



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA- CCT
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO: LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

DJAVAN LUCENA REIS

APLICAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS EM TRIÂNGULOS QUAISQUER

**CAMPINA GRANDE-PB
ABRIL DE 2011**

DJAVAN LUCENA REIS

APLICAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS EM TRIÂNGULOS QUAISQUER

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado no Curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimentos às exigências para obtenção do Título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Ms. Fernando Luiz Tavares da Silva

Campina Grande/PB
2011

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL – UEPB

R277d Reis, Djavan Lucena.
Aplicações trigonométricas em triângulos quaisquer
[manuscrito] / Djavan Lucena Reis. – 2011.
47 f. : il. color

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Tecnológicas, 2011.

“Orientação: Prof. Me. Fernando Luiz Tavares da Silva, Departamento de Matemática e Estatística”.

1. Geometria. 2. Trigonometria. 3. Matemática - Triângulos. I. Título.

21. ed. CDD 516

DJAVAN LUCENA REIS

APLICAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS EM TRIÂNGULOS QUAISQUER

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado no Curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências para obtenção do Título de Licenciado em Matemática.

BANCA EXAMINADORA

* Fernando W. F. Cavalcante da Silva NOTA 8,5
Prof.
(Orientador – UEPB)

* Arquiasco de V. A. Ribeiro NOTA 8,5
Prof.
(Examinador – UEPB)

André das Reis Trive NOTA 8,5
Prof.
(Examinador – UEPB)

MÉDIA 8,5

Campina Grande, 22 de abril de 2011

Dedico este trabalho a todos os estudantes que buscam compreender não só a utilidade dos triângulos, como também, resolver problemas que envolvem os mais diferentes tipos de triângulos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por ter me dado forças e graça para enfrentar os desafios e superá-los, sem ele nada do que conquistei seria possível, inclusive chegar até esse momento.

A minha família que sempre foi à base da minha formação, e onde encontrei os maiores incentivadores em todas as minhas investidas nas mais diversas áreas.

A todos os professores que fazem o curso de matemática, em especial àqueles dos quais fui aluno e tive o privilégio de partilhar de seus conhecimentos e amizade.

Aos meus colegas de sala que juntamente comigo vivenciaram todos esses momentos acadêmicos com companheirismo, e a todos os meus amigos que sempre acreditaram em mim, me incentivando sempre a prosseguir em cada desafio que se apresentasse a frente, dos quais posso citar para representa-los, Livânia que, sempre foi uma incentivadora e motivadora nas minhas investidas.

Ao meu Pastor Robério Ricardo, incentivador muito especial e intercessor sempre presente.

A minha namorada Raquel, que carinhosamente contribuiu na apresentação desse trabalho.

Ao meu orientador pelas preciosas contribuições para a realização de meu trabalho.

RESUMO

O presente trabalho é uma reflexão sobre a importância dos triângulos na vida humana, desde os tempos passados, começando pela civilização egípcia, onde a Matemática era essencialmente prática e os triângulos deviam cumprir seu papel nesse contexto, pelos babilônicos que já conheciam as relações entre os lados de um triângulo retângulo, e a civilização grega, onde a matemática moderna se desenvolveu, e através de matemáticos gregos como Tales de Mileto, outras propriedades dos triângulos ficaram conhecidas. Atualmente, percebemos a importância do triângulo em várias partes; inúmeras construções levam em sua estrutura, formatos de triângulos, nos designs, tudo para dar uma maior sustentação, eficiência e beleza, como é o caso dos Andaimos, pontes triangulares, velas de barcos em formato triangular, entre outras. Embora hoje a trigonometria esteja presente em vários ramos do conhecimento, ela basicamente começou estudando as relações entre os comprimentos dos lados de um triângulo retângulo, e os ângulos agudos formados por esse triângulo. Devido a necessidade, de se estudarem triângulos que não são retângulos, surgiram algumas leis e teoremas que estabelecem relações em triângulos quaisquer, como é caso da lei dos senos e dos cossenos, que, nos permite calcular as medidas dos lados e ângulos desconhecidos. O teorema da área, por exemplo, nos permite encontrar a área de um triângulo qualquer, em função das medidas de dois lados desse triângulo e do ângulo formado por esses lados. O conhecimento desses teoremas e leis, nos proporciona, desenvolver habilidades que nos permitirá resolver problemas dos mais diversos, que envolvam triângulos quaisquer e que tenha um grau de dificuldade maior do que os que habitualmente encontramos nos livros de ensino médio e nos problemas propostos pelos professores de maneira geral.

SUMÁRIO

RESUMO	06
INTRODUÇÃO.....	09
1.0 NOTAS HISTÓRICAS DA MATEMÁTICA.....	10
1.1 A MATEMÁTICA NO EGITO.....	10
1.2 A MATEMÁTICA DOS BABILÔNICOS.....	12
1.3 A MATEMÁTICA GREGA.....	13
1.4 PITÁGORAS.....	14
1.5 NOTAS HISTÓRICAS DA TRIGONOMETRIA.....	15
1.5.1 A IMPORTÂNCIA DOS TRIÂNGULOS NA VIDA HUMANA.....	18
1.5.2 INFORMAÇÕES BÁSICAS A RESPEITO DOS TRIÂNGULOS.....	20
1.5.3 CONDIÇÃO DE EXISTÊNCIA DE UM TRIÂNGULO.....	21
1.5.4 CONCEITO DE TRIÂNGULO.....	22
1.5.5 TIPOS DE TRIÂNGULOS	22
1.5.6 CURIOSIDADES A RESPEITO DO TRIÂNGULO.....	23
1.6 GENERALIZAÇÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS.....	24
1.6.1 FÓRMULAS E FORMAS DE SE OBTER A ÁREA DE UM TRIÂNGULO...24	
1.6.2 PROPRIEDADE DOS ÂNGULOS INTERNOS DO TRIÂNGULO.....	26
1.6.3 PROPRIEDADE DO ÂNGULO EXTERNO DE UM TRIÂNGULO.....	27
1.6.4 CRITÉRIOS DE CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS.....	28
1.7 CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO.....	29
1.7.1 LINHAS TRIGONOMÉTRICAS.....	30
1.7.2 ESTUDO DO SINAL DO COSSENO E DO SENOS.....	30
2.0 TRIGONOMETRIA EM TRIÂNGULOS QUAISQUER.....	31
2.1 LEI DOS SENOS.....	31
2.2 LEI DOS COSSENO.....	32
2.3 TEOREMA DA ÁREA DE UM TRIÂNGULO.....	34
2.4 PROJEÇÃO ORTOGONAL.....	35

3.0 APLICAÇÕES	37
3.1 APLICAÇÕES DO SENO	37
3.2 APLICAÇÕES DO COSSENO	39
3.3 APLICAÇÕES DO TEOREMA DA ÁREA	41
3.4 APLICAÇÕES DAS PROJEÇÕES ORTOGONAIS	42
3.5 APLICAÇÕES À TOPOGRAFIA	43
CONSIDERAÇÕES FINAIS	49
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	50

INTRODUÇÃO

A importância dos triângulos na disciplina de Matemática é evidente, isso porque vários assuntos abordados em sala de aula podem ser explorados a partir de uma simples observação da estrutura do triângulo. Podemos citar, por exemplo: ângulos, área, perímetro, e casos de semelhança que envolve a própria figura. A importância do triângulo também é observável no nosso dia a dia, pois devido a sua forma e equilíbrio que promove consistência, é comum vermos: edifícios, pontes, paredes e estruturas quaisquer, que fazem uso da forma triangular, por ela proporcionar mais segurança e firmeza.

A trigonometria que estuda basicamente as relações no triângulo é um dos assuntos mais abordados dentro da disciplina de Matemática, e muitas dessas relações trigonométricas que são vistas nas escolas, são relações que se dão, principalmente no triângulo retângulo, e muitas vezes passam despercebido nas escolas, outras relações que também são possíveis de ver em outros triângulos.

Uma das propostas desse trabalho consiste ressaltar a importância do triângulo matemático, com a apresentação de algumas propriedades inerentes a figura e teoremas a ela relacionados, mas também verificarmos que os triângulos estão presentes no nosso dia a dia, sendo usados em nosso benefício.

Porém o objetivo maior desse trabalho é apresentar algumas aplicações trigonométricas em triângulos quaisquer, e para isso faremos uso de algumas demonstrações de leis, tais como a do seno e cosseno, que são aplicáveis aos mais diversos tipos de triângulos.

1.0 NOTAS HISTÓRICAS DA MATEMÁTICA

Desde a antiguidade, o homem utiliza a matemática para facilitar a vida e organizar a sociedade. Na pré-história quando o homem era nômade e vivia em pequenos grupos, vivendo da caça e pesca, esse período foi marcado por um baixo nível intelectual, científico e matemático.

Mas mesmo assim podemos citar algumas descobertas científicas e matemáticas. Neste período houve a elaboração de um processo rudimentar de contagem: ranhuras em ossos, marcas em galhos, desenhos em cavernas e pedras. Também podemos citar aqui o processo que muitos utilizavam para relacionar quantidades, ou seja, para cada unidade obtida, era colocada uma pequena pedra em um saquinho. Portanto, boa parte dessas descobertas matemática mencionadas, derivam de idéias que originalmente estavam centradas nos conceitos de número, grandeza e forma¹.

Em certa época, pensou-se que a matemática estava ocupada apenas com os nossos sentidos, com aquilo que o homem podia perceber do mundo no qual vivia, e foi apenas no século dezenove que a matemática pura se libertou das limitações sugeridas por observações da natureza.

Ao longo do tempo, o homem, a medida que ia se desenvolvendo, também ia utilizando alguns conhecimentos que, iriam facilitar sua vida em sociedade, e a matemática esteve presente na organização da vida social do homem. Veremos mais adiante as principais civilizações antigas que contribuíram para o desenvolvimento dessa ciência chamada matemática.

1.1 A MATEMÁTICA NO EGITO

A civilização egípcia se desenvolveu ao longo de uma extensa faixa de terra fértil que margeava o rio Nilo, posição geográfica que foi propícia ao desenvolvimento da agricultura, base da economia no Egito. Pelo fato de que a sociedade egípcia era extremamente fixa e centrada na pessoa do Faraó, que não permitia uma maior abertura para as classes inferiores, as ciências foram prejudicadas, mas mesmo assim houve algumas descobertas. As construções das pirâmides dão a entender que o conhecimento matemático dos egípcios era muito mais avançado que o conhecido nos papiros (documentos egípcios em forma de uma estreita tira

¹Boyer, Carl B. História da Matemática. Revista por Uta C. Merzbach; tradução Elza F. Gomide. Edição 2, editora, Edgard blucher, São Paulo:1996.(p.1)

escritos na forma hierática que foram descobertos em escavações no Egito por volta do século XVIII d.C.) Estes papiros traziam uma série de problemas e coleções matemáticas em linguagem hierática, que forma um dos pilares da matemática grega, a qual foi a base para nossa matemática moderna, isto em geometria e trigonometria. Do ponto de vista matemático os mais importantes são os papiros de Moscou e os papiros de Rhind. Nesse último, por exemplo, continham problemas diversos, onde são aplicados os métodos de divisão e multiplicação dos egípcios, mostrando também como eles empregavam a regra da falsa posição e muitos outros problemas matemáticos voltados a questões práticas. Pode-se então perceber que mesmo com todas as dificuldades e restrições impostas pela forma de governo, houve um grande avanço matemático e científico no Egito².

Foi também com o egípcios que, Começou- se também com uma geometria elementar e uma trigonometria básica (esticadores de corda) para facilitar a demarcação de terras. Com isso utilizaram-se os cálculos de áreas, raízes quadradas e frações. Também sabemos que os egípcios conheciam as relações métricas em um triângulo retângulo.

Outro registro matemático mais antigo ainda é o da numeração hieroglífica egípcia, que eram inscrições sagradas feitas em tumbas e monumentos que foram decifradas, e descobriu-se que esse sistema de numeração antigo baseava-se na escala dez. Essa linguagem simples, utilizava símbolos diferentes para representar, por exemplo, a primeira dúzia de potências dez, um traço vertical representava uma unidade, um osso de calcânhar invertido representava o número 10, um laço como uma letra C, valia 100, um dedo dobrado valia 10.000 e assim os egípcios podiam expressar as primeiras noções de quantidade³.

A matemática egípcia sempre foi essencialmente prática. Quando o rio Nilo estava no período das cheias, começavam os problemas para as pessoas. Para resolver estes problemas foram desenvolvidos vários ramos da matemática. Foram construídas obras hidráulicas, reservatórios de água e canais de irrigação no rio Nilo. Além disso, outras áreas do conhecimento foram estudadas pelos egípcios, com o intuito de prever as cheias do rio Nilo, como é o caso da Astronomia.

² <http://www.somatematica.com.br/historia.php>. Acesso em 18/04/2011

³ Boyer, Carl B. História da Matemática. Revista por Uta C. Merzbach; tradução Elza F. Gomide. Edição 2, editora, Edgard blucher, São Paulo:1996.(p.7)

1.2 A MATEMÁTICA DOS BABILÔNICOS

A Mesopotâmia como também é conhecida a Babilônia, situava-se no oriente médio entre os rios Tigre e Eufrates, onde hoje está situado o Iraque e a Síria principalmente. Os povos que formavam a Babilônia eram os: Sumérios, Acádios, Amonitas, Caldeus e Hititas. A ciência e, por conseguinte a matemática babilônica teve um grande desenvolvimento por parte dos sacerdotes que detinham o saber nesta civilização. A exemplo dos egípcios, os babilônicos tinham uma ciência e matemática extremamente prática, com o objetivo de facilitar o cálculo do calendário, a administração das colheitas, organização de obras públicas e a cobrança de impostos, bem como seus registros⁴.

Os babilônicos tinham uma maior habilidade e facilidade de efetuar cálculos, talvez em virtude de sua linguagem ser mais acessível que a egípcia. Eles tinham técnicas para equações quadráticas, e bi – quadráticas, além de possuírem fórmulas para áreas de figuras retilíneas simples e fórmulas para o cálculo de volume de sólidos simples. Também conheciam as relações entre os lados de um triângulo retângulo e trigonometria básica, conforme descrito na tábua “Plimpton 322”. A numeração posicional babilônica era semelhante à egípcia, seguindo praticamente às mesmas regras para escrever os números, fazendo uso de repetições dos símbolos para representar unidades e dezenas, porém os babilônicos perceberam que seus dois símbolos para unidades e dezenas bastavam para representar qualquer inteiro, por maior que fosse, sem necessitar de uma excessiva repetição, fazendo uso da notação posicional, isto é, os babilônicos viram que seus símbolos podiam ter função dupla, tripla ou em qualquer grau, simplesmente recebendo valores que iam depender somente de suas posições relativas na representação de um número. Nosso número 222, por exemplo, usa o algarismo 2 três vezes, com significados diferentes cada uma, uma vez o 2 vale duas unidades, depois vale 2 dezenas e por fim vale 2 centenas, de modo análogo, os babilônicos fizeram uso múltiplo de seus símbolos, separando claramente os três grupos de duas cunhas cada, e ai entendiam que, o grupo da direita representava duas unidades, o segundo o dobro de sua base, que era sessenta, e o da esquerda o dobro do quadrado da base, esse numeral indicava: $2(60)^2 + 2(60) + 2$ (ou 7322 em nossa notação)⁵. Portanto esse sistema posicional de base sexagesimal bem desenvolvido facilitava os cálculos, e o trabalho com

⁴ www.somatematica.com acesso em 20/04/2011

⁵ Boyer, Carl B. História da Matemática. Revista por Uta C. Merzbach; tradução Elza F. Gomide. Edição 2, editora, Edgard blucher, São Paulo:1996.(p.18)

frações, Por tudo isto que foi descrito, a matemática babilônica é considerada mais desenvolvida que a matemática egípcia.

1.3 A MATEMÁTICA GREGA

A civilização grega foi formada por muitos povos que se originaram da Europa e da Ásia, e é considerada por muitos o berço da civilização ocidental. A Grécia deu grande contribuição para a formação da sociedade moderna, em várias áreas, tais como: política, avanço comercial, economia e claro, contribuições dentro da ciência e matemática. A base da revolução matemática ocorrida na Grécia consistia basicamente na investigação dos conceitos matemáticos, isto é, o porquê. Enquanto a matemática egípcia e babilônica se resumia em saber, como? Com os gregos a matemática passou a ser voltada a conceituação, teoremas e axiomas. A matemática moderna teve origem no racionalismo grego, e teve como principal estimulador Tales de Mileto, considerado o pai da matemática moderna. Esse racionalismo objetivou o estudo de quatro pontos fundamentais: compreensão do lugar do homem no universo, encontrar a ordem no caos, ordenar as idéias em sequências lógicas e obtenção de princípios fundamentais.

Com relação a Tales de Mileto pouco se sabe sobre sua obra, porém segundo a tradição, foi Tales quem primeiro explicou o eclipse solar, ao verificar que a lua é iluminada por esse astro. Por esse, e outros motivos Tales é considerado o primeiro dos Sete Sábios. Segundo a tradição, a proposição conhecida como o teorema de Tales, que diz que, um ângulo inscrito num semicírculo é um ângulo reto, pode ter sido aprendido por Tales em suas viagens à Babilônia, porém a tradição grega lhe atribui a demonstração do teorema⁶. Outros quatro teoremas também têm suas demonstrações atribuídas a Tales, são eles:

- . Um círculo é bissectado por um diâmetro.
- . Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais.
- . Os pares de ângulos opostos formados por duas retas que se cortam são iguais.
- . Se dois triângulos são tais que dois ângulos e um lado são iguais respectivamente a dois ângulos e um lado de outro, então os triângulos são iguais.

⁶ Boyer, Carl B. História da Matemática. Revista por Uta C. Merzbach; tradução Elza F. Gomide. Edição 2, editora, Edgard blucher, São Paulo:1996.(p.32)

1.4 PITÁGORAS

Quando se trata de matemática, não poderíamos deixar de mencionar outro grande matemático grego da mesma época de Tales de Mileto, o famoso Pitágoras, matemático e filósofo grego, nascido por volta de 570 a.C. na ilha de Samos na Grécia.

Pitágoras com 18 anos de idade, já dominava e conhecia vários ramos do conhecimento matemático e filosófico, e foi estudando astronomia, por exemplo, que Pitágoras afirmou que o planeta terra, era esférico e suspenso no espaço. Em umas de suas visitas ao Egito, desenvolveu o seu teorema mais famoso, denominado Teorema de Pitágoras, através do qual, pode-se encontrar a medida de qualquer lado de um triângulo retângulo, conhecendo-se os valores dos outros dois. Acredita-se que ele desenvolveu esse teorema depois que ficou encantado com as pirâmides do Egito.

Pitágoras fundou uma escola mística voltada para a evolução da matemática e filosofia, tendo como principais temas a harmonia matemática, a doutrina dos números e o dualismo cósmico. O Símbolo da escola era um pentagrama que segundo Pitágoras possuía algumas propriedades interessantes. Podia se obter um pentagrama, traçando as diagonais de um pentágono regular.

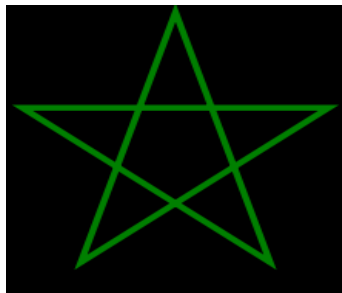


Figura 2- pentagrama, símbolo da escola Pitagórica



Figura 1- Pitágoras

Alguns estudiosos, afirmam que Pitágoras foi discípulo de Tales, mas isso, é pouco provável, devido a diferença de mais de um século entre suas idades. Embora eles tenham tido algumas semelhanças entre seus interesses de estudos, Pitágoras abordou a matemática de forma diferente em seus estudos, como o escritor Proclo, afirma em sua obra geométrica de Tales:

Pitágoras, que veio depois dele, transformou essa ciência numa forma liberal de instrução examinando seus princípios desde o início e investigando os teoremas de modo imaterial e intelectual. Descobriu a teoria das proporcionais e a construção de figuras cósmicas. [Thomas, 1939,p149.]

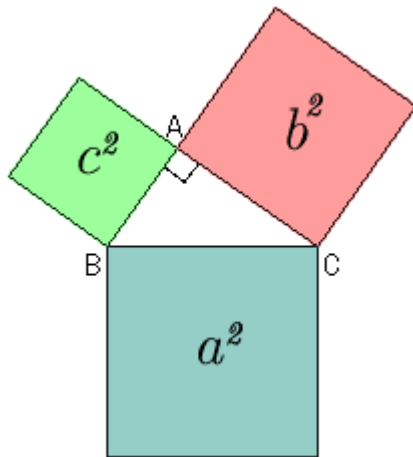


FIGURA 3 - Teorema mais famoso de Pitágoras,

1.5 NOTAS HISTÓRICAS DA TRIGONOMETRIA

A origem da trigonometria é incerta, entretanto sabemos que, o desenvolvimento da mesma se deu principalmente devido aos problemas que ficaram sem solução dentro da astronomia, geografia e navegação. Problemas esses que, os egípcios e babilônicos procuraram solucionar aplicando conhecimentos da relação entre os ângulos e os lados de um triângulo. No antigo Egito é possível encontrar problemas relacionados com a construção das pirâmides e que envolvem a cotangente, referida no papiro de Rhind. Podemos encontrar também, uma tábua de secantes, na tábua cuneiforme babilônica **Plimpton 322**.

Um matemático que deu uma contribuição significativa para a trigonometria foi **Ptolomeu** (século II). Na sua obra, *Almagesto*, composta de 13 livros contém uma tabela de cordas correspondentes a diversos ângulos por ordem crescente, de 0° a 90° com incremento de $15'$, e em função da metade do ângulo, o que é equivalente a uma tabela de senos. Contudo foi Euler (séc. XVIII) que, ao usar invariavelmente o círculo de raio um, introduziu o conceito de seno, de co-seno e de tangente como números, bem como as notações atualmente utilizadas⁷.

⁷ <http://www.slideshare.net/robesul/histria-da-matematica-2532508> Acesso em 24/04/2011.

Outros matemáticos além desses já citados, deram uma grande contribuição para o desenvolvimento da trigonometria. Exemplos que podemos citar: Menelau de Alexandria, (responsável pelo teorema que diz, que dois triângulos esféricos são congruentes se ângulos correspondentes são iguais), Hiparco de Nicéia, (responsável pela compilação da primeira tabela trigonométrica), Eratóstenes de Cirene, (muito conhecido, por precisar o tamanho da terra, através de uma simples observação solar em sua cidade). Além desses muitos outros, introduziram conhecimentos relacionados a trigonometria.

Coube ao matemático Ptolomeu, criar o círculo trigonométrico de 360 graus, na tentativa de associar valores numéricos às cordas num círculo, que era a forma utilizada pelos árabes, isto é, os árabes usaram linhas trigonométricas que funcionavam como cordas no círculo. Mas para Ptolomeu realizar tal proeza, era preciso: criar um esquema para subdividir a circunferência de um círculo, e também criar uma regra para subdividir o diâmetro. Sem dúvida, foi o sistema sexagesimal que levou Ptolomeu a subdividir o diâmetro do círculo trigonométrico em 120 partes; cada uma dessas partes ele subdividiu de novo em sessenta minutos, e cada minuto de comprimento em sessenta segundos. Vejamos a figura abaixo

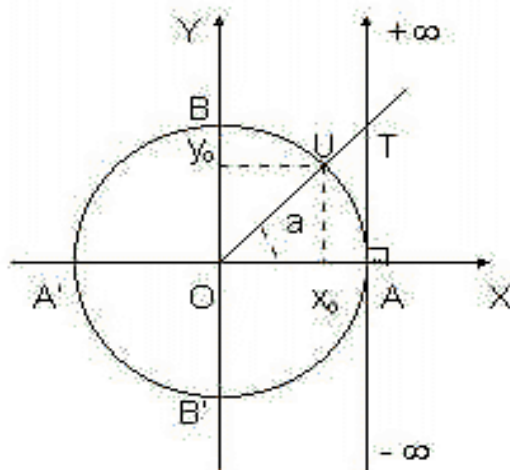


figura 4 – círculo trigonométrico

A'A = eixo dos cossenos (variando no intervalo real de -1 a +1)

B'B = eixo dos senos (variando no intervalo real de -1 a +1)

AT = eixo das tangentes (variando no intervalo de menos infinito a mais infinito)

Atualmente a trigonometria não se limita a estudar triângulos. Encontramos aplicações na mecânica, eletricidade, acústica, música, astronomia, engenharia, medicina e etc. Muitas dessas aplicações envolvem conceitos que dificilmente lembram os triângulos que deram origem à trigonometria, como por exemplo:

- . Há métodos atuais de análise de medicina, onde são enviadas ondas ao coração, de forma que efetuem interações seletivas com os tecidos a observar.
- . Geodésia : estudo da forma e dimensão da terra.
- . Estudo da intensidade luminosa: calcula-se a intensidade luminosa irradiada por uma fonte luminosa para uma determinada região.
- . Em Geografia: a trigonometria é usada para estimar distâncias entre divisas⁸.
- . Na Astronomia: conhecimentos trigonométricos são utilizados para calcular aproximadamente as distâncias entre as estrelas mais próximas.

Enfim, várias ciências aplicam conhecimentos trigonométricos para se desenvolver e alcançar resultados práticos e precisos.

Devemos reconhecer que os conhecimentos trigonométricos expandiram-se para as mais diversas áreas do conhecimento, dando sua devida contribuição, mas, para fins de estudos, devemos retornar à origem da palavra trigonometria, que significa medidas de triângulo, ou seja, palavra originada do grego, trigônom = triângulo + metron = medidas, que significa literalmente, **medidas de triângulo**⁸.

Como o próprio significado da palavra trigonometria já nos informa, esse ramo da matemática estuda os triângulos, pode estudar particularmente os triângulos em um plano, onde um dos ângulos é de 90° , isto é, o triângulo retângulo. Estuda também as relações entre os lados e os ângulos dos triângulos. Por isso é inegável a importância dos triângulos não apenas para o estudo da trigonometria, mas também, para os tempos atuais. A seguir veremos como o triângulo está presente na nossa realidade e sua devida importância para nossos dias.

⁸<http://pt.wikipedia.org/wiki/Trigonometria> Acesso em 27/04/2011

1.5.1 A IMPORTÂNCIA DOS TRIÂNGULOS NA VIDA HUMANA

Não se pode afirmar com certeza quem inventou o triângulo ou como isso ocorreu, mas no passado, algumas civilizações inventaram construções que tinham a forma estrutural de um triângulo. Um exemplo que podemos citar é o caso da civilização grega, nos seus tempos primitivos, usaram o triângulo de descarga, construção que permitia descarregar as pressões exercidas por grandes pesos que se encontravam por cima das portas dos túmulos e das cidadelas. Devido ao peso as portas podiam abater, mas com o triângulo, o peso era suportado por postes laterais que eram maciços⁹.

Na Idade Média surgiu também uma vela triangular, alinhada com o eixo longitudinal do casco. O uso dessa vela facilitou a navegação, pois anteriormente era usada uma vela perpendicular ao eixo e de formato quadrado, o que tornava a navegação lenta.



Figura 5 - Embarcação usando vela de estrutura triangular

Na atualidade podemos identificar muitas situações em que se recorre a forma triangular. Muitos engenheiros usam com frequência formas triangulares em suas construções para dá estabilidade e segurança as mesmas. Observemos abaixo algumas situações em que formas triangulares são usadas:



Figura 6 - Cobertura de Estádio triangular

⁹ <http://www.prof2000.pt/users/secjeste/modtri01/Pg000650.htm> Acesso em 29/04/2011



Figura 7 - Ponte de ferro, onde são utilizadas formas triangulares para dá sustentação a toda estrutura.



Figura 8 - Para dá mais sustentação aos andaimes eles são triangularizados, o que proporciona mais segurança diminuindo os riscos de acidentes durante as construções.



Figura 9 - Passagens aéreas de estrutura triangular .

Como podemos verificar, estruturas triangulares estão espalhadas ao nosso redor, dando formas a coisas que nos são úteis no dia a dia, facilitando nossa vida. A importância dos triângulos é evidente não apenas nos estudos de matérias que fazem uso dessa figura em suas pesquisas, mas também, porque os triângulos são fundamentais para organização estrutural de nossa sociedade, no que diz respeito ao aspecto físico.

1.5.2 INFORMAÇÕES BÁSICAS A RESPEITO DO TRIÂNGULO

Como já foi dito anteriormente, a palavra trigonometria significa medida dos lados de um triângulo, e através do estudo da trigonometria podemos encontrar as medidas dos elementos de um triângulo, que são os lados e os ângulos. Vale também considerar que pelo fato do estudo da trigonometria no seu início se resumir ao estudo do triângulo, é importante termos conhecimentos básicos sobre os triângulos, conhecimentos esses que são fundamentais no estudo da trigonometria e que facilitam a resolução de problemas do dia a dia.

Na sequência iremos apresentar algumas informações sobre os triângulos que, são necessárias para a introdução ao estudo da trigonometria:

- O triângulo é o único polígono que não possui diagonais.
- Cada um de seus ângulos externos é suplementar do ângulo externo adjacente.
- O perímetro de um triângulo é a soma das medidas de seus lados.
- A região interna de um triângulo é chamada de região **convexa** e a região externa chamada de região **côncava**.

A seguir veremos as condições necessárias para que determinada figura seja considerada um triângulo, em seguida serão apresentados os elementos de um triângulo e sua classificação tanto em relação às medidas dos lados quanto as medidas dos ângulos. Outras informações básicas acerca dos triângulos além dessas citadas acima também serão apresentadas, tudo isso para facilitar o entendimento de algumas aplicações trigonométricas nos triângulos diversos, que serão mostradas mais a frente.

Vale considerar também, que tudo que será informado sobre os triângulos; sua estrutura, sua classificação, seus elementos e curiosidades, não são apenas importantes para compreensão das demonstrações e aplicações que serão apresentadas nesse trabalho, mas também são essenciais para o aprendizado de conteúdos tanto na educação básica, média quanto na superior.

1.5.3 CONDIÇÃO DE EXISTÊNCIA DE UM TRIÂNGULO

Na construção de um triângulo observamos que: a medida de qualquer um dos lados do triângulo é menor que a soma das medidas dos outros dois e maior que o valor absoluto da diferença entre essas medidas. Tal condição é conhecida como: Condição de Existência de um Triângulo.

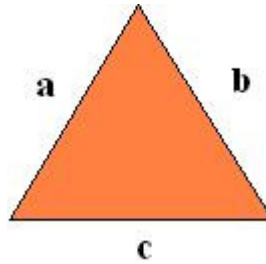


Figura 10 - triângulo

$$|b - c| < a < b + c$$

$$|a - c| < b < a + c$$

$$|a - b| < c < a + b$$

Exemplo:

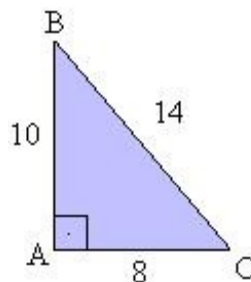


Figura 11 – triângulo retângulo, usado como exemplo.

$$14 - 8 < 10 < 14 + 10$$

$$14 - 10 < 8 < 14 + 10$$

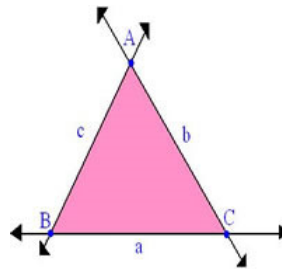
$$10 - 8 < 14 < 10 + 8$$

Podemos constatar no exemplo acima que, todas as condições foram satisfeitas e, portanto podemos concluir que a figura acima é de fato um triângulo.

1.5.4 CONCEITO DE TRIÂNGULO

Triângulo: é uma figura geométrica formada por três retas que se encontram duas a duas e não passam pelo mesmo ponto, formando três lados e três ângulos.

Observando o triângulo abaixo podemos identificar alguns de seus elementos:



• A, B e C são os vértices do triângulo.

• Os lados dos triângulos são simbolizados pelos encontros dos vértices (pontos de encontro): \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{AC} , segmentos de retas.

• Os ângulos têm duas formas de representá-los: no caso do triângulo ele tem 3 lados, consequentemente, 3 ângulos: \hat{A} , \hat{B} e \hat{C} ou $A\hat{B}C$, $B\hat{C}A$, $B\hat{A}C$.

1.5.5 TIPOS DE TRIÂNGULOS

Com relação aos lados, os triângulos podem ser classificados em:

Equilátero: São os triângulos que possuem os três lados iguais.

Isósceles: São os triângulos que possuem dois lados iguais.

Escaleno: São os triângulos que possuem os três lados diferentes.

Com relação aos ângulos internos, os triângulos são classificados em:

Retângulo: São aqueles que possuem um de seus ângulos internos igual a 90° .

Obtusângulo: São aqueles que possuem dois ângulos agudos (menores que 90°) e um ângulo obtuso (maior que 90°).

Acutângulo: São aqueles que possuem apenas ângulos internos agudos (menores que 90°).

1.5.5 CURIOSIDADES A RESPEITO DO TRIÂNGULO

Fatos elementares sobre triângulos foram apresentados por Euclides em sua obra denominada *Os Elementos* por volta de 300 a.C. Abaixo estão algumas conclusões básicas a respeito do triângulo:

O triângulo é um polígono de três lados.

Dois triângulos são ditos semelhantes se um pode ser obtido pela expansão uniforme do outro. Este é o caso se, e somente se, seus ângulos correspondentes são iguais, e isso ocorre, por exemplo, quando dois triângulos compartilham um ângulo e os lados opostos a esse ângulo. O fato crucial sobre triângulos similares é que os comprimentos de seus lados são proporcionais. Isto é, se o maior lado de um triângulo é duas vezes o maior lado do triângulo similar, diz-se, então, que o menor lado será também duas vezes maior que o menor lado do outro triângulo, e o comprimento do lado médio será duas vezes o valor do lado correspondente do outro triângulo. Assim, a razão do maior lado e o menor lado do primeiro triângulo será a mesma razão do maior lado e o menor lado do outro triângulo¹⁰.

De acordo com o teorema angular de Tales, a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é igual a dois ângulos retos (180° ou π radianos), que nos permite encontrar a medida do terceiro ângulo, uma vez conhecidas as medidas dos outros dois ângulos.

Exemplo:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

Segundo um corolário do Teorema de Tales, a medida de um ângulo externo de um triângulo é igual à soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes.

Outro teorema importante é o de Pitágoras, que afirma que, em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados. Através desse teorema podemos encontrar a medida de um dos lados do triângulo desde que, conheçamos a medida de dois de seus lados¹¹.

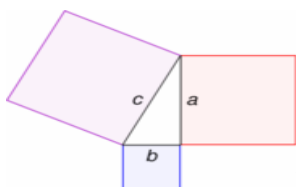


Figura 12 – triângulo Pitagórico

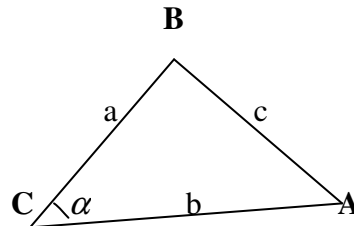
¹⁰<http://relebrandoamatemtica.blogspot.com/2010/09/calculo-da-area-do-triangulo.html> acesso em 06/05/2011

¹¹ idem

1.6 GENERALIZAÇÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS

O Teorema de Pitágoras pode ser generalizado pela **Lei dos Cossenos**.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \alpha$$



A lei dos cossenos pode ser aplicada a todos os triângulos mesmo se α , não for um ângulo reto. Ele pode ser usado para ajudar a encontrar a medida dos lados e ângulos de um triângulo, desde que, as medidas de pelo menos dois lados e de um ângulo interno sejam conhecidas.

1.6.1 FÓRMULAS E FORMAS DE SE OBTER A ÁREA DE UM TRIÂNGULO

A área de um triângulo é a metade do produto da medida de sua altura pela medida de sua base. Veja:

$$A = \frac{(b \cdot h)}{2} \text{ onde,}$$

h é a altura do triângulo, e “ b ” é a medida da base.

Se o triângulo for equilátero de lado “ l ” sua área pode ser obtida pela fórmula abaixo:

$$A = \frac{l^2 \sqrt{3}}{4}$$

Podemos encontrar a área de um triângulo, usando também o Teorema de Herão, através da fórmula do semi-perímetro, a qual é:

$$A = \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)} \quad \text{onde, } s = \frac{a + b + c}{2} \text{ é o semi-perímetro}$$

Vejamos a demonstração:

$$\text{Seja } b \text{ a base do triângulo e } h \text{ sua altura. A área do triângulo é } A = \frac{b \cdot h}{2}$$

Pelo teorema dos cossenos sabemos que:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = a^2 + b^2 - 2b \sqrt{a^2 - h^2}, \Rightarrow h^2 = a^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b} \right)^2. \text{ Assim,}$$

$$A^2 = \frac{b^2 \cdot h^2}{4} = \frac{b^2 \left(a^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b} \right)^2 \right)}{4} = \frac{(2ab)^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}{16} \Rightarrow$$

$$= \frac{(2ab - (a^2 + b^2 - c^2))(2ab + (a^2 + b^2 - c^2))}{16} = \frac{(c^2 - (a - b)^2)((a + b)^2 - c^2)}{16} \Rightarrow$$

$$= \frac{(c - a + b)(c + a - b)(a + b - c)(a + b + c)}{16} = (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c) \cdot s$$

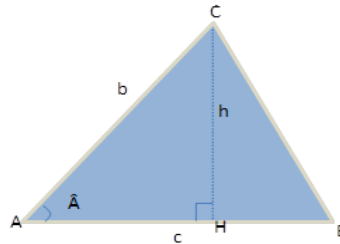
Portanto, a área do triângulo pode ser dada pela seguinte fórmula:

$$A = \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)}$$

Podemos achar a medida da área de um triângulo em função da medida de dois lados que conhecemos e do seno do ângulo formado entre eles através da fórmula abaixo:

$$A = \frac{c \cdot b \cdot \text{sen } \hat{A}}{2}$$

Demonstração: Consideremos o triângulo abaixo:



Sabemos que a área de um triângulo é dada por:

$$A = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2},$$

$$\Rightarrow A = \frac{c \cdot h}{2}, \text{ (I)},$$

Como o triângulo ACH é retângulo, temos que:

$$\text{Sen } \hat{A} = \frac{h}{b} \Rightarrow h = b \cdot \text{sen } \hat{A} \text{ (II)}$$

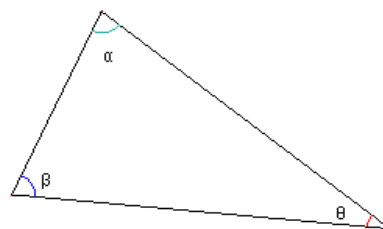
Substituindo (II) em (I) obtemos:

$$A = \frac{c \cdot b \cdot \text{sen } \hat{A}}{2}$$

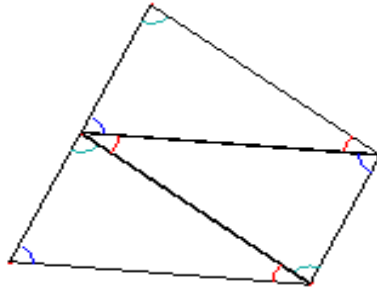
1.6.2 PROPRIEDADE DOS ÂNGULOS INTERNOS DO TRIÂNGULO

Essa propriedade afirma que a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é igual a **180°**.

Demonstração: Consideremos o triângulo abaixo:



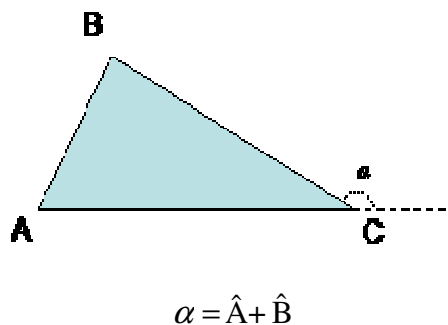
Se construirmos mais 2 triângulos idênticos a o primeiro, e giramos esses triângulos e unindo-os de maneira que, os ângulos α , β e θ tornem-se dois a dois adjacentes, como na figura abaixo, perceberemos que será formado um ângulo raso. Observação: O ângulo se torna raso quando seus lados são semi – retas opostas e a medida for de dois retos de 180° .



De onde concluímos que: $\alpha + \beta + \theta = 180^\circ$ ¹²

1.6.3 PROPRIEDADE DO ÂNGULO EXTERNO DE UM TRIÂNGULO

Todo ângulo externo de um triângulo é igual à soma das amplitudes dos dois ângulos internos não adjacentes a ele. Observe o triângulo e a consequente demonstração:



Demonstração: Da propriedade dos ângulos internos sabemos que: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$. No entanto observe que: $\alpha + \hat{C} = 180^\circ$, pois α e \hat{C} são ângulos suplementares.

Daí, segue que:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \alpha + \hat{C}$$

Portanto,

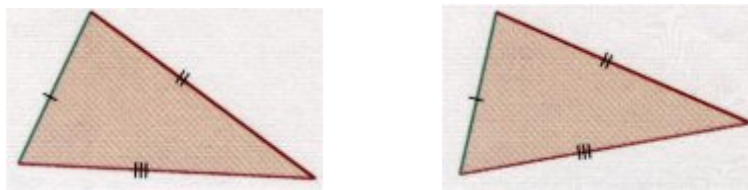
$$\hat{A} + \hat{B} = \alpha$$

¹² <http://educacao.uol.com.br/matematica/soma-angulos-internos-triangulo.jhtm>, acesso em 10/05/2011

1.6.4 CRITÉRIOS DE CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS

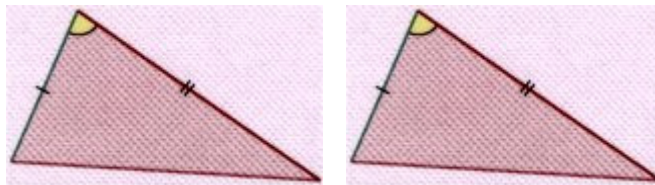
Para que dois triângulos sejam considerados congruentes, eles devem obedecer alguns critérios. Observe abaixo alguns casos de congruência entre dois triângulos.

1° CASO : Dois triângulos são ditos congruentes, se os três lados de um for igual aos três lados do outro triângulo. Esse caso é conhecido como LLL (lado, lado, lado).



TRIÂNGULOS SEMELHANTES DO 1° CASO

2° CASO : Dois triângulos são iguais quando possuem dois lados iguais e o ângulo formado por eles são iguais. Caso conhecido como LAL (lado, ângulo, lado).



TRIÂNGULOS DO 2° CASO DE SEMELHANÇA

3° CASO : Dois triângulos são iguais se têm um lado igual e os dois ângulos adjacentes a esse lado, são iguais. Esse é o caso LAA (lado, ângulo, ângulo).



TRIÂNGULOS DO 3° CASO DE SEMELHANÇA.

1.7 CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO

Antes de iniciarmos qualquer demonstração referente as leis do seno e cosseno ou qualquer outro teorema relacionado a trigonometria, faz-se necessário o estudo do círculo trigonométrico, Para entendermos as projeções de um ponto qualquer pertencente ao círculo nas coordenadas dos eixos sobre o qual a circunferência encontra-se sobreposta, dando origem aos senos e cossenos de um ângulo qualquer.

O Círculo trigonométrico é um círculo de raio unitário, cujo centro coincide com a origem do sistema cartesiano.

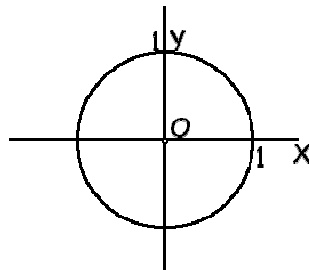


Figura 13 – círculo trigonométrico

Se considerarmos dois pontos A e B sobre o círculo trigonométrico de centro O, e ligarmos a esses dois pontos o centro O, obteremos dois segmentos de reta \overline{OA} e \overline{OB} por sua vez o par $(\overline{AO}, \overline{OB})$ define um ângulo, como podemos observar na figura abaixo:

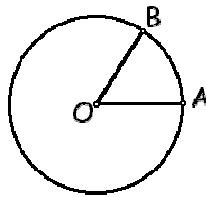
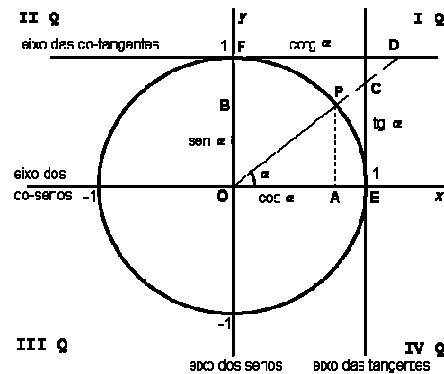


Figura 14 – círculo trigonométrico

O ponto O é o vértice do ângulo e os segmentos de retas \overline{OA} e \overline{OB} são, respectivamente, o lado origem e o lado extremidade.

1.7.1 LINHAS TRIGONOMÉTRICAS



P é o ponto de intersecção do lado extremidade do ângulo com o arco que limita o círculo trigonométrico.

O co-seno de α é a abscissa do ponto P.

O seno de α é a ordenada do ponto P.

C é o ponto de intersecção do lado extremidade do ângulo com o eixo das tangentes.

A tangente de α é a ordenada do ponto C.

D é o ponto de intersecção do lado extremidade do ângulo com o eixo das co-tangentes.

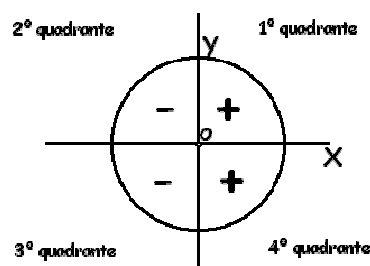
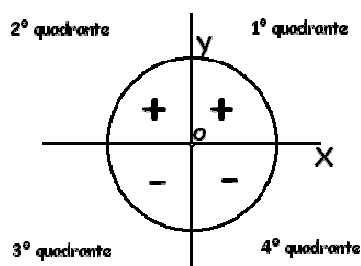
A cotg α é a abscissa do ponto C¹³.

1.7.2 ESTUDO DO SINAL DO CO-SENO E DO SENO

Através dos quadrantes abaixo, veremos onde o cosseno e o seno de um ângulo assume valores positivos e negativos:

$$-1 \leq \text{sen } \alpha \leq 1$$

$$-1 \leq \text{cos } \alpha \leq 1$$



¹³ http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2000/icm22/circulo_trigonometrico.htm Acesso em 20/05/2011

Como podemos verificar nos círculos trigonométricos acima, o seno de um ângulo assume valores positivos no 1° e 2° quadrantes e negativos nos 3° e 4° quadrantes. Já o cosseno assume valores positivos no 1° e 4° quadrantes e negativos no 2° e 3° quadrantes.

Todas as informações já mencionadas nesse trabalho, sobre os triângulos, seus componentes, sobre o seno e o cosseno e o círculo trigonométrico, serão importantes no decorrer desse trabalho, nas demonstrações que se seguirão para uma maior compreensão das leis a serem vistas e de suas aplicações nos triângulos quaisquer, que é nosso objetivo principal.

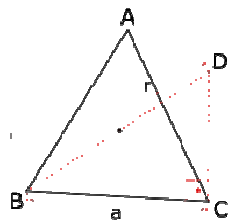
2.0 TRIGONOMETRIA EM TRIÂNGULOS QUAISQUER

A partir de agora iremos tratar de algumas leis e teoremas matemáticos que, nos ajudam a resolver problemas envolvendo triângulos quaisquer, o que é justamente a proposta desse trabalho. Na seqüência traremos o enunciado das leis e teoremas com suas respectivas demonstrações e aplicações no sentido de alcançar o objetivo de aplicar os conhecimentos adquiridos com essas leis nos problemas que surgirem, atingindo suas resoluções.

2.1 LEI DOS SENOS

Em qualquer triângulo, o quociente entre cada lado e o seno do ângulo é constante e igual à medida do diâmetro da circunferência circunscrita ao triângulo.

Demonstração:



Seja ABC um triângulo qualquer, inscrito em uma circunferência de raio R. Por um dos vértices do triângulo, no caso o vértice B, portanto de B trace um ponto diametralmente oposto que chamaremos de D, como podemos ver na figura a cima. Em seguida ligando o ponto C ao ponto D, formando assim um novo triângulo BCD retângulo em C. Observando a figura gerada e sabendo que um ângulo θ inscrito em uma circunferência tem a metade do valor do ângulo central que subtende o mesmo arco na circunferência (teorema do ângulo

inscrito), podemos concluir que: $\hat{A} = \hat{D}$ porque determinam na circunferência uma mesma corda \overline{BC} .

Temos, então:

$$\text{Sen}\hat{D} = \frac{a}{2r} \Rightarrow a = 2r \cdot \text{sen}\hat{A} \Rightarrow \frac{a}{\text{sen}\hat{A}} = 2r$$

De forma análoga, se realizarmos esse mesmo processo para os ângulos \hat{B} e \hat{C} , também teremos as seguintes relações: $\frac{b}{\text{sen}\hat{B}}$ e $\frac{c}{\text{sen}\hat{C}} = 2r$, onde b é a medida do lado AC, oposto a \hat{B} , c é a medida do lado AB, oposto a \hat{C} , e $2r$ é uma constante. Portanto podemos concluir que:

$$\frac{a}{\text{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\hat{C}} = 2r$$

2.2 LEI DOS COSENOS

Em qualquer triângulo, o quadrado de um dos lados é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados, menos o dobro do produto desses dois lados pelo cosseno do ângulo formado entre eles.

1° CASO – Seja ABC um triângulo com $\hat{A} < 90^\circ$

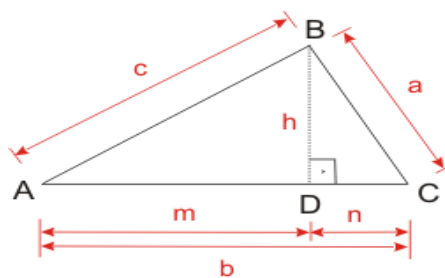


Figura 16 – triângulo acutângulo

Considerando a figura acima, podemos observar três triângulos ABC, BCD e BAD.

Do triângulo BCD, que é retângulo, podemos extrair a seguinte relação:

$$\mathbf{a^2 = n^2 + h^2} \quad (\text{I})$$

Do triângulo BAD, que é retângulo temos:

$$h^2 = c^2 - m^2 \quad (\text{II})$$

Ainda temos a seguinte relação:

$$n = b - m \quad (\text{III})$$

substituindo as relações (III) e (II) em (I) temos:

$$a^2 = (b - m)^2 + c^2 - m^2 \rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bm,$$

mas, como no triângulo BAD: $m = c \cdot \cos \hat{A}$ logo,

$$\text{Teremos que: } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$$

Da mesma forma, pode-se demonstrar as demais relações:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \hat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \hat{C}$$

2º CASO) Seja ABC um triângulo com $90^\circ < \hat{A} < 180^\circ$.

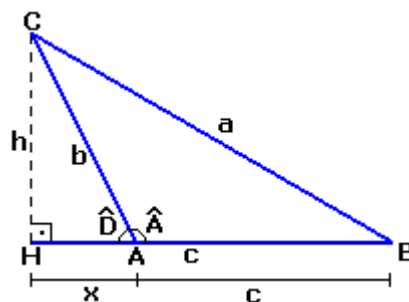


Figura 17 – triângulo obtusângulo

No triângulo BCH, que é retângulo, temos a seguinte relação, após aplicar o teorema de Pitágoras:

$$a^2 = h^2 + (x + c)^2 = h^2 + (c^2 + 2cx + x^2) = (h^2 + x^2) + c^2 + 2cx \quad (\text{I})$$

$$\text{No triângulo AHC, temos que } b^2 = h^2 + x^2 \quad (\text{II})$$

$$\text{Temos também que: } \cos(\hat{D}) = x/b = \cos(180^\circ - \hat{A}) = -\cos \hat{A}, \text{ então, } x = -b \cos \hat{A} \quad (\text{III})$$

Daí, substituindo III e II em I e o valor de x , teremos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

E está demonstrada a lei do cosseno¹⁴.

De forma análoga, podemos provar as seguintes relações:

¹⁴ Iezzi, Gelson, fundamentos de matemática elementar 3, trigonometria. Ed. Atual Editora LTDA; São Paulo:1996. (p. 227)

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \hat{B} \quad \text{e} \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \hat{C}$$

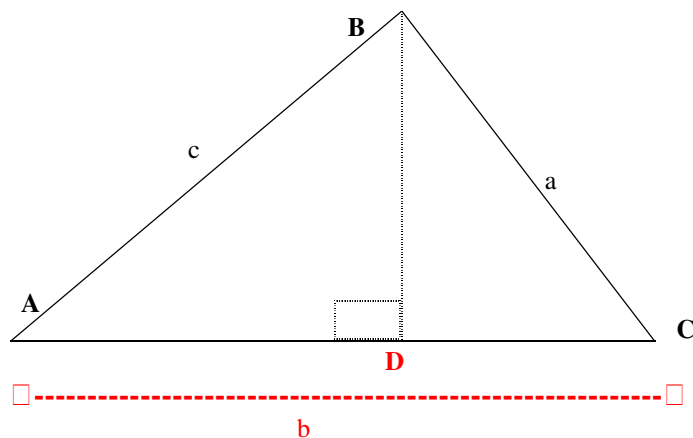
A lei dos cossenos permite calcular o comprimento de um lado de qualquer triângulo conhecendo o comprimento dos demais lados e a medida do ângulo oposto a esse lado. Essa lei também nos permite calcular a medida de todos os ângulos de um triângulo desde que, se saiba o comprimento de todos os lados.

2.3 TEOREMA DA ÁREA DE UM TRIÂNGULO

Teorema: *Em qualquer triângulo, a área é igual ao semi-produto de dois lados multiplicado pelo seno do ângulo que eles formam.*

Demonstração:

1º caso) Seja $\triangle ABC$ um triângulo com $\hat{A} < 90^\circ$



Vimos nas páginas anteriores que a lei do Seno é expressa pelas seguintes expressões:

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2r, \text{ essa lei nos permite deduzir uma fórmula para área de um}$$

triângulo qualquer.

Sabemos que a área de um triângulo é igual ao produto da base pela altura dividido por dois. Então:

$$A_t = \frac{1}{2} \cdot \text{base} \cdot \text{altura} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$$

Perceba, porém que no triângulo retângulo ABD, podemos escrever:

$$\sin \hat{A} = \frac{\overline{DB}}{c} \quad \text{ou ainda,} \quad \overline{DB} = \sin \hat{A} \cdot c$$

Fazendo a substituição dessa expressão na fórmula da área teremos:

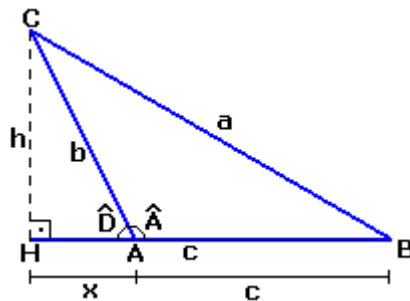
$$A_t = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{DB} \Rightarrow A_t = \frac{b \cdot c \cdot \text{sen}\hat{A}}{2}$$

2º caso) Seja ABC um triângulo com $90^\circ < \hat{A} < 180^\circ$

No triângulo AHC que é retângulo, temos:

$CH = b \cdot \text{sen}(180^\circ - \hat{A}) = b \cdot \text{sen}\hat{A}$, então:

$$A_t = \frac{\overline{AB}}{2} \cdot \overline{CH} = \frac{c \cdot b \cdot \text{sen}\hat{A}}{2}$$



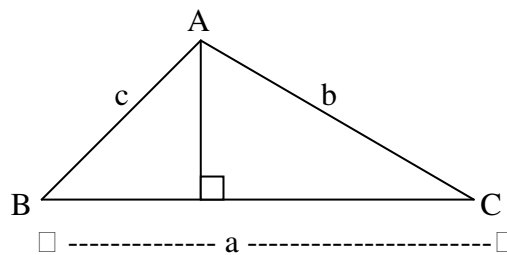
E está concluída a demonstração desse Segundo caso¹⁵.

De maneira análoga, provamos também que:

$$A_t = \frac{a \cdot b \cdot \text{sen}\hat{C}}{2} \text{ ou } A_t = \frac{a \cdot c \cdot \text{sen}\hat{B}}{2}$$

2.4 PROJEÇÃO ORTOGONAL

1º CASO: TRIÂNGULO ACUTÂNGULO



¹⁵ Tezzi, Gelson, fundamentos de matemática elementar 3, trigonometria. Ed. Atual Editora LTDA; São Paulo:1996. (p. 233).

Demonstração:

$$a = \overline{BD} + \overline{DC}$$

$$\cos \hat{B} = \frac{\overline{BD}}{c} \Rightarrow \overline{BD} = c \cdot \cos \hat{B}$$

$$\cos \hat{C} = \frac{\overline{DC}}{b} \Rightarrow \overline{DC} = b \cdot \cos \hat{C}$$

Daí temos:

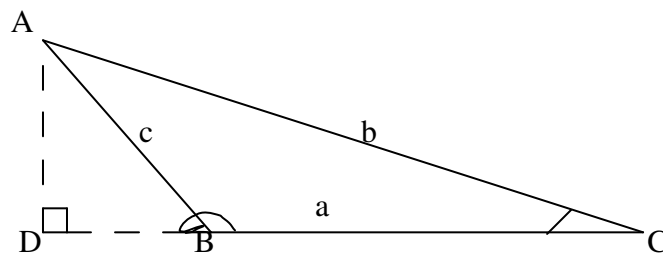
$$a = b \cdot \cos \hat{C} + c \cdot \cos \hat{B}$$

De maneira análoga, segue que,

$$b = a \cdot \cos \hat{C} + c \cdot \cos \hat{A}$$

$$c = b \cdot \cos \hat{A} + a \cdot \cos \hat{B}$$

2º CASO) TRIÂNGULO OBTUSÂNGULO



$$\overline{DC} = \overline{DB} + a$$

$$a = \overline{DC} - \overline{DB}$$

$$\text{daí, } \cos \hat{C} = \frac{\overline{DC}}{b} \Rightarrow \overline{DC} = b \cdot \cos \hat{C} \text{ logo:}$$

$$\cos (180^\circ - \hat{B}) = \frac{\overline{DB}}{c} \Rightarrow -\cos \hat{B} = \frac{\overline{DB}}{c} \Rightarrow \overline{DB} = -\cos \hat{B}$$

Temos então que:

$$a = b \cdot \cos \hat{C} - (-c \cdot \cos \hat{B}) \Rightarrow \mathbf{a = b \cdot \cos \hat{C} + c \cdot \cos \hat{B} .}$$

De maneira análoga, obtemos:

$$\mathbf{b = a \cdot \cos \hat{C} + c \cdot \cos \hat{B}}$$

e

$$\mathbf{c = a \cdot \cos \hat{B} + b \cdot \cos \hat{A}}$$

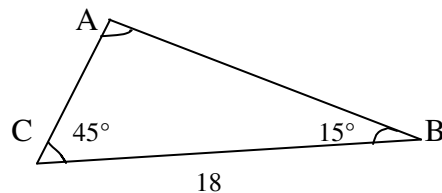
3.0 APLICAÇÕES

Iremos a partir de agora, vermos algumas aplicações do conteúdo visto neste trabalho, na resolução de alguns problemas que envolvem triângulos quaisquer. De preferência, faremos uso: da lei do seno, lei do cosseno, do teorema da área de um triângulo qualquer e da projeção ortogonal, com a finalidade de aprimorarmos o conhecimento acerca do assunto, mostrando aos leitores, que é viável, resolver problemas em triângulos que não são retângulos, o que é em suma a proposta desse trabalho.

3.1 APLICAÇÕES DA LEI DO SENO

Já vimos anteriormente, nas páginas 32 e 33 deste trabalho a demonstração da lei do seno. Veremos agora algumas situações problemas, em que a aplicação dessa lei, nos permitirá chegar a sua solução. No entanto é importante sabermos, quando é que devemos usar a lei do seno para resolver determinada questão. Portanto, devemos utilizar essa lei, nas situações em que temos um triângulo, onde são conhecidas as medidas de um lado e dois ângulos.

1º Aplicação) Quais as medidas dos lados **b** e **c** na figura abaixo?



Solução: observando a figura, percebemos que nos falta a medida de um dos ângulos internos do triângulo, mas como já sabemos pelo teorema dos 180°, que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°, podemos facilmente encontrar a medida do ângulo \hat{A} , da seguinte forma:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ = \hat{A} + 15^\circ + 45^\circ = 180^\circ = \hat{A} = 180^\circ - 60^\circ \Rightarrow \hat{A} = 120^\circ$$

Podemos aplicar agora a lei dos senos, que nos diz que:

$$\frac{a}{\text{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\hat{C}}$$

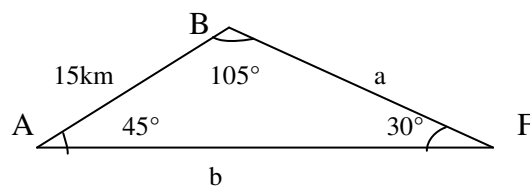
$$\frac{18}{\text{sen} 120^\circ} = \frac{b}{\text{sen} 15^\circ} \Rightarrow b \cdot \text{sen} 120^\circ = 18 \cdot \text{sen} 15^\circ = b = \frac{18 \cdot \text{sen} 15^\circ}{\text{sen} 120^\circ} \Rightarrow b \cong 5,37$$

Da mesma forma, temos:

$$\frac{b}{\sin 45^\circ} = \frac{c}{\sin 45^\circ} = c \cdot \sin 15^\circ = 5,37 \cdot \sin 45^\circ = c = \frac{5,37 \cdot \sin 45^\circ}{\sin 15^\circ} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = \frac{5,37 \cdot 0,7071}{0,8660} \Rightarrow c = 14,69. \text{ E está resolvido o problema.}$$

2° Aplicação) Observadores nos pontos A e B, localizam um foco de incêndio florestal no ponto F. Conhecendo os ângulos $\widehat{FAB} = 45^\circ$ e $\widehat{FBA} = 30^\circ$ e a distância $\overline{AB} = 15$ km. Determine \overline{AF} e \overline{BF} .



Solução: como o exercício nos dá apenas dois ângulos e a medida de apenas um lado, iremos usar nesse caso a lei do seno.

Temos então a seguinte relação:

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{f}{\sin \hat{F}} = \frac{a}{\sin 45^\circ} = \frac{b}{\sin 105^\circ} = \frac{15}{\sin 30^\circ},$$

Teremos então: $\frac{a}{\sin 45^\circ} = \frac{b}{\sin 105^\circ} = \frac{15}{\frac{1}{2}} = \frac{a}{\sin 45^\circ} = \frac{b}{\sin 105^\circ} = 30$

Da igualdade iremos descobrir o valor do lado \overline{BF} que chamaremos de “a”

$$\frac{a}{\sin 45^\circ} = 30 = \frac{a}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 30 \Rightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 30 \Rightarrow a = 15\sqrt{2} \text{ km}$$

Agora vamos descobrir o valor do lado “b”. Da igualdade anterior temos que:

$$\frac{b}{\sin 105^\circ} = 30$$

Como não temos o valor do seno de 105° , iremos decompor esse valor em dois ângulos cuja soma dá 105° , são eles os ângulos 60° e 45° . Daí usando uma fórmula já conhecida iremos calcular o valor do seno de 105° . Vejamos:

$$\text{Sen}(60^\circ + 45^\circ) = \text{sen}60^\circ \cdot \cos 45^\circ + \text{sen}45^\circ \cdot \cos 60^\circ$$

$$\text{Sen } (105^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\text{Sen } (105^\circ) = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

Como já temos o valor do seno de 105° , substituímos na relação abaixo:

$$\frac{b}{\text{sen}105^\circ} = 30 = \frac{b}{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}} = 30 = b = 30 \cdot \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = b = 15 \cdot \left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} \right),$$

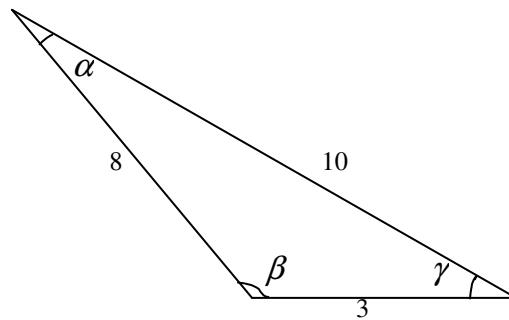
Portanto

$$b = 7,5 \cdot (\sqrt{6} + \sqrt{2}) \text{ km}$$

3.2 APLICAÇÕES DA LEI DO COSSENO

Essa lei do cosseno nos permite encontrar as medidas de todos os ângulos, desde que se saiba o comprimento de todos os lados do triângulo, como já pudemos ver na página 34 deste trabalho. Veremos agora, dois problemas envolvendo triângulos quaisquer que, são facilmente resolvidos aplicando a lei do cosseno.

1º Aplicação) Determine os ângulos do triângulo abaixo, cujos os lados medem 3, 10 e 8.



Solução: Aplicando a lei dos cossenos, temos:

$$3^2 = 10^2 + 8^2 - 2 \cdot 10 \cdot 8 \cdot \cos \alpha$$

$$9 = 100 + 64 - 160 \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{-155}{-160} \cong 0,968$$

Seguindo o mesmo raciocínio, segue que

$$10^2 = 3^2 + 8^2 - 2 \cdot 3 \cdot 8 \cdot \cos \beta$$

$$100 = 9 + 64 - 48 \cos \beta$$

$$-48 \cos \beta = 100 - 73$$

$$\cos \beta = \frac{27}{-48} \approx -0,562$$

Para finalizar

$$8^2 = 3^2 + 10^2 - 2 \cdot 3 \cdot 10 \cdot \cos \gamma$$

$$64 = 9 + 100 - 60 \cos \gamma$$

$$-60 \cos \gamma = -45$$

$$\cos \gamma = \frac{-45}{-60} \cong 0,75$$

Portanto as medidas dos ângulos serão: $\alpha \cong 14,5^\circ$, $\beta \cong 123,8^\circ$ e $\gamma \cong 41,5^\circ$

2º Aplicação) Os lados de um triângulo valem 3, 4 e 6. Respectivamente o cosseno do maior ângulo interno desse triângulo vale:

a) $\frac{11}{24}$

b) $-\frac{11}{24}$

c) $\frac{3}{8}$

d) $-\frac{3}{8}$

e) $-\frac{3}{10}$

solução: Sabemos que num triângulo, o maior lado fica oposto ao maior ângulo. Portanto, maior ângulo será oposto ao lado de medida 6. Sendo \hat{B} e aplicando a lei do cosseno teremos:

$$6^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos \hat{B}$$

$$36 = 9 + 16 - 24 \cos \hat{B}$$

$$-24 \cos \hat{B} = 36 - 25$$

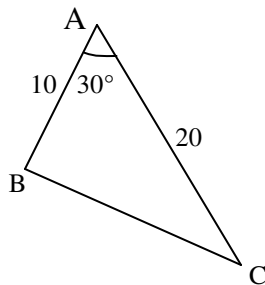
Portanto,

$$\cos \hat{B} = -\frac{11}{24} \quad (\text{alternativa b})$$

3.3 APLICAÇÕES DO TEOREMA DA ÁREA

Sempre é comum encontrarmos nos livros de matemática do ensino fundamental ou do médio, questões que pedem para achar a área de um triângulo, e sempre que, aparece a medida de um ângulo nesse triângulo, os alunos sentem um pouco de dificuldade em saber que fórmula usar, para resolver o problema. No entanto, o teorema da área demonstrado nas páginas 35 e 36 desse trabalho, nos permite encontrar a área de qualquer triângulo, conhecendo dois lados de um triângulo, e o ângulo formado por eles. Vejamos algumas aplicações desse teorema.

1ª Aplicação) Dois lados de um triângulo medem 10cm e 20cm e formam entre si um ângulo de 30°. Qual a área desse triângulo?



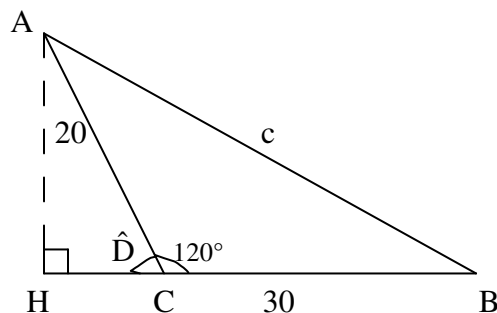
Solução: Perceba que, a questão nos dá a medida de dois lados, e esses lados formam um ângulo de 30°, o que corresponde ao primeiro caso do teorema da área, que é quando o ângulo formado pelos lados é menor que 90°. Portanto ao aplicarmos na fórmula teremos:

$$A_t = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \text{sen}\hat{A} = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 10 \cdot \text{sen}30^\circ$$

$$A_t = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 10 \cdot 0,5 \Rightarrow A_t = 50\text{cm}^2$$

Logo a área desse triângulo é **50cm²**

2ª Aplicação) Um triângulo, possui dois lados de medidas 20cm e 30cm, que formam entre si, um ângulo de 120°. Qual a área desse triângulo?



Solução: Perceba que, o lado oposto ao ângulo \hat{B} é 20, logo, $b=20$, e o lado oposto ao ângulo \hat{A} é 30, logo, $a=30$.

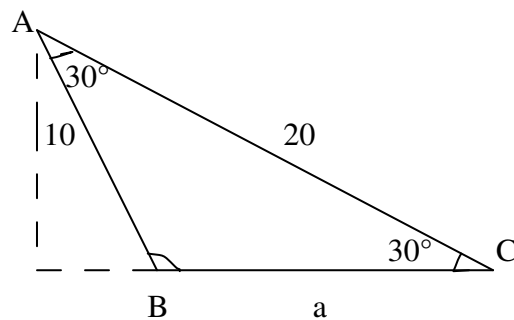
Notemos que, o triângulo AHC é retângulo, o que nos permite tirar a seguinte conclusão: $AH = b \cdot \sin(180 - \hat{C}) = b \cdot \sin \hat{C}$, então substituindo esta expressão na fórmula da área de um triângulo obtemos:

$$A_t = \frac{\overline{CB}}{2} \cdot \overline{AH} \cdot \sin \hat{C} = \frac{30 \cdot 20 \cdot \sin 120^\circ}{2} = \frac{600 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = 150\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

Perceba, que nesse problema, tivemos que prolongar o lado \overline{CB} , para encontrarmos a altura do triângulo, e substituímos posteriormente seu valor na fórmula da área.

3.4 APLICAÇÕES DAS PROJEÇÕES ORTOGONAIS

1º Aplicação) Encontre a medida do lado **a** do triângulo abaixo.



Solução: Nesse triângulo, note que temos a medida de um dos ângulos internos maior que 90° , isto é, o ângulo $\hat{B} > 90^\circ$. Como a questão nos dá a medida dos outros dois ângulos, podemos encontrar a medida do ângulo \hat{B} , pelo fato da medida dos ângulos internos de um triângulo ser 180° . De onde obtemos:

$$\hat{B} + 30^\circ + 30^\circ = 180^\circ \Rightarrow \hat{B} = 180^\circ - 60^\circ \Rightarrow \hat{B} = 120^\circ$$

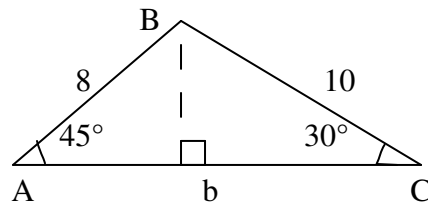
Como já temos as medidas dos lados **b** e **c** e de seus respectivos ângulos, podemos substituir seus valores na fórmula abaixo, para encontrarmos o lado que falta do triângulo:

$a = b \cos \hat{C} + c \cos \hat{B} = 20 \cdot \cos 30^\circ + 30 \cdot \cos 120^\circ$ lembremos que, o $\cos 120^\circ$ é igual ao $\cos 60^\circ$ só que no segundo quadrante onde ele fica negativo, o que nos dará:

$$a = 20 \cdot \cos 30^\circ - 30 \cdot \cos 60^\circ = 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 30 \cdot \frac{1}{2} \text{ Portanto,}$$

$$a = 10\sqrt{3} - 15 \text{ cm}$$

2ª Aplicação) Dado o triângulo abaixo, encontre a medida do lado b .



Solução: Como conhecemos as medidas dos lados c e a e de seus respectivos ângulos, podemos substituir seus valores diretamente na fórmula das projeções ortogonais do triângulo.

$$b = a \cos \hat{C} + c \cos \hat{A} = 10 \cdot \cos 30^\circ + 8 \cdot \cos 45^\circ = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Portanto,

$$b = 5\sqrt{3} + 4\sqrt{2} \text{ cm}$$

3.5 APLICAÇÕES À TOPOGRAFIA

A topografia é uma ciência que estuda todos os acidentes geográficos definindo a situação e a localização deles que podem ficar em qualquer lugar. A topografia realiza a análise das medidas de áreas e perímetros, localização, orientação e analisa também as variações no relevo, o que faz dessa ciência um instrumento muito importante para a implantação e acompanhamento de obras como: edificações, urbanização e etc.

Podemos, portanto, aplicar conhecimentos trigonométricos à topografia, uma vez que essa ciência é aplicada em áreas pequenas da terra, o que possibilita uma maior precisão e utilidade dessas aplicações. A topografia, portanto, realiza também, cálculos de distâncias que não podem ser medidas diretamente e o cálculo de distâncias inacessíveis, onde são aplicados métodos que utilizam conceitos de trigonometria. A aplicação desses métodos necessita de um instrumento capaz de medir ângulos, e que é muito utilizado por agrimensores, topógrafos e engenheiros, chamado de **teodolito**¹⁶. Esse aparelho nos mede ângulos horizontais e verticais com suas duas escalas circulares. Com essas duas utilizações do teodolito, podemos calcular distâncias inacessíveis. Vejamos a seguir duas aplicações trigonométricas à topografia:

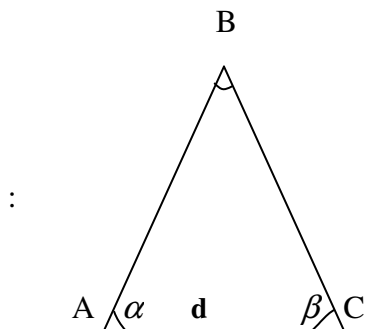
¹⁶ http://www.cienciamao.usp.br/dados/t2k/_matematica_mat2g44.arquivo.pdf. Acesso em 28/10/2011

1ª Aplicação) Realizar o Cálculo da distância de um ponto acessível a um inacessível.

Suponhamos que um observador, situado num ponto A, necessite medir a distância desse ponto a um ponto inacessível B, porém visível de A.

Considere que, o terreno seja plano nas imediações de A, e que o observador adotará o seguinte procedimento:

- 1º) Escolherá um ponto C, visível de A e de onde possa avistar B.
- 2º) Medirá, então, a distância **d** entre os pontos A e C.
- 3º) Com um aparelho adequado, colocado em a, visará os pontos B e C.
- 4º) Em seguida, colocado em A, visará os pontos A e B, determinando a medida do ângulo \hat{B} .
- 5º) Com esses elementos calculará \overline{AB} .



Em virtude da proporcionalidade entre os lados de um triângulo vista na lei do seno, podemos afirmar que:

$$\frac{\overline{AB}}{\text{sen}\beta} = \frac{d}{\text{sen}\hat{A}BC}$$

Como $\hat{A}BC = 180^\circ - (\alpha + \beta)$ temos $\frac{\overline{AB}}{\text{sen}\hat{B}} = \frac{d}{\text{sen}(\alpha + \beta)}$

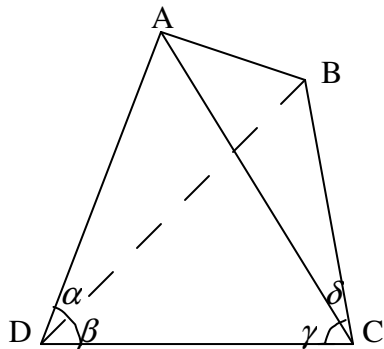
$$\overline{AB} = \frac{d \cdot \text{sen}\beta}{\text{sen}(\alpha + \beta)}$$

2º Aplicação) Cálculo da distância de dois pontos inacessíveis.

Considere que um observador queira calcular a distância de dois pontos A e B inacessíveis a ele. Para isso adotará o seguinte procedimento:

- 1º) O observador escolherá, então dois pontos C e D, dos quais possa avistar A e B.
- 2º) Medirá a distância d entre esses pontos.
- 3º) Com um aparelho adequado, colocado em C e posteriormente em D, medirá os ângulos α , β , γ e δ .

Desta forma, ficam determinados os triângulos ACD e BCD.



Os lados \overline{AB} e \overline{CD} são facilmente calculados pelas fórmulas abaixo:

$$\overline{AC} = \frac{d \cdot \text{sen}(\alpha + \beta)}{\text{sen}(\alpha + \beta + \delta)} \quad \text{e} \quad \overline{BC} = \frac{d \cdot \text{sen}(\alpha + \beta)}{\text{sen}(\beta + \gamma + \delta)}$$

Conhecidos os lados \overline{AD} e \overline{BD} do triângulo ABD e o ângulo δ , pode-se determinar \overline{AB} através da Lei dos Senos.

Podemos verificar nessas aplicações que é muito comum o uso de expressões trigonométricas para realizar cálculos de medidas, distâncias entre pontos acessíveis ou não, cálculo de áreas ou perímetros entre outras medições, o que deixa claro a importância da trigonometria em nossos dias e o quanto as aplicações de seus conceitos e relações são essenciais para nossos dias, sendo possível portanto verificar seus benefícios.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Na atualidade a figura do triângulo assume um papel muito importante na vida da população, e essa importância não está restrita apenas à sala de aula, onde conhecimentos são adquiridos através da abordagem de assuntos que envolvem triângulos, assuntos esses que, são vistos desde o ensino fundamental até o ensino superior. Hoje é comum, engenheiros recorrerem às formas triangulares para dá maior segurança as suas construções, podemos ver constantemente, andaimes triangularizados, sendo usados nas construções civis, postes de alta tensão e guindastes que usam formas triangulares, tudo, para proporcionar segurança e eficiência nas construções.

Verdade também que, falar de triângulos e não falar de trigonometria consistiria em um grande erro, uma vez que esse conhecimento matemático estuda as relações existentes em um triângulo. Hoje a trigonometria tem muitas aplicações, tanto na matemática pura, quanto na matemática aplicada, e conseqüentemente nas ciências naturais, o que vem apenas confirmar, o quanto esse ramo do conhecimento é importante.

Como pudemos ver nesse trabalho, as relações trigonométricas nos triângulos sejam eles quais forem, nos permite obter fórmulas que irá nos auxiliar na resolução de questões que envolvem triângulos, pois essas fórmulas obtidas: lei do seno, lei do cosseno, além do teorema da área e as projeções ortogonais no triângulo, tem por finalidade relacionar os ângulos do triângulo com as medidas dos lados, o que nos ajuda a resolver problemas diversos em triângulos quaisquer.

Podemos perceber que as relações existentes no triângulo, podem ser de fácil compreensão e aplicação se, forem bem trabalhadas em sala de aula e exploradas com dedicação, o que possibilitará ao estudante, perceber quando, e em que situação deve-se aplicar cada relação vista neste trabalho, como é o caso da lei do cosseno, onde podemos encontrar a medida de um dos lados dos triângulo em função dos outros dois e do ângulo formado entre eles, e assim por diante.

Quando trabalhamos com triângulo retângulo, os alunos tem grande facilidade de entender as relações existentes, achar medidas dos lados e dos ângulos desse triângulo e etc, graças ao teorema do grande Pitágoras, mas quando passamos a trabalhar com triângulos quaisquer, a facilidade já não é a mesma, por isso procuramos ver e estabelecer novas relações que podem ser obtidas de qualquer triângulo, o que pode ser uma ferramenta a mais para o aluno que deseja melhorar seus conhecimentos em trigonometria e saber aplicar esses conhecimentos em outras áreas, como por exemplo, na topografia, encontrando distâncias.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Boyer, Carl B. História da Matemática. Revista por Uta C. Merzbach; tradução Elza F. Gomide. Edição 2, editora, Edgard blucher, São Paulo:1996.

Iezzi, Gelson, fundamentos de matemática elementar 3, trigonometria. Ed. Atual Editora LTDA; São Paulo:1996.

Monteiro, H. Jacy; Boulos, Paulo; Watanabe, Renate, Matemática 1, para os cursos de 2º grau. Editora Nacional S. A. São Paulo:1975.

SITES CITADOS

<http://www.somatematica.com.br/historia.php>. Acesso em 18/04/2011

www.somatematica.com Acesso em 20/04/2011

<http://www.slideshare.net/robetul/histria-da-matemtica-2532508> Acesso em 24/04/2011.

<http://pt.wikipedia.org/wiki/Trigonometria> Acesso em 27/04/2011

<http://www.prof2000.pt/users/secjeste/modtri01/Pg000650.htm> Acesso em 29/04/2011

<http://relebrandoamatematica.blogspot.com/2010/09/calculo-da-area-do-triangulo.html>
Acesso em 06/05/2011

<http://educacao.uol.com.br/matematica/soma-angulos-internos-triangulo.jhtm>, Acesso em 10/05/2011

http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2000/icm22/circulo_trigonometrico.htm
Acesso em 25/07/2011

http://www.cienciamao.usp.br/dados/t2k/_matematica_mat2g44.arquivo.pdf
Acesso em 28/11/2011