UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA – UEPB

CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA – CCT

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA – DM

CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

JOSÉ TALES DOS SANTOS LOPES

NOÇÕES DE FUNÇÃO E APLICAÇÕES

CAMPINA GRANDE - PB

2011

JOSÉ TALES DOS SANTOS LOPES

NOÇÕES DE FUNÇÃO E APLICAÇÕES

Monografia apresentada a Universidade Estadual da Paraíba, como requisito para a obtenção do título de Licenciatura Plena em Matemática, sob a orientação da Profª. MSc. Kátia Susana Medeiros Graciano.

CAMPINA GRANDE – PB

2011

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL – UEPB

L881n Lopes, José Tales dos Santos.

Noções de função e aplicações [manuscrito] / José Tales dos Santos Lopes. – 2011.

34 f.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Tecnológicas, 2011.

“Orientação: Profa. Ma. Kátia Suzana Medeiros Graciano, Departamento de Matemática e Estatística”.

1. Ensino de Matemática. 2. Matemática - Aplicações. 3. Matemática – Função. I. Título.

21. ed. CDD 372.7

JOSÉ TALES DOS SANTOS LOPES

NOÇÕES DE FUNÇÃO E APLICAÇÕES

APROVADA EM: 07 / de Dezembro / 2.011

BANCA EXAMINADORA

Kátia Suzana Medeiros Graciano

Profª. MSc. Kátia Suzana Medeiros Graciano

Departamento de Matemática – CCT - UEPB

Orientadora

Maria da Conceição Vieira Fernandes

Profª. MSc. Maria da Conceição Vieira Fernandes

Departamento de Matemática – CCT - UEPB

Examinador

Castor da P. Filho

Profº. MSc. Castor de Paz Filho

Departamento de Matemática – CCT - UEPB

Examinador

CAMPINA GRANDE - PB

2011

Dedico este trabalho especialmente ao Senhor meu Deus, fonte inesgotável de amor, o qual - tenho certeza - esteve comigo tanto nos momentos de dificuldade, como também nos momentos de alegria, durante a realização deste Curso.

Também dedico-o a minha prestimosa mãe que sempre acreditou em mim e nos meus sonhos, e para que eu os realizasse, nunca mediu esforço algum.

“Mas a gente sempre erra, somos seres inacabados, há sempre novos erros a cometer, novas lições a aprender.”

(Paulo Freire)

AGRADECIMENTOS

A minha mãe, que atentamente - mesmo distante - esteve comigo em suas orações, acompanhando todos os meus passos para que eu não me desviasse de minha meta, ao longo destes anos de Curso.

À Professora, Kátia Susana, pela constante disposição e apoio ao me ajudar com suas ricas orientações, para que eu pudesse concluir com êxito este trabalho monográfico.

A todos os Professores do Curso pela dedicação e entusiasmo com que os mesmos ministravam suas aulas, os quais tanto me fizeram crescer como pessoa, como também me mostraram a forma prática de como utilizar os ensinamentos transmitidos por eles, no meu futuro profissional.

Aos colegas do Curso pela sinceridade na troca de experiências e pela solidariedade compartilhada tantos nos momentos de apreensão, como nos momentos de descontração e alegria.

A todos os funcionários do Departamento de Matemática, Estatística e Computação da UEPB, que de forma direta ou indireta também deram sua colaboração enquanto eu frequentava o Curso de Licenciatura Plena em Matemática, até o término do mesmo.

E, especialmente a Deus, Autor da Vida e consumador de minha fé, por ter me oportunizado frequentar um Curso de Graduação. Portanto, a Ele sejam dadas eternamente: Gloria, Louvor e Honras, amém.

RESUMO

Visando contribuir com a interdisciplinaridade e a aprendizagem no Ensino da Matemática nas primeiras séries do Ensino Fundamental e demais séries do Ensino Médio, o presente TCC intitulado “Noções de Função e Aplicações”, teve como objetivo geral, explicar, através de uma seleção bibliográfica, por que a Função tem presença marcante no ensino da Matemática contemporânea e como objetivos específicos, mostrar algumas aplicações práticas de funções através de conteúdos relacionados á matemática, á física e economia, utilizando o conteúdo de Função e mostrar por que as Funções se tratam de um dos principais temas do Currículo Escolar. Quanto aos seus aspectos metodológicos, foi usada uma pesquisa exploratória e descritiva, bem como uma abordagem bibliográfica, através da qual, foram embasados diversos aspectos sobre Função.

Palavras-chave: Ensino da Matemática; Função; Aplicações.

ABSTRACT

In order to contribute to overcoming the challenges facing today in Teaching Mathematics in the early grades, and other grades of high school, this monograph: "Working around the Math Function in High School", aimed to, explain through a selection of literature - whose authors speak on the subject - why the function has a strong presence in contemporary mathematics education and specific objectives, explain why the function constitutes one of the main languages of mathematics, to describe relations between sets, regularities, similarities, properties in general the world of numbers and shape, using content as the function and show that the functions are dealing with one of the main themes of the School Curriculum. Regarding methodological aspects, we used an exploratory and descriptive, as well as a bibliographical approach, through which various aspects were based on function.

Keywords: Mathematics Teaching; Function; Applications.

LISTA DE TABELAS

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Este trabalho intitulado “Noções de Função e aplicações”, faz uma análise deste conteúdo, que em geral, costuma ser abordado pelos professores de Matemática, nos anos finais do Ensino Fundamental ou no início do Ensino Médio.

Portanto, o conteúdo da pesquisa, deixou evidente que no ensino da Matemática, o assunto Função tem grande importância tanto para professores como alunos, no que se refere a diversas competências e habilidades.

A sequência didática adotada no desenvolvimento deste trabalho, foi feita a partir de uma abordagem bibliográfica, através da qual apresentou-se um breve panorama sobre o histórico e sobre o ensino atual de Funções, fazendo com que a pesquisa tivesse seu foco voltado para o estudo deste conteúdo e de suas aplicações.

Por isto, em virtude desta problemática, justifica-se a elaboração desta monografia, que, a partir da extração das idéias de diversos autores, por meio de uma pesquisa descritiva e exploratória, fez-se um diagnóstico do conteúdo das obras que falam sobre o ensino da Matemática, para com isto, poder constatar situações de facilidade ou de dificuldade, que possam facilitar a aprendizagem dos estudantes quanto aos aspectos gerais da proposta, dos conceitos e das técnicas abordadas para o aprendizado da Função, pois entende-se que, somente fazendo uma abordagem diagnostica da questão, para melhor entendê-la é que se torna possível facilitar o ensino e a aprendizagem do conceito matemático de função, sugerindo-se as aplicações com o intuito de motivar os alunos a interligar o conteúdo com o cotidiano.

Então, a partir desta contextualização, esta pesquisa tem como objetivo geral, explicar por que a Função tem presença marcante no ensino da Matemática contemporânea e como objetivos específicos, explicar por que a Função se constitui em uma das principais linguagens da Matemática.

1 ORIGEM DAS FUNÇÕES

O presente capítulo, acha-se dividida em três partes, cujo conteúdo, baseia-se nas ideias extraídas de obras de diversos autores que falam sobre o estudo da Função Matemática no Ensino Médio, apresentando, desta forma, um texto elaborado em torno deste tema, envolvendo aspectos que vão desde sua origem, até os dias atuais.

1.1 ORIGEM E EVOLUÇÃO

A função trata-se de um dos mais importantes elementos da Matemática, e a mesma sofreu uma grande evolução ao longo dos séculos, sendo que a introdução do método analítico na definição de função (séc., XVI, séc. XVII) veio revolucionar a Matemática (COSTA, S/D).

Desde o tempo dos antigos gregos até a Idade Moderna, a teoria dominante era a Geometria Euclidiana que tinha como elementos base o ponto, a reta e o plano, portanto, passou a ser a partir desta época que uma nova teoria - o Cálculo Infinitesimal vai surgir - e que acaba por revelar capital no desenvolvimento da Matemática contemporânea, e a noção de função passou então a ser um dos fundamentos do Cálculo Infinitesimal (COSTA, S/D).

Desse modo, a noção de função não é muito antiga. No entanto, aspectos bastantes simples deste conceito podem ser encontrados em épocas anteriores (por exemplo, na mais elementar operação de contagem). Mas o seu surgimento como conceito claramente individualizado e como objeto de estudo corrente em Matemática, remonta apenas aos finais do Século XVII (COSTA, S/D).

A origem da noção de função confunde-se assim com os primórdios do Cálculo Infinitesimal. Ela surgia de forma um tanto confusa nos "fluentes" e "fluxões" de Newton (1642-1727), cujo posicionamento neste aspecto aproxima-se bastante do sentido atual de função com a utilização dos termos "relatia quantias" para designar variável dependente, e "genita" para designar uma quantidade obtida a partir de outras por intermédio das quatro operações aritméticas fundamentais (GRAVINA, 2001).

Foi Leibniz (1646-1716) quem primeiro usou o termo "função" em 1673 no manuscrito Latino "Methodus Tangentium Inversa, seu de Fuctionibus". Leibniz usou o termo apenas para designar, em termos muito gerais, a dependência de uma curva de quantidades geométricas como as sub tangentes e sub normais. Introduziu igualmente a terminologia de "constante", "variável" e "parâmetro" (GRAVINA, 2001).

Com o desenvolvimento do estudo de curvas por meios algébricos, de acordo com a referida autora, tornou-se indispensável um termo que representasse quantidades dependentes de alguma variável por meio de uma expressão analítica. Com esse propósito, a palavra "função" foi adotada na correspondência trocada entre 1694 e 1698 por Leibniz e Johann Bernoulli (1667-1748).

O termo "função", ainda em consonância com Gravina (2001), não aparecia ainda num léxico matemático surgido em 1716, mas, dois anos mais tarde Johann Bernoulli publicou um artigo, que viria a ter grande divulgação, contendo a sua definição de função de uma certa variável como uma quantidade que é composta de qualquer forma dessa variável e constantes.

Um retoque final nesta definição viria a ser dado em 1748 por Euler (1707-1783) - um antigo aluno de Bernoulli - substituindo o termo "quantidade" por "expressão analítica". Foi também Euler quem introduziu a notação f(x) (COSTA, S/D).

A noção de função era assim identificada na prática com a de expressão analítica, situação que haveria de vigorar pelos Séculos XVIII e XIX, apesar de cedo se perceber que conduzia a diversas incoerências e limitações (de fato, uma mesma função pode ser representada por diversas expressões analíticas diferentes). Esta noção, segundo Costa (s/d), associada às noções de continuidade e de desenvolvimento em série, conheceu sucessivas ampliações e clarificações, que lhe alteraram profundamente a sua natureza e significado.

Como consequência da evolução do estudo das funções surgem numerosas aplicações da Matemática a outras ciências, pois, os cientistas partindo de observações procuravam uma fórmula (uma função) para explicar os sucessivos resultados obtidos. A função era, então, o modelo matemático que explicava a relação entre as variáveis (COSTA, S/D).

Assim, conforme até então foi visto, o conceito de função que hoje nos parece simples é resultado de uma evolução histórica conduzindo sempre cada vez mais à abstração, e que só no século XIX teve o seu final.

Na atualidade, as funções estudadas na Análise Infinitesimal, e usadas nas aplicações, como salienta Gravina (2001), retêm no fundamental a ideia de dependência entre variáveis.

A noção de função é de importância central na concepção e no estudo de modelos (dinâmicos, probabilísticos, de distribuição espacial), qualquer que seja a sua natureza, continuando por isso a ser uma noção-chave na Matemática atual.

1.2 HISTORIA E CONTRIBUIÇÕES DE ISAAC NEWTON

Isaac Newton nasceu em Woolsthorpe, no dia 4 de janeiro de 1643 e faleceu em Londres, no dia 31 de março de 1727, sendo o mesmo um cientista inglês, mais reconhecido como físico e matemático, embora tenha sido também astrônomo, alquimista, filósofo natural e teólogo (GLEICK, 2004).

Sua obra, Philosophiae Naturalis Principia Mathematica, é considerada uma das mais influentes em História da ciência. Publicada em 1687, esta obra descreve a lei da gravitação universal e as três leis de Newton, que fundamentaram a mecânica clássica (GLEICK, 2004).

Ao demonstrar a consistência que havia entre o sistema por ele idealizado e as leis de Kepler do movimento dos planetas, foi o primeiro a demonstrar que o movimento de objetos, tanto na Terra como em outros corpos celestes, são governados pelo mesmo conjunto de leis naturais. O poder unificador e profético de suas leis era centrado na revolução científica, no avanço do heliocentrismo e na difundida noção de que a investigação racional pode revelar o funcionamento mais intrínseco da natureza (GLEICK, 2004).

Em uma pesquisa promovida pela instituição Royal Society, Newton foi considerado o cientista que causou maior impacto na história da ciência. De personalidade sóbria, fechada e solitária, para ele, a função da ciência era descobrir leis universais e enunciá-las de forma precisa e racional (WATERFALL, 1995).

Embora seu nascimento tivesse sido registrado como no dia de Natal - 25 de dezembro de 1642 - pois àquela época a Grã-Bretanha usava o calendário gregoriano. Seu nascimento foi prematuro, não tendo conhecido seu pai, um próspero fazendeiro que também se chamava Isaac Newton e morreu três meses antes de seu nascimento. Sua mãe, Hannah Ayscough Newton, passou a administrar a propriedade rural da família. A situação financeira era estável e a fazenda garantia um bom rendimento. Com apenas três anos foi levado para a casa de sua avó materna, Margery Ayscough, onde foi criado, já que sua mãe havia se casado novamente, com um pastor chamado Barnabas Smith. O jovem Isaac não havia gostado de seu padrasto e brigou com sua mãe por se casar com ele, como revelado por esta citação em uma lista de incoerências cometidas por ele até os 19 anos de idade: "Ameaçar meu pai Smith e minha mãe de queimar sua casa com eles dentro." Tudo isto leva a crer que o jovem Isaac Newton teve uma infância muito triste e bastante solitária, pois laços afetivos entre ele e seus parentes não são vistos à luz de sua biografia como algo verdadeiro (WATERFALL, 1995).

Um ser de personalidade fechada, introspectiva e de temperamento difícil: assim era Newton, que, embora vivesse em uma época em que a tradição dizia que os homens cuidariam dos negócios de toda a família, nunca demonstrou habilidade ou interesse para esses tipos de trabalho. Por outro lado, pensa-se que ele passava horas e horas sozinho, observando as coisas e construindo objetos. Parece que o único romance de que se tem notícia na vida de Newton tenha ocorrido com a senhorita de nome Anne Storer (filha adotiva do farmacêutico e hoteleiro William Clarke), embora isso não seja um fato comprovado (WATERFALL, 1995).

A partir da idade de aproximadamente doze até que os dezessete anos, Newton foi educado na The King's School, em Grantham (onde a sua assinatura ainda pode ser vista em cima de um parapeito da janela da biblioteca). Ele foi retirado da escola em outubro de 1659 para viver em Woolsthorpe-by-Colsterworth, onde sua mãe, viúva, agora por uma segunda vez, tentou fazer dele um agricultor. Ele repudiava a agricultura. Henry Stokes, mestre da The King's School, convenceu sua mãe a mandá-lo de volta à escola para que pudesse completar sua educação. Especula-se que Newton estudou latim, grego e a Bíblia. Alguns autores destacam a ideia de que era um aluno bem mediano, até que uma cena de sua vida mudou isso: uma briga com um colega de escola fez com que Newton decidisse ser o melhor aluno de classe e de todo o prédio escolar (GLEICK, 2004).

Newton estudou no Trinity College de Cambridge, tendo-se graduado em 1665. Sendo um dos principais precursores do Iluminismo, seu trabalho científico sofreu forte influência de seu professor e orientador Barrow (desde 1663), e de Schooten, Viète, John Wallis, Descartes, dos trabalhos de Fermat sobre retas tangentes a curvas; de Cavalieri, das concepções de Galileu Galilei e Johannes Kepler (WATERFALL, 1995).

Em 1663, formulou o teorema hoje conhecido como Binômio de Newton. Fez suas primeiras hipóteses sobre gravitação universal e escreveu sobre séries infinitas ao que chamou de teoria das fluxões (1665), o embrião do Cálculo Diferencial e Integral. Por causa da peste negra, o Trinity College foi fechado em 1666 e o cientista foi para casa de sua mãe em Woolsthorpe. Foi neste ano de retiro que construiu quatro de suas principais descobertas: o Teorema Binomial, o cálculo, a Lei da Gravitação Universal e a natureza das cores. Construiu o primeiro telescópio de reflexão em 1668, e foi quem primeiro observou o espectro visível que se pode obter pela decomposição da luz solar ao incidir sobre uma das faces de um prisma triangular transparente (ou outro meio de refração ou de difração), atravessando-o e projetando-se sobre um meio ou um anteparo branco, fenômeno este conhecido como Dispersão Luminosa. Optou, então, pela teoria corpuscular de propagação da luz, enunciando-a em 1675 e contrariando a teoria ondulatória de Huygens (GLEICK, 2004).

Tornou-se professor de matemática em Cambridge em1669 e entrou para a Royal Society em 1672. Sua principal obra foi a publicação Philosophiae Naturalis Principia Mathematica (Princípios matemáticos da filosofia natural - 1687), em três volumes, na qual enunciou a lei da gravitação universal (Vol. 3), generalizando e ampliando as constatações de Kepler, e resumiu suas descobertas, principalmente o cálculo. Essa obra tratou essencialmente sobre física, astronomia e mecânica (leis dos movimentos, movimentos de corpos em meios resistentes, vibrações isotérmicas, velocidade do som, densidade do ar, queda dos corpos na atmosfera, pressão atmosférica, etc.) (WATERFALL, 1995).

De 1687 a 1690 foi membro do Parlamento Britânico, em representação da Universidade de Cambridge. Em 1696 foi nomeado Warden of the Mint e em 1701 Master of the Mint, dois cargos burocráticos da Casa da Moeda britânica. Foi eleito sócio estrangeiro da Académie des Sciences em 1699 e tornou-se presidente da Royal Society em 1703. Publicou, em Cambridge, Arithmetica universalis (1707), uma espécie de livro-texto sobre identidades matemáticas, análise e geometria, possivelmente escrito muitos anos antes (talvez em 1673) (GLEICK, 2004).

Entre 1670 e 1672, Newton trabalhou intensamente em problemas relacionados com a óptica e a natureza da luz. Ele demonstrou, de forma clara e precisa, que a luz branca é formada por uma banda de cores (vermelho, laranja, amarelo, verde, azul, anil e violeta) que podiam separar-se por meio de um prisma (WATERFALL, 1995).

Como resultado de muito estudo, concluiu que qualquer telescópio "refrator" sofreria de uma aberração hoje denominada "aberração cromática", que consiste na dispersão da luz em diferentes cores ao atravessar uma lente. Para evitar esse problema, Newton construiu um "telescópio refletor" (conhecido como telescópio newtoniano). Isaac Newton acreditava que existiam outros tipos de forças entre partículas, conforme diz na obra Principia. Essas partículas, capazes de agir à distância, agiam de maneira análoga à força gravitacional entre os corpos celestes. Por fim, no ano de 1704, Isaac Newton escreveu a sua obra mais importante sobre a óptica, chamada Opticks, na qual expõe suas teorias anteriores e a natureza corpuscular da luz, assim como um estudo detalhado sobre fenômenos como refração, reflexão e dispersão da luz (GLEICK, 2004).

1.3 CONCEITO CONTEMPORÂNEO DE FUNÇÃO

Nesta seção, serão apresentados aspectos inerentes à Função, como: a definição e notações das funções conforme são hoje utilizadas na Matemática, particularmente aquelas relacionadas com o Ensino Médio. O contexto lógico e representacional é o da Teoria dos Conjuntos, de modo que o início deste tópico será feito com uma revisão de conjuntos e suas propriedades principais.

a) Conjunto

Um conjunto é uma coleção de determinados objetos denominados elementos desse conjunto.

Quando for abordar o tópico funções, com seus estudantes de qualquer série, o professor deve ter em mente que este tema pode causar grandes confusões. Por isso é bom trabalhar com muita clareza, inclusive com a linguagem. Por exemplo, um estudante pode interpretar f(x) como se fosse o produto de uma variável f por uma variável x. Nestes casos a notação, que deveria simplificar os estudos, pode atrapalhar.

b) Representações e linguagem

Alguns estudos históricos afirmam que os primeiros registros de escrita humana eram quantidades (ou números). A necessidade de guardar valores fez com que o homem procurasse uma forma de registrar tal informação, dando assim os primeiros passos para a invenção da escrita.

O poder de registrar informações constituiu um grande salto na evolução da humanidade e possibilitou inúmeros avanços nas mais diversas áreas. A escrita matemática tem uma história paralela e seu aprimoramento também revolucionou as descobertas dessa ciência. Porém, essa evolução desenvolveu-se de tal forma que a linguagem matemática constitui um conjunto de regras e símbolos que se configuram numa linguagem independente.

Essa liberdade permite que artigos e estudos matemáticos sejam praticamente universais. Fato é que, ao mesmo tempo que possuímos essa poderosa ferramenta, para que ela seja bem utilizada, faz-se necessário que se domine um grande conjunto de regras e símbolos. Este conhecimento deve ser adquirido de alguma forma e a escola se constitui no meio mais natural e prático de obtê-lo.

Para representar as funções, além da linguagem algébrica, existem outras muito relevantes como tabelas, diagramas e gráficos. Essas ferramentas formam elementos importantes, pois podem servir como ligação entre conhecimentos já adquiridos e novos conteúdos a serem aprendidos.

No Ensino Médio são mais frequentes as funções em que os conjuntos de partida e chegada se formam por conjuntos numéricos. Essas funções são, portanto, melhor representadas, em gráficos com eixos numéricos, chamados sistemas cartesianos.

2 NOÇÕES DE FUNÇÃO

Neste capitulo, falaremos da importância das funções, definição e conceitos relacionados ao estudo de função como: par ordenado, relações, plano cartesiano, domínio e imagem.

2.1 A IMPORTÂNCIA DAS FUNÇÕES NA MATEMÁTICA

A Matemática Contemporânea se desdobra em diversos campos distintos entre si, e o conceito de função é fundamental em vários deles. Por exemplo, a Análise faz uso de funções reais de uma ou mais variáveis, estudando suas propriedades do ponto de vista de convergência; já o estudo de Equações Diferenciais se dedica à resolução de equações cujas incógnitas são funções; a Análise Funcional trata de espaços cujos elementos são funções; e a Análise Numérica estuda o processo de controlar erros na avaliação de todos os tipos de funções.

Mas esse conceito, largamente utilizado, não foi concebido da forma como se apresenta hoje. Inicialmente a noção de função era tida apenas como uma expressão analítica que relacionava grandezas observadas na natureza. A motivação da criação inicial do conceito foi a de descrever experiências e observações sobre o movimento dos corpos e de outros fenômenos naturais. Assim as funções serviam de modelo matemático que os cientistas usavam para descrever as relações entre as variáveis envolvidas nos fenômenos observados.

Entretanto, já no século XIX, notou-se diversas incoerências e limitações nessa definição. O aperfeiçoamento das interpretações do conceito de função devido principalmente, à Teoria dos Conjuntos de George Cantor do final do século XIX e também a associação às noções de continuidade e de desenvolvimento em série, ampliaram enormemente sua natureza e seu significado. O conceito de função tornou-se, assim, uma das pedras angulares da Matemática atual. Sua importância não é apenas teórica, já que é utilizado também para modelar fenômenos naturais e sociais.

2.2 RELAÇÕES

2.2.1 Par

Chama-se por todo conjunto formado por dois elementos. Do conceito de igualdade de conjunto observamos que inverter a ordem dos elementos não produz um novo par. Em matemática existem situações em que há necessidade de distinguir dois pares pela ordem dos elementos.

Em um sistema de equações com soluções x = 2 e y = 1, se trocar a ordem x = 1 e y = 2 não será mais solução do sistema. Representando por conjunto, temos {2, 1} é solução e {1, 2} não é solução. Por causa disso dizemos que a solução é o par ordenado (2,1) em que fica subentendido que o 1º elemento 2 refere-se à incógnita x e o 2º elemento 1 refere-se a incógnita y.

2.2.2 Par Ordenado

Para cada elemento a e cada elemento b, admitiremos a existência de um terceiro elemento (a, b), que denominamos par ordenado, de modo que se tenha (a, b) = (c, d) $\Leftrightarrow$ a = c e b = d.

2.2.3 Plano Cartesiano

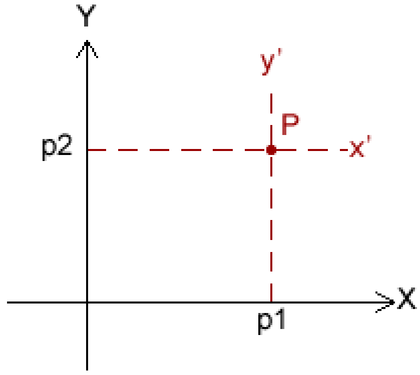
Considere dois eixos x e y perpendiculares em 0, as quais determinam o plano X. Dado um ponto P qualquer, P $\in$ X, conduzamos por ele 2 retas: X' // X e Y' // Y. Denominamos P_1 a interseção de X com Y' e P_2 interseção de Y com X'. Assim define-se:

a) Abscissa de P é o número real X_p representado por P_1
b) Ordenada de P é o número real Y_p representado por P_2
c) Coordenadas de P são os números reais X_p e Y_p, geralmente indicados na forma de um par ordenado (X_p, Y_p) em que X_p é o primeiro termo.
d) Eixo das abscissas é o eixo X (ou 0X)
e) Eixo das ordenadas é o eixo Y (ou 0Y)
f) Sistema de eixos cartesianos ortogonais (ou ortonormal ou retangular) é o sistema X 0 Y.

g) Origem do sistema é o ponto 0.

h) Plano cartesiano é o plano α.

Figura 1: Sistema cartesiano



2.2.4 Produto Cartesiano

Sejam A e B dois conjuntos não vazios. Denominamos produto cartesiano de A por B o conjunto A x B cujos elementos são todos pares ordenados (x, y) em que o primeiro elemento pertence a A e o segundo elemento pertence a B.

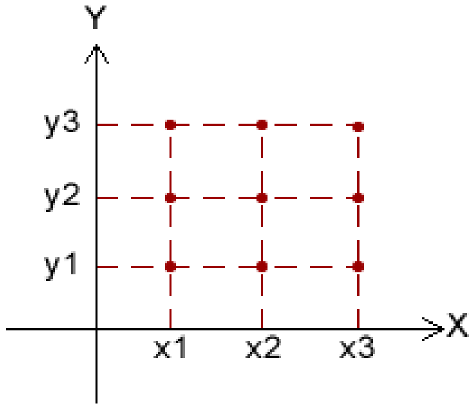
A x B = $\{(x, y) / x \in A \text{ e } y \in B\}$. O símbolo A x B lê-se:

“A cartesiano B” ou produto cartesiano de A por B.

2.2.5 Relação binária

Considere os conjuntos A = $\{X_1, X_2, X_3\}$ e B = $\{Y_1, Y_2, Y_3\}$. O produto cartesiano de A por B é o conjunto A x B = $\{(X_1, Y_1) / X_1 \in A \text{ e } Y_1 \in B\}$. Formando 3 x 3 elementos.

Figura 2: Pares ordenados



Dados os conjuntos A e B, chama-se relação binária de A em B todo subconjunto R de A x B. R é relação binária de A em B $\Leftrightarrow$ R $\subset$ A x B. Se eventualmente os conjuntos A e B forem iguais, todo subconjunto de A x A é chamado relação binária em A.

2.2.6 Domínio e imagem de relações

Seja R uma relação de A em B. Chama-se domínio de R o conjunto D de todos os primeiros elementos dos pares ordenados pertencentes a R.

$X \in D \Leftrightarrow Y, Y \in B / (X, Y) \in R$. Decorre da definição que $D \subset A$.

Chama-se imagem de R o conjunto Im de todos os segundos elementos dos pares ordenados pertencentes a R.

$Y \in Im \Leftrightarrow X, X \in A / (X, Y) \in R$. Decorre da definição que $Im \subset B$.

2.2.7 Relação inversa

Dada uma relação binária de A em B, consideremos o conjunto $R^{-1} = \{(Y, X) \in B \times A / (X, Y) \in R\}$. Como R^{-1} é subconjunto de B x A, então R^{-1} é uma relação binária de B em A, A qual daremos o nome de relação inversa de R.

$(Y, X) \in R^{-1} \Leftrightarrow (X, Y) \in R$.

Decorre da definição que R^{-1} é o conjunto dos pares ordenados obtidos a partir dos pares ordenados de R invertendo-se a ordem dos termos em cada par.

2.3 CONCEITO DE FUNÇÃO

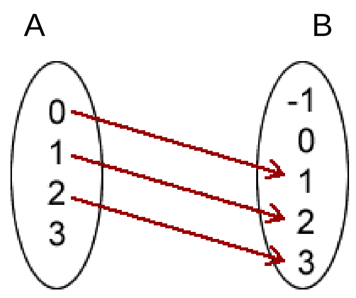
Considere os conjuntos: A = {0, 1, 2, 3} e B = {-1, 0, 1, 2, 3} e as seguintes relações binárias de A em B:

$R = \{(X, Y) \in A \times B / Y = X + 1\}$

$T = \{(X, Y) \in A \times B / Y = X\}$

a) R = {(0, 1), (1, 2), (2, 3)}, para o elemento $3 \in A$, não existe $Y \in B$ tal que $(3, Y) \in R$.

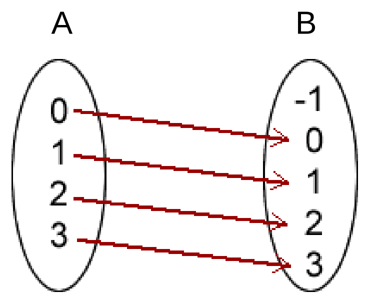
Figura 3: Relação entre A e B



b) T = {(0,0), (1,1), (2,2), (3,3)}

Para todo X ∈ A, sem exceção, existe um elemento Y ∈ B tal que (X, Y) ∈ T.

Figura 4: Relação entre A e B



2.4 DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO

Dados dois conjuntos A e B, não vazios, uma relação f de A em B recebe o nome de aplicação de A em B ou função definida em A com imagens em B se, e somente se, para todo X ∈ A existe um só Y ∈ B tal que (X, Y) ∈ f.

F é aplicação de A em B ⇔ (∀ X ∈ A, Y ∈ B / (X, Y) ∈ f). Vejamos agora que condições deve satisfazer uma relação f de A em B para ser aplicação (ou função).

1º) É necessário que todo elemento X ∈ A participe de pelo menos um par (X, Y) ∈ f, isto é, cada elemento de A deve servir como ponto de partida de flechas.

2º) É necessário que cada elemento de X ∈ A participe de apenas um único par (X, Y) ∈ f, isto é, cada elemento de A deve servir como ponto de partida de uma única fecha.

Uma relação f não é aplicação (ou função) se não satisfazer uma das condições acima, isto é:

a) Se existir um elemento de A do qual não parta flecha alguma ou

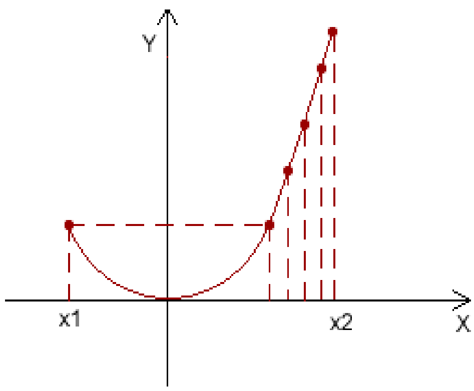
b) Se existir um elemento de A do qual partam duas ou mais flechas.

2.5 GRÁFICO CARTESIANO

Podemos verificar pela representação cartesiana da relação f de A em B se f é ou não função: Basta verificarmos se a reta paralela ao eixo Y conduzido pelo ponto (X, O), em que $X \in A$, encontra sempre o gráfico de f em um só ponto.

A relação f de A em R com $A = \{X \in R \ / \ X_1 \leq X \leq X_2\}$, apresentado ao lado, é função, pois toda reta vertical conduzida pelos pontos de abscissas $X \in A$ encontra sempre o gráfico de f num só ponto.

Figura 5: Gráfico de uma função



2.6 NOTAÇÃO DE FUNÇÃO

Toda função é uma relação binária de A em B, portanto, toda função é um conjunto de pares ordenados. Genericamente, existe uma setenção aberta Y = f (X) que expressa a lei mediante a qual, dado $X \in A$, determina-se $Y \in B$ tal que $(X, Y) \in f$, então $f = \{(X, Y) \ / \ X \in A, Y \in B \text{ e } Y = f(X)$

Para indicamos uma função f, definida em A com imagens em B segundo a lei de correspondência Y = f (X), usaremos uma das seguintes notação:

$f : A \rightarrow B$ ou $A \rightarrow B$ ou $f: A \rightarrow B$ tal que

$X \rightarrow f(x)$ $\qquad$ $X \rightarrow f(x)$ $\qquad$ $Y \rightarrow f(x)$

2.7 DOMÍNIO E IMAGEM DE FUNÇÃO

Chama-se de domínio o conjunto D dos elementos X $\in$ A para os quais existe Y $\in$ B tal que (X, Y) $\in$ f. Como pela definição de função, todo elemento de A tem essa propriedade, temos nas funções:

Domínio: conjunto de partida, isto é D = A

Se (a, b) $\in$ f, o elemento b é chamado imagem de a pela aplicação f ou valor de f no elemento a, e indicamos f(a) = b, que se lê “f de a é igual a b”.

Chamamos de Imagem o conjunto Im dos elementos Y $\in$ B para os quais existe x $\in$ A tal que (X, Y) $\in$ f, portanto imagem é subconjunto do contradomínio, isto é: Im $\subset$ B.

3 APLICAÇÕES DE FUNÇÃO

Este capítulo aborda várias sugestões de aplicações de funções em matemática, física e economia.

3.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Antes de uma demonstração prática (pedagógica) do estudo das Funções, faz-se necessário citar os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental, que apresentam o tema funções como conteúdo mas não o detalham.

Por exemplo, Brasil (1998, p. 51):

> Esse encaminhamento dado à Álgebra, a partir da generalização de padrões, bem como o estudo da variação de grandezas **possibilita a exploração da noção de função** nos terceiro e quarto ciclos. Entretanto, a abordagem formal desse conceito deverá ser objeto de estudo do ensino médio (grifos nossos).

Contudo, espera-se que os estudantes saibam escrever generalizações algebricamente, saibam ler informações de tabelas e gráficos, assim como construir tais representações, e saibam ainda identificar significados de letras e também tenham a noção de variável e de dependência.

Já no Ensino Médio o tema passa a ser largamente abordado inicialmente para explorar qualitativamente relações entre grandezas. O estudo de funções deve seguir baseando-se, principalmente, em descrições de situações concretas e abordando também os vários tipos possíveis de representações, como tabelas, gráficos e diagramas.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (Brasil, 2000b, p. 43) afirmam que:

> **Além das conexões internas à própria Matemática, o conceito de função desempenha também papel importante para descrever e estudar através da leitura, interpretação e construção de gráficos**, o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano, como de outras áreas do conhecimento, como a Física, Geografia ou Economia. **Cabe, portanto, ao ensino de Matemática garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas** e, nesse sentido, através de uma variedade de situações problema de Matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a buscar a solução, ajustando seus conhecimentos sobre funções para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática (grifos nossos).

A preocupação com o tema funções é uma tendência mundial, como é possível confirmar em uma citação extraída do texto de Ponte (1992, p.1):

> **Há muito se concorda que o tema funções deve ser tomado como um conceito fundamental no Ensino Médio** e as orientações curriculares mais recentes enfatizam a importância das funções (NCTM, 1989). **Dependendo do ponto de vista matemático dominante, o conceito de função pode ser considerado de inúmeras maneiras diferentes**, cada uma com diferentes implicações educacionais (grifos nossos).

As mais recentes orientações curriculares do National Council of Teachers of Mathematics (2009) estão divididas em grandes áreas da Matemática. São elas: Números e Operações; Álgebra; Geometria; Medição; Análise de Dados e Probabilidade; Resolução de Problemas; Raciocínio e Demonstrações; Comunicação; Conexões; e Representações. Cada uma dessas áreas está subdividida em tópicos que são fixos para todos os períodos escolares básicos (equivalente ao Ensino Básico brasileiro).

Na área Álgebra, as subdivisões são:

a) Compreender padrões, relações e funções;
b) Representar e analisar situações matemáticas e estruturas usando símbolos algébricos;
c) Usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas;
d) Analisar variações em diversos contextos.

Para cada uma dessas subdivisões são listadas as expectativas a serem alcançadas e que variam de acordo com os níveis de ensino. Sendo assim, desde os primeiros anos de escolaridade, os estudantes estão em contato com elementos relacionados ao tema funções.

Também faz-se importante destacar que o professor, ao ler as orientações já se torna ciente de que, ao estimular as crianças a "separar, classificar e ordenar objetos por tamanho, número e outras propriedades" tem como objetivo futuro a melhor compreensão de função.

3.2 FUNÇÃO JUROS

No regime de juros simples, a taxa percentual de juros é calculada de acordo com o capital principal. Dessa forma, o rendimento mensal mantém o mesmo valor.

A cobrança de juros está relacionada a financiamentos, aplicações bancárias, entre outras situações relacionadas ao meio econômico.

Uma fórmula matemática capaz de facilitar os cálculos relacionados aos juros simples é a seguinte:

J = C * i * t, onde:

J: juros

C: capital

i: taxa

T: tempo

Sabemos que o capital e a taxa de juros são fixos e o rendimento que é o juro mensal é calculado em função do tempo, assim o juro depende do tempo da aplicação.

Tomando como exemplo a aplicação de um capital de 1000 reais, a uma taxa de 5% ao mês, por um período de 5 meses, temos a tabela abaixo:

Tabela 1: Apresenta dados da Função Juros

Capital	taxa	Tempo	Juros
100	0,05%	1 mês	5
100	0,05%	2 mêses	10
100	0,05%	3 mêses	15
100	0,05%	4 mêses	20
100	0,05%	5 mêses	25

Partindo da função juros, J(t) = 100* 0,05* T, concluímos que para este caso particular, o juro pode ser determinado pela função:

J(t) = 5* T

3.3 FUNÇÕES CUSTO, RECEITA E LUCRO

Custo, receita e lucro são conceitos relacionados à economia, mas que são análogos a situação do dia – a – dia. A seguir estudaremos os conceitos de cada um deles.

3.3.1 Função Custo

O custo total tem dois componentes: o custo fixo e o custo variável. Os custos variáveis e totais aumentam com a produção e a função custo total é indicada por C(x).

Os custos fixos são os custos que não variam em relação à taxa de produção. São os custos que não dependem da quantidade produzida, tais como aluguel, seguro e outros e é representado por CF.

Os custos variáveis são os custos devidos à utilização de insumos variáveis no processo de produção e depende do preço unitário e da quantidade produzida. O custo variável é representado por CV (x), e sua equação é CV(x)= c*x, Onde:
c: é o custo unitário
x: é a quantidade produzida.

Assim podemos escrever a equação que determina função custo total como: C(x) = CF +CV(x).

Como exemplo, analisaremos o caso de produtor de bolas que tem custo unitário de 50 reais, um custo fixo nesse período de 500 reais, e as quantidades produzidas e seus custos e variáveis representados na tabela a baixo.

Tabela 2: Apresenta dados da Função Custo

Custo fixo	Custo unitário	Unidade(s)	Custo variável	Custo total
500	50	1	50	550
500	50	2	100	600
500	50	3	150	650
500	50	4	200	700
500	50	5	250	750

Sobre os Custos fixos, se conclui que, independentemente da quantidade produzida ele é o mesmo. Ou seja, produzindo ou não o custo fixo é sempre 500 reais.

No caso do custo variável, existe uma relação entre a quantidade produzida e o custo unitário. Usando a equação CV(x)= c*x, encontramos o custo Variável em função da quantidade produzida.

Assim para saber o custo variável, por exemplo na produção de cinco bolas, usamos a equação CV(x)= c*x. Assim temos que CV(5)=50*5= 250. E um custo total C(5)= CF+CV(x), logo C(x)= 500+250 = 750.

3.3.2 Função receita

A função receita está relacionada ao dinheiro arrecadado pela venda de um determinado bem ou produto e depende do preço de venda, representado por p, e da quantidade produzida representado por x. A função receita é representada por R(x), e pode se escrita como R(x) = p*x.

Desse modo, continuando com o exemplo anterior do produtor de bolas, temos que o preço de venda p, de cada bola é 150 reais, segundo a tabela abaixo.

Tabela 3: Apresenta dados da Função Receita

Unidade	Preço de venda unitário	Receita
1	150	150
2	150	300
3	150	450
4	150	600
5	150	750

Como a receita é calculada pela fórmula R(x)= p * x, para saber a receita na venda de cinco produtos fazemos, R(5)= 150 * 5= 750

3.3.3 Função Lucro

A função lucro L(x) é definida como a diferença entre a função receita R(x) e a função custo C(x) assim temos: L(x) = R(x) –C(x).

Mantendo o mesmo exemplo, do produtor de bolas, temos os custos fixos, variáveis e total, a receita e o lucro expressos na tabela abaixo.

Tabela 4: Apresenta dados da Função Lucro

Custo fixo	Custo variável	Custo total	Receita	Lucro
500	CV(1) =50	C(1) =550	R(1) =150	-400
500	CV(2) =100	C(2) =600	R(2) =300	-300
500	CV(3) =150	C(3) =650	R(3) =450	-200
500	CV(4) =200	C(4) =700	R(4) =600	-100
500	CV(5) =250	C(5) =750	R(5) =750	0
500	CV(6) =300	C(6) =800	R(6) =900	100

Observa-se da tabela que quando a produção for menor que quatro unidades, o produtor não terá lucro. Sua receita será menor que as despesas de produção e terá prejuízo.

Quando produzir cinco unidades terá lucro zero, ou seja o suficiente apenas para pagar as despesas com a produção.

E quando produzir 6 ou mais unidades, passa a ter lucro real. Por exemplo na produção de 6 bolas temos: L(6) = R(6) –C(6). Onde:

R(6)=150*6= 900

C(6) = CF+CV (6) = 500+50 * 6 = 800, e aplicando na fórmula de lucro temos:

L(6) = R(6) –C(6) = 900 – 800 = 100. Na produção de seis bolas o lucro é de cem reais.

3.4 VELOCIDADE INSTANTÂNEA

Para todo movimento podemos associar uma grandeza chamada velocidade que é o quociente entre a variação de espaço e a variação de tempo utilizado pelo móvel neste percurso.

O conceito de velocidade média é diferente do conceito de velocidade instantânea. A velocidade média esta ligada a um intervalo de tempo Δt enquanto a velocidade instantânea a um instante de tempo t. A função da velocidade para o movimento uniformemente variado é:

$V = V_o + a * t$

onde:

V: é a velocidade final do móvel.

Vo: é a velocidade inicial do móvel.

a: é a aceleração do móvel.

t: é o tempo.

Para entender melhor velocidade instantânea vamos estudar o exemplo de um movimento uniformemente variado. Um carro parte do repouso (velocidade inicial zero) e percorre 100m em 10s, com uma aceleração de 2 m/s.

Tabela 5: Apresenta dados da Função velocidade instantânea

Velocidade inicial	Aceleração	Tempo	Velocidade após (t) tempo
0 m/s	2 m/s	1s	2 m/s
0 m/s	2 m/s	2s	4 m/s
0 m/s	2 m/s	3s	6 m/s
0 m/s	2 m/s	4s	8 m/s
0 m/s	2 m/s	5s	10 m/s

Para saber a velocidade instantânea do móvel no instante 5 s, sabendo que a aceleração do mesmo é de $2m/s^2$, devemos utilizar a função abaixo:

V(t)= V0 + a * t

V (5) = 0 + 2 * 5 = 10 m /s

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente monografia evidenciou que atualmente, nos mais diversos níveis de ensino, pode-se constatar que o crescimento do número de pesquisas que tratam das questões de ensino e aprendizagem da Matemática, de um modo geral, visam facilitar a aprendizagem dos alunos nos últimos anos do Ensino Fundamental e das séries do Ensino Médio.

Tendo como tema central "conceito de função", a mesma propôs uma metodologia simples e alternativa, buscando, na contextualização do ensino desta disciplina voltado para o desenvolvimento de conceitos matemáticos, significativas questões que possibilitem a aproximação entre teoria e prática.

É importante buscar esta aproximação entre a teoria e a prática do Ensino de Matemática, porque a verdade é que em pleno século XXI nos deparamos com sofisticadas máquinas de automação, com processos cirúrgicos - impensados em décadas passadas - nos impressionamos com as descobertas acerca do cosmos e nos surpreendemos com o avanço da genética e seus processos de clonagem.

Mas, o que se constata é que atualmente, a pesar de todo esse avanço, muitos alunos têm grandes dificuldades de conceber significativamente o conceito de função e compreender a origem das fórmulas apresentadas nos livros didáticos e paradidáticos.

Portanto, é dentro deste contexto que buscou-se apresentar uma metodologia simples e alternativa como um método de ensino feito com o intuito de facilitar o processo de aprendizagem das Funções no Ensino Médio, pois foi demonstrado nesta monografia que a Matemática contribui de forma significativa na formação do educando, visando seu pleno desenvolvimento como pessoa, seu preparo para o exercício da cidadania e, sobretudo, na sua qualificação para o trabalho.

REFERÊNCIAS

BONJORNO, R. A. **Física fundamental- Novo**. São Paulo: FTD, 1999.

BRASIL, **Parâmetros curriculares nacionais**: introdução aos parâmetros curriculares nacionais - Matemática. Brasília, 1998.

______. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: ensino médio ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília, 2000b.

______. Secretaria de Educação Básica. **Orientações curriculares para o ensino médio.** Brasília, v. 2, 2006.

COSTA, José Antônio et. al. **Funções:** um pouco de história. Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. (s/d). <http://www.educ.fc.ul.ptlicm/icm2000/icm28/hist.htm>. Acesso em 10 de agosto de 2010.

GLEICK, James. **Isaac Newton, uma biografia**. São Paulo: Companhia das Letras, 2004.

GRAVINA, Maria Alice, et al. **Funções e gráficos**: um curso introdutório. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre: 2001. <http://penta.ufrgs.br/edu/telelab/mundomatlcfuncao/conceito.htm>. Acesso em 10 de agosto de 2010.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C. **Fundamentos de matemática elementar**. 8. ed. São Paulo: Atual, 2004.

POLYA, G.; O ensino por meio de problemas. **Revista do professor de matemática**, n. 7, 1985.

______. **How to solve it**. Princetin: Princeton University Press, 2004

PONTE, J. P. **The history of the concept of function and some educational implications**. The Mathematics Educator, v. 3, n.2, 1992.

VERGARA, Sylvia Constant. **Projetos e relatórios de pesquisa em administração**. São Paulo: Atlas, 2006.

WESTFALL, Richard S: **A vida de Isaac Newton**. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1995.

ZUFFI, E. M.; PACCA, J. L. A. O conceito de função e sua linguagem para os professores de Matemática e de Ciências. **Ciência & educação**, v. 8, n. 1, 2002