UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA

CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

História da Trigonometria:

Um levantamento dos trabalhos produzidos nos cursos de especialização e graduação do Departamento de Matemática

DIEGO DIAS FELIX

Campina Grande-PB

Novembro de 2011

Diego Dias Felix

História da Trigonometria:

Um levantamento dos trabalhos produzidos nos cursos de especialização e graduação do Departamento de Matemática

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura Plena em Matemática do Departamento de Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba em cumprimento as exigências legais para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Professor MS. Fernando Luiz Tavares da Silva

Campina Grande-PB

Novembro de 2011

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL – UEPB

F335h Felix, Diego Dias.

História da trigonometria [manuscrito] : um levantamento dos trabalhos produzidos nos cursos de especialização e graduação do Departamento de Matemática / Diego Dias Felix. – 2011.

43 f. : il. color

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2011.

"Orientação: Prof. Me. Fernando Luiz Tavares da Silva, Departamento de Matemática".

1. História da Matemática. 2. Trigonometria. 3. Educação Matemática. I. Título

21. ed. CDD 510.1

Diego Dias Felix

História da Trigonometria:
Um levantamento dos trabalhos produzidos nos cursos de especialização e graduação do Departamento de Matemática

Aprovado em: 29 de Novembro de 2011

COMISSÃO EXAMINADORA

Professor Ms. Fernando Luiz Tavares da Silva
Departamento de Matemática – CCT – UEPB
Orientador

Professor Dr. José Lamartine da Costa Barbosa
Departamento de Matemática – CCT – UEPB
Examinador

Professora Esp. Núbia do Nascimento Martins
Departamento de Matemática – CCT – UEPB
Examinadora

Dedicatória

Dedico este trabalho ao meu pai Antônio Felix da Costa e minha mãe Joana Darque Dias Felix que um dia sonharam e hoje compartilham este importante momento comigo.

A meus irmãos Diogo e Hugo aos quais tenho muito amor.

A Sebastiana Felix Nascimento (Mocinha), minha segunda mãe, e aos seus familiares:

Pai: Chico Joca,

Irmão: Tica

Filhos: Alzira e Ivânio (genro)

Marcos Junior

Antônio

Ana Karla e Dualan (genro)

Cleverson e Roberta (nora)

Agradecimentos

AGRADEÇO:

A **DEUS** por todas as coisas maravilhosas que me foram concedidas, onde dentre tantas ressalto duas: a minha FAMÍLIA e o curso de Matemática. Sou grato a **DEUS** por ter mim dado fôlego para persistir tanto nesse curso, sem **DEUS** não teria chegado até aqui, a ELE devo a minha vida, tudo que sou e tudo que tenho.

A minha família: **minha mãe, meu pai e meus irmãos,** os quais mesmo distante sempre estiveram presentes, em meu coração, dando-me força e coragem para superar todas as barreiras encontradas em minha jornada. EU AMO VOCÊS!

A **Dona Mocinha**, uma senhora que deu oportunidade para um desconhecido, vivendo em seu lar, lutar por um futuro melhor... Faltam palavras para expressar a minha gratidão por tudo que a senhora realizou em minha vida, a senhora é uma benção de DEUS em minha vida, muito obrigado!

Ao **Prof. MS. Fernando Luiz Tavares da Silva**, meu orientador, que me deu oportunidade para trabalhar de forma idealizadora e compromissada, sendo essencial para a conclusão desse trabalho.

Aos meus familiares, em especial a minha **Tia Côca** por sempre ter acreditado em mim.

Aos motoristas **Maziel** e **Osvaldo**, os quais sempre estivaram prontos para servir.

A todos os meus amigos, em especial ao **Professor Alex** que sempre mim deu incentivo.

A todos os professores que contribuíram para minha formação.

“O destino não é frequentemente inevitável, mas uma questão de escolha. Quem faz escolha, escreve sua própria história, constrói seus próprios caminhos.”

Lista de Siglas

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA: UEPB

CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA: CCT

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA: DM

Resumo

Neste Trabalho, iremos organizar dados históricos e fazer um levantamento estatístico desses dados, baseados em trabalhos sobre a trigonometria do Departamento de Matemática – CCT–UEPB. Outro propósito é dar uma valorização a história da trigonometria, criando este material para servir como uma referência aos interessados neste assunto. Será feito uma linha histórica sobre a trigonometria, desde o surgimento – quais as principais necessidades para o desenvolvimento deste ramo da Matemática, quais os primeiros povos a desenvolver este estudo e como alguns deles trataram o estudo da trigonometria. Abordaremos também o estudo de alguns dos principais Matemáticos, que vieram a contribuir de forma direta para o desenvolvimento da trigonometria.

Plavras-Chave: História. Trigonometria. Educação Matemática.

Abstract

In this work, we will organize historical data and do a statistical survey of these data, based on the work of the Department of Mathematics CCT-UEPB trigonometry. Another purpose is to give an appreciation of the history of trigonometry, creating this material to serve as a reference to the interest in this subject. Will be made a story line about trigonometry, since the beginning - what are the main requirements for the development of this branch of mathematics, which the first people to study and develop this as some of them dealt with the study of trigonometry. We will also study some of the leading mathematicians, who came to contribute directly to the development of trigonometry.

Key – Words: History. Trigonometry. Mathematics Education.

Sumário

1. Introdução

A Trigonometria surge na antiguidade para suprir necessidades práticas, principalmente relacionadas com a diferença de terras, construção de prédios e monumentos, traçado de mapas e de rotas, tanto terrestres como marítimas e para a elaboração de calendários e na Astronomia. Hoje é utilizada para o estudo de todos os fenômenos que envolvem padrões periódicos, para isto se utilizando das funções trigonométricas e das séries de Fourier. Estuda por exemplo, fenômenos que envolvem movimentos ondulatórios tais como: transmissão de energia, de calor, de som, batimentos cardíacos, séries climáticas, dentre outros.

Em uma determinada fase dos desenvolvimentos matemáticos em um grupo social, os conceitos matemáticos são introduzidos mediante percepções intuitivas de fato que apresentam características próprias e possuem íntima relação com objetos materiais e com suas criações dos padrões, e assim todos os objetos que as possuem, passam a ser classificados em uma determinada categoria. Por exemplo, todos os objetos que tinham as características de ter como lado três segmentos de retas, tendo como ponto comum às extremidades e contendo certa região de um plano passou a ser denominado de triângulo. O triângulo é então um padrão que permite classificar as figuras que satisfazem as suas características. Veja que o triângulo matemático é um objeto abstrato, usado não somente para classificar os triângulos da natureza, como também permite efetuar determinadas operações matemáticas.

No entanto, à medida que o pensamento matemático foi caminhando no sentido da abstração, cada vez mais tivemos um afastamento das figuras concretas. Dessa maneira, as ideias que apareciam vagas e confusas foram adquirindo precisão e os métodos da análise Matemática, livres de qualquer intuição geométrica, permitiram o gradativo refinamento dos conceitos básicos e uma concatenação mais rigorosa entre as proposições fundamentais. Esta busca de rigor que caracteriza a Matemática é muito negativa quando aplicada inadequadamente no ensino. Dependendo do objetivo de cada atividade a ser executada e dos alunos a quem se destina, o professor deve utilizar como ponto de partida os conhecimentos prévios dos alunos e como ponto de chegada os objetivos a serem atingidos. Assim, constitui um engano a historia de que temos de cumprir o conteúdo previsto de cada série. A escola tem de fazer o aluno aprender e não cumprir o conteúdo previsto. Ela deve complementar inclusive as aulas disponíveis para o professor trabalhar nesta perspectiva: o mais importante para a aprendizagem é aquilo que o aluno traz de conhecimentos. E neste ponto, as representações geométricas e o uso de materiais concretos são importantes para fundamentar os alunos que não desenvolveram ainda a capacidade de abstração e de domínio da representação algébrica.

A matemática é uma palavra que se originou na Grécia derivada do grego "***mathematike***" onde ***"mathema"*** significa compreensão e ***"tike"*** arte. Assim, no seu inicio matemática teria o significado de arte da compreensão. Este sentido é atribuído aos pitagóricos, que procuravam uma maneira de explicar todos os fenômenos utilizando uma justificativa racional. Desta forma, queriam contrapor a razão, a visão mística e a visão religiosa predominantes. A visão mística procurava explicar o mundo por meio de mitos e a visão religiosa atribuía o conhecimento as divindades consideradas ***oniscientes*** (tudo sabem), ***onipresentes*** (sem limitação de tempo e espaço) e ***onipotentes*** (tudo podem).

A Matemática foi então desenvolvida pelos gregos como a primeira tentativa de explicar racionalmente o universo e podemos defini-la em nível do ensino básico como sendo a ciência que estuda por meio de padrões abstratos fenômenos de contagem (Aritmética), espaço (Topologia), formas e medidas (Geometria) fenômenos periódicos (Trigonometria), variação entre grandezas (Cálculo Diferencial), áreas e volumes (Cálculo Integral), estruturas abstratas (Álgebra), validades de argumentos (Lógica), levantamento, organização e interpretação de dados e fenômenos aleatórios (Estatística).

A Matemática ao longo da história da humanidade vem assumindo um grau de importância cada vez mais relevante: a mesma faz parte da vida do homem desde que ele tomou consciência de sua existência. O mundo em que vivemos depende fundamentalmente da Matemática, embora não nos apercebamos. As ondas eletromagnéticas, que são responsáveis pela informação que chega ao nosso televisor, a informação telefônica que via satélite ligam pontos distantes do nosso planeta, etc., tiveram a sua existência primeiramente descoberta na Matemática, sendo ela essencial para o desenvolvimento das ciências.

O desenvolvimento das ciências Matemáticas entre os séculos V e II antes de Cristo compreende na teoria das razões e das progressões, tratada especialmente na música e também na formação, ao lado das ciências teóricas, dos ramos considerados como concretos: à Geometria subordinou-se a Geodésia e à Aritmética a Logística, para a qual se constituíram especialmente os métodos algébricos. Desde a época de Euclides a Astronomia deu origem à Gnomônica e também à Geometria Matemática. Surgiu, enfim, a Mecânica. As ideias errôneas de **Aristóteles** (384-322 a.C.) acerca dos movimentos entravaram, porém, a criação da Dinâmica e, na Estática, o princípio fundamental da composição das forças não chegou a ser definido.

Até o Século XVII a Trigonometria era basicamente o estudo das relações nos triângulos retângulos, das razões trigonométricas e de suas tabelas. Seria equivalente ao que é coberto nas nossas escolas no 9º ano do Ensino Fundamental.

A época contemporânea caracterizou-se principalmente na França – centro de cultura da Matemática – pelo desenvolvimento da Teoria das Funções e particularmente das Funções de Variável Complexa, da Geometria Projetiva e do Cálculo das Probabilidades, empreendendo-se um exaustivo trabalho de crítica que terminou por promover uma completa reconstrução da Geometria e da Aritmética. Foi nesta época que surgiram as funções trigonométricas, suas tabelas e os gráficos. Esta fase vai, até o período de **Euler**, e seus conteúdos são abordados em nível de Ensino Médio.

A terceira fase da trigonometria surge com os estudos realizados por **Fourier** sobre a transmissão de calor, utilizando para isto as séries infinitas de senos e de cossenos, denominadas **séries de Fourier**. Este trabalho foi um dos que tiveram um grande impacto no mundo atual e deu origem ao desenvolvimento de vários campos do conhecimento, entre eles o eletromagnetismo, os movimentos ondulatórios e movimentos pendulares.

2. O Surgimento da Trigonometria

Para considerar a gênese desta área da Matemática, devemos discutir qual o significado que daremos ao termo, Trigonometria. Se o tomarmos como ciência analítica estudada atualmente, veremos que a sua origem se deu no século XVII, após o desenvolvimento do simbolismo algébrico. Mas, se o considerarmos para significar a geometria acoplada à Astronomia, as origens remontarão aos trabalhos de Hiparco, no século II a.C., embora existam traços anteriores de seu uso. Se o consideramos, ainda, para significar literalmente “medidas do triângulo”, a origem será no segundo ou terceiro milênio antes de Cristo.

Limitaremos este nosso trabalho ao desenvolvimento da ideia de funções trigonométricas em $\mathbb{R}$ dando, porém, um esboço das raízes desta ciência, desde as tabelas de sombras (século XV a.C.) até a expansão das funções trigonométricas (século XIX).

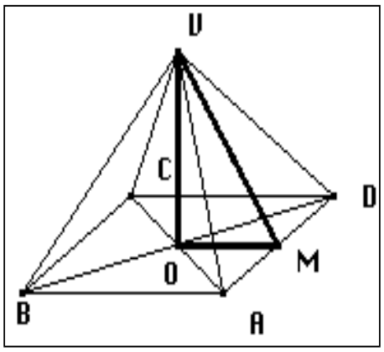
Estudar a história da trigonometria também permite observar o surgimento e o progresso da Análise e da Álgebra, campos da Matemática nelas contidos de forma embrionária. A Trigonometria, mais do que qualquer ramo da Matemática, desenvolveu-se no mundo antigo a partir de necessidades práticas, principalmente ligadas à Astronomia, Agrimensura e Navegação.

3. As raízes da Trigonometria

Os primeiros indícios de Trigonometria surgiram, tanto no Egito quanto na Babilônia, a partir do cálculo de razões entre números e entre lados de triângulos semelhantes. No Egito, isto pode ser observado no Papiro de Ahmes, conhecido como Papiro de Rhind, que data de aproximadamente 1650 a.C., e contém 84 problemas, dos quais quatro fazem menção ao **seqt** de um ângulo.

Ahmes não foi claro ao expressar o significado desta palavra, mas, pelo contexto, pensa-se que o seqt de uma pirâmide regular seja equivalente, hoje, à cotangente do ângulo OMV, conforme nos mostra a figura 1.

Na construção das pirâmides era essencial manter uma inclinação consistente das faces, o que levou os egípcios a introduzirem o conceito de **seqt**, que representava a razão entre afastamento horizontal e elevação vertical.



Seja $OV = 40$ e $OM = 80$,

então o seqt $= \dfrac{80}{40}$,

isto é: seqt $= 2$

Figura 1: O Seqt Egípcio.

Além da utilização da **Trigonometria** nas medições das pirâmides, apareceu no Egito (1500 a.C. aproximadamente) a ideia de associar sombras projetadas por uma vara vertical a sequências numéricas, relacionando os seus comprimentos com horas do dia (relógios de Sol). Poderíamos dizer então que essas ideias estavam anunciando a chegada, séculos depois, das **funções** tangentes e cotangentes. Os predecessores da tangente e da cotangente, no entanto, surgiram de modestas necessidades de medições de alturas e distâncias.

Como já mencionamos, os primeiros vestígios de **Trigonometria** surgiram não só no Egito, mas também na Babilônia. Os babilônios tinham grande interesse pela Astronomia, tanto por razões religiosas, quanto pelas conexões com o calendário e as épocas de plantio. É impossível estudarmos as fases da Lua, os pontos cardeais e as estações do ano, sem a utilização de triângulos, um sistema de unidades de medidas e uma escala.

Os babilônios foram excelentes astrônomos e influenciaram os povos posteriores. Eles construíram no século 28 a.C., durante o reinado de Sargon, um calendário astrológico e elaboraram a partir do ano 747 a.C., uma tábua de eclipses lunares. Estes calendários e estas tábuas chegaram até os nossos dias (Smith, 1958).

Parece ter existido uma relação entre o conhecimento matemático dos egípcios e dos babilônios. Ambos, por exemplo, usavam as frações de numerador **1**. Também é plausível supor que os povos posteriores tivessem conhecimento da **Trigonometria** primitiva egípcia.

Um importante conceito no desenvolvimento da **Trigonometria** é o conceito de ângulo e de como efetuar sua medida, uma vez que ele é fundamental em diversas situações, como na compreensão das razões trigonométricas em um triângulo retângulo (números que dependem dos ângulos agudos do triângulo e não da particular medida dos lados). Existem evidências de tentativas de medi-los, em datas muito remotas, pois chegaram até nossos dias fragmentos de círculos que parecem ter feito parte de astrolábios primitivos, provavelmente usados com propósito de medições (Smith, 1958).

Uma trigonometria primitiva também foi encontrada no Oriente. Na China, no reinado de Chóu-pei Suan-King, aproximadamente 1110 a.C., os triângulos retângulos eram frequentemente usados para medir distâncias, comprimentos e profundidades. Existem evidências tanto do conhecimento das relações trigonométricas quanto do conceito de ângulo e a forma de medi-los, mas, infelizmente não temos registro de como eram feitas as medições e quais as unidades de medidas usadas.

Na literatura chinesa encontramos certa passagem que podemos traduzir por: *"O conhecimento vem da sombra, e a sombra vem do gnômon"*, o que mostra que a **Trigonometria** plana primitiva já era conhecida na China no segundo milênio a.C.

No mundo Ocidental, o saber dos egípcios foi seguido pelo dos gregos. É reconhecido que, se os egípcios foram seus mestres, não tardou para que estes fossem superados pelos discípulos. Na Grécia a Matemática teve um grande desenvolvimento, e a civilização grega passou a servir de preceptora a todas as outras nações.

4. A Trigonometria na Grécia

Segundo o historiador **Heródoto** (490-420 a.C.), foram os gregos que deram o nome **gnômon** ao relógio de sol que chegou até eles através dos babilônios, embora já tivesse sido utilizado pelos egípcios antes de 1500 a.C..

O mais antigo gnômon de que temos conhecimento e que chegou até nossos dias, está nos museus de Berlim (Eves, 1995). Ele evidencia e reforça a hipótese de que a trigonometria foi uma ferramenta essencial para observação dos fenômenos astronômicos pelos povos antigos, uma vez que a documentação relativa a esse período é praticamente inexistente.

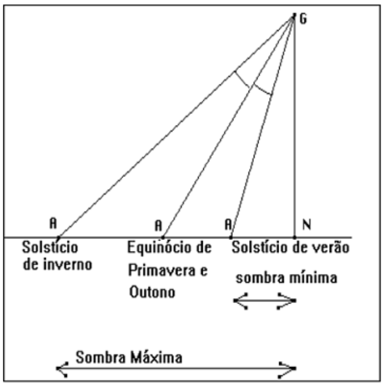


Figura 2: O Gnômon.

O gnômon era uma vareta (GN na figura 2) que se espetava no chão, formando com ele um ângulo de 90º, e o comprimento de sua sombra (AN) era observado, num determinado horário, ou seja: meio dia. Uma observação dos limites da sombra permitia medir a duração do ano e o movimento lateral diário do ponto A permitia medir a duração do dia.

Como o tamanho do gnômon era constante, ou seja, usava-se sempre a mesma vareta, na mesma posição. O comprimento de **AN** ao meio dia variava com o ângulo **A**. Para nós isto significa uma colocação de **AN**, ou $\frac{AN}{GN}$ como uma "função" do ângulo **A**, nos dias de hoje denominada cotangente. Porém, não temos nenhum vestígio do nome no período.

Sabemos que os diversos ramos da Matemática não se formaram nem evoluíram da mesma maneira e ao mesmo tempo, mas sim gradualmente. O desenvolvimento da **Trigonometria** está intimamente ligado ao da Geometria. Neste campo, a Grécia produziu grandes sábios; entre eles **Thales** (625-546 a.C.), com seus estudos de semelhança que embasam a Trigonometria, e **Pitágoras** (570-495 a.C.). Conjectura-se que este último tenha feito a primeira demonstração do teorema que leva seu nome: *"Em todo triângulo retângulo a área do quadrado construído sobre hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos".* Deste teorema deriva a relação fundamental da trigonometria.

A Escola Pitagórica, fundada no século V a.C., foi responsável por descobertas na acústica, elaborando uma lei de intervalos musicais. Essa lei relacionava os diapasões de notas emitidas por cordas distendidas, sobre tensões iguais, aos comprimentos das cordas. Podemos tomar a lei dos intervalos musicais como um prenúncio do aparecimento das funções seno e cosseno no osciloscópio do futuro, para se estudar o som (Bell, 1945).

A primeira amostra documentada de contribuição grega para o estudo da **Trigonometria** apareceu por volta de 180 a.C., quando **Hipsícles** influenciado pela cultura babilônica, dividiu o zodíaco em 360 partes. Essa ideia foi posteriormente generalizada por **Hiparco** para qualquer círculo (Eves, 1995).

Por volta do ano 200 a.C., os astrônomos gregos estavam muito interessados em calcular a distância entre dois pontos da superfície terrestre e também o raio da Terra. Foi **Eratóstenes de Cirene** (276-194 a.C.), contemporâneo de **Arquimedes** (287-212 a.C.) e **Aristarco** (310-230 a.C.) que produziu a mais notável medida da Antiguidade para a circunferência da Terra, usando semelhança de triângulos e razões trigonométricas, o que o levou a perceber a necessidade de relações mais sistemáticas entre ângulos e cordas. Salientamos que, para tornar possível o trabalho de **Erastóstenes**, foi determinante na época o conceito de ângulo e de como medi-lo. O tratado *"Sobre a medida da Terra"* resume as conclusões a que ele chegou, mas, infelizmente, esses escritos se perderam e tudo o que conhecemos sobre o assunto chegou até nós pelos relatos de **Ptolomeu** e **Heron**.

Somente na Grécia é que foram encontrados escritos que versam sobre relações de arcos e suas respectivas cordas em um círculo e a partir destes escritos é que se começou a ter ideia de ângulos. Existiam correlatas das primeiras identidades trigonométricas, mas não os teoremas propriamente ditos. Eram apenas fórmulas que foram descobertas por observação e chamaram a atenção devido ao uso repetido.

Um astrônomo grego chamado **Aristarco de Samos**, propôs um sistema Heliocêntrico, mil e quinhentos anos antes de **Nicolau Copérnico**, mas os escritos de tais proposições se perderam no tempo. Sua maior contribuição foi à escritura de um tratado chamado "*Sobre os tamanhos* e *distâncias do Sol e da Lua".*

Tal obra, para facilitar os cálculos, admitia um sistema geocêntrico para desprezar o movimento de translação da Terra. Nessa obra, **Aristarco** observa que quando a Lua está exatamente meio cheia, o ângulo entre as linhas de vista ao Sol e à Lua difere para menos de um ângulo reto por um trinta avos de um quadrante. Na linguagem de hoje, isso significa que a razão da distância da Lua para a distância do Sol é sen 3º. (BOYER, 1974).

Concluímos que na Grécia, durante os dois séculos e meio compreendidos entre **Hipócrates** e **Eratóstenes**, a **Trigonometria** esteve "engatinhando", o que nos leva a concordar com a afirmativa de Boyer (1974), *"de Hipócrates a Erastóstenes os* *gregos estudaram as relações entre retas e círculos e as aplicaram na Astronomia, mas disso não resultou uma Trigonometria sistemática" (pág. 118).*

Surgiu então, na segunda metade do século II a.C., um marco na história da Trigonometria: **Hiparco de Nicéia** (190-125 a.C.). Fortemente influenciado pela Matemática da Babilônia, ele acreditava que a melhor base de contagem era a 60. Não se sabe exatamente quando se tornou comum dividir a circunferência em 360 partes, mas isto parece dever-se a **Hiparco**, assim como a atribuição do nome **arco de 1 grau** a cada parte em que a circunferência ficou dividida. Ele dividiu cada arco de 1º em 60 partes obtendo o arco de 1 minuto. Sua trigonometria baseava-se em uma única **"função",** na qual a cada arco de circunferência de raio arbitrário, era associada à respectiva corda.

Hiparco construiu o que foi presumivelmente a primeira **tabela trigonométrica** com os valores das cordas de uma série de ângulos de 0º a 180°, em cuja montagem utilizou interpolação linear. Ele observou que num dado círculo a razão do arco para a corda diminui quando o arco diminui de 180º para 0°. Resolveu então associar a cada corda de um arco o ângulo central correspondente, o que representou um grande avanço na Astronomia e por isso ele recebeu o título de **"Pai da Trigonometria".**

Em linguagem moderna, esse resultado seria: $\lim_{x \to 0} \frac{senx}{x} = 1$

Hiparco foi uma figura de transição entra a Astronomia babilônica e o grande **Cláudio Ptolomeu**, (Claudius Ptolemaeus) autor da mais importante obra da Trigonometria na Antiguidade, surgida no século II de nossa era, em Alexandria: a "*Syntaxis Mathemática*", composta de treze volumes. Existem duas teorias defendidas em relação ao nascimento de **Ptolomeu –** Gusmão (2006) afirma que **Ptolomeu** nasceu no ano de 85 d.C. na Grécia e O'Connor e Robertson (2003) afirmam que **Ptolomeu** já havia nascido no Egito, na cidade de Hermiou, ao norte de Alexandria. Haviam algumas descrições que podiam ser feitas acerca do seu nome verdadeiro que era ***Claudius Ptolemaeus:*** *"Claudius"* indicava que ele era de cidadania romana e *"Ptolemaeus"* significava que ele mantinha residência no Egito, mais precisamente em Alexandria, que foi onde estudou e viveu a maior parte de sua vida.

Em Alexandria, **Ptolomeu** não tinha acesso aos melhores professores e nem aos melhores acervos de livros e bibliotecas, mas teve como professor matemático e astrônomo **Theon de Smyrna**, que escreveu sobre eclipses e conjunções de estrelas e o astrônomo **Syrus**, mas nada além se sabe sobre essas duas figuras.

No auge de seu desenvolvimento cognitivo, Ptolomeu escreveu uma grandiosa obra com estudos fundamentados em teorias trigonométricas, um documento composto por 13 livros que envolvem todos os conhecimentos astronômicos adquiridos até a época de **Hiparco**, inclusive **Ptolomeu** o cita nesse trabalho, tendo por nome de *Syntaxis Mathemática*. Devido a sua grande relevância para os estudiosos, os árabes, ao traduzirem a síntese de Ptolomeu, deram-lhe o nome de Al Magisti, que significa "*o maior*" e quando foi traduzido do árabe para o latim recebeu o nome de Almagesto, assim sendo conhecido até hoje. A obra de **Ptolomeu** era a coleção maior e a de **Aristarco** era a menor, ambas imprescindíveis para se entender o legado astronômico da Antiguidade grega (LORIA, 1982).

O Almagesto é um marco, um modelo de Astronomia que perdurou até **Copérnico**, no século XVI. **Ptolomeu**, na verdade, sistematizou e compilou no Almagesto uma série de conhecimentos bastante difundidos em sua época e a maior parte da obra é baseada no trabalho do astrônomo e matemático grego **Hiparco**, cujos livros se perderam. Isto aparece num comentário sobre trabalhos mais antigos, de **Teon de Alexandria**, que viveu dois séculos após e foi um dos matemáticos que pesquisaram sobre as descobertas dos gregos anteriores. Ele mencionou que **Hiparco** escreveu doze livros sobre cálculos de corda, incluindo uma tábua de cordas.

O Almagesto sobreviveu e, por isso temos suas tabelas trigonométricas e também uma exposição dos métodos usados nas construções, o que é de grande importância para nós, visto que tanto daquela época se perdeu.

Como disse **Kennedy** (1992): *"Para os matemáticos o Almagesto tem interesse devido às identidades trigonométricas que Ptolomeu divisou para auxiliá-lo a reunir dados para sua tabela de cordas" (pág.28).*

No Almagesto, **Ptolomeu** propôs um modelo geocêntrico, em que o Sol, a Lua, Mercúrio, Vênus, Marte, Júpiter e Saturno circundam a Terra e em uma órbita exterior a de Saturno, existiam as estrelas fixas. Para obedecer a uma sistemática, Ptolomeu observou as órbitas de todos esses astros no céu e observou que todos os planetas obedecem a uma trajetória peculiar. Eles não giram diretamente sobre uma circunferência, mas antes sobre uma circunferência menor (epiciclo), cujo centro se move uniformemente sobre uma circunferência maior (deferente). A Terra fica numa posição um pouco afastada do centro do deferente (portanto o deferente é um círculo excêntrico em relação à Terra). Para dar conta do movimento não uniforme dos planetas, **Ptolomeu** introduziu ainda o *equante*, que é um ponto ao lado do centro do deferente oposto à posição da Terra, em relação ao qual o centro do epiciclo se move a uma taxa uniforme.

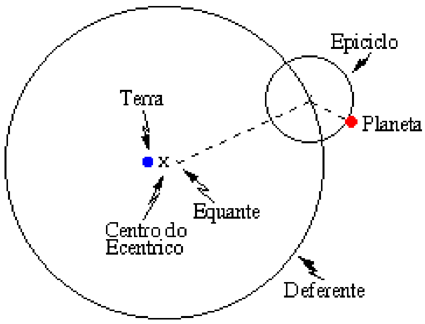


Figura 3: modelo geocêntrico.

A Lua e o Sol no seu sistema não admitiam deferentes. Tal sistema, devido a sua exatidão e riqueza de detalhes, foi aceito plenamente por durante 14 séculos pelos cristãos e árabes até que em 1543, **Nicolau Copérnico** apresentou ao mundo um modelo heliocêntrico, muito semelhante ao anteriormente apresentado por **Aristarco**.

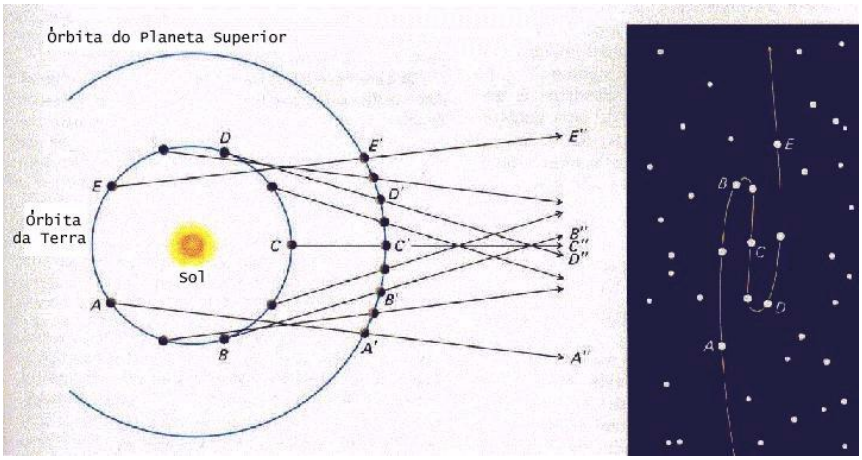


Figura 4: modelo heliocêntrico.

Ptolomeu não só trouxe progressos para a Matemática e para a Astronomia, mas também para a Geografia, quando elaborou e escreveu *Geographya*, onde o mundo era representado, através de mapas, como era conhecido na época. Devido à grande limitação do conhecimento náutico da época, na obra de **Ptolomeu**, houve erros grosseiros de localização. Como exemplo, podemos citar que ele considera em sua obra que o Oceano Índico era um mar fechado e não um oceano como conhecemos hoje. Apesar dos equívocos, essa foi à primeira obra na história onde houve o uso da latitude e longitude para facilitar a localização, cabendo a **Ptolomeu** tal descoberta.

Ptolomeu também escrevera sobre a Música, onde estudou a harmonia musical e na Física, estudou bastante a óptica com seus fenômenos de reflexão e refração.

Dos treze livros que compõe o Almagesto, o primeiro contém as informações matemáticas preliminares, indispensáveis na época, para uma investigação dos fenômenos celestes, tais como proposições sobre geometria esférica, métodos de cálculo, uma tábua de cordas e explicações gerais sobre os diferentes corpos celestes. Os demais livros são dedicados à Astronomia.

Ptolomeu desenvolveu o estudo da **Trigonometria** nos capítulos dez e onze do primeiro livro do **Almagesto**. O capítulo 11 consiste numa tabela de cordas e o capítulo 10 explica como tal tabela pode ser calculada. Na verdade, não existe no **Almagesto** nenhuma tabela contendo as *"funções"* seno e cosseno, mas sim a função corda do **arco x,** ou **crd x,** embora naturalmente estes não apareçam.

A "função" corda do arco **x** era definida com sendo o comprimento da corda que corresponde a um arco de **x** graus em um círculo cujo raio é 60. Assim, na tabela de cordas de **Ptolomeu** existiam três colunas: a primeira listando os arcos, a segunda, o comprimento da corda correspondente a cada arco e a terceira que dava o aumento médio de **crd x** correspondente a um acréscimo de um minuto em **x**, esta coluna era usada para interpolação, isto é, para achar o valor de **crd x** se **x** estivesse entre duas entradas na coluna de arcos.

No Almagesto temos:

(a) Uma tabela mais completa que a de **Hiparco**, com ângulos de meio em meio grau, de 0º a 180°;

(b) O uso da base 60, com circunferência dividida em 360 graus e o raio em 60 partes e frações sexagesimais, não só para expressar ângulos, mas para qualquer tipo de cálculo, com exceção dos de medida de tempo;

(c) O resultado que passou a ser conhecido como **Teorema de Ptolomeu**: *"Se ABCD é um quadrilátero convexo inscrito num circulo, então a soma dos produtos dos lados opostos é igual ao produto das diagonais".*

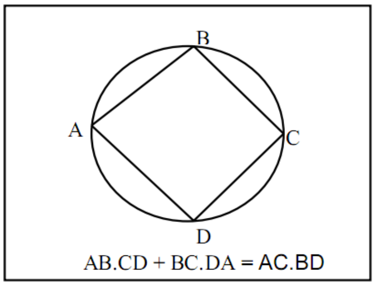


Figura 5: Teorema de Ptolomeu

A partir desse resultado, operando com as cordas dos arcos, **Ptolomeu** chegou a um equivalente das fórmulas de seno da soma e da diferença de dois arcos, isto é **sen (a+b)** e **sen (a-b)**. Especialmente a fórmula para a corda da diferença foi usada por ele para a construção da tabela trigonométrica.

(d) O uso, também baseado nas cordas, do seno do arco metade:

$$sen^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}(1-\cos\pi)$$

E entre 160 e 165 d.C., morre, em Alexandria aos 75 anos de idade, o responsável pelos maiores avanços na **Trigonometria** na história, **Ptolomeu de Alexandria.**

Segundo os historiadores a mais importante contribuição do **Almagesto** foi tornar evidente a possibilidade de uma descrição quantitativa dos fenômenos naturais pela Matemática, já que ele desenvolveu como muito bem escreveu **Aaboe** (1984).

> "*... não somente seus modelos astronômicos, mas também as ferramentas matemáticas, além da geometria elementar, necessárias para a Astronomia, entre elas a trigonometria (pág. 128). Mais do que qualquer outro livro, o Almagesto contribui para a ideia tão básica nas atividades científicas, de que uma descrição quantitativa matemática dos fenômenos naturais, capaz de fornecer predições confiáveis, é possível e desejável" (pág.129).*

Na Grécia Antiga o conceito de função propriamente dito não foi desenvolvido, mas nos estudos de **Aristóteles** aparecem ideias sobre quantidades variáveis e nos trabalhos de cônicas de **Arquimedes** e **Apolônio** é introduzido o "*Symptom*" de uma curva, definido por eles como a condição para que um ponto pertencesse à cônica, isto é, uma espécie de dependência funcional (Kennedy, 1994).

A Matemática da Antiguidade Clássica não estabeleceu a noção geral de quantidade variável ou de função e concluímos **Youschkevtch** (1981) que os métodos quantitativos de pesquisa, usados em Astronomia, tinham como objetivos representar, em tabelas, relações entre conjuntos discretos de quantidades dadas, mas sem a preocupação de generalização.

5. A contribuição dos hindus

No século IV da nossa era, a Europa Ocidental entrou em crise com as invasões dos bárbaros germânicos e com a queda do Império Romano. O centro da cultura começou a se deslocar para Índia, que revolucionou a **Trigonometria** com um conjunto de textos denominados **Siddhanta**, que significa sistemas de Astronomia

O que chegou até nós foi o **Surya Siddhanta,** que quer dizer Sistemas do Sol e é um texto épico, de aproximadamente 400 d.C., escrito em versos e em sânscrito.

Os ***Siddhantas*** eram cinco livros escritos por volta do fim do século quatro ou início do século cinco, totalmente em versos, que tratava de algumas teorias astronômicas. Em grande parte delas nota-se a influência das teorias gregas, e foram as primeiras obras que esboçavam uma tentativa dos hindus começarem a avançar em sua própria linha de estudos na Matemática, especificamente na Trigonometria.

Os hindus diziam que o autor do texto foi **Surya**, o deus do Sol. Esta obra contém poucas explicações e nenhuma prova, pois, afinal, tendo sido escrita por um Deus, seria muita pretensão exigir provas. (Boyer, 1974).

A importância do **Surya**, para nós, é que ele abriu novas perspectivas para a **Trigonometria** por não seguir o mesmo caminho de **Ptolomeu**, que relacionava as cordas de círculo com ângulos centrais correspondentes. Nas aplicações da "função" corda, na Astronomia, era necessário dobrar o arco antes de usá-lo na tábua de cordas. Naturalmente, era conveniente ter uma tábua na qual o próprio arco fosse à variável independente. No **Surya**, a relação usada era entre a metade da corda e a metade do arco central correspondente, chamada por eles de ***jiva***. Isto possibilitou a visão de um triângulo retângulo na circunferência, como na *figura 6*.

Definiam o **jiva** como sendo a razão entre o cateto oposto e a hipotenusa.

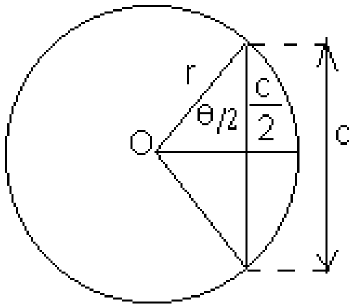


Figura 6- O "jiva" Hindu

$$jiva\ \boxed{\frac{\theta}{2}} = \boxed{\frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}} \qquad sen\ \boxed{\frac{\theta}{2}} = \boxed{\frac{c/2}{r} = \frac{c}{2r} = \frac{1}{2r} \cdot crd\ \theta}$$

A metade da corda dividida pelo raio do círculo é o seno da metade do arco (ou da metade do ângulo central correspondente a todo o arco).

Com os hindus, as principais "funções" trigonométricas foram introduzidas e os métodos de tabulação se aperfeiçoaram, particularmente os de interpolação quadrática e linear.

Por volta de 500 d.C., o matemático hindu **Aryabhata** (476-550) já calculava semi cordas e usava também o sistema decimal, desenvolvido aproximadamente em 600 d.C. Ao surgirem, os numerais hindus continham nove símbolos e não havia símbolo para o zero.

Quando os hindus introduziram os conceitos de semi corda e de seno, demonstraram algumas identidades, e encontramos em **Varahamihira**, no ano 505 d.C., o equivalente verbal de $\mathbf{sen^2\,\theta + cos^2\,\theta = 1}$.

Após os hindus, foram os árabes e os persas a dar sua contribuição à Trigonometria.

6. A Trigonometria dos Árabes e Persas

O Império Muçulmano ou Árabe, além da expansão econômica, viveu extraordinário avanço nos diversos campos das artes e da ciência do fim do século VIII até o século XI, com destaque ao século IX. A expansão do saber muçulmano deveu-se, sobretudo, à difusão da língua árabe, que substituiu o grego na condição de língua internacional. O emprego do árabe permitiu a fixação e a preservação de obras antigas, que foram traduzidas e assim difundidas entre os intelectuais muçulmanos.

Podemos dizer que a influência árabe começou com fundação da Escola de Bagdad, no século IX, e um dos seus maiores expoentes foi o príncipe da Síria **Mohamed-bem-Geber**, conhecido como **Al Battani** (por volta de 850 a 929 d.C.), ou **Albategnius**, na tradução latina, chamado o **Ptolomeu de Bagdad**.

Os estudos de **Al Battani** ficaram entre o **Almagesto** e **Siddhanta** e foi por sua influência que a Trigonometria hindu foi adotada pelos árabes, principalmente a partir de sua genial ideia de introduzir o círculo de raio unitário e com isso demonstrar que a razão **jiva** é válida para qualquer triângulo retângulo, independentemente do valor da medida da hipotenusa, (***ver Figura 7).***

$$jiva = \frac{\text{cateto oposto}}{1} = \frac{\text{BC}}{1}$$

$$\text{sen}\frac{\theta}{2} = \frac{BC}{1}$$

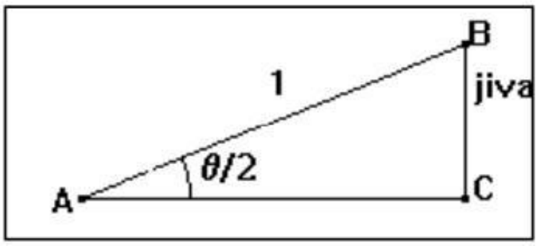


Figura 7- A ideia do Raio 1 de Al Battani.

Se um triângulo retângulo tem um ângulo agudo $\frac{\theta}{2}$ então, quaisquer que sejam as medidas do cateto oposto e da hipotenusa podemos afirmar que: $\Delta ABC \approx \Delta AB^1C^1$

No ΔABC temos $\text{sen}\frac{\theta}{2} = \frac{jiva}{1}$

Pelo Teorema de Tales, temos:

$$\frac{jiva}{1} = \frac{BC}{AB} = \frac{B^1C^1}{AB^1}, \text{ logo,}$$

$$\text{sen}\frac{\theta}{2} = \frac{B^1C^1}{AB^1} = \frac{jiva}{1}$$

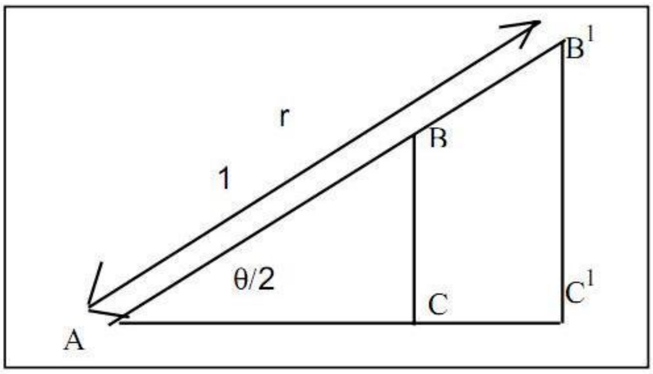


Figura 8: Fórmula usada para construir a tabela de Al Battani.

Com esta fórmula pode-se construir uma tábua, de $\frac{1}{4}$ a 90 graus, variando de $\frac{1}{4}$ em $\frac{1}{4}$ de graus, ou seja, uma tabela de senos, apesar deste nome não ter sido usado para designá-la. **Al Battani** estava interessado em calcular a altitude do sol e para isso, foi necessário usar as razões trigonométricas, construindo tábuas mais precisas que as existentes na época.

Depois de **Al Battani**, o matemático **Abu'l Wêfa**, digno de nota entre os matemáticos árabes, em 980, iniciou uma organização, de sistematização de provas e teoremas de **Trigonometria**.

Destacamos também o astrônomo persa **Nasir al-Din al-Tusi** (1201-1274**)** autor, em 1250, do primeiro trabalho no qual a **Trigonometria** plana apareceu como ciência por ela própria, desvinculada da Astronomia. Isto seria retomado na Europa, no século XV, quando Regiomontanus estabeleceu a **Trigonometria** como um ramo da Matemática.

Quando a Escola de Bagdad entrou em declínio, o centro das atividades intelectuais deslocou-se para o sul da Europa na Península Ibérica, e com ele o estudo da **Trigonometria**, particularmente nos triângulos esféricos necessários aos estudos astronômicos. A cidade de Toledo tornou-se o mais importante centro da cultura a partir de 1085, quando foi libertada pelos cristãos do domínio mouro. Isto ocorreu porque para ela afluíram os estudiosos ocidentais, visando adquirir o saber muçulmano. O século XII na História da Matemática foi, então, um século de tradutores dos quais citamos **Platão de Tivoli**, **Gerardo de Cremona**, **Adelardo de Bath** e **Robert de Chester**. Com isso, a Europa teve acesso à Matemática árabe e à herança grega que havia sido conservada, na medida do possível, por eles. (Struik, 1992).

7. O surgimento das funções trigonométricas

O primeiro aparecimento real do ***seno*** de um ângulo se deu no trabalho dos hindus. **Aryabhata**, por volta do ano 500 elaborou tabelas envolvendo metade de cordas que agora realmente são tabelas de ***senos*** e usou ***jiva*** no lugar de ***seno***. Esta mesma tabela foi reproduzida no trabalho de **Brahmagupta**, em 628, e um método detalhado para construir uma tabela de ***senos*** para qualquer ângulo foi dado por **Bháskara** em 1150.

A palavra hindu ***jiva*** - meia corda, dada ao ***seno*** foi traduzida para o árabe que chamou o ***seno*** de ***jiba***, uma palavra que tem o mesmo som de ***jiva***. Daí, ***jiba*** se tornou ***jaib*** nos escritos árabes. A palavra árabe adequada que deveria ter sido traduzida seria ***jiba***, que significa a corda de um arco, em vez de ***jaib***, pois foi o estudo das cordas de arcos numa circunferência que originou o ***seno***.

O nome ***seno*** vem do latim ***sinus*** que significa *seio, volta, curva, cavidade*. Muitas pessoas acreditam que este nome se deve ao fato de o gráfico da função correspondente ser bastante sinuoso. Mas, na verdade, ***sinus*** é a tradução latina da palavra árabe ***jaib***, que significa dobra, bolso ou prega de uma vestimenta que não tem nada a ver com o conceito matemático de ***seno***. Trata-se de uma tradução defeituosa que dura até hoje. Quando os autores europeus traduziram as palavras matemáticas árabes em latim, eles traduziram ***jaib*** na palavra ***sinus***. Em particular, o uso de **Fibonacci** do termo ***sinus rectus arcus*** rapidamente encorajou o uso universal de ***seno***.

O termo ***seno*** certamente não foi aceito imediatamente como a notação padrão pelos autores de todos os tempos, quando a notação matemática era por si mesma uma nova ideia, muitos usaram a sua própria notação.

Edmund Günter (1581-1626) foi o primeiro a usar a abreviação ***sen*** em 1624 em um desenho. O primeiro uso do ***sen*** em um livro foi em 1634, pelo matemático francês **Pierre Hérigone** (1580-1643), enquanto **Cavalieri** (1598-1647) usava ***Si*** e **Oughtred** (1575-1660) usava **S**.

A mais antiga tábua de senos foi descoberta na Índia, onde elas sem dúvida se originaram. Seus inventores, desconhecidos, conheciam as ideias matemáticas gregas e babilônicas transmitidas como subprodutos de um florescente comércio romano com o sul da Índia, via Mar Vermelho e Oceano Índico.

A palavra ***cosseno*** surgiu somente no século XVII, como sendo o ***seno*** do complemento de um ângulo. Os conceitos de ***seno*** e ***cosseno*** foram originados pelos problemas relativos à Astronomia, enquanto que o conceito de ***tangente***, ao que parece, surgiu da necessidade de calcular alturas e distâncias.

Por sua vez, o ***cosseno*** seguiu um curso semelhante no que diz respeito ao desenvolvimento da notação. **Viéte** usou o termo ***sinus residuae*** para o ***cosseno***.

Günter em 1620, sugeriu ***co-sinus,*** a notação ***Si.2*** foi usada por **Cavalieri**, **Oughtred** usou ***s co arc*** e **Wallis** usou ***S***.

A função ***tangente*** era a antiga função ***sombra***, que tinha ideias associadas a sombras projetadas por uma vara colocada na horizontal. A variação da elevação do Sol causava uma variação de ângulo que os raios solares formavam com a vara e, portanto modificava o tamanho da sombra (Figura 9).

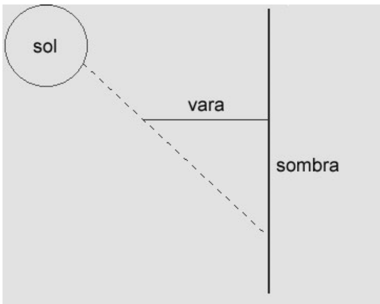


Figura 9: Função sombra.

Assim, a ***tangente*** e a ***cotangente*** vieram por um caminho diferente daquele das cordas que geravam o ***seno***. Foram conceitos desenvolvidos juntos e não foram primeiramente associados a ângulos, sendo importantes para calcular o comprimento da sombra que é produzida por um objeto. O comprimento das sombras foi também de importância no relógio de Sol. **Tales** usou os comprimentos das sombras para calcular as alturas das pirâmides através da semelhança de triângulos.

As primeiras tabelas de sombras conhecidas foram produzidas pelos árabes por volta de 860. O nome ***tangente*** foi primeiro usado por **Thomas Fincke**, em 1583. O termo cotangente foi primeiro usado por **Edmund Günter**, em 1620.

As notações para a ***tangente*** e a ***cotangente*** seguiram um desenvolvimento semelhante aquele do ***sen*** e ***cos***. **Cavalieri** usou ***Ta*** e ***Ta.2***, **Oughtred** usou ***t arc*** e ***co arc***, enquanto **Wallis** usou ***T*** e ***t***. A abreviação comum usada hoje é ***tan*** (***ou tg***) sendo que a primeira ocorrência desta abreviação é devida a **Albert Girard** em 1626, com ***tan*** escrito por cima do ângulo; ***cot*** foi primeiro usado por **Jonas Moore** em 1674.

A **secante** e a **cossecante** não foram usadas pelos antigos astrônomos ou agrimensores. Estas sugiram quando os navegadores por volta do século XV começaram a preparar tabelas. **Copérnico** sabia da secante que ele chamou de ***hipotenusa*****.** As abreviações usadas por vários autores foram semelhantes paras as funções trigonométricas já discutidas. **Cavaliere** usou ***Se*** e ***Se.2,*** **Oughtred** usou ***Se arc*** e ***Sec co arc,*** enquanto ***Wallis*** usou ***s*** e ***σ***, **Albert Girard** usou ***sec*** escrito por cima do ângulo como ele fez para ***tan.***

8. A Influência do Conhecimento Árabe sobre os Europeus

Diversos dos astrônomos árabes se deslocaram para a Espanha para trabalhar e passaram a difundir o saber. Os mais importantes escritores foram os astrônomos **Ibrâhim ibn Yahyâ al Naqqâsh,** (conhecido como Abû Ishâq ou Ibn Al-

Zarqâla ou, nas traduções latinas como Arzachel, e que viveu em Córdoba), autor de um conjunto de tábuas trigonométricas em 1050, jabir ibn Aflah (conhecido como jeber ibn Aphla, tendo vivido em Sevilha), cujos estudos astronômicos de 1145 se mostraram tão interessantes que, séculos mais tarde (1543), foram publicados em Nuremberg.

Fibonacci (1170-1250) foi o matemático europeu mais habilidoso do século XIII. Ele estudou no norte da África e depois viajou pelo Oriente como mercador, tendo com isso sofrido grande influência dos árabes. Sua obra *"Practica Geometriae",* de 1220, é uma aplicação da **Trigonometria** árabe na Agrimensura.

O rei **D. Alfonso X de Castela** ordenou, no ano 1250, a estudiosos (cristãos, mouros e judeus) de Toledo que traduzissem os livros de Astronomia e modernizassem as tábuas trigonométricas árabes. Em 1254 foram concluídas as ***Tábuas Afonsinas***, que junto com "*Os Libros Del Saber de Astronomia*", foram considerados de grande valia, uma vez que "*a cultura astronômica preservada na Península Ibérica foi o esteio da arte portuguesa de navegar, no século XV*" (Serrão, pág. 49, 1971).

9. A Trigonometria na Europa a partir do século XIV

Na Europa do século XIV alguns importantes passos foram dados para o desenvolvimento da Matemática. Pela primeira vez as noções de quantidades variáveis e de função são expressas e, tanto na Escola de Filosofia Natural do Merton College de Oxford quanto na Escola de Paris, chega-se à conclusão de que *a Matemática é o principal instrumento para o estudo dos fenômenos naturais*. Com o início do estudo da velocidade instantânea ou pontual e a atenção especial dada ao movimento, tornou-se necessário desenvolver um suporte matemático para ele.

Paralelamente ao desenvolvimento da **Trigonometria**, que já vinha ocorrendo na Europa desde o século XI com a retomada do conhecimento árabe, ocorreu o desenvolvimento das funções. Neste campo surgiu **Nicole Oresme** (1323-1382) com seu "*Treatise on the configuration of Qualities and Motions*", no qual introduziu a representação gráfica que explicita a noção de funcionalidade entre variáveis (no caso velocidade por tempo). Seu trabalho influenciou **Galileu** (1564-1642) e **Descartes** (1596-1650) nos século XVI e XVII. Com os estudos de **Oresme** começou a se consolidar o conceito de função.

No século XV, **Purbach**, na Inglaterra, retomou a obra de **Ptolomeu** e computou uma nova tábua de senos, muito difundida entre os estudiosos europeus. **Purbach** foi mestre de **Regiomontanus** (1436-1475), um dos maiores matemáticos do século XV, cujo trabalho teve grande importância, estabelecendo a Trigonometria como uma ciência independente da Astronomia.

Regiomontanus (**Johann Müller**) escreveu um "*Tratado dos triângulos*", em cinco livros, contendo uma trigonometria completa. A invenção posterior dos logaritmos e alguns dos teoremas demonstrados por **Napier** (1550-1617) mostram que a **Trigonometria** de **Regiomontanus** não diferia basicamente da que se faz hoje em dia. No "*Tratado*" ele calculou novas tábuas trigonométricas, aperfeiçoando a de senos de **Purbach**, e introduziu na **Trigonometria** europeia o uso das tangentes, incluindo-as em suas tábuas. Podemos dizer que foi ele quem lançou as fundações para os futuros trabalhos na Trigonometria plana e esférica.

Copérnico (1473-1543) também contribuiu ao completar, em 1520, alguns trabalhos **Regiomontanus**, que incluiu em um capítulo de seu "*De Lateribus et Angulis Triangulorum*", publicado separadamente por seu discípulo **Rhaeticus** (1514-1574) em 1542.

Com o advento da imprensa a cultura se difunde e, a partir daí, nenhum grupo nacional conserva a liderança. Na Antiguidade foi à Grécia ao sobrepujar os outros povos do Ocidente, na Idade Média, o Mundo Árabe mas, do século XV em diante, com o desenvolvimento do Racionalismo, a atividade matemática desloca-se repetidamente para diversos países europeus.

O primeiro trabalho impresso em **Trigonometria** provavelmente foi a *"Tabula Directionum"* de **Regiomontanus**, publicado em Nuremberg certamente antes de 1485, pois a segunda edição data desse ano, em Veneza.

As seis funções trigonométricas foram definidas como funções do ângulo, em vez de função do arco, e subentendidas como razões, pela primeira vez, no *"Canon Doctrinae Ttriangulorum"* de **Joachim Rhaeticus** em Leipzig, 1551, embora ele não tenha dado nomes para **seno, cosseno** ou **cossecante**, exceto **perpendiculum, basis** e **hypotenusa**.

Rhaeticus (1514-1576) retomou, um século depois, as tábuas de **Regiomontanus** de 1464, com maior rigor nos cálculos. Aumentou a precisão para onze casas decimais e os **senos**, **cossenos**, **tangentes** e **secantes** foram calculados de minuto em minuto para os arcos do primeiro quadrante, e de dez em dez segundo para o arco de

1º. Ele foi o primeiro a adotar a organização das tábuas em semi quadrantes, dando os valores dos **senos**, **cossenos** e **tangentes** de ângulos até 45º e completando a tabela com o uso da igualdade **sen x = cos** $\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. Deve-se também **Rhaeticus** a introdução das **secantes** na Trigonometria europeia e os cálculos do **sen (nθ)** em termos de **sen θ**, que foram retomados e aprimorados por **Jacques Bernoulli** (1654 – 1705), em 1702.

Neste relato histórico não poderíamos deixar de mencionar **Viéte** (1540-1603), pois foi ele quem adicionou um tratamento analítico à Trigonometria, em 1580. Foi o primeiro matemático a usar letras para representar coeficientes gerais, o que representou grande progresso no campo da Álgebra. Também construiu tábuas trigonométricas e calculou o **sen1’** com treze casas decimais.

Viéte iniciou o desenvolvimento sistemático do cálculo de medidas de lados e ângulos nos triângulos planos e esféricos, aproximados até minutos, e com a ajuda de todas as seis funções trigonométricas. Além disso, foi ele quem introduziu métodos gerais de resolução em matemática. É dele a ideia de decompor em triângulos retângulos os triângulos oblíquos, para determinar todas as medidas dos seus lados e ângulos. Isto está em sua obra “*Canon Mathematicus*”.

No livro “*variorum de rebus mathematicis*” aparece um equivalente da nossa lei das tangentes: $\frac{tg(A+B)}{tg(A-B)} = \frac{a+b}{a-b}$ com **A** e **B** ângulos e **a** e **b** os arcos respectivos. Na verdade, esta relação só foi publicada pelo matemático dinamarquês **Thomas Fincke** (1561–1656), no seu “*Geometria Rotundi*”, em Basel 1583, apesar de ser devida a **Viéte**.

A próxima figura notável na **Trigonometria** foi **Pitiscus** (1561-1613) que publicou um tratado, em 1595, no qual corrigiu as tábuas de **Rhaeticus** e modernizou o tratamento do assunto. A palavra **trigonometria** aparece pela primeira vez, como título de um livro seu.

Seguindo **Pitiscus** destacamos o britânico **Napier**, que estabeleceu regras para triângulos esféricos, que foram amplamente aceitas, enquanto sua maior contribuição, os logaritmos, ainda estava sendo analisados e não eram reconhecidos como válidos por todos. Suas considerações sobre os triângulos esféricos foram publicadas postumamente no **“*Napier Analogies*”**, do **“*Constructio*”** no ano de 1619, em Edinburgh.

Outro grande expoente em **Trigonometria** foi **Oughtred** (1575-1660). Em seu trabalho de 1657 preocupou-se em desenvolvê-la do ponto de vista simbólico. No entanto, como o simbolismo algébrico estava pouco avançado para tornar isto possível, a ideia não foi aceita até que **Euler** (1707-1783) exercesse sua influência neste sentido no século XVIII.

John Newton (1622-1678) publicou em, 1658, o tratado "*Trigonometria Britannica*" que, embora baseado nos trabalhos de **Gellibrand** e outros escritores, era o mais completo livro do tipo que havia surgido em seu tempo. **Newton** e **Gellibrand** anteciparam a tendência atual de introduzir divisões centesimais do ângulo nas tábuas trigonométricas.

O próximo importante passo em **Trigonometria** foi dado pelo matemático **John Wallis** (1616-1703) ao expressar fórmulas usando equações em vez de proporções e por trabalhar com séries infinitas.

Sir Isaac Newton (1642-1727) também deu sua contribuição à **Trigonometria**, pois, paralelamente aos seus estudos de cálculo infinitesimal apoiados fortemente na Geometria do movimento, trabalhou com séries infinitas, tendo expandido **arc sen x** em séries e, por reversão, deduzido a série para **sen x**. Além disso, comunicou a **Leibniz** (1646-1716) a fórmula geral para **sen (nx)** e **cos (nx)** tendo, com isso, aberto a perspectiva para o **sen x** e **cos x** surgirem como números e não como grandezas, sendo **Kastner** (1719-1800), em 1759, o primeiro matemático a definir as funções trigonométricas de números puros.

Finalizando, vale mencionar que **Thomas-Fanten de Lagny** (1660-1734) foi o primeiro matemático a evidenciar a **peridiocidade** das funções trigonométricas , em 1710, e a usar a palavra "*goniometry*", em 1724, embora mais num sentido etimológico do que como medida de ângulo, como agora é o caso.

10. Trigonometria na Idade Média

A Idade Média foi um período da história em que a Igreja exerceu fortíssima influência no sentido de reger a vida do povo europeu. Em relação às ciências, a Igreja foi um tanto radical em reprimir avanços, pois se justificavam que a ciência e a religião eram entidades opostas. Por isso esse período ficou pejorativamente conhecido por ***"Idade das Trevas"***. Apenas os monges católicos e uns poucos leigos cultos preservaram um tênue fio de saber grego e latino (Eves, 1997).

Gerber (950-1003), que nasceu em Alvergne na França, foi um dos primeiros cristãos a estudar em uma escola muçulmana. Nesse período que lá estudou, ele revelou talentos pouco comuns e ficou creditada a ele a introdução dos algarismos indo-arábicos sem o zero.

Após a época de **Gerber**, esse período ficou conhecido como período da transmissão, no qual o saber grego, que preservado pelos muçulmanos, foi transmitido para os europeus de duas maneiras básicas, que foram as traduções feitas por intelectuais cristãos das obras escritas pelos povos antigos e pelas relações comerciais mantidas entre a Europa Ocidental e o mundo árabe.

As traduções eram feitas frequentemente de obras do árabe para o latim, do hebreu para o latim, do árabe para o hebreu e do grego para o latim. Dentre os tradutores mais importantes pode-se destacar inicialmente o monge inglês **Adelardo de Bath** (1120). A ele são atribuídas traduções latinas dos *"Elementos de Euclides"* e das tábuas astronômicas de **AL-Khowarismi**. **Platão de Tivoli** (1120) traduziu a Geometria de **AL-Battani**, a **Esférica de Teodósio**. E quiçá o maior de todos os tradutores da idade média, **Gerardo de Cremona** (1114-1187) que foi o responsável direto, mas não exclusivo, pois contava com a ajuda de membros de Escola de Tradutores que foi fundada pelo arcebispo **Dom Raimundo** após a queda de **Toledo**, pela tradução de mais de noventa obras árabes para o latim, entre eles o **Almagesto de Ptolomeu, "Os Elementos de Euclides"** e toda álgebra de **AL-Khowarismi**.

Veneza, Gênova, Milão, Pisa, dentre outras cidades da península Itálica foram pioneiras nas relações de comércio com o mundo árabe devido a sua localização geográfica que propiciava as navegações. A partir dessas relações comerciais, os mercadores europeus tiveram contato com conhecimentos matemáticos árabes e tiveram uma função muito importante de disseminadores da Matemática árabe na Europa.

No século XV, o matemático **Johannes Muller (Regiomontanus)** escreveu a obra ***"De Triangulis Omnimodis Librei Quinque"***, que definitivamente desvincula a Trigonometria da Astronomia, trazendo outras aplicações para a mesma.

Mais tarde surgiu **Françoise Viéte** (1540-1603), um matemático francês ao qual foi atribuído o título de pai da **Trigonometria Analítica** por ter sido o responsável direto por considerar definitivamente a Trigonometria como um ramo da Matemática. Em 1579, **Viéte** escreveu a obra *"Canon Mathematicus"*, contendo várias e extensas tabelas das seis relações trigonométricas já consolidadas desde o período dos árabes, porém, utilizando frações decimais, e não sexagesimais como propostas pelos árabes.

11. Conclusão

Em pesquisas para a fundamentação desse trabalho, verificamos que, alguns estudiosos utilizam e recomendam a história da Matemática como um valioso recurso para o processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Eles afirmam que o contato com a mesma pode ser uma forma bastante interessante para introduzir um determinado tema em sala de aula.

Existe uma citação de Ubiratan D'Ambrósio (1999, apud Bicud, 1999) que mostra a importância da história da matemática:

> "*As práticas educativas se fundam na cultura, em estilos de aprendizagem e nas tradições, e a história compreende o registro desses fundamentos. Portanto, é praticamente impossível discutir educação sem recorrer a esses e a interpretações dos mesmos. Isso é igualmente verdade ao se fazer ensino de várias disciplinas. Em especial da Matemática, cujas raízes se confundem com a história da humanidade".*

É bem verdade que, a História da Matemática encontra-se ausente da sala de aula, principalmente, no ensino médio, o que em nossa opinião precisa mudar. Em paralelo tal atitude deve ser adotada também pelos livros didáticos.

No ensino da Trigonometria, utilizando essa ferramenta, o professor poderá desenvolver atitudes e valores positivos frente ao conhecimento. O aluno perceberá que a Trigonometria é uma criação humana, que surgiu a partir das necessidades de resolver problemas do cotidiano, conhecerá as preocupações dos vários povos em diferentes momentos históricos, identificando sua utilização em cada um deles, e estabelecerá comparações entre os conceitos e processos trigonométricos do passado e do presente. Através da história da Trigonometria é possível perceber que essa área da Matemática percorreu um longo caminho na história da humanidade, passando por várias fases de seu processo evolutivo.

Outra grande importância de se trabalhar a história da Trigonometria em sala de aula, é que ela servirá para responder, de forma simples, muitas perguntas que surgem no dia a dia dos professores, tais como: "Pra que serve esse conteúdo?"; "Onde vou usar isso?", dentre outras.

Na produção desse trabalho deu para perceber que, apesar da importância, poucos profissionais se empenham em trabalhar com história da Trigonometria. Nos trabalhos dos cursos de especialização e graduação, do Departamento de Matemática – CCT – UEPB, do período de 2003 ao período de 2011, que usam os estudos da Trigonometria como tema, pouco se aborda de tal assunto, tendo um aumento considerável nos últimos anos.

12. Gráficos

Os gráficos abaixo mostram os resultados estatísticos do levantamento feito nos trabalhos dos cursos de especialização e graduação do Departamento de Matemática. Nos gráficos de barras, estão os resultados da quantidade de páginas que abordam a história da trigonometria, muitas dessas páginas que entram na contagem, das páginas da história da trigonometria, não esta escrita à página toda, há delas com menos de meia página escrita, para um melhor resultado foram consideradas como uma página toda. O gráfico de pizza mostra, quantos trabalhos tem ao menos uma página com história da trigonometria.

Conteúdo Específico X História da Trigonometria

Quantidade de Trabalhos	17																
Conteúdos Específicos (Nº de Páginas)	48	66	40	31	38	44	57	53	63	63	35	86	46	30	33	36	43
História (Nº de Páginas)	0	0	0	13	1	0	0	5	1	12	6	0	0	4	1	1	0

Tabela 1

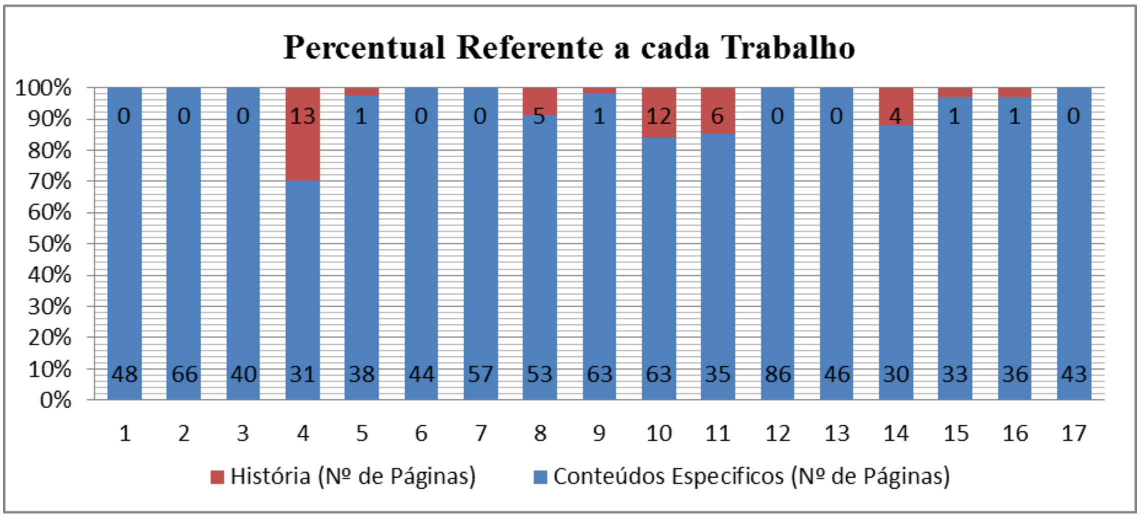


Gráfico1: Tabela 1

Quantidade de Trabalhos	17																
Conteúdos Específicos (Nº de Páginas)	48	25	43	68	51	71	43	34	60	55	53	54	56	40	78	46	38
História (Nº de Páginas)	1	2	6	6	1	5	2	1	7	0	2	0	1	5	0	0	1

Tabela 2

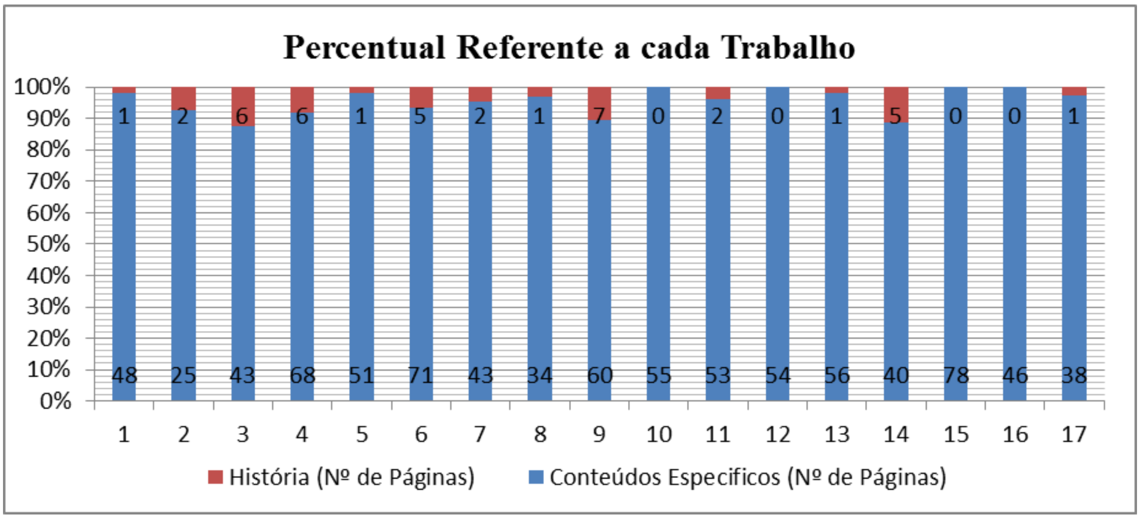


Gráfico 2: Tabela 2

Conteúdos Específicos X História da Trigonometria

Quantidade de Trabalhos	17																
Conteúdos Específicos (Nº de Páginas)	34	48	52	67	57	49	39	42	49	67	55	42	49	59	20	47	74
História (Nº de Páginas)	0	4	3	0	2	0	6	0	1	0	1	0	2	0	4	5	10

Tabela 3

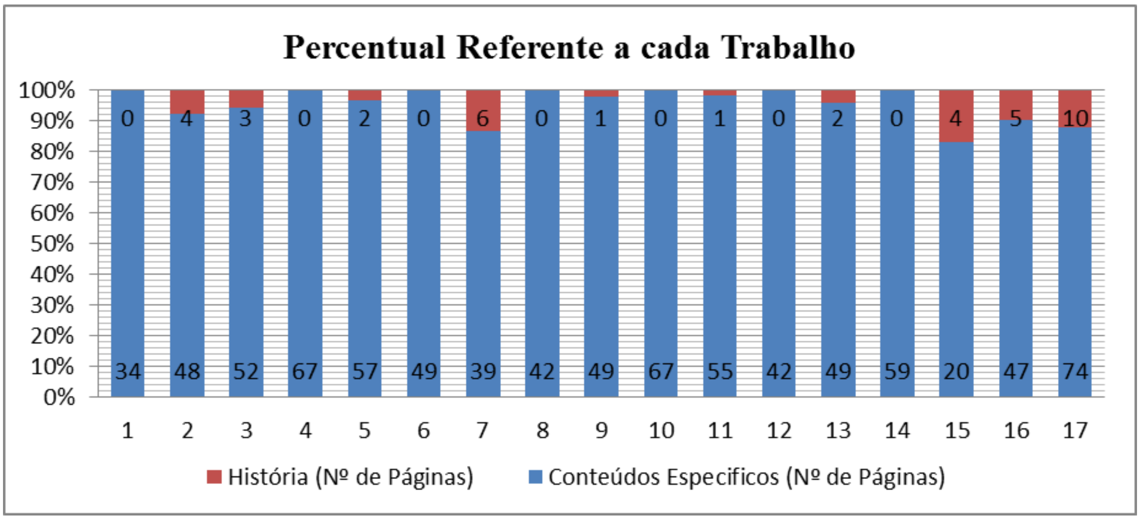


Gráfico 3: Tabela 3

Quantidade de Trabalhos	4																
Conteúdos Específicos (Nº de Páginas)	54	34	45	40													
História (Nº de Páginas)	3	8	0	0													

Tabela 4

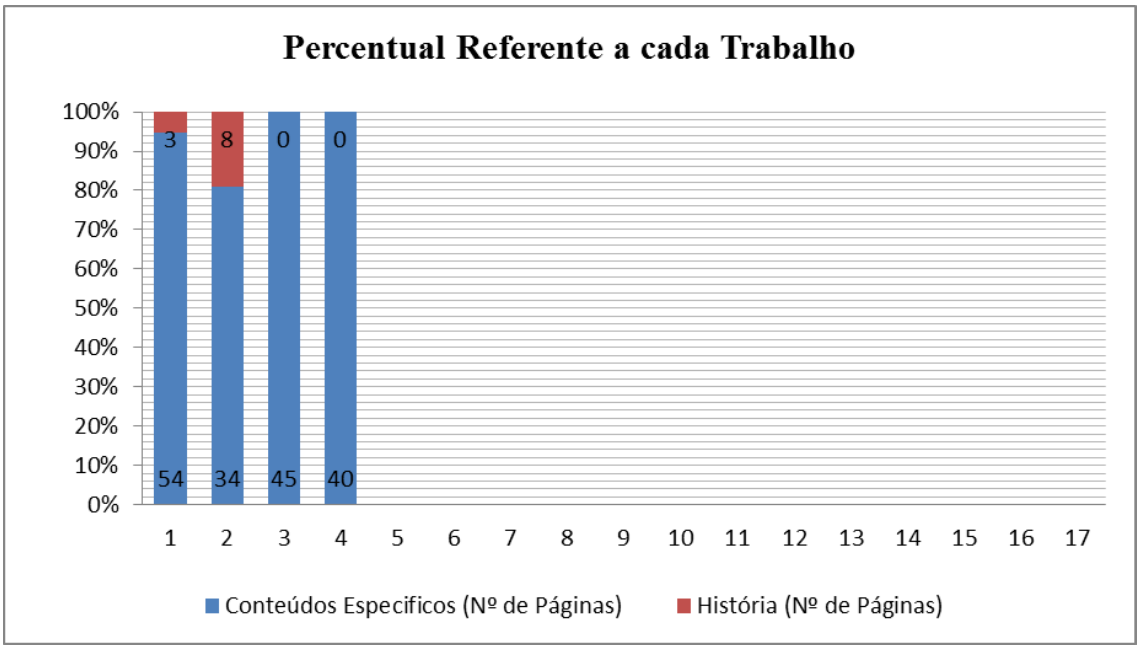


Gráfico 4: Tabela 4

Conteúdos Específicos X Conteúdos Específicos e História

	Conteúdos Específicos	Conteúdos Específicos e História
Total de Trabalhos	21	34

Tabela 5

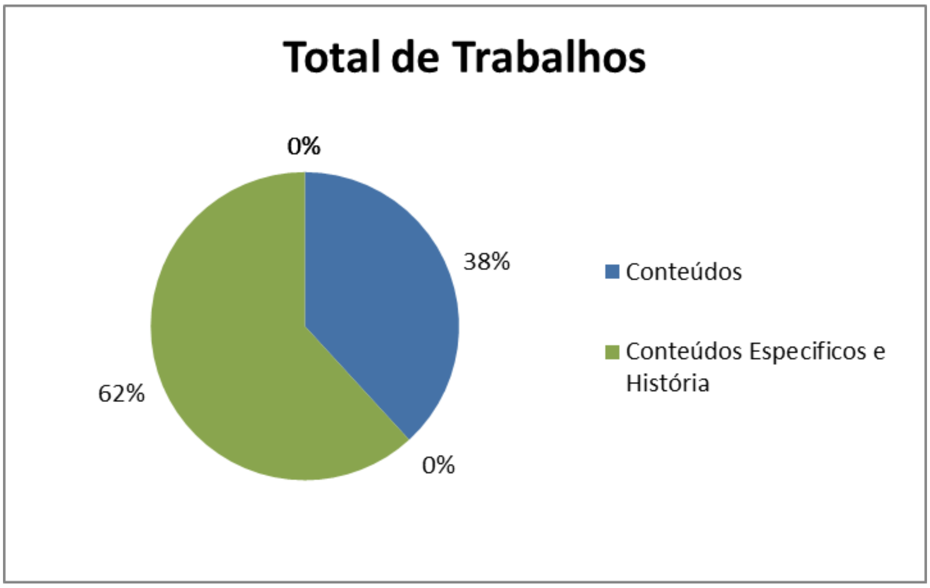


Gráfico 5: Tabela 5

13. Referências Bibliográficas

- Boyer, Carl B. História da matemática, Carl B. Boyer, revista por Uta C. Merzbach; Tradução Elza F. Gomide – 2ª ed. - - São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

- Eves, Howard. Ev 28i Introdução à história da matemática / Howard Eves; tradução: Hygino H. Domingues – Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004. Tradução de: An introduction to the history of mathematics.

- http://garimpandopalavras.blogspot.com/2009/12/opiniao-professor-destaca-importancia.html

- http://www.sbmac.org.br/eventos/cnmac/cd_xxvii_cnmac/cd_cnmac/files_pdf/10494a.pdf

- **Trabalhos, sobre Trigonometria, produzidos nos cursos de especialização e graduação do Departamento de Matemática do CCT – UEPB.**

14. Anexos

À guisa de apresentação: Do Matemático enquanto filósofo e místico

Edmundo de Oliveira Gaudêncio (*)

Sempre pensei que o matemático é o filósofo cuja matéria de reflexão é o numeral. Faço tal afirmativa pensando em Pitágoras de Samos, o filósofo pré-socrático para quem Matemática e Filosofia eram a mesma coisa.

Nascido na cidade de Samos, na Grécia, em 580 e falecido em 497 a.C., Pitágoras foi místico, astrônomo, filósofo e matemático. Descobriu o Teorema de Pitágoras (“o quadrado da hipotenusa é a soma dos quadrados dos catetos”), propôs que a terra era redonda e o sol ocupava o centro do universo, aceitando que o mesmo era regido por uma inteligência superior, o Grande Arquiteto do Universo. Propondo as premissas do Atomismo Numérico, afirmava que os numerais eram a melhor expressão da Razão Absoluta. Foi ele quem disse:

“O homem é mortal por seus temores e imortal por seus desejos”;

“Em estado de dúvida, suspende o juízo”;

“As palavras são os suspiros da alma”; e

“O universo é uma harmonia de contrários”.

Para ele, o número privilegiado era o 3, consubstanciado no triangulo, do grego trígonos, de onde Trigonometria, “medir triângulos”, ou seja, trabalho de matemático – o qual em tudo descobre triângulos: tarefa de filósofo.

Quanto a mim, não sendo matemático, não sei medir triângulos. E mesmo não sendo filosofo, gosto, sim, de pensar o triângulo. Atente para isto: Em certas crenças religiosas, simbolize-se Deus através de um triângulo, uma vez que seu nome é impronunciável. Em vários sistemas filósofos, os três lados de um triângulo equilátero simbolizam o Pensar Bem – o Dizer Bem – o Fazer Bem; ou, também, Sabedoria – Força – Beleza; Nascimento – Maturidade – Morte; ou, ainda: Mente Perfeita – Fala Perfeita – Corpo Perfeito. Nesses preceitos religiosos e filosóficos, o triangulo equilátero de vértice para cima representa Deus e, invertido, o homem, encontrando-se, o perfeito equilíbrio, na justaposição desses dois triângulos, o manifesto como expressão do não-manifesto, tal como no signo-salomão.

De há muito tempo venho cogitando sobre o número, sempre pensando na semelhança entre o matemático e o filósofo, até Leszek Kolakowsky, filósofo polonês contemporâneo, me apontou as similitudes entre o místico e o matemático representam as duas faces de um mesmo fenômeno, o desejo de conhecimento do sagrado e desvendamento do Insondável. Não é à toa que matemáticos e místicos vivam no mundo da lua...

Mas, afinal, para que toda esta longa conversa sobre Matemática e Filosofia? Explico-me, caro leitor:

Primeira, confesso, nada sei de Matemática ou de Filosofia; segunda parafraseando Santo Agostinho acerca do que ele fala sobre o tempo, digo o mesmo sobre o número: se você não me pergunta o que é, sei o que seja; mas não o sei, completamente, se você me pergunta o que é o número. Sei usá-lo, mas não sei o que seja. E, terceira: Somente falei de numerais com o único objetivo de apresentar este livro sobre números. Assim, mais uma vez lembrando Pitágoras de Samos, “O homem é a medida de todas as coisas”, recomendo: Leia a obra e aumento as suas medidas.

(*)-Médico-psiquiatra, Mestre e Doutor em Sociologia. Professor da Universidade Estadual da Paraíba, da Universidade Federal de Campina Grande e da Faculdade de Ciências Médicas de Campina Grande-PB.

- **Trabalhos produzidos nos cursos de especialização e graduação do Departamento de Matemática do CCT – UEPB.**

"Por questão de respeito e ética, serão citadas só as siglas iniciais dos nomes dos autores e o ano da produção." (Ex: **D**iego **D**ias **F**elix **2011 --- D.D.F. (2011)**).

Especialização:

L.M., V.D.M., U.M.C. ( ); L.C. (2004); C.S.P (2004); J.F.S.F., A.S.M. (2007); D.B.S. (2004); R.C.O.R.(2004); I.B.S. (2004); N.I. (2004); B.C.T. (2004); R.C.S., W.A.B., J.N. (2004); A.S.F.S. (2004); K.M.C. (2004), V.L.A.C. (2004); L.F.L.B., F.S.B., R.F.S. (2007); J.A.R.P. (2004); C.M.P.A (2004); M.G.C. (2004); M.C.Q. ( ); Q.C.R., K.M.C., A.A.M., M.L.C., V.L.A.C., C.S.P. ( ); J.K.P.S. (2004); L.A.R. (2004); E.N.S. (2004); E.F.S.L. (2003); K.M.V., L.B.S., S.O.C. (2007); A.S. ( ); A.S. (2003); J.A.F. (2004); G.C.R. (2004); N.M.B. (2003); G.R.D. (2004); A.F.M., R.C.S., S.S.R. (2007); E.A.A.S. (2004); J.R.L.S. (2003); C.C.P.G., M.P.S. ( ); Y.A.S. ( ); S.B.M. (2004); H.G.P.R. (2004); A.P.R., D.B.S., S.D.O., B.C.T., L.C.N., C.M.P.A., M.G.C. ( ); M.L.S.A., M.M.L. (2007); F.O.D. (2004); M.J.R.C., R.F.B., S.L.M. (2007); M.A.O. (2004); R.S.C., J.L.S., A.F.R. (2007); J.L.S. ( ); A.M.G.A. (2004); J.R.C.J. (2003); J.W.A.F., M.B.L. ( ); M.R.G.L. (2004); F.J.F.O. (2003); R.C.S.D. (2004).

Graduação:

I.A.S. (2003); J.F.S. (2005); S.S.L. (2006); J.F.S.O. (2006).