxa de variação instantânea de uma função. Um exemplo em que é muito utilizado é no cálculo da velocidade, sendo ela uma taxa de variação da função espaço. Inicialmente a derivada foi descoberta para o estudo da reta tangente de uma função, porém existem hoje inúmeras aplicações em diversos ramos de estudo, como física, engenharia e etc.

Definição

Seja I um intervalo com mais do que um ponto do conjunto \mathbb{R} dos números reais e seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Se o ponto $a \in I$, diz-se que f é derivável em a se existir o limite e o mesmo for finito, dado por

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(a) = \lim_{a \rightarrow x} \frac{f(a) - f(x)}{a - x}$$

Notações: Algumas notações são utilizadas para expressar uma derivada, são elas as

mais comuns;

$$f'(x), \frac{d}{dx}f(x), f_x, \dot{f}$$

Sendo essa ultima escrita como \dot{f} muito utilizada na física para expressa uma função derivada em relação ao tempo.

Propriedades de derivada

Considerando f e g funções contínuas e deriváveis, então as funções a seguir também são deriváveis em a da seguinte forma

1. $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$
2. $(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$
3. $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$, se $g(a) \neq 0$
4. $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$

Esta propriedade (4) é conhecida por regra da cadeia.

Derivadas parciais

A derivada parcial de uma função f de n variáveis, no ponto x_i é denotada por

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

onde apenas a variável x_i varia e as outras são tratadas como constantes. Podemos ainda escrever essas derivadas utilizando a definição de limite, sendo escrita como

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + a, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{a}$$

Derivadas de ordem Superior

Ao obtermos uma derivada de uma função, essa mesma função pode ser derivada mais vezes, assim tornando-se uma derivada de ordem superior a um, sendo chamada de segunda derivada da função f. Da mesma forma se derivada mais uma vez sendo chamada de terceira derivada e assim por diante. Elas podem ser denotadas das seguintes formas

$$\frac{df}{dx}, \frac{d}{dx} \left(\frac{df}{dx} \right), \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} \left(\frac{df}{dx} \right) \right)$$

e assim sucessivamente. No entanto, a notação mais empregada é:

$$\frac{df}{dx}, \quad \frac{d^2 f}{dx^2}, \quad \frac{d^3 f}{dx^3}$$

ou alternativamente,

$$f'(x), \quad f''(x), \quad f'''(x) \quad \text{ou} \quad f^{(1)}(x), \quad f^{(2)}(x), \quad f^{(3)}(x)$$

Um exemplo clássico de uma aplicação de derivada de ordem superior é a da segunda derivada da função posição dando a aceleração de uma partícula em movimento.

1.3 Integral

A integral de uma função foi desenvolvida com o intuito de calcular uma área sobre uma curva no plano cartesiano. Porém assim como a derivada, ela também tem inúmeras aplicações em diversos campos de pesquisa.

Integral indefinida

Podemos definir uma integral indefinida como sendo:

$$\int f(x)dx = F(x) \Leftrightarrow \frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

onde chamamos $F(x)$ de primitiva da função $f(x)$, se para todo $x \in I$, tivermos $F'(x) = f(x)$.

Definição: Se $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$, então a expressão $F(x) + c$ é chamada integral indefinida de $f(x)$, sendo denotada por:

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

em que c é uma constante de integração. Temos ainda que

$$\int f(x)dx$$

representa uma família de funções F (sendo ela a família de todas as primitivas da função integrando).

Propriedades da integral indefinida

Sejam $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ e K uma constante. Então

1. $\int Kf(x)dx = K \int f(x)dx$
2. $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

Integral definida

A integral definida está associada ao limite da definição anterior. Ela surgiu com a formalização da matemática dos problemas que envolvem áreas.

Definição: Seja uma função f definida em um espaço $[a, b]$. A integral definida de f de a até b denotada por

$$\int_a^b f(x)dx$$

é dada por

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x_i$$

onde a e b são chamados limites de integração, e o segundo termo da equação é chamada de soma de Riemann. Caso esse limite exista, dizemos que a função $f(x)$ é integrável em $[a, b]$.

Propriedades da integral definida

As duas propriedades advindas da integral indefinida, também são válidas para as definidas. Se no intervalo $[a, b]$ definirmos um ponto c que pertence ao intervalo, sendo $f(x)$ derivável, vale a seguinte propriedade na integral definida:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x) + \int_c^b f(x)dx$$

Se f é integrável e se $f(x) \geq 0$ para todo o intervalo x em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

Se f e g são integráveis em $[a, b]$ e $f(x) \geq g(x)$, para todo x em $[a, b]$ então

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

Proposição: Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$. Então a função $G(x) \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$G(x) = \int_a^b f(t)dt$$

têm derivadas em todo $x \in [a, b]$ que é dada por

$$G'(x) = f(x)$$

para provar o que foi dito, vamos determinar $G'(x)$ utilizando a definição

$$G'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{G(x + \Delta x) - G(x)}{\Delta x}$$

temos que

$$G(x) = \int_a^b f(t) dt$$

podendo ser escrita da seguinte forma

$$G(x + \Delta x) - G(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt$$

utilizando uma de suas propriedades, obtemos

$$\int_a^{x+\Delta x} f(t) dt = \int_a^x f(t) dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt$$

e então,

$$\begin{aligned} G(x + \Delta x) - G(x) &= \int_a^x f(t) dt + \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \\ G(x + \Delta x) - G(x) &= \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt \end{aligned}$$

como f é contínua em $[x, x + \Delta x]$, existe um ponto \bar{x} entre x e $x + \Delta x$ tal que

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t) dt = (x + \Delta x - x) f(\bar{x}) = \Delta x f(\bar{x})$$

Portanto,

$$G'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{G(x + \Delta x) - G(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x f(\bar{x})}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\bar{x}).$$

Como \bar{x} esta entre x e $x + \Delta x$, segue que $\bar{x} \rightarrow x$ quando $\Delta x \rightarrow 0$, como f é contínua, temos

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\bar{x}) = \lim_{\bar{x} \rightarrow x} f(\bar{x}) = f(x)$$

Logo

$$G'(x) = f(x).$$

Uma importante consequência desta proposição é que toda função $f(x)$ contínua num intervalo $[a, b]$ possui uma primitiva. Agora, iremos estabelecer formalmente o Teorema

Fundamental do Cálculo.

Teorema Fundamental do Cálculo

Este teorema conecta dois ramos do cálculo, o diferencial e o integral. Se f é uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e se $F(x)$ é uma função tal que

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in [a, b]$$

então

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Como f é contínua sobre $[a, b]$, segue que

$$G(x) = \int_a^b f(x)dx$$

é uma primitiva de f nesse intervalo.

Prova: Seja $F(x)$ uma primitiva qualquer de f sobre $[a, b]$. Temos que

$$F(x) = G(x) + C, \quad \forall x \in [a, b].$$

Como $G(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$ e $G(b) = \int_a^b f(t)dt$, calculando a diferença $F(b) - F(a)$, obtemos

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= (G(b) + c) - (G(a) + c) = G(b) - G(a) \\ &= \int_a^b f(t)dt - 0 = \int_a^b = \int_a^b f(t)dt. \end{aligned}$$

logo

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

1.4 Campos Vetoriais

Em matemática um campo vetorial ou campo de vetores é uma construção em cálculo vetorial que associa um vetor a todo ponto de uma variedade diferenciável (como um subconjunto do espaço euclidiano, por exemplo). Em muitas aplicações da física e matemática aplicada, é necessário associar a cada ponto P de alguma região um único vetor com origem em P . A totalidade de tais vetores constitui um campo vetorial. Um campo vetorial pode

ser definido por uma função vetorial. A função vetorial no espaço tridimensional, é uma função cujo domínio é um subconjunto do \mathbb{R}^3 e o contradomínio é um subconjunto de V_3 (vetores em 3 dimensões), de forma análoga temos uma função vetorial no plano bidimensional sendo o domínio um subconjunto do \mathbb{R}^2 e o contradomínio um subconjunto de V_2 (vetores em 2 dimensões).

Notações:

Para \mathbb{R}^3 , temos

$$F : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow V_3$$

$$F(x, y, z) = \langle M(x, y, z), N(x, y, z), P(x, y, z) \rangle$$

onde M, N e P são funções reais de 3 variáveis e

$$i = \langle 1, 0, 0 \rangle, j = \langle 0, 1, 0 \rangle, k = \langle 0, 0, 1 \rangle$$

Para \mathbb{R}^2 , temos

$$F : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow V_2$$

$$F(x, y) = \langle M(x, y), N(x, y) \rangle$$

onde M e N são funções reais de 2 variáveis e

$$i = \langle 1, 0 \rangle, j = \langle 0, 1 \rangle$$

1.4.1 Gradiente

Considerando o operador ∇ definido por

$$\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}$$

O gradiente é uma função vetorial que altera a quantidade de um determinado valor em relação a uma quantidade por unidade de espaço.

Se $f(x, y, z)$ tem derivadas parciais primeiras contínuas em x, y e z, o gradiente de f denotado por $gradf$ é definido por

$$gradf = i \frac{\partial f}{\partial x} + j \frac{\partial f}{\partial y} + k \frac{\partial f}{\partial z}$$

onde $\nabla f = gradf$, logo:

$$F(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) = f_x(x, y, z)\vec{i} + f_y(x, y, z)\vec{j} + f_z(x, y, z)\vec{k}$$

Em que F é chamado campo vetorial conservativo e $f(x,y,z)$ é chamado função potencial de F .

1.4.2 Divergência e Rotacional

Seja uma função vetorial em três dimensões dada por

$$F(x, y, z) = M(x, y, z)\vec{i} + N(x, y, z)\vec{j} + P(x, y, z)\vec{k}$$

onde M , N e P possuem derivadas parciais.

Rotacional

O conceito de rotacional está relacionado como o próprio nome sugere a rotações de vetores, se temos f como sendo uma função que expressa um campo velocidade em mecânica dos fluidos, partículas próximo a (x, y, z) tendem a rodar em torno do eixo que aponta em direção de $rotF$. Fazendo assim uma transformação linear de um campo de vetores em outro campo de vetores.

O rotacional de F denotado por $rotF$ ou $\nabla \times F$, pode ser definido como sendo

$$rotF = \nabla \times F = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial z} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \vec{k}$$

logo

$$rotF = \nabla \times F = (P_y - N_z)\vec{i} + (M_z - P_x)\vec{j} + (N_x - M_y)\vec{k}$$

Observe que o rotacional de F define uma função vetorial em 3 dimensões.

Divergência

O conceito de divergência está relacionado ao fluxo, ou seja, se f é uma função que determina a velocidade de um fluido (ou gás), o divergente dessa função seria a taxa líquida de variação com relação ao tempo da massa do líquido (ou gás) fluindo no ponto por unidade de volume.

A divergência de F , denotada por $divF$ ou $\nabla \cdot F$ é definida como sendo

$$divF = \nabla \cdot F = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} = (M_x + N_y + P_z)$$

Observe que a divergência de F define uma função escalar.

1.5 Equações diferenciais Parciais

Estas equações estão presentes em diversos problemas de matemática, física e engenharia, entre outros. Na maioria das vezes faz-se a tentativa de transformar a equação diferencial parcial em uma ou mais equações diferenciais ordinárias, com o objetivo de simplificar os trabalhos na obtenção da solução do problema. A diferença está em que uma equação diferencial ordinária possui derivadas de apenas uma variável enquanto que uma equação diferencial parcial possui derivadas parciais da função incógnita. Muitas leis físicas como: Leis de Newton para o resfriamento dos corpos, Equações de Maxwell, Equações de Navier-Stokes e Equações da Mecânica Quântica de Schrödinger são escritas por equações diferenciais parciais que relacionam o espaço e suas derivadas com o tempo. O uso intenso de derivadas e integrais neste contexto é fundamental e depende da interpretação feita para cada objeto matemático como: velocidade, força, aceleração, fluxo, corrente elétrica, taxa de variação, temperatura, etc.

Definição: Chama-se equação diferencial parcial a uma equação que contém uma ou mais funções desconhecidas de duas ou mais variáveis e as suas derivadas parciais em relação a essas variáveis. Exemplo:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial z^2} = 0$$

onde essa é a equação de Laplace, cujo temos variáveis independentes x, y, z e que ainda pode ser denotada como:

$$\nabla^2 u = 0$$

onde $\nabla^2 u$ é chamado de laplaciano, e pode ser escrita usando 2 outras funções matemáticas

$$\nabla \cdot \nabla u = 0$$

onde são respectivamente o divergente e o gradiente de uma função.

Definição: Ordem de uma equação diferencial parcial é a ordem da derivada de maior ordem que surge na equação, e o grau é o expoente da derivada mais alta quando a equação está escrita em uma forma semelhante a uma função polinomial em que as potências fazem o papel das derivadas da ordem respectiva. A equação de Laplace é uma equação diferencial de ordem 2. u é a variável dependente enquanto que x, y e z são as variáveis independentes.

Definição: Chama-se solução de uma equação diferencial parcial a uma função que verifica identicamente essa equação.

Solução de Equações Diferenciais Parciais

Na solução de uma EDP o método da separação de variáveis é mais utilizado. O objetivo é transformar uma EDP (equação diferencial parcial) de n variáveis em n EDO's (equação diferencial ordinária) de forma a simplificar seus resultados. Aqui será mostrado esse processo utilizando a seguinte equação.

$$x \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y}$$

para a resolução dessa equação vamos supor que a solução seja dada por

$$z(x, y) = X(x)Y(y)$$

onde X é uma função apenas da variável x , e Y apenas de Y , logo temos

$$x \frac{\partial X(x)Y(y)}{\partial x} = \frac{\partial X(x)Y(y)}{\partial y} \Rightarrow xY(y) \frac{\partial X(x)}{\partial x} = X(x) \frac{\partial Y(y)}{\partial y}$$

como X e Y são funções apenas de x e y respectivamente, elas se tornam EDO's onde chegamos a

$$\frac{x}{X(x)} \frac{\partial X(x)}{\partial x} = \frac{1}{Y(y)} \frac{\partial Y(y)}{\partial y} = c$$

onde c é uma constante pois para q ambos os lados sejam iguais precisamos de um valor independente de x e y .

Logo teremos 2 equações, que são elas

$$\frac{x}{X(x)} \frac{\partial X(x)}{\partial x} = c, \quad \frac{1}{Y(y)} \frac{\partial Y(y)}{\partial y} = c$$

que iremos denotar da seguinte forma

$$\frac{x}{X} \frac{dX}{dx} = c, \quad \frac{1}{Y} \frac{dY}{dy} = c$$

agora iremos solucionar ambas as equações

$$\frac{dX}{dx} = c \frac{X}{x} \Rightarrow \frac{dX}{X} = c \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dX}{X} = c \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln X = c \ln x + c \ln k \Rightarrow \ln X = c \ln kx \Rightarrow \ln X = \ln(kx)^c \Rightarrow X = k^c x^c$$

$$X(x) = Kx^c$$

onde K e k são constantes de integração, e para Y temos

$$\frac{1}{Y} \frac{dY}{dy} = c \Rightarrow \frac{dY}{Y} = c dy \Rightarrow \int \frac{dY}{Y} = c \int dy$$

$$\ln Y = cy + d \Rightarrow Y = e^{cy+d} \Rightarrow Y = e^{cy} e^d$$

$$Y(y) = D e^{cy}$$

D e d são outras constantes de integração, portanto a solução se torna

$$z(x, y) = X(x)Y(y) = Kx^c D e^{cy} = E x^c e^{cy}$$

na qual E é a reunião de todas as constantes, e para determinar tanto seu valor quanto c precisamos de condições auxiliares.

Classificação de uma EDP linear

Consideremos a EDP linear

$$A u_{xx} + B u_{xy} + C u_{yy} + D u_x + E u_y + F u + G = 0$$

onde os coeficientes são as funções A, B, C, D, E e F tal que

$$A^2(x, y) + B^2(x, y) + C^2(x, y) \neq 0$$

e $G = G(x, y)$ é uma função real definida sobre $M \supset R^2$. Associada a esta EDP, construímos a equação diferencial ordinária característica:

$$A(x, y)(dy)^2 - B(x, y)(dx)(dy) + C(x, y)(dx)^2 = 0$$

O discriminante desta EDP é definido como:

$$\Delta = \Delta(x, y) = B(x, y)^2 - 4A(x, y)C(x, y)$$

A classificação das EDP lineares de 2a. ordem ocorre em função do valor do discriminante da EDP. Uma EDP linear é:

$$\text{Hiperbólica se } \Delta = B^2 - 4AC > 0$$

$$\text{Elíptica se } \Delta = B^2 - 4AC < 0$$

$$\text{Parabólica se } \Delta = B^2 - 4AC = 0$$

Um detalhe essencial é que, a região sobre a qual está definida a EDP e na qual a solução está bem definida, interfere fortemente na classificação da EDP. Um exemplo seria a própria equação de Laplace aqui já tratada, que é uma equação diferencial parcial elíptica.

1.6 Funções Hiperbólicas

A primeira pessoa a publicar um estudo completo sobre as funções hiperbólicas foi o matemático Johann Heinrich Lambert (1728-1777). Essa função tem esse nome, devido em muitos casos em que as funções trigonométricas geram elipses ou círculos, elas vão gerar hipérbolas. Uma de suas aplicações é na geometria hiperbólica, que é uma geometria não euclidiana.

Seno Hiperbólico

O \sinh é descrito pela função:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

É uma função ímpar e estritamente crescente. Possui apenas um único zero a origem. Além disso temos que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sinh x = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \sinh x = -\infty$$

Cosseno Hiperbólico

O \cosh é descrito pela função:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

É uma função par. Logo não é injetiva. não possui zeros, atinge um valor mínimo na origem com o valor $\cosh 0 = 1$. É também conhecida como função catenária. Além disso temos que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sinh x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sinh x = +\infty$$

No caso das definições das outras funções hiperbólicas, suas definições são encontradas da mesma forma que as trigonométricas, porém utilizado o \sinh e \cosh .

$$\Rightarrow \frac{c}{2}\sqrt{c^2 - 1} - \frac{1}{2} \ln |c + \sqrt{c^2 - 1}|$$

Então, a área do setor hiperbólico se torna

$$u = s.c - c\sqrt{c^2 - 1} - \ln |c + \sqrt{c^2 - 1}|$$

Note que $s = \sqrt{c^2 - 1}$, onde temos

$$u = \ln |c + \sqrt{c^2 - 1}|$$

Finalmente, temos:

$$e^u = c + \sqrt{c^2 - 1} \Rightarrow e^{2u} - 2e^u c + c^2 = c^2 - 1$$

$$c = \frac{e^{2u} + 1}{2e^u} = \frac{1}{2}(e^u + e^{-u})$$

Portanto,

$$\cosh u = \frac{e^u + e^{-u}}{2}$$

Analogamente para encontrar o $\sinh u$, tome $u = \ln |c + s|$.

$$u = \ln |\sqrt{s^2 + 1} + s|$$

de modo que

$$e^u = \sqrt{s^2 + 1} + s \Rightarrow e^{2u} - 2e^u s + s^2 = s^2 - 1$$

$$s = \frac{e^{2u} - 1}{2e^u} \Rightarrow \frac{e^u - e^{-u}}{2}$$

Portanto, $s = \sinh u$.

Estendendo-se o conceito para o campo dos complexos as funções hiperbólicas, seno e co-seno, são definidas, como no caso de variáveis reais, pelas seguintes expressões:

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

Também podemos definir as funções hiperbólicas através das trigonométricas, da forma

$$\cosh z = \cos -iz, \quad \sinh z = -i \sin -iz$$

dessa forma podem ter identidades semelhantes as das trigonométricas, sendo algumas delas expressa a seguir.

Identidades

1. $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \forall x \in \mathbb{R}$
2. $\cosh x + \sinh x = e^x, \forall x \in \mathbb{R}$
3. $\sinh -x = -\sinh x, \forall x \in \mathbb{R}$
4. $\cosh -x = \cosh x, \forall x \in \mathbb{R}$
5. $\cosh x + y = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y, \forall x \in \mathbb{R}$
6. $\sinh x + y = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y, \forall x \in \mathbb{R}$
7. $\cosh x - y = \cosh x \cosh y - \sinh x \sinh y, \forall x \in \mathbb{R}$
8. $\sinh x - y = \sinh x \cosh y - \cosh x \sinh y, \forall x \in \mathbb{R}$

As outras funções hiperbólicas como \tanh , \coth entre as outras, são encontradas de maneira análoga que as trigonométricas, utilizando o cosseno e o seno hiperbólico.

Capítulo 2

Cosmologia Newtoniana

2.1 Cosmologia

A cosmologia esta geralmente associada à complexidade matemática inerente à geometria Riemanniana, álgebra tensorial, variedade diferenciáveis, grupos contínuos de simetria, etc. Tendo em vista que a Relatividade Geral é uma teoria de gravitação formulada em uma geometria Riemanniana quadri-dimensional, é frequente que os especialistas da área tenham a impressão de que a cosmologia só pode ser estudada usando todo esse aparato matemático. Mostraremos a seguir esse estudo com todas as ferramentas matemáticas utilizada.

2.2 Modelo discreto de universo

É possível construir um modelo cosmológico ao assumir um numero finito de galáxias no universo, e considerarmos como partículas do sistema Newtoniano. Se a galáxia i possui massa m_i e posição dada pelo vetor $\vec{r}_i(t)$, a partir de uma origem fixa no ponto O , considerando o principio cosmológico a partir do O , o movimento esfericamente simétrico, assim, as galáxias terão um movimento estritamente radial. Dessa forma a posição das galáxias será dada pelo vetor

$$\vec{r}_i(t) = r_i(t)\hat{r} \quad (2.1)$$

A energia cinética total do sistema será

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2 \quad (2.2)$$

A energia potencial gravitacional para um par de galáxias com massas m_i e m_j será dada por

$$V_{ij} = -G \frac{m_i m_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \quad (2.3)$$

E para todas as partículas do sistema tem-se

$$V = -G \sum_{i,j=1}^n \frac{m_i m_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \quad (2.4)$$

Agora vamos assumir a existência de uma força cosmológica atuando na galáxia i na seguinte forma

$$\vec{F}_i = \frac{1}{3} \Lambda m_i \vec{r}_i \quad (2.5)$$

onde $\frac{1}{3}$ foi colocado por conveniência e Λ é a constante cosmológica que pode assumir valores negativos e positivos. Essa força cosmológica assumida implicará na existência de uma energia potencial adicional dada por.

$$u = - \int F dr$$

onde $u = V_c$, assim temos,

$$V_c = - \int \vec{F}_i dr = - \int \frac{1}{3} \Lambda m_i \vec{r}_i dr = - \frac{1}{6} \Lambda m_i \vec{r}_i^2$$

$$V_c = - \frac{1}{6} \Lambda \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i^2 \quad (2.6)$$

Dessa forma escrevemos que a energia total do sistema de galáxias pode ser escrito como

$$E = T + V + V_c$$

ou seja

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n m_i \vec{V}_i^2 - G \sum_{i,j=1}^n \frac{m_i m_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} - \frac{1}{6} \Lambda \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i^2 \quad (2.7)$$

Supondo agora que em uma determinada época fixa, isto é, em um determinado valor t_0 do tempo Newtoniano, o movimento e distribuição do sistema sejam conhecidos. Assim

em qualquer época posterior a posição da galáxia é dada por

$$r_i(t) = S(t)r_i(t_0) \quad (2.8)$$

onde $S(t)$ é o fator de escala.

Da equação (2.8), pode-se escrever a velocidade radial das galáxias como

$$\dot{r}_i(t) = \dot{S}(t)r_i(t_0) \quad (2.9)$$

e combinando com (2.9) temos

$$r_i(t_0) = \frac{r_i(t)}{S(t)} \Rightarrow \dot{r}_i(t) = \dot{S}(t) \cdot \frac{r_i(t)}{S(t)}$$

$$\dot{r}_i = \frac{\dot{S}(t)}{S(t)} \cdot r_i(t) \quad (2.10)$$

onde definimos $H(t)$ como sendo $\frac{\dot{S}(t)}{S(t)}$ cujo é chamado de parâmetro de Hubble. Assim obtendo-se

$$\dot{r}_i = H(t) \cdot r_i(t) \quad (2.11)$$

que também podemos escreve a equação anterior como

$$\vec{V}_i = H(t) \cdot r_i(t)$$

Aqui temos a lei da velocidade-distância, especificando que uma determinada época em um universo em expansão, a velocidade de recessão de uma dada galáxia é proporcional a distância da galáxia ao ponto em que ela se localiza. Se substituirmos as equações (2.9) e (2.11) na equação (2.7), o resultado será

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n m_i [\dot{S}(t)r_i(t_0)]^2 - G \sum_{i,j=1}^n \frac{m_i m_j}{|r_i(t_0)S - r_j(t_0)S|} - \frac{1}{6} \Lambda \sum_{i=1}^n m_j [r_i(t_0)S]^2$$

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n m_i [r_i(t_0)]^2 \dot{S}^2 - G \sum_{i,j=1}^n \frac{m_i m_j}{|r_i(t_0) - r_j(t_0)|S} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \Lambda \sum_{i=1}^n m_j [r_i(t_0)]^2 S^2$$

$$E = A\dot{S}^2 - \frac{B}{S} - DS^2 \quad (2.12)$$

onde A, B e D são coeficientes constantes e definidos como:

$$A = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n m_i [r_i(t_0)]^2, \quad (2.13)$$

$$B = G \sum_{i,j=1}^n \frac{m_i m_j}{|r_i(t_0) - r_j(t_0)|}, \quad (2.14)$$

$$D = \frac{1}{3} \Lambda A \quad (2.15)$$

Esses coeficientes são independentes do tempo t , onde dependem apenas da natureza do sistema em uma determinada época de referencia t_0 .

A equação (2.12) é a equação diferencial cosmológica e de acordo com o valor atribuído a constante $\Lambda(-1, 0, 1)$ é possível descrever a evolução do universo, ou seja, se as galáxias estão se expandindo ou sofrendo uma atração cósmica. Se $\Lambda = 0$, e o universo estiver expandindo, a equação (2.12) mostra que o segundo termo do lado direito também precisa diminuir, implicando que a expansão do universo está decrescendo. Com Λ positivo, todas as galáxias estarão sofrendo uma repulsão cósmica, impulsionando-as para distancias cada vez maiores da origem. Porém se Λ for negativo, a expansão irá diminuir progressivamente. A equação anterior poder ser escrita numa forma algébrica idêntica à obtida na cosmologia relativística Friedmmaniana, introduzindo $R(t)$, para o fato de escala do universo, Sendo $R(t) = \mu S(t)$, temos

$$E = A\dot{S}^2 - \frac{B}{S} - DS^2$$

dividindo toda a equação por A e isolando \dot{S}^2 , obtemos

$$\frac{E}{A} = \dot{S}^2 - \frac{B}{A} \cdot \frac{1}{S} - \frac{1}{3} \Lambda S^2 \Rightarrow \dot{S}^2 = \frac{B}{A} \cdot \frac{1}{S} + \frac{1}{3} \Lambda S^2 + \frac{E}{A}$$

agora multiplicando por μ^2 temos

$$\mu^2 \dot{S}^2 = \frac{\mu^3 B}{a} \cdot \frac{1}{\mu S} + \frac{1}{3} \Lambda \mu^2 S^2 + \frac{\mu^2 E}{a} \Rightarrow \dot{R}^2 = \frac{\mu^3 B}{a} \cdot \frac{1}{R} + \frac{1}{3} \Lambda R^2 + \frac{\mu^2 E}{A}$$

$$\dot{R}^2 = \frac{C}{R} + \frac{1}{3} \Lambda R^2 - K \quad (2.16)$$

Sendo as constantes C e K definidas como

$$C \equiv \frac{B\mu^3}{A}, \quad (2.17)$$

$$K \equiv -\frac{\mu^2 E}{A} \quad (2.18)$$

Da mesma forma que a equação (2.12) a equação (2.16) fornece uma descrição do comportamento do universo, determinado pela energia E do sistema. Quando $E = 0$, a constante μ

é definida arbitrariamente, mas na equação (2.18) K será necessariamente igual a zero. Para $E \neq 0$, μ é escolhido tal que

$$\mu^2 = \frac{A}{|E|} \quad (2.19)$$

e com esta definição tem-se que se $E > 0$, $K = -1$, e se $E < 0$, $K = +1$. Assim, a escolha do reescalonamento $R(t) = \mu S(t)$ implicara que K só poderá assumir valores $+1$, 0 ou -1 . Na teoria Newtoniana K corresponde ao termo de energia, enquanto que na cosmologia relativística refere-se à curvatura do espaço.

2.3 Modelo contínuo de Universo

O modelo apresentado anteriormente pode ser estendido para uma descrição contínua, de acordo com o princípio cosmológico de homogeneidade e isotropia, que toda a massa do universo esta distribuída uniformemente em cada época t . Supondo então que o nosso modelo de universo apresentado até o momento é limitado por uma superfície esférica A cujo raio é função apenas do tempo. Assim o raio dessa esfera será dado por $a(t)$, e a origem O do sistema de coordenadas estará situada no centro dessa esfera. Em uma época t_0 , cujo comportamento do sistema é conhecido, a casca esférica com raio x e espessura dx , terá uma área $4\pi x^2$ e volume $4\pi x^2 dx$. Dessa forma, a casca esférica terá uma massa dada por

$$dm(x) = 4\pi\rho(t_0)dx \quad (2.20)$$

sua massa total será

$$\sum_{i=1}^n m_i \Rightarrow \int_0^{a(t_0)} 4\pi x^2 \rho(t_0) dx \quad (2.21)$$

assim podemos dizer que para qualquer função $f(r_i)$ é razoável que a soma de $m_i f(r_i)$ seja escrita como

$$\sum_{i=1}^n m_i f(r_i) = \int_0^{a(t_0)} 4\pi x^2 \rho_0(t_0) dx \quad (2.22)$$

onde $\rho_0 = \rho(t_0)$, $a(t_0) = a_0$. Utilizando o argumento acima na equação (2.13) obtemos

$$A = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i [r_i t_0]^2$$

fazendo $r_i(t_0) = x$ e $f(x) = x^2$ temos

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{a_0} 4\pi x^2 \rho_0 x^2 dx \Rightarrow A = 2\pi\rho_0 \int_0^{a_0} x^4 dx \Rightarrow A = \frac{2\pi}{5} \rho_0 a_0^5 \quad (2.23)$$

Se definirmos agora a massa total do sistema como sendo

$$M = \sum_{i=1}^n m_i \Rightarrow \int_0^{a_0} 4\pi x^2 \rho_0 dx = \frac{4\pi}{3} \rho_0 a_0^3 \quad (2.24)$$

Relacionando a equação (2.23) com a equação (2.24), obtemos:

$$M = \frac{4\pi}{3} \rho_0 a_0^3 \Rightarrow \rho_0 = \frac{M \cdot 3}{4\pi a_0^3} \Rightarrow A = \frac{2\pi}{5} \cdot \frac{M \cdot 3}{4\pi a_0^3} \cdot a_0^5$$

$$A = \frac{3M}{10} a_0^2 \quad (2.25)$$

Tendo em vista que M é constante no tempo, temos que $\rho_0 a_0^3 = \rho a^3 = cte$, ou

$$\frac{d}{dt}(\rho a^3) = 0 \quad (2.26)$$

para qualquer tempo t. Para calcular o coeficiente D, usamos a equação (2.25)

$$D = \frac{1}{3} \Lambda A \Rightarrow D = \frac{1}{3} \Lambda \cdot \frac{3M}{10} a_0^2$$

onde obtemos

$$D = \frac{M}{10} \Lambda a_0^2 \quad (2.27)$$

Para calcular B, temos que o potencial gravitacional no local da galáxia j no tempo t_0 devido a todas as partículas i que estão mais próximas do centro O do que j será:

$$\phi[\vec{r}_j(t_0)] = -G \sum_{i=1}^{j-1} \frac{m_j}{|\vec{r}_i(t_0) - \vec{r}_j(t_0)|} \quad (2.28)$$

A partir desse resultado a equação (2.14) é escrita da seguinte forma:

$$B = G \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{m_i m_j}{|\vec{r}_i(t_0) - \vec{r}_j(t_0)|} = \sum_{j=1}^n m_j \sum_{i=1}^{j-1} G \frac{m_i}{|\vec{r}_i(t_0) - \vec{r}_j(t_0)|} = \sum_{j=1}^n m_j \{-\phi[r_j(t_0)]\} \quad (2.29)$$

Utilizando a relação (2.22), aplicaremos na equação (2.29)

$$B = - \int_0^{a_0} 4\pi x^2 \rho_0 \phi(x, t_0) dx \quad (2.30)$$

onde $\phi(x, t_0)$ é o potencial gravitacional a uma distância x de O em um tempo t_0 devido a todas as massas $M(x)$ localizadas no interior da esfera de raio x.

Então da equação (2.21) temos que

$$M(x) = \int_0^x dm(x) \Rightarrow M(x) = \int_0^x 4\pi x^2 \rho_0 dx \Rightarrow M(x) = \frac{4}{3} \pi \rho_0 x^3 \quad (2.31)$$

Assim o potencial gravitacional será dado por

$$\phi(x, t_0) = -\frac{G.M(x)}{x} = -\frac{4}{3}\pi G\rho_0 x^2 \quad (2.32)$$

Com essa expressão podemos escrever B como sendo

$$B = -\int_0^{a_0} 4\pi\rho_0 \cdot \left(-\frac{4}{3}\pi G\rho_0 x^2\right) dx \Rightarrow B = \frac{16\pi^2}{3}\rho_0^2 G \int_0^{a_0} x^4 dx$$

$$B = \frac{16}{15}\pi^2 \rho_0^2 G a_0^5 \quad (2.33)$$

Para calcularmos C, utilizaremos a equação (2.8) e a relação $R(t) = \mu S(t)$

$$S(t) = \frac{R(t)}{\mu} \Rightarrow S(t) = \frac{r_i(t)}{r_i(t_0)}$$

$$\frac{R(t)}{\mu} = \frac{r_i(t)}{r_i(t_0)} \quad (2.34)$$

Na descrição contínua essa relação pode tomar a forma especial $[\frac{R(t)}{\mu}] = [\frac{a}{a_0}]$ pois o fator de escala $R(t)$ é o mesmo para todas as partículas do substrato cosmológico, inclusive para as situadas na borda da distribuição onde $r_{borda}(t) = a(t)$. Lembrando que ρa^3 é uma constante para qualquer tempo t, chegamos à relação

$$\rho_0 a_0^3 = \rho a^3 = cte \Rightarrow \frac{\rho_0}{\rho} = \left(\frac{a}{a_0}\right)^3 \Rightarrow \frac{a}{a_0} = \sqrt[3]{\frac{\rho_0}{\rho}}$$

$$\frac{R(t)}{\mu} = \frac{a}{a_0} \Rightarrow \frac{R(t)}{\mu} = \sqrt[3]{\frac{\rho_0}{\rho}} \Rightarrow \frac{R(t)^3}{\mu^3} = \frac{\rho_0}{\rho} \quad (2.35)$$

Substituindo a equação acima na expressão (2.17) considerando as equações (2.23) e (2.33), obtemos a forma de C no modelo contínuo

$$\mu^3 = \frac{\rho \cdot R(t)^3}{\rho_0} \quad C = \frac{B\mu^3}{A}$$

$$C = \frac{\frac{16}{15}G\pi^2\rho_0^2 a_0^5 \cdot \frac{\rho R(t)^3}{\rho_0}}{\frac{2\pi}{5}\rho_0 a_0^5} \Rightarrow C = \frac{\frac{8}{3}G\pi\rho_0\rho R(t)^3}{\rho_0} \Rightarrow C = \frac{8}{3}G\pi\rho(t)R(t)^3 \quad (2.36)$$

A passagem do modelo discreto para o contínuo permite obter a expressão para C na qual a equação diferencial cosmológica tem exatamente a mesma forma algébrica que é obtida via relatividade geral. Isso ocorre porque a equação (2.36) é igual à obtida pelo modelo relativístico homogêneo e isotrópico de Friedmann. Uma forma alternativa de apresentar a

cosmologia Newtoniana é a de iniciarmos nossa discussão considerando apenas a cinemática da nuvem do gás cosmológico. Sendo o movimento das partículas do gás estritamente radial, temos

$$\vec{r}(t) = R(t)\vec{r}(t_0) \quad (2.37)$$

onde \vec{r} é o vetor posição na época de referência $t = t_0$, o fator de escala é unitário, ou seja, $R(t_0) = 1$ como condição de contorno. Derivando a expressão acima, obtemos a equação da velocidade de uma partícula de gás,

$$v = \frac{dr}{dt} = \frac{r(t)}{R(t)} \cdot \frac{dR(t)}{dt} = r(t) \cdot \frac{1}{R(t)} \cdot \frac{dR(t)}{dt}$$

e temos que

$$H(t) = \frac{1}{R(t)} \cdot \frac{dR(t)}{dt} = \frac{\dot{R}}{R} \quad (2.38)$$

onde obtemos a equação da lei de velocidade distância na forma contínua, de modo que

$$v(r, H) = H(t) \cdot \vec{r}(t) \quad (2.39)$$

Utilizaremos agora a equação da continuidade, sendo a lei de conservação da massa à nuvem de gás, assim temos

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = \frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot (\rho H(t) \vec{r}(t)) = \frac{d\rho}{dt} + \rho \cdot H(t) \nabla \cdot \vec{r}(t) = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{r} = \left(\frac{\partial \hat{x}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{z}}{\partial z} \right) = 3$$

logo chegamos à equação

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + 3\rho H(t) = 0 \quad (2.40)$$

integrando a equação em relação a t e aplicando a equação 2.38 em 2.40, temos:

$$\frac{d\rho}{\rho} = -3 \frac{dR}{dt} \cdot \frac{1}{R} dt \quad (2.41)$$

integrando a equação 2.41, temos

$$\ln \rho(t) - \ln \rho(t_0) = -3[\ln R(t) - \ln R(t_0)] \Rightarrow \ln \left(\frac{\rho(t)}{\rho(t_0)} \right) = -3 \ln \left(\frac{R(t)}{R(t_0)} \right)$$

$$\ln \left(\frac{\rho(t)}{\rho(t_0)} \right) = \ln \left(\frac{R(t)}{R(t_0)} \right)^3 \Rightarrow \frac{\rho(t)}{\rho(t_0)} = \left(\frac{R(t)}{R(t_0)} \right)^3$$

sendo $R(t_0) = 1$

$$\frac{\rho(t)}{\rho(t_0)} = R(t)^3 \Rightarrow \frac{\rho(t)}{\rho(t_0)} = \frac{1}{R^3(t)} \quad (2.42)$$

que é equivalente a equação (2.35).

Para discutirmos a dinâmica do gás, podemos impor a equação de movimento na forma da equação de Euler. Lembrando que de acordo com o princípio cosmológico as quantidades cósmicas dependem somente do tempo, então a pressão na nuvem do gás será dada por $p = p(t)$. Porém em modelos cosmológicos mais simples a pressão é nula, logo a equação de Euler se torna

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d[H(t)\vec{r}(t)]}{dt} = \frac{dH(t) \cdot \vec{r}(t)}{dt} + H(t)\dot{\vec{r}}(t) \Rightarrow \frac{\vec{v}}{dt} = \frac{dH(t)}{dt}\vec{r}(t) + H^2(t)\vec{r}(t)$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{1}{\rho}\nabla p - \vec{f} = \frac{dH(t)}{dt}\vec{r}(t) + H^2(t)\vec{r}(t) - \vec{f} \Rightarrow \left[\frac{dH(t)}{dt} + H^2(t) \right] \vec{r}(t) - \vec{f} = 0 \quad (2.43)$$

Sendo \vec{f} força externa por unidade de massa.

Na gravitação temos que $\vec{f} = -\nabla\phi$, o que implica que podemos calcular \vec{f} utilizando a equação de Poisson

$$\nabla \cdot \vec{f} = -4\pi G\rho \quad (2.44)$$

calculando a divergência da equação (2.43) obtemos

$$\vec{f} = \left[\frac{dH(t)}{dt} + H^2(t) \right] \vec{r} \Rightarrow \nabla \cdot \vec{f} = 3 \left[\frac{dH(t)}{dt} + H^2(t) \right] \Rightarrow 3 \left[\frac{dH(t)}{dt} + H^2(t) \right] = -4\pi G\rho \quad (2.45)$$

Da equação (40) e o parâmetro de Hubble, temos

$$\begin{aligned} \frac{dH(t)}{dt} + H^2(t) = -\frac{4}{3}\pi G\rho \Rightarrow \frac{d\dot{R}}{dt R} = -\frac{4}{3}\pi G\rho \Rightarrow \left(\frac{d\dot{R}}{dt} R - \dot{R} \frac{dR}{dt} \right) \left(\frac{1}{R^2} \right) + \frac{\dot{R}^2}{R^2} = -\frac{4}{3}\pi G\rho \\ R^3 \left(\frac{1}{R} \frac{d^2 R}{dt^2} - \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{4}{3R^3}\pi G\rho_0 \right) = 0 \Rightarrow R^2 \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{4}{3}\pi G\rho_0 = 0 \end{aligned} \quad (2.46)$$

Essa equação mostra claramente um universo estático, ou seja, $\dot{R} = \ddot{R} = 0$ onde só é possível quando se tem densidade igual a 0. Assumindo que a força gravitacional de uma partícula em A é devida inteiramente à matéria contida em A com centro em O, então a força gravitacional será dada por:

$$\vec{f} = \ddot{\vec{r}}(t) = \frac{-GM}{[\vec{r}(t)]^2} \hat{r} = -\frac{4}{3}\pi G\rho(t)\vec{r} \quad (2.47)$$

Em que introduziremos o termo cosmológico

$$\vec{f} = -\frac{4}{3}\pi G\rho(t)\vec{r} + \frac{1}{3}\Lambda\vec{r} \quad (2.48)$$

que implica na modificação da equação de Poisson para:

$$\nabla \cdot \vec{f} = -4\pi G\rho + \Lambda \quad (2.49)$$

Assim a equação (2.46) com a constante cosmológica torna-se

$$R^2 \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{4}{3}\pi G\rho_0 - \frac{1}{3}\Lambda R^3 = 0 \quad (2.50)$$

Multiplicando (2.50) por $2\dot{R}/R^2$, temos

$$\begin{aligned} \frac{2\dot{R}}{R^2} \left(R^2 \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{4}{3}\pi G\rho_0 - \frac{1}{3}\Lambda R^3 \right) &= 0 \\ 2\dot{R} \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{8}{3} \frac{\pi}{R^2} G\rho_0 - \frac{2}{3} \Lambda R \dot{R} &\Rightarrow 2\dot{R}^2 \frac{d}{dt} - \frac{8}{3} \frac{\pi}{R^2} G\rho_0 - \frac{2}{3} \Lambda R^2 \frac{d}{dt} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\dot{R}^2 - \frac{-8\pi}{3R} G\rho_0 - \frac{\Lambda}{3} R^2 \right) &= 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\dot{R}^2 - \frac{-8\pi}{3R} G\rho_0 - \frac{\Lambda}{3} R^2 \right) = 0 \\ \dot{R}^2 - \frac{-8\pi}{3R} G\rho_0 - \frac{\Lambda}{3} R^2 + k &= 0 \Rightarrow \dot{R}^2 = \frac{8\pi}{3R} G\rho_0 + \frac{\Lambda}{3} R^2 - k \end{aligned}$$

$$\dot{R}^2 = \frac{C}{R} + \frac{\Lambda}{3} R^2 - k \quad (2.51)$$

Onde k é uma constante de integração e C é definido por

$$C = \frac{8}{3}\pi G\rho_0 \quad (2.52)$$

Assim obtendo a mesma equação diferencial cosmológica que descreve a evolução do universo para um modelo contínuo.

2.4 Densidade crítica

Consideremos uma galáxia de massa m movendo-se com velocidade v a uma distância r de um sistema de coordenadas qualquer, em um sistema total M contida no volume de raio r. Dessa forma a energia total do sistema, é a soma da energia cinética mais a energia potencial gravitacional.

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = \text{constante} \quad (2.53)$$

O valor da energia total do universo determinará sua geometria

$$E > 0, \text{Universo aberto}$$

$$E = 0, \text{Universo plano}$$

$$E < 0, \text{Universo fechado}$$

Fazendo o uso da lei de Hubble $v = H_0 r$, onde H_0 é a constante de Hubble no presente, e $M = \rho_c \frac{4\pi}{3} r^3$, sendo ρ_c a densidade crítica, que é a densidade para parar a expansão do universo ($E = 0$), temos

$$\frac{1}{2} H_0^2 m r^2 - \frac{4}{3} G \pi \rho_c m r^2 = 0 \quad (2.54)$$

$$\frac{1}{2} H_0^2 m r^2 = \frac{4}{3} G \pi \rho_c m r^2 \Rightarrow \frac{1}{2} H_0^2 = \frac{4}{3} G \pi \rho_c$$

$$\rho_c = \frac{3 H_0^2}{8 G \pi} \quad (2.55)$$

Usando $H_0 = 75 \text{ km/s/Mpc}$, obtemos:

$$1,1 \times 10^{-26} \text{ Kg/m}^3 = 1,1 \times 10^{-29} \text{ g/cm}^3$$

que pode ser comparado com a densidade de matéria visível observada, que é da ordem de 10^{-31} g/cm^3 , ou seja, cerca de 100 vezes menos do que a densidade crítica. Vamos descrever a distância entre dois pontos quaisquer no espaço como:

$$r(t) = a(t) r_0 \quad (2.56)$$

onde $a(t)$ é um fator de escala e r_0 é a distância entre dois pontos no instante em que $a_0 = a(t_0) = 1$. Para se obter a velocidade de recessão entre esses dois pontos, deriva-se a equação (2.56), obtendo:

$$v(t) = \frac{dr}{dt} = \frac{da}{dt} r_0 = \frac{1}{a} \frac{da}{dt} r(t) \quad (2.57)$$

Escrevendo $v(t) = H(t) r(t)$, como na lei de Hubble, temos

$$H(t) = a(t)^{-1} \frac{da}{dt} = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \quad (2.58)$$

que é outra forma de expressar a lei de Hubble.

2.5 Parâmetro de densidade

Consideremos agora a força gravitacional resultante sobre uma partícula de massa M , homogêneo e isotrópico, em expansão. Consideremos uma partícula na superfície da esfera de raio $r(t)$.

A aceleração sobre a partícula em um dado instante será:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{GM}{r^2} \quad (2.59)$$

A energia mecânica da partícula será dada por

$$E = \frac{1}{2}m \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 - \frac{GMm}{r} \quad (2.60)$$

Se apenas a gravidade atuar no Universo $E = \text{constante}$. Assim o sinal de E irá determinar se as partículas se afastarão indefinidamente uma das outras ou não

$E > 0$, a expansão é indefinida (Universo aberto)

$E < 0$, a expansão é contida (Universo fechado)

sendo a massa dada por $M = \frac{4\pi r^3}{3}\rho(t)$, a equação (2.60) pode ser escrita como:

$$2E = m \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 - m \frac{8\pi G r^3}{3} \rho(t) \quad (2.61)$$

Definindo a densidade crítica como aquela necessária para conter a expansão do universo

$$\rho_c(t) = \frac{3H^2}{8\pi G} \quad (2.62)$$

e substituindo $\rho_c(t)$ na equação (2.61), obtemos:

$$\begin{aligned} (\rho_c(t))^{-1} &= \left(\frac{3H^2}{8\pi G} \right)^{-1} \Rightarrow \frac{1}{\rho_c(t)} = \frac{8\pi G}{3H^2} \Rightarrow \frac{H^2}{\rho_c(t)} = \frac{8\pi G}{3} \\ 2E &= mH^2r^2 - mr^2 \frac{8\pi G}{3} \rho(t) \Rightarrow 2E = mH^2r^2 - mr^2 H^2 \frac{\rho(t)}{\rho_c(t)} \\ 2E &= mr^2 \left(H^2 - \frac{H^2 \rho(t)}{\rho_c(t)} \right) \Rightarrow \frac{2E}{mr^2} = H^2 \left(1 - \frac{\rho(t)}{\rho_c(t)} \right) \\ \frac{2E}{mr^2} &= H^2 [1 - \Omega(t)] \end{aligned} \quad (2.63)$$

onde $\Omega(t) = \frac{\rho(t)}{\rho_c(t)}$ e é chamado parâmetro de densidade.

Os sinais de E e $\Omega(t)$ estão anti-correlacionados, ou seja,

$$\Omega(t) > 1 \rightarrow \rho(t) > \rho_c(t), E < 0 : \text{Universo fechado.}$$

$$\Omega(t) < 1 \rightarrow \rho(t) < \rho_c(t), E > 0 : \text{Universo aberto.}$$

$$\Omega(t) = 1 \rightarrow \rho(t) = \rho_c(t), E = 0 : \text{Universo plano.}$$

A energia total E pode ser escrita em termos das propriedades no presente, utilizando a lei de Hubble

$$E = \frac{1}{2}mH_0^2r_0^2 - Gm\frac{4\pi}{3}r_0^2\rho_0 \quad (2.64)$$

inserindo $\Omega_0 = \frac{\rho_0}{\rho_c} = \frac{8\pi g\rho_0}{3H_0^2}$, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{2E}{mr^2} &= H_0^2[1 - \Omega_0] \Rightarrow \frac{E}{mr^2} = \frac{H_0^2}{2} - \frac{H_0^2\Omega_0}{2} \\ E &= mr_0^2 \left[\frac{H_0^2}{2} - \frac{H_0^2\Omega_0}{2} \right] \end{aligned} \quad (2.65)$$

Escrevendo a massa M em termos da densidade atual, temos

$$\begin{aligned} 2E &= m \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 - \frac{m8\pi Gr^2}{3}\rho_0 \Rightarrow 2E = m\dot{r}^2 - \frac{m2G4\pi r^3}{3r}\rho_0 \\ \frac{2E}{m} &= \dot{r}_0^2 - \frac{2G4\pi r_0^3}{3r}\rho_0 \Rightarrow \dot{r}_0^2 - \frac{2G4\pi r_0^3}{3r}\rho_0 = [H_0^2 - \Omega_0 H_0^2]r_0^2 \\ \frac{\dot{r}^2}{r_0^2} - \frac{2G4\pi r_0^3}{r3r_0^2}\rho_0 &= H_0^2[1 - \Omega_0] \end{aligned} \quad (2.66)$$

e definindo dois parâmetros

$$t \equiv \frac{\tau_*}{H_0} \quad (2.67)$$

$$D_* \equiv \frac{r}{r_0} \quad (2.68)$$

Podemos escrever a equação (2.66) como:

$$\begin{aligned} H_0^2 \left(\frac{\dot{r}^2}{H_0^2 r_0^2} - \Omega_0 \frac{r_0}{r} \right) &= H_0^2[1 - \Omega_0] \\ \frac{1}{H_0^2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 - \frac{\Omega_0}{D_*} &= 1 - \Omega_0 \Rightarrow \frac{1}{H_0^2} \left(H_0 r_0 \frac{dD_*}{d\tau_*} - \frac{\Omega_0}{D_*} \right) = 1 - \Omega_0 \\ \left(\frac{dD_*}{d\tau_*} \right)^2 - \frac{\Omega_0}{D_*} &= 1 - \Omega_0 \end{aligned} \quad (2.69)$$

Para o caso $\Omega \neq 1$, reescalamos mais uma vez, definindo:

$$\xi \equiv \frac{|1 - \Omega_0|}{\Omega_0} D_* \quad (2.70)$$

$$\tau \equiv \frac{|1 - \Omega_0|^{\frac{3}{2}}}{\Omega_0} \tau_* \quad (2.71)$$

Se o universo é aberto ($\Omega_0 < 1$) o lado direito é +1, se é fechado ($\Omega_0 > 1$), o lado direito é -1.

A solução da equação é obtida de

$$\tau = \int_0^\xi \left(\frac{\xi}{1 \pm \xi} \right)^{\frac{1}{2}} d\xi \quad (2.72)$$

onde se assume $\xi = 0$ para $\tau = 0$. No caso em que o denominador é $1 - \xi$, onde o universo é fechado e $\xi \leq 1$, a solução é encontrada fazendo-se a substituição $\xi = \sin^2(\theta/2)$. Já quando o denominador contiver $1 + \xi$, em que o universo é aberto e $\xi > 1$, a substituição é $\xi = \sinh^2(\theta/2)$. Dessa forma a solução de forma paramétrica será;

Universo Fechado para $\xi \leq 1$

$$\tau = \int_0^\xi \left(\frac{\xi}{1 - \xi} \right)^{\frac{1}{2}} d\xi$$

$$\xi = \sin^2(\theta/2) \Rightarrow d\xi = 2 \sin(\theta/2) \cos(\theta/2) \frac{1}{2} \Rightarrow d\xi = \sin(\theta/2) \cos(\theta/2)$$

$$\tau = \int_0^\xi \left(\frac{\sin^2(\theta/2)}{1 - \sin^2(\theta/2)} \right)^{\frac{1}{2}} d\xi \Rightarrow \tau = \int_0^\theta \left(\frac{\sin^2(\theta/2)}{\cos^2(\theta/2)} \right)^{\frac{1}{2}} \sin(\theta/2) \cos(\theta/2) d\theta$$

$$\tau = \int_0^\theta \frac{\sin(\theta/2)}{\cos(\theta/2)} \sin(\theta/2) \cos(\theta/2) d\theta \Rightarrow \tau = \int_0^\theta \sin^2(\theta/2) d\theta \Rightarrow \int_0^\theta \frac{(1 - \cos \theta)}{2} d\theta$$

$$\tau = \frac{1}{2}(\theta - \sin \theta)|_0^\theta \Rightarrow \tau = \frac{1}{2}(\theta - \sin \theta)$$

Logo, temos

$$\xi = \frac{1}{2}(1 - \cos \theta) \quad \tau = \frac{1}{2}(\theta - \sin \theta) \quad (2.73)$$

Universo aberto $\xi > 0$

$$\tau = \int_0^\xi \left(\frac{\xi}{1 + \xi} \right)^{\frac{1}{2}} d\xi$$

$$\xi = \sinh^2(\theta/2) \Rightarrow d\xi = 2 \sinh(\theta/2) \cosh(\theta/2) \frac{1}{2} \Rightarrow d\xi = \sinh(\theta/2) \cosh(\theta/2)$$

$$\tau = \int_0^\xi \left(\frac{\sinh^2(\theta/2)}{1 + \sinh^2(\theta/2)} \right)^{\frac{1}{2}} d\xi \Rightarrow \tau = \int_0^\theta \left(\frac{\sinh^2(\theta/2)}{\cosh^2(\theta/2)} \right)^{\frac{1}{2}} \sinh(\theta/2) \cosh(\theta/2) d\theta$$

$$\tau = \int_0^\theta \frac{\sinh(\theta/2)}{\cosh(\theta/2)} \sinh(\theta/2) \cosh(\theta/2) d\theta \Rightarrow \tau = \int_0^\theta \sinh^2(\theta/2) d\theta \Rightarrow \int_0^\theta \frac{(\cosh \theta - 1)}{2} d\theta$$

$$\tau = \frac{1}{2}(\sinh \theta - \theta)|_0^\theta \Rightarrow \tau = \frac{1}{2}(\sinh \theta - \theta)$$

Logo, temos

$$\xi = \frac{1}{2}(\cosh \theta - 1) \quad \tau = \frac{1}{2}(\sinh \theta - \theta) \quad (2.74)$$

Substituindo as definições de τ e τ_* , obtemos Para $\Omega_0 > 1$ Para simplificar a equação, utilizamos uma variável b cujo definimos como:

$$b = \frac{\Omega_0 - 1}{\Omega_0}$$

$$\tau_* = \frac{\tau}{\Omega_0} \Rightarrow \tau_* = \frac{\Omega_0}{|1 - \Omega_0|^{-3/2}} \cdot \frac{\Omega_0^{-3/2}}{\Omega_0^{-3/2}}$$

$$\tau_* = \frac{|1 - \Omega_0|^{-1/2}}{|1 - \Omega_0|^{3/2}} \cdot \tau \Rightarrow \tau_* = \frac{\Omega_0^{-1/2}}{b^{3/2}} \cdot \tau \Rightarrow \tau_* = \Omega_0^{-1/2} b^{-3/2} \cdot \tau$$

$$\tau_* = \Omega_0^{-1/2} b^{-3/2} \cdot \int \sin^2 \theta / 2 d\theta \quad (2.75)$$

Onde a solução é:

$$\tau_* = \Omega_0^{-1/2} b^{-3/2} \cdot \frac{(\theta - \sin \theta)}{2} \Rightarrow \tau_* = \Omega_0^{-1/2} \frac{(\Omega_0 - 1)^{-3/2}}{\Omega_0^{-3/2}} \cdot \frac{(\theta - \sin \theta)}{2}$$

$$\tau_* = \frac{1}{2} \Omega_0 (\Omega_0 - 1)^{-3/2} \cdot (\theta - \sin \theta) \quad (2.76)$$

e de (2.67) temos:

$$t = \frac{1}{2H_0} \Omega_0 (\Omega_0 - 1)^{-3/2} \cdot (\theta - \sin \theta) \quad (2.77)$$

Para $\Omega_0 \rightarrow \infty$, $\theta_0 \rightarrow \pi$ e $\cos \theta \rightarrow -1$

$$\xi = \frac{\Omega_0 - 1}{\Omega_0} \cdot D_* \Rightarrow \frac{1 - \cos \theta}{2} = \frac{\Omega_0 - 1}{\Omega_0} \cdot \frac{r}{r_0}$$

Para $t = t_0$ e $r = r_0$, temos

$$1 - \cos \theta = \frac{2\Omega_0 - 2}{\Omega_0} \Rightarrow \cos \theta = \frac{2 - 2\Omega_0}{\Omega_0} + 1 \Rightarrow \cos \theta = \frac{2 - \Omega_0}{\Omega_0} \quad (2.78)$$

para $\Omega_0 > 1$, e temos

$$\Omega_0 - 1 = \frac{\Omega_0 - \Omega_0 \cos \theta}{2} \quad (2.79)$$

Aplicando em (2.77), temos

$$\tau_0 = \frac{1}{2H_0} \Omega_0 \cdot (\Omega_0 - 1)^{-3/2} \theta \Rightarrow \tau_0 = \frac{1}{2H_0} \Omega_0 \cdot \left(\frac{\Omega_0 - \Omega_0 \cos \pi}{2} \right)^{-3/2} \pi$$

$$\tau_0 = \frac{1}{2H_0} \Omega_0 \cdot \left(\frac{\Omega_0 + \Omega_0}{2} \right)^{-3/2} \pi \Rightarrow \tau_0 = \frac{1}{2H_0} \Omega_0 \cdot \Omega_0^{-3/2} \pi \Rightarrow \tau_0 = \frac{1}{2H_0} \Omega_0^{-1/2} \pi \rightarrow 0 \quad (2.80)$$

Para $\Omega \rightarrow +1$, $\theta_0 \ll 1$ e $\cos \theta \rightarrow 1$

Utilizando uma definição analítica para o $\cos \theta_0$, temos

$$\begin{aligned} \cos \theta_0 \simeq 1 - \frac{\theta^2}{2} = \frac{2 - \Omega_0}{\Omega_0} \Rightarrow 1 - \frac{\theta^2}{2} = \frac{2}{\Omega_0} - 1 \Rightarrow -\frac{\theta^2}{2} = \frac{2}{\Omega_0} - 2 \Rightarrow \theta^2 = 4 \cdot \frac{(\Omega_0 - 1)}{\Omega} \\ \theta = 2 \cdot \left(\frac{\Omega - 1}{\Omega} \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (2.81)$$

da mesma forma para o $\sin \theta_0$

$$\begin{aligned} \theta_0 - \sin \theta_0 \simeq \theta_0 - \left(\theta_0 - \frac{\theta_0^3}{6} \right) \Rightarrow \theta_0 - \sin \theta_0 \simeq \frac{\left[2 \left(\frac{\Omega_0 - 1}{\Omega} \right)^{1/2} \right]^3}{6} \\ \theta - \sin \theta \simeq \frac{8}{6} \left(\frac{\Omega_0 - 1}{\Omega} \right)^{3/2} \Rightarrow \theta - \sin \theta \simeq \frac{4}{3} \left(\frac{\Omega_0 - 1}{\Omega} \right)^{3/2} \end{aligned} \quad (2.82)$$

Aplicando em (2.77), obtemos

$$\begin{aligned} \tau_0 = \frac{1}{2H_0} \Omega_0 (\Omega_0 - 1)^{-3/2} \frac{4}{3} \left(\frac{\Omega_0 - 1}{\Omega} \right)^{3/2} \Rightarrow \tau_0 = \frac{2}{3H_0} \frac{\Omega_0}{\Omega_0^{3/2}} \Rightarrow \tau_0 = \frac{2}{3H_0} \Omega_0^{-1/2} \\ \tau_0 = \frac{2}{3} H_0^{-1} \end{aligned} \quad (2.83)$$

Para $\Omega_0 < 1$ Da mesma forma que utilizamos \underline{b} em (2.75), usaremos uma variável \underline{a} definida como

$$\begin{aligned} a = \frac{1 - \Omega_0}{\Omega_0} > 0 \\ \tau_* = \frac{\tau}{\frac{|1 - \Omega_0|^{3/2}}{\Omega_0}} \Rightarrow \tau_* = \frac{\Omega_0^{-1/2}}{\left(\frac{1 - \Omega_0}{\Omega_0} \right)^{3/2}} \cdot \tau \Rightarrow \tau_* = \Omega_0^{-1/2} \cdot a^{-3/2} \cdot \tau \\ \tau_* = \Omega_0^{-1/2} \cdot a^{-3/2} \cdot \int \sinh^2(\theta/2) d\theta \end{aligned} \quad (2.84)$$

Onde temos a solução

$$\tau_* = \Omega_0^{-1/2} \cdot a^{-3/2} \cdot (\sinh \theta - \theta) \quad (2.85)$$

e

$$t = \frac{1}{2H_0} \Omega_0^{-1/2} \frac{\Omega_0^{3/2}}{(1 - \Omega_0)^{3/2}} (\sinh \theta - \theta) \Rightarrow t = \frac{1}{2H_0} \Omega_0 (1 - \Omega_0)^{-3/2} (\sinh \theta - \theta) \quad (2.86)$$

Onde temos

$$\left(\frac{1 - \Omega_0}{\Omega_0}\right) \frac{r}{r_0} = \frac{\cosh \theta - 1}{2}$$

para $t = t_0$ e $r = r_0$

$$\frac{1 - \Omega_0}{\Omega_0} = \frac{\cosh \theta - 1}{2} \Rightarrow \cosh \theta - 1 = \frac{2 - 2\Omega_0}{\Omega_0} \quad (2.87)$$

Para $\Omega_0 \rightarrow 1$, $\cosh \theta \rightarrow 1$ e $\theta_0 \rightarrow 0$

De forma análoga a (2.81) e (2.82), usaremos a forma analítica

$$\cosh \theta \simeq 1 + \frac{\theta_0^2}{2} \simeq \frac{2}{\Omega_0} - 1 \Rightarrow \theta_0 \simeq 2 \left(\frac{1 - \Omega_0}{\Omega_0}\right)^{1/2} \quad (2.88)$$

e

$$\sinh \theta - \theta \rightarrow \theta_0 + \frac{\theta_0^3}{6} - \theta_0 \simeq \theta_0 + \frac{\theta_0^3}{6} = \frac{4}{3} \left(\frac{1 - \Omega_0}{\Omega_0}\right) \quad (2.89)$$

Aplicando em (2.86)

$$t_0 = \frac{1}{2H_0} \Omega_0 (1 - \Omega_0)^{-3/2} \frac{4}{3} \left(\frac{1 - \Omega_0}{\Omega_0}\right)$$

$$t_0 = \frac{2}{3H_0} \Omega_0^{-1/2} \rightarrow \frac{2}{3H_0} \quad (2.90)$$

E para $\Omega_0 \rightarrow 0$, $\theta_0 \rightarrow \infty$ e $\cosh \theta_0 \rightarrow \infty$

Pelas definições das funções trigonométricas hiperbólicas temos

$$\cosh \simeq \frac{e^{\theta_0}}{2} \simeq \frac{2 - \Omega_0}{\Omega_0}$$

e

$$\sinh \theta_0 \simeq \frac{e^{\theta_0}}{2} \rightarrow \sinh \theta_0 - \theta_0 \simeq \sinh \theta_0 = \frac{2 - \Omega_0}{\Omega_0}$$

logo temos

$$t_0 = \frac{1}{2H_0} \Omega_0 (1 - \Omega_0)^{-3/2} \frac{(2 - \Omega_0)}{\Omega_0} \Rightarrow t_0 = \frac{1}{2H_0} \frac{(2 - \Omega_0)}{(1 - \Omega_0)^{3/2}}$$

$$t_0 = \frac{1}{H_0} \quad (2.91)$$

Dessa forma, a relação entre o instante inicial do universo e a constante de Hubble no presente será:

$$\frac{2}{3} H_0^{-1} \leq t_0 \leq H_0^{-1} \quad (\text{Universo aberto}) \quad (2.92)$$

$$0 < t_0 < \frac{2}{3} H_0^{-1} \quad (\text{Universo fechado}) \quad (2.93)$$

2.6 Propagação da luz na cosmologia Newtoniana

Considerando o comportamento da função $R(t)$, descreve o comportamento do universo. No entanto, devemos considerar agora o aspecto visto por um observador participando do movimento de expansão (ou contração) do Universo em um modelo qualquer. Porém nesse ponto, a cosmologia newtoniana é limitada, pois para obter resultados razoáveis precisamos empregar conceitos e métodos pós-newtonianos. Assim dizemos do princípio cosmológico que a velocidade local da luz deve ser a mesma para todos os observadores em um mesmo momento. Supondo então que a soma de velocidade da mecânica newtoniana seja válida inclusive para a velocidade local da luz c , temos então para os raios que se afastam ou se aproximam de um observador é dada por:

$$\frac{dr}{dt} = \pm c + r \frac{\dot{R}}{R} \quad (2.94)$$

separando as variáveis, obtêm-se

$$\dot{r} = \pm c + r \frac{\dot{R}}{R} \Rightarrow \dot{r} - r \frac{\dot{R}}{R} = \pm c$$

dividindo a equação por \dot{R} , e integrando a mesma, tem-se

$$\frac{R\dot{r} - r\dot{R}}{R^2} = \pm \frac{c}{R} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{r}{R} \right) = \pm \frac{c}{R} \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} d \left(\frac{r}{R} \right) = \pm \int_{t_1}^{t_2} \frac{c}{R} dt \Rightarrow \frac{r(t)}{R(t)} \Big|_{t_1}^{t_2} = \pm c \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{R(t)}$$

Assim, obtendo

$$\frac{r(t_2)}{R(t_2)} - \frac{r(t_1)}{R(t_1)} = \pm c \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{R(t)} \quad (2.95)$$

Considerando agora um raio de luz emitido em $r(t)$ que viaje até um observador situado em $r = 0$, se esse raio é emitido no tempo t_1 e captado pelo observador no tempo t_2 . Como $r(t_2) = 0$ e o raio de luz está se aproximando, a equação (2.95) torna-se

$$\frac{r(t_1)}{R(t_1)} = c \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{R(t)} \quad (2.96)$$

Sendo $r(t_1)/R(t_1)$ constante, então se uma galáxia emite um fóton no tempo t_1 , e é captado por um observador num tempo t_2 , e um outro em $t_1 + \Delta t_1$, será captada no tempo $t_2 + \Delta t_2$.

Assim de (2.96)

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{R(t)} = \int_{t_1 + \Delta t_1}^{t_2 + \Delta t_2} \frac{dt}{R(t)} \quad (2.97)$$

que pode ser escrita como

$$\int_{t_1}^{t_1 + \Delta t_1} \frac{dt}{R(t)} = \int_{t_2}^{t_2 + \Delta t_2} \frac{dt}{R(t)}$$

Supondo que $R(t)$ não muda em um tempo Δt e $R(t + \Delta t) \approx R(t)$ a equação (2.97) fornece

$$\frac{t}{R(t_1)} \Big|_{t_1}^{t_1 + \Delta t_1} = \frac{t}{R(t_2)} \Big|_{t_2}^{t_2 + \Delta t_2} \Rightarrow \frac{1}{R(t_1)}(t_1 + \Delta t_1 - t_1) = \frac{1}{R(t_2)}(t_2 + \Delta t_2 - t_2) \Rightarrow \frac{\Delta t_1}{R(t_1)} = \frac{\Delta t_2}{R(t_2)}$$

$$\frac{\Delta t_2}{\Delta t_1} = \frac{R(t_2)}{R(t_1)} \quad (2.98)$$

Se Δt_1 , representa o período da onda emitida, Δt_2 representa o período da onda recebida, cujo a variação será exatamente o efeito Doppler.

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 1 + z \quad (2.99)$$

e com isso

$$1 + z = \frac{R(t_2)}{R(t_1)} \quad (2.100)$$

No caso de expansão do universo, $R(t)$ é uma função crescente, ou seja, $R(t_2) > R(t_1)$ e assim $z > 0$, o que implica que essa cosmologia interpreta esse observado desvio para o vermelho das galáxias como um efeito decorrente da expansão do universo.

2.7 Idade do Universo

A velocidade de expansão da galáxia com a distância a esta, pode ser expressa pela relação da lei de Hubble, através da expressão

$$\vec{v}(r) = H(t)\vec{r}(t) \quad (2.101)$$

sendo $v = d/t_0$ temos que:

$$t_0 = H^{-1} \quad (2.102)$$

Isso é válido quando se assume que a velocidade v permaneceu constante no tempo. Para o caso de um Universo plano cujo $E = 0$, a idade do universo pode ser obtida, escrevendo $v = \frac{dr}{dt}$ na equação da energia total do universo:

$$\frac{1}{2}m \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = \frac{GMm}{r} \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \left(\frac{2GM}{r} \right)^{1/2}$$

$$r^{1/2} dr = (2GM)^{1/2} dt \quad (2.103)$$

integrando ambos os lados, o resultado será:

$$\int r^{1/2} dr = \int (2GM)^{1/2} dt \Rightarrow \frac{r^{3/2}}{3/2} = (2GM)^{1/2} t$$

$$\frac{2}{3}r^{3/2} = (2GM)^{1/2}t \quad (2.104)$$

Escrevendo a lei de Hubble, na forma

$$\frac{dr}{dt} = H_0 r \quad (2.105)$$

Usando a equação (2.103) para todo $t = t_0$, temos

$$\frac{dr}{dt} = H_0 r = \left(\frac{2GM}{r}\right)^{1/2} \Rightarrow H_0 r^{3/2} \quad (2.106)$$

relacionando com (2.104) obtemos

$$H_0 r^{3/2} = \frac{2}{3}r^{3/2}t^{-1} \Rightarrow H_0 = t^{-1}\frac{2}{3} \Rightarrow H_0 t = \frac{2}{3}$$

$$t = \frac{2}{3}H_0^{-1} \quad (2.107)$$

Levando em consideração que a dimensão da constante de Hubble H é simplesmente o inverso do tempo, portanto a equação está dimensionalmente coerente.

2.8 Soluções para a equação diferencial cosmológica com $\Lambda = 0$

Temos que a equação diferencial cosmológica Newtoniana e a equação de Friedmann possuem a mesma forma algébrica, assim os resultados obtidos na cosmologia Newtoniana servem para descrever o comportamento do universo. Consideremos então três valores para a constante k que aparece na equação (2.51): $0, +1, -1$

Caso em que $k = 0$

Neste caso teremos um universo plano e utilizaremos um modelo euclidiano plano em que a equação cosmológica (2.51) torna-se $\dot{R} = \frac{c}{R}$, que para ser integrada devem-se assumir as condições iniciais onde $R = 0$ quando $t = 0$. Então integrando-se a equação anterior obtemos

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = \frac{c}{R} \Rightarrow \frac{dR}{dt} = \frac{c^{1/2}}{R^{1/2}} \Rightarrow R^{1/2}dR = c^{1/2}dt \Rightarrow \int R^{1/2}dR = \int c^{1/2}dt$$

$$\frac{2}{3}R^{3/2} = c^{1/2}t \Rightarrow R^{3/2} = \frac{3}{2}c^{1/2}t \Rightarrow R^3 = \frac{9}{4}ct^2$$

$$R = \left(\frac{9}{4} ct^2 \right)^{1/3} \quad (2.108)$$

Onde esta solução é conhecida como modelo de Einstein-de-Sitter. Neste caso o parâmetro de Hubble é dado por:

$$\begin{aligned} \dot{R} &= \frac{c}{R} \text{ e } R^3 = \frac{9}{4} ct^2 \\ \frac{\dot{R}^2}{R^3} &= \frac{\frac{c}{R}}{\frac{9}{4} ct^2} \Rightarrow \frac{\dot{R}^2}{R^3} = \frac{c}{R} \frac{4}{9ct^2} \Rightarrow \frac{\dot{R}^2}{R^2} = \frac{4R}{9Rt^2} \Rightarrow \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 = \frac{4}{9t^2} \\ \frac{\dot{R}}{R} &= \frac{2}{3t} \end{aligned} \quad (2.109)$$

Se agora for definido um parâmetro de desaceleração $q(t)$, dado por

$$q(t) = -\frac{\ddot{R}R}{\dot{R}^2} \quad (2.110)$$

Cujo podemos escrever como

$$q(t) = -\frac{\ddot{R}R}{\dot{R}^2} \Rightarrow q(t) = -\frac{\ddot{R}R}{R^2 H^2} \Rightarrow q(t) = -\frac{\ddot{R}}{R \cdot H^2} \quad (2.111)$$

temos de (2.47) que $\ddot{R} = -GMr^{-2}$, assim, escrevemos $q(t)$ como

$$\begin{aligned} q(t) &= -\frac{(-GM)r^{-2}}{rH^2} \Rightarrow q(t) = \frac{GM}{r^3 H^2} \Rightarrow q(t) = \frac{G \frac{4\pi r^3 \rho(t)}{3}}{r^3 H^2} \\ q(t) &= \frac{4G\pi\rho(t)}{3H^2} \end{aligned} \quad (2.112)$$

Utilizando (2.62) obtemos

$$\begin{aligned} \rho_c(t) &= \frac{3H^2}{8\pi G} \Rightarrow \frac{1}{\rho_c(t)} = \frac{8\pi G}{3H^2} \\ 2q(t) &= \frac{8G\pi\rho(t)}{3H^2} \Rightarrow 2q(t) = \frac{\rho(t)}{\rho_c(t)} \Rightarrow 2q(t) = \Omega \\ q(t) &= \frac{\Omega}{2} \end{aligned} \quad (2.113)$$

Como temos $k = 0$, estamos em um modelo euclidiano com universo plano, assim $\Omega = 1$

$$q(t) = \frac{1}{2}$$

Próximo à grande explosão o valor de R é pequeno, e sendo assim, o termo c/R domina sobre $\frac{1}{3}\Lambda R^2$ na equação (2.51). Sendo

$$c > 0, \quad -\infty < \Lambda < +\infty$$

Quando $R \rightarrow 0$ a equação diferencial cosmológica pode ser aproximada para

$$\dot{R}^2 \approx \frac{c}{R} \quad (2.114)$$

Caso em que a constante $k = 1$

Aqui a equação (2.51) torna-se:

$$\dot{R}^2 = \frac{c}{R} - 1 \quad (2.115)$$

sua solução é obtida utilizando mudanças de variáveis e considerando as condições iniciais da grande explosão. As mudanças são $u^2 = R/c$ e $u = \sin \theta$

$$R = u^2 c \Rightarrow \dot{R} = 2u\dot{u}c \Rightarrow \dot{R}^2 = 4u^2 \dot{u}^2 c^2 \Rightarrow 4u^2 \dot{u}^2 c^2 = \frac{1}{u^2} - 1$$

multiplicando por u^2 temos

$$\sqrt{4c^2 u^4 \dot{u}^2} = \sqrt{1 - u^2} \Rightarrow 2cu^2 \dot{u} = \sqrt{1 - u^2} \Rightarrow 2u^2 \frac{du}{dt} c = \sqrt{1 - u^2}$$

$$\frac{2u^2}{\sqrt{1 - u^2}} du = \frac{dt}{c}$$

integrando ambos os lados, temos

$$\begin{aligned} \int \frac{2u^2}{\sqrt{1 - u^2}} du &= \int \frac{dt}{c} \Rightarrow \int \frac{2 \sin^2 \theta \cos \theta d\theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}} = \int \frac{dt}{c} \\ \int \frac{2 \sin^2 \theta \cos \theta d\theta}{\sqrt{\cos^2 \theta}} &= \int \frac{dt}{c} \Rightarrow \int 2 \sin^2 \theta d\theta = \int \frac{dt}{c} \Rightarrow \int (1 - \cos 2\theta) d\theta = \int \frac{dt}{c} \\ \int d\theta - \int \cos 2\theta d\theta &= \int \frac{dt}{c} \Rightarrow \theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta = \frac{t}{c} \Rightarrow \theta - \frac{1}{2} 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{t}{c} \\ \theta - u\sqrt{1 - u^2} &= \frac{t}{c} \Rightarrow \theta = u\sqrt{1 - u^2} + \frac{t}{c} \\ \theta &= \sqrt{\frac{R}{c}} \sqrt{1 - \frac{R}{c}} + \frac{t}{c} \Rightarrow \theta = \sqrt{\frac{R}{c} \left(1 - \frac{R}{c}\right)} + \frac{t}{c} \end{aligned}$$

usando $R/c = \sin^2 \theta$

$$\frac{R}{c} = \sin^2 \left[\frac{t}{c} + \sqrt{\frac{R}{c} \left(1 - \frac{R}{c}\right)} \right] \quad (2.116)$$

com $0 \leq \frac{R}{c} \leq 1$

que devido à função periódica é conhecido como modelo oscilatório, pois após certo período, a expansão para e o universo começa a se contrair novamente.

Caso em que a constante $k = -1$

Para $k = -1$, a equação (2.51) é

$$\dot{R}^2 = \frac{c}{R} + 1 \quad (2.117)$$

de forma análoga a anterior, usaremos $u^2 = R/c$ e $u = \sinh \theta$ cujo resultado será:

$$\begin{aligned} \int \frac{2u^2}{\sqrt{1+u^2}} du &= \int \frac{dt}{c} \Rightarrow \int \frac{2 \sinh^2 \theta \cosh \theta d\theta}{\sqrt{1+\sinh^2 \theta}} = \int \frac{dt}{c} \\ \int \frac{2 \sinh^2 \theta \cosh \theta d\theta}{\sqrt{\cosh^2 \theta}} &= \int \frac{dt}{c} \Rightarrow \int 2 \sinh^2 \theta d\theta = \int \frac{dt}{c} \Rightarrow \int (\cosh 2\theta - 1) d\theta = \int \frac{dt}{c} \\ \int \cosh 2\theta d\theta - \int d\theta &= \int \frac{dt}{c} \Rightarrow \frac{1}{2} \sinh 2\theta - \theta = \frac{t}{c} \Rightarrow \frac{1}{2} 2 \sinh \theta \cosh \theta - \theta = \frac{t}{c} \Rightarrow u\sqrt{1-u^2} - \theta = \frac{t}{c} \\ \theta &= u\sqrt{1-u^2} - \frac{t}{c} \Rightarrow \theta = \sqrt{\frac{R}{c}} \sqrt{1 + \frac{R}{c}} - \frac{t}{c} \Rightarrow \theta = \sqrt{\frac{R}{c} \left(1 + \frac{R}{c}\right)} - \frac{t}{c} \end{aligned}$$

usando $R/c = \sinh^2 \theta$

$$\frac{R}{c} = \sinh^2 \left[\sqrt{\frac{R}{c} \left(1 + \frac{R}{c}\right)} - \frac{t}{c} \right] \quad (2.118)$$

com $0 \leq \frac{R}{c} \leq +\infty$

onde o fator de escala cresce sem limites e como resultado esse modelo é conhecido como modelo de expansão eterna.

Considerações finais

Sabemos que algumas ferramentas matemáticas normalmente são tratadas de forma muito simples em nosso cotidiano, porém aqui foi demonstrado resultados da complexidade do uso das mesmas, sendo indispensável para diversos estudos.

Desde seu primeiro uso até o momento em que ganhou sua forma, essas ferramentas foram ganhando cada vez mais espaço nos estudos relacionados à natureza em geral, pois, tem a capacidade de relacionar duas ou mais grandezas, assim, achando fatores em comum onde não se imaginava e onde foram desenvolvidas para facilitar o desenvolvimento de seus estudos posteriores.

Ao aprofundarmos os estudos sobre algumas ferramentas matemáticas, acabamos sempre chegando a um mesmo ponto, suas aplicações, onde temos uma vasta área de estudo da física sobre inúmeros fenômenos que ocorrem em nosso cotidiano. Por isso a escolha de uma aplicação de tais funções em um conteúdo de física, foi possível a construção de um modelo para descrever evolução e comportamento do universo utilizando uma matemática relativamente simples.

Diante desse fato, temos que só foi possível a construção de um modelo cosmológico Newtoniano, após o surgimento da cosmologia relativística e todo seu aparato matemático, sendo simplificado mais tarde pelo modelo Newtoniano, que apesar de ter surgido antes, pode ser considerado como proveniente da relativística, já que após o aparecimento desta é que foram encontrados os limites apropriados a ser aplicada a teoria newtoniana.

Neste modelo empregamos diversas vezes as ferramentas matemáticas antes comentadas, como o uso da derivada para descrever a velocidade radial das galáxias, e para a obtenção do parâmetro de Hubble no modelo discreto de universo, entre outras aplicações. Utilizamos a integral para a energia potencial do sistema e determinar a massa total do universo no modelo contínuo. As funções hiperbólicas tiveram sua contribuição para se obter

uma das soluções para a integral que surge de uma equação que determina a geometria do universo. Usamos também algumas funções vetoriais para a resolução da equação da continuidade e a de Poisson, para que pudéssemos chegar à equação diferencial cosmológica, que é uma equação diferencial parcial comentada no primeiro capítulo.

Vimos que é possível obter um método discreto de uma equação diferencial cosmológica com uma forma algébrica idêntica a equação de Friedmann, usando-se um espaço plano e estático, o tempo newtoniano, a dinâmica e a lei da gravitação universal e o princípio cosmológico. Temos também uma generalização do modelo para o caso contínuo, onde descreve a evolução do universo.

O problema central da cosmologia é entender aquilo que sabemos da pequena região a que temos acesso, à totalidade do Universo. Kirchhoff dera um passo gigantesco: descobrir que podemos usar para isso a nossa Física. Por outro lado, sabemos como ressaltado por Einstein, que a Física só é simples 'no pequeno'. Com isto ele queria dizer que as leis da física se expressam em termos das relações entre o que acontece num ponto e o que acontece em sua imediata vizinhança. Matematicamente isto quer dizer que as leis da física são escritas na forma de equações diferenciais. O problema de estender este conhecimento local a pontos muito distantes, tornando-o um conhecimento global, é um problema com o qual os físicos não estão muito familiarizados. A própria matemática necessária para tal, à topologia, é conquista recente e ainda incompleta, dita por muitos a principal contribuição da matemática do século XX [15].

Concluimos, portanto depois de tudo que já foi exposto, que as ferramentas matemáticas utilizadas no nosso exemplo, desempenham um papel importante para o desenvolvimento de modelos físicos, com o objetivo de desenvolvimento tecnológico e avanço significativo da ciência em geral.

Referências Bibliográficas

- [1] Carroll B.W., Ostlie D.A. An introduction to modern astrophysics, 2ed., Pearson, 2007
- [2] ANDRILLAT, Henry, Introduction a l'étude des cosmologies, Paris: Librairie Armand Colin, 1970 Serie Collection Intersciences
- [3] SOUZA, Ronaldo E., Introdução à Cosmologia, São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2004
- [4] ROOS, Matts, Introduction to cosmology, 3ed.
- [5] RAINE, D. J., THOMAS, E. G., An Introduction To The Science Of Cosmology, Bristol: Institute of Physics Publishing, 2001. 220p. Serie In Astronomy and Astrophysics
- [6] ÁVILA, Geraldo, 1933, Variáveis complexas e aplicações, 3.ed. - Rio de Janeiro: LTC, 2008
- [7] FLEMMING, Diva Marília, GONÇALVES, Mirian Buss, Cálculo B, 2.ed. - São Paulo, Pearson
- [8] STEWART, James, cálculo, Volume 1, 5.ed - São Paulo : Pioneira Thomson Learning, 2006
- [9] VILCHES, Mauricio A., CORRÊA, Maria L., Cálculo: Volume III; www.ime.uerj.br/calculo
- [10] SODRÉ, Ulysses, Equações diferenciais parciais, notas de aula, 6 de maio de 2003
- [11] <http://astro.if.ufrgs.br/univ/mat/node2.htm>
- [12] <http://omnis.if.ufrj.br/mbr/papers/cosmnmwt/>

[13] <http://pt.scribd.com/doc/6416658/Resumo-Funcoes-Hiperbolicas>

[14] <http://fatosmatematicos.blogspot.com/>

[15] FLEMING, Henrique. Rumo à cosmologia