UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA

CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

JOSÉ RAILTON DA SILVA DANTAS

APLICAÇÃO DE “MÁXIMOS E MÍNIMOS” NA OBTENÇÃO DE ÁREAS DE FIGURAS PLANAS

Campina Grande/PB

Novembro/2011

JOSÉ RAILTON DA SILVA DANTAS

APLICAÇÃO DE "MÁXIMOS E MÍNIMOS" NA OBTENÇÃO DE ÁREAS DE FIGURAS PLANAS

Trabalho de Conclusão do Curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba.
Em cumprimento às exigências para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Ms. Fernando Luiz Tavares da Silva

Campina Grande, novembro de 2011

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL – UEPB

D235a Dantas, José Railton da Silva.

Aplicação de “máximos e mínimos” na obtenção de áreas de figuras planas [manuscrito] / José Railton da Silva Dantas. – 2011.

38 f. : il.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) – Centro de Ciências Tecnológicas, 2011.

“Orientação: Prof. Me. Fernando Luiz Tavares da Silva, Departamento de Matemática e Estatística”.

1. Matemática - Aplicações. 2. Função. 3. Máximos e Mínimos. I. Título.

21. ed. CDD 516

JOSÉ RAILTON DA SILVA DANTAS

APLICAÇÃO DE "MÁXIMOS E MÍNIMOS" NA OBTENÇÃO DE ÁREAS DE FIGURAS PLANAS

Aprovada em 29 / 11 / 2011

BANCA EXAMINADORA

Fernando Luiz Tavares da Silva

Prof. Ms. Fernando Luiz Tavares da Silva
Departamento de Matemática – CCT/UEPB
Orientador

Onildo dos Reis Freire

Prof. Ms. Onildo dos Reis Freire
Departamento de Matemática – CCT/UEPB
Examinador

Kátia Suzana Medeiros Graciano

Prof. Ms. Kátia Suzana Medeiros Graciano
Departamento de Matemática – CCT/UEPB
Examinador

Campina Grande, novembro de 2011

DEDICATÓRIA

Dedico aos meus pais, a Rodrigo, Raquel, Renata, Rubiana, e aos meus amigos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por cada dia que Ele renovou as minhas forças e me manteve em fé;

A minha família pelo incentivo e apoio durante o curso;

Ao Prof. Ms. Fernando Luiz pela orientação;

Aos meus colegas de turma: Carlos, Diego, Gilvânia, Irineu, Isabeli, Kleber, Micheli e Rossane pelo incentivo.

RESUMO

Apresentaremos relatos da História da Matemática, em que iremos mostrar alguns dos fatos ocorridos no desenvolvimento da Matemática como Ciência, e que teve como meio grandes matemáticos. Iremos destacar alguns deles, bem como algumas de suas descobertas.

Falaremos sobre o Cálculo Diferencial, destacando o conceito de Derivadas, e Máximos e Mínimos de funções. Trataremos estes conceitos com maior ênfase, visando a sua utilização no item das Aplicações.

Nas aplicações abordaremos questões, as quais se encontram resolvidas, relacionadas a problemas de Máximos e Mínimos no cálculo de áreas de figuras planas. No entanto, além da utilização de conhecimentos do Cálculo faremos uso de conteúdos relacionados a Geometria Plana e Espacial no desenvolvimento dessas questões.

Palavras Chaves: História; Matemáticos; Derivada; Funções; Máximos; Mínimos.

SUMÁRIO

1.0 INTRODUÇÃO

Iremos relatar fatos sobre a História da Matemática, falaremos sobre Derivadas, Máximos e Mínimos de Funções e apresentaremos algumas aplicações.

Ao descrevermos sobre a História da Matemática, nos preocuparemos em comentar sobre alguns matemáticos, como Pitágoras, Euclides, os Bernoullins, entre outros. Destacaremos algumas das contribuições deixadas por estes matemáticos, como a descoberta dos segmentos incomensuráveis, a Regra de L'Hospital, entre outras..

Na abordagem sobre Derivadas, será visto o seu conceito e algumas regras de derivação. Ao tratarmos sobre Máximos e Mínimos de Funções, buscamos analisar os extremos do gráfico da função utilizando conceitos do Cálculo Diferencial.

No item das aplicações, trazemos alguns exercícios resolvidos. Estes exercícios foram resolvidos utilizando-se conceitos do Cálculo Diferencial, e também usamos nas resoluções conhecimentos da Geometria Plana e Espacial.

2.0 HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Segundo documentos históricos, acredita-se que os nossos antepassados, há pelo menos 50.000 anos já possuíam a ideia de contagem. Existem alguns animais que em quantidades pequenas possuem a capacidade de contar (o senso numérico). Inicialmente o ser humano possuía apenas o senso numérico. Com o desenvolvimento da agricultura e da sociedade este ser sentiu a necessidade de representar aquilo que eles contavam, utilizando para tal, o princípio da correspondência biunívoca, associando números de determinados objetos a seus rebanhos, traços em barras, pedras, nós em cordas, e até mesmo dobrando os dedos.

2.1 A Matemática no Oriente Antigo

As margens dos rios Nilo na África, o Tigre e o Eufrates na Ásia Ocidental, antigas civilizações desenvolveram uma vida social, onde se destacavam por suas atividades agrícolas, bem como pelo desenvolvimento de sua arquitetura. Surge assim a necessidade de desenvolver um sistema de pesos e medidas, que seriam utilizados na comercialização de suas colheitas, e nos seus projetos de edificações, transportes, etc.

Na Matemática das civilizações do Oriente Antigo, não é possível encontrarmos exemplos de demonstrações. Existem exemplos de determinadas equações que são resolvidas passo a passo, não apresentando, no entanto, uma maneira geral de resolver equações.

Os escritos matemáticos podem ser encontrados em tábuas de argilas, pedras, papiros; alguns povos como os chineses e indianos fizeram seus escritos em casca de árvores e bambu.

2.2 A Matemática Pitagórica

Nos anos finais do segundo milênio a.C. ocorreram mudanças de ordem política e econômica em toda sociedade; também ocorreram mudanças na maneira de “ver a

Matemática", passou-se a questionar de onde haviam surgido os conhecimentos matemáticos e porque foram aceitos.

Uma das fontes de informação a respeito da matemática grega é o *Sumário Eudemiano* de Proclo. O documento comenta o desenvolvimento da matemática grega até a época de Euclides. Com o passar do tempo, muitos dos documentos que serviram como fonte de pesquisa para Proclo, desapareceram. Pitágoras é um dos matemáticos ao qual o documento faz referência.

A respeito da vida de Pitágoras pouco se sabe, provavelmente nasceu em 572 a.C. na Ilha Egéia de Samos. Pitágoras foi o fundador da escola pitagórica, que ensinava Filosofia, Matemática e Ciências Naturais, atuando também como uma irmandade unida por ritos secretos e cerimônias. Os ensinamentos da escola eram transmitidos de forma oral e todas as descobertas eram atribuídas a Pitágoras. Possivelmente Pitágoras foi o primeiro matemático a demonstrar o Teorema de Pitágoras, os babilônios antigos já conheciam este teorema.

2.3 Algumas das descobertas pitagóricas

Os *números amigáveis*, Jâmblico (320 d.C.) concedeu a Pitágoras a descoberta desses números. Chama-se de números amigáveis se cada um deles é igual à soma dos divisores próprios do outro, por exemplo, 284 e 220. Observe que os divisores próprios de 284 são: 1, 2, 4, 71 e 142, somando-se estes divisores, $1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220$. Os divisores próprios de 220 são: 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 e 110, somando-os $1 + 2 + + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284$.

Números perfeitos - Quando um número é igual à soma de seus divisores próprios, por exemplo, o número 6, possui os divisores próprios 1, 2 e 3, somando-os $1 + 2 + 3 = 6$, assim satisfaz a definição de *números perfeitos*.

Números deficientes – O número é maior que à soma de seus divisores próprios, por exemplo, o número 8, que tem os seguintes divisores próprios 1, 2 e 4, somando-os temos $1 + 2 + 4 = 7$.

Números abundantes – O número é menor que à soma de seus divisores próprios, por exemplo, o número 30, onde seus divisores próprios são 1, 2, 3, 5, 6, 10 e 15, somando-os temos $1 + 2 + 3 + 5 + 6 + 10 + 15 = 42$;

Não há concordância quanto à descoberta desses números serem atribuída a Pitágoras. Há sim, concordância que os números figurados seguintes foram descobertos pelos membros que iniciaram a escola. Os números figurados são:

Os *números triangulares*, por exemplo, 3, 6 e 10; os *números quadrados*, por exemplo, 1, 9 e 16; e os *números pentagonais*, por exemplo, 5, 12 e 22.

2.4 Grandezas Irracionais

Os homens em seu hábito de contagem de diversas coleções entendem que os números inteiros foram abstrações desse fato. Logo com as necessidades do cotidiano, esses números foram incapazes de satisfazê-las, surgindo daí os números racionais definidos pela razão p/q, onde p e q são números inteiros e $q \neq 0$.

Os números racionais são representados em uma reta numérica, o que por algum tempo acreditava-se que para cada número havia um ponto na reta que o representava, porém aos poucos se descobriu que existiam números que não possuíam essa propriedade. Os números irracionais. Esta descoberta perturbou os pitagóricos, pois acreditavam que tudo poderia ser representado pelos números inteiros e que qualquer grandeza poderia ser representada pelos números racionas. Durante algum tempo tentaram manter em sigilo a descoberta desses números, pois a descoberta deles tornava inválida a teoria pitagorica das proporções.

Os segmentos de reta que não possuem uma unidade de medida comum, ou seja, são representados por um número irracional, são chamados de segmentos *incomensuráveis*.

2.5 Euclides de Alexandrina

Euclides é o autor de uma das obras mais utilizadas em estudos matemáticos, *Os Elementos*. Ele foi o fundador da escola de matemática de Alexandrina. Entre as obras escritas por Euclides, as que sobreviveram até aos dias de hoje são: *Os Elementos e Ópticas*. Ele dedicou-se ao ensinamento da matemática, não existindo, no entanto, descobertas matemáticas atribuídas a ele.

Os Elementos engloba de forma introdutória toda à matemática elementar e possui treze capítulos que são divididos da seguinte forma: os seis primeiros capítulos são sobre

Geometria Plana, os três capítulos seguintes são dedicados à Teoria dos Números, o décimo fala sobre os números *incomensuráveis* e os três últimos sobre Geometria Espacial. Acredita-se que *Os Elementos* é resultado de uma organização de trabalhos anteriores, mas também apresentam de forma pioneira, diversas demonstrações. Este livro foi a primeira obra matemática a ser impressa.

2.6 O matemático René Descartes

René Descartes (1596-1650) estudou matemática e contemplações filosóficas. Os momentos de descanso deste matemático eram tidos como os mais produtivos. Descartes foi um dos estudiosos que contribuiu para o desenvolvimento da Geometria Analítica, descrevendo princípios da geometria algébrica, classificando curvas, resolvendo equações de grau maior que três, utilizando a regra dos sinais de Descartes, hoje assim chamada. Foi ele que convencionou o uso de letras minúsculas do nosso alfabeto para a representação de constantes, e das maiúsculas para a representação das variáveis; a notação de potência atual também é atribuída a ele.

Em "La Géometrie", à Geometria Analítica, foi relatada no último capítulo deste livro, onde Descartes propôs uma ideia simples de que um ponto de um plano possui sua posição determinada por um par de números reais. O sistema de dois eixos, o qual é chamado de sistema cartesiano, é uma homenagem a Descartes.

2.7 A família Bernoulli

Temos nos membros da família Bernoulli, destaques na Física e na Matemática, tendo aproximadamente 12 dos membros desta família deixado descobertas em uma dessas ciências. **Jacques Bernoulli (1654-1705)** foi o pioneiro da família a apresentar destaque na Matemática, mostrando interesse pelo conhecimento dos infinitésimos, e por séries infinitas. **Jean Bernoulli (1667-1748),** durante o período de 1691-1692 escreveu dois livros relatando sobre o Cálculo Diferencial e o Integral. Em 1692 ao encontrar-se com **L' Hôpital (1661-1704)** fizeram um pacto, este último lhe pagava um salário e Jean, à medida que fosse fazendo descobertas matemáticas às enviaria à L' Hôpital. Essa troca de informações levou Jean a descobrir que de posse de duas funções f(x) e g(x), diferenciáveis em um determinado ponto x = a tais que f(a) = 0 e g(a) = 0 e

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Portanto,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Esta regra a qual conhecemos como a Regra de L' Hôpital, faz parte do primeiro livro didático de Cálculo, *Analyse des infiniment petits*, o qual foi publicado em 1696 na cidade de Paris.

2.8 Cavalieri e os Indivisíveis

Nascido em 1598 na cidade de Milão, Bonaventura Cavalieri deixou diversas obras, que abrangiam assuntos relacionados à matemática tais como: óptica e astronomia, mas, a sua grande contribuição para a matemática, deu-se no tratado Geometria Indivisibilibus o qual foi publicado em 1635. É nesse trabalho que ele relata sobre o método dos *indivisíveis*. O conceito de indivisível para Cavalieri era bastante abrangente. Para uma proporção plana o seu indivisível seria uma corda, e quanto a um sólido seria uma secção do sólido. Assim o plano e o sólido são formados por infinidades de cordas paralelas e secções paralelas respectivamente.

Apresentaremos os princípios de Cavalieri, como etapas importantes para a aplicação do cálculo no estudo de áreas e volumes.

- "Se duas porções planas são tais que toda reta secante a elas e paralela a uma dada reta determina nas porções segmentos de reta cuja razão é constante, então a razão entre as áreas dessas porções é a mesma constante."
- "Se dois sólidos são tais que todo plano secante a eles e paralelo a um plano dado determina nos sólidos, secções cuja razão é constante, então a razão entre os volumes desses sólidos é a mesma constante" [Eves, 2004].

2.9 O Cálculo

Historicamente a origem do Cálculo está voltada para o cálculo de áreas, volumes e comprimentos de arcos, que foram abordados a partir da suposição que uma determinada grandeza pode ser dividida indefinidamente (O método de Exaustão).

Inicialmente surgiu o Cálculo Integral, desenvolvendo-se a partir da necessidade de resolução de problemas envolvendo quadratura e cubagem. Os relacionados à quadratura visavam encontrar a área de uma região bidimensional, e os que tratavam sobre cubagem buscavam a determinação do volume exato de sólidos tridimensionais, que em sua maioria são limitados por superfícies curvas.

O matemático Antiphon (cerca de 430 a.C.) fez a alegação da quadratura do círculo, ou seja, o cálculo da área do círculo. O método utilizado foi à observação do círculo como uma sequência infinita de polígonos regulares inscritos, mas como o número de polígonos é infinito, isso tornava impossível encontrar o valor da área do círculo. Para atender o rigor matemático, na determinação da área dessa figura ele deveria ter utilizado a noção de limite, no entanto só no século XIX é que o conceito de limite foi introduzido formalmente por Cauchy, embora outros matemáticos, como Fermat já estivesse estudado sobre esse assunto. No entanto, eles não utilizavam uma notação apropriada. Mesmo assim Antiphon deu um passo para o estudo do método da exaustão, que se caracteriza pela aproximação de áreas de figuras. Arquimedes foi quem mais aproximou o método da exaustão à integração atual, ao abordar áreas e volumes, chegando a integrais definidas, conhecidas em textos elementares de cálculo.

Johann Kepler foi um dos primeiros europeus a utilizar infinitésimos em trabalhos de integração. Usou os procedimentos de integração para calcular áreas presentes na sua segunda lei de movimentos planetários, e em cálculo de volumes dos barris de vinhos.

No final do século XVII, foi iniciada a investigação por Isaque Newton e Gottfried Wilheel Leibniz sobre o estudo do Cálculo. Newton ao refletir sobre a área de uma região a qual seria limitada por uma curva e pelo eixo horizontal, que seria o eixo de uma variável, o extremo esquerdo era fixo já o direito poderia variar. Este método já havia sido estudado por James Gregory (1638-1675). Com esse estudo Newton aperfeiçoou algumas fórmulas de quadraturas que foram deixadas inacabadas por Wallis, e também contribuiu para que ele dedicasse estudos sobre o Teorema Fundamental do Cálculo. Com a utilização desse

Teorema, Newton desenvolveu algumas técnicas de integrais, técnicas essas que ainda são utilizadas atualmente, como por exemplo, os métodos de integração por partes e por substituição.

Inicialmente as integrais eram tidas como "inversas" das derivadas e a área de regiões era noção intuitiva.

O termo integral foi cunhado por um dos membros da família Bernoulli, em específico Johann Bernoulli (1667-1748), mas este não fez a sua publicação. Coube ao seu irmão mais velho Jakob Bernoulli (1654-1705) a publicação desse termo.

Os Gregos antigos em sua época já conheciam a reta tangente, que é caracterizada por ser uma reta que toca uma curva em um único ponto. A idéia de reta tangente fundamenta o aparecimento e descobrimento do Cálculo Diferencial. A introdução de símbolos algébricos para estudar a geometria das curvas, possibilitou o avanço dos estudos sobre derivada, e ao passar do tempo os métodos se tornaram cada vez mais algébricos, possibilitando o desenvolvimento de diversos conceitos do Cálculo como: funções, derivadas, integrais.

A primeira divulgação de forma entendível sobre diferenciação foi encontrada nos trabalhos de Fermat no ano de 1629. Fermat descobriu como traçar tangentes por um ponto de uma curva, e determinou tangentes de algumas curvas como a elipse, ciclóide, cissóide e folium de Descartes. Fermat foi responsável pela determinação de um método para determinar máximos e mínimos de funções, "ele encontrava geometricamente os pontos onde a reta tangente ao gráfico tinha inclinação zero, ou seja, buscava os pontos em que o coeficiente angular da reta tangente era nulo". A reta tangente também foi tema de estudo dos matemáticos Newton e Leibnitz.

3.0 DERIVADA

Consideremos a curva $y = f(x)$ definida em um intervalo (a, b).

Sejam $P(x_1, f(x_1))$ e $Q(x_2, f(x_2))$ pontos distintos da curva $y = f(x)$.

Seja r uma reta secante que passa por P e Q.

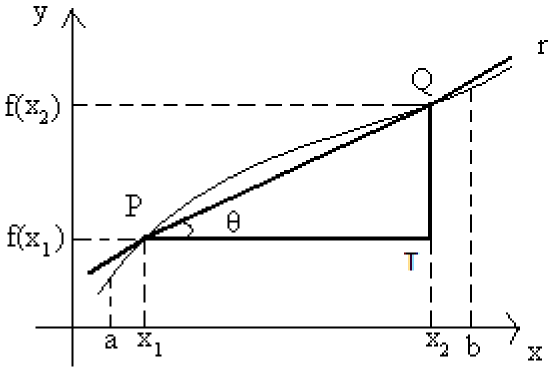


Figura 3.1

Consideremos o triângulo PQT retângulo, assim a inclinação da reta r é:

$$tg\theta = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Suponhamos agora que, mantendo P fixo e Q percorrendo a curva em direção ao ponto P. Com isso, a inclinação da reta r variará.

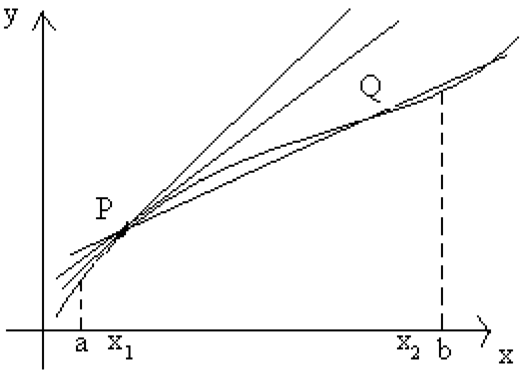


Figura 3.2

Quando o ponto Q tender ao ponto P a inclinação da reta secante a curva tenderá para um valor limite constante. Esse valor limite é chamado inclinação da reta tangente a curva no ponto P. Assim temos

$$\lim_{Q \to P} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

desde que o limite exista.

A inclinação da reta tangente a curva é igual à derivada da função no ponto, no caso x_1, conforme veremos a definição da derivada de uma função no ponto.

3.1 Derivada de uma função num ponto

Consideremos uma função f(x), e um ponto x_1, a derivada dessa função neste ponto denotaremos por $f'(x_1)$, e é definida por:

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

desde que o limite exista. Também podemos escrever este limite da seguinte forma

$$f'(x_1) = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

A derivada de uma função em um ponto só é possível se as derivadas laterais forem iguais. As derivadas laterais são definidas por:

Derivada a direita de f em x_1

$$f'_+(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1^+} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Derivada a esquerda de f em x_1

$$f'_-(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1^-} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Quando $f'_+(x_1) \neq f'_-(x_1)$ dizemos que este ponto é um ponto anguloso do gráfico da função.

3.2 Derivada de uma função

A derivada de uma função f(x) é denotada por $f'(x)$, tal que, seu valor para todo x pertencente ao domínio de f é dado por:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

se este limite existir.

Exemplo: Seja $f(x) = 1 - 4x^2$, calcule $f'(x)$.

Solução:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 - 4.(x + \Delta x)^2 - (1 - 4x^2)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 - 4.(x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2) - (1 - 4x^2)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 - 4x^2 - 8x\Delta x - 4\Delta x^2 - 1 + 4x^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-8x\Delta x - 4\Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(-8x - 4\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (-8x - 4\Delta x) = -8x$$

Portanto, $f'(x) = -8x$

Ao calcular derivada de uma função utilizando a definição é um processo longo. No entanto, apresentaremos a seguir algumas regras de derivação que tornam o processo mais rápido.

3.3 Algumas Regras de Derivação

As regras de derivação que apresentaremos a seguir serão essenciais para a resolução das aplicações no final do conteúdo.

I. **Derivada de uma constante**. Se c é uma constante e f(x) = c para todo x, então

$$f'(x) = 0$$

II. **Regra da Potência.** Se n é um número inteiro positivo e $f(x) = x^n$, então

$$f'(x) = n \,.\, x^{n-1}$$

III. **Derivada do produto de uma constante por uma função.** Sejam f uma função, c uma constante e g a função definida por $g(x) = c \,.\, f(x)$. Se $f'(x)$ existe, então

$$g'(x) = c \,.\, f'(x).$$

IV. **Derivada de uma soma**. Sejam f e g duas funções e h a função definida por h(x) = f(x) + g(x). Se $f'(x)$e $g'(x)$ existem, então

$$h'(x) = f'(x) + g'(x)$$

V. **Derivada do produto.** Sejam f e g funções e h a função definida por $h(x) = f(x) \,.\, g(x)$. Se $f'(x)$ e $g'(x)$ existem, então

$$h'(x) = f(x) \,.\, g'(x) + f'(x) \,.\, g(x)$$

VI. **Derivada de um quociente.** Sejam f e g funções e h a função definida por $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, onde $g(x) \neq 0$. Se $f'(x)$ e $g'(x)$ existem, então

$$h'(x) = \frac{g(x) \,.\, f'(x) - f(x) \,.\, g'(x)}{[g(x)]^2}$$

VII. **Derivada de função composta – Regra da Cadeia.** Se f e g são funções tais que a imagem de g está contida no domínio de f, então $f \circ g$ é derivável e $(f \circ g)'(x) = f'\big(g(x)\big).\, g'(x)$.

3.4 Derivadas Sucessivas

Conhecendo-se uma função f derivável em um determinado intervalo, então f' que é a sua derivada, se possuir derivada definida neste mesmo intervalo, podemos calcular a derivada de f'.

Definição. Seja f uma função derivável. Se f' também for derivável, então a sua derivada é chamada derivada segunda de f e é representada por f''.

Se f'' é uma função derivável, sua derivada, representada por $f'''(x)$, é chamada derivada terceira de f(x).

A derivada de ordem n de f, representada por $f^{(n)}(x)$, é obtida derivando-se a derivada de ordem $n - 1$ de f.

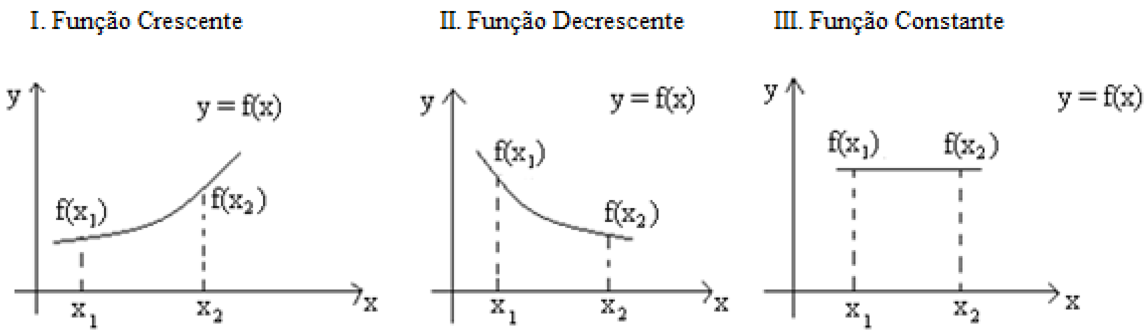
4.0 MÁXIMO E MÍNIMO DE FUNÇÕES

Ao ter contato com uma regra que determina uma função, e tenhamos possibilidade de visualizarmos o gráfico que a representa, ou tenhamos acesso apenas a este, perceberemos que diversos são os gráficos de funções que possuem características diferentes para determinados intervalos. Em alguns possui característica crescente até um determinado ponto, onde a partir dele começa a decrescer até atingir um valor mínimo de onde o gráfico volta a crescer novamente. Esse processo pode ocorrer por diversos intervalos nos quais entre dois máximos haverá sempre a interposição de um mínimo. O Cálculo Diferencial nos proporciona, conforme veremos, determinados critérios para a determinação desses máximos ou mínimos sem que haja a necessidade visual do gráfico que representa a função.

Definiremos a seguir quando uma função é crescente, decrescente ou constante.

Definição: Seja f uma função definida em um intervalo [a, b], e sejam x_1 e x_2 pertencentes a [a, b].

I. f é crescente em [a, b] se $f(x_1) < f(x_2)$ quando $x_1 < x_2$.
II. f é decrescente em [a, b] se $f(x_1) > f(x_2)$ quando $x_1 < x_2$.
III. f é constante em [a, b] se $f(x_1) = f(x_2)$ se $x_1 \neq x_2$ para todo x_1 e x_2.



4.1 Máximos e Mínimos Relativos

Apresentaremos a condição necessária para que uma função possua um extremo relativo em um determinado ponto. Consideremos uma função **f** e seja **c** pertencente ao **D(f).** Para que **f** venha ter um extremo relativo no ponto **c** deve-se ter:

$$\mathbf{f'(c) = 0} \text{ ou } \mathbf{f'(c)} \text{ não existe} \quad \text{(I)}$$

Quando (I) ocorre, o ponto **c** é chamado de ponto crítico. Assim a condição para que uma função venha a possuir um extremo relativo é necessário que ela possua um ponto crítico.

Sabemos que em um intervalo de uma função poderá ocorrer à presença de diversos valores máximos e mínimos, os quais são chamados de máximos e mínimos relativos. É de fácil interpretação que entre os mínimos relativos de um intervalo, existe um de menor mínimo, o qual é denominado de mínimo absoluto. Assim também entre os máximos relativos de um intervalo existe um que possui o maior máximo, que é chamado de máximo absoluto.

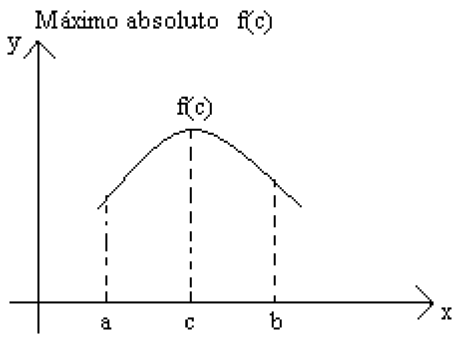
4.2 Máximo e Mínimo Absoluto

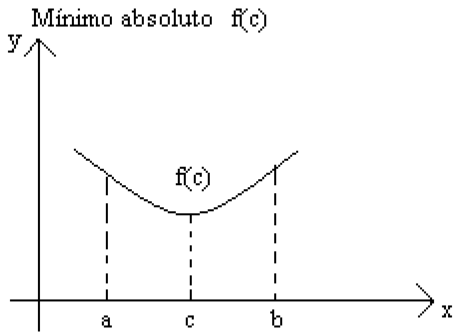
Apresentaremos em seguida a definição formal de máximos e mínimos de uma função.

Definição: Dizemos que $\mathbf{f(c)}$ é o máximo absoluto da função $\mathbf{f}$**,** se **c** pertence ao domínio de **f** e $\mathbf{f(c) \geq f(x)}$ para todo **x** pertencente ao domínio de $\mathbf{f}$**.**

Definição: Dizemos que $\mathbf{f(c)}$ é o mínimo absoluto da função **f** se **c** pertence ao domínio de **f**, e $\mathbf{f(c) \leq f(x)}$ para todo **x** pertencente ao domínio de **f**.

As figuras seguintes ilustram as duas definições anteriores.





4.3 Definição Analítica

Apresentaremos as definições anteriores, no entanto serão direcionadas para o ponto de vista analítico.

Ao termos o valor $x = x_0$ corresponderá a um máximo para a função $y = f(x)$, se forem verificadas simultaneamente as duas desigualdades:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) < 0$$
$$f(x_0 - h) - f(x_0) < 0$$

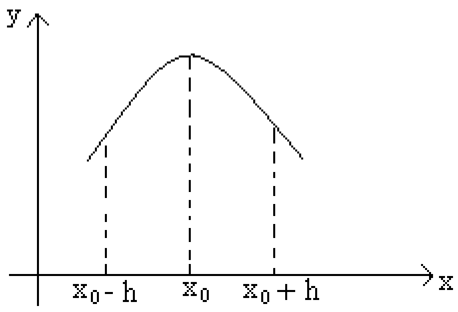


Figura 4.3 - Gráfico referente a definição analítica de máximo

As desigualdades exprimem de maneira analítica, que qualquer ordenada correspondente a um ponto localizado na vizinhança de x_0, é inferior a ordenada relativa ao ponto x_0.

A definição de mínimo possui processo análogo, diremos que o valor x_0 corresponde um mínimo para a função $y = f(x)$, quando forem satisfeitas as duas relações.

$$f(x_0 + h) - f(x_0) > 0$$
$$f(x_0 - h) - f(x_0) > 0$$

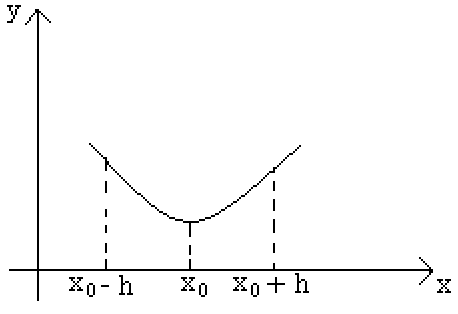


Figura 4.4 - Gráfico referente a definição analítica de mínimo.

As desigualdades anteriores mostram de maneira analítica, que as ordenadas dos pontos situados na vizinhança do ponto x_0 são sempre superiores a ordenada correspondente ao ponto x_0.

Conforme foi mencionado anteriormente, apresentaremos os critérios que o Cálculo Diferencial disponibiliza para a determinação de extremos de uma função. Na verdade estes critérios são teoremas que iremos enunciá-los.

Teorema I. Seja f uma função contínua num intervalo fechado [a, b] que possui derivada em todo o ponto do intervalo (a, b), exceto possivelmente num ponto c.

I. Se $f'(x) > 0$ para todo $x < c$ e $f'(x) < 0$ para todo $x > c$, então f tem um máximo relativo em c.

II. Se $f'(x) < 0$ para todo $x < c$ e $f'(x) > 0$ para todo $x > c$, então f tem um mínimo relativo em c.

Teorema II. Seja f uma função derivável num intervalo (a, b) e c um ponto crítico de f neste intervalo, isto é, $f'(c) = 0$, com $a < c < b$. Se f admite a derivada f'' em (a, b), temos:

I. Se $f''(c) < 0$, f tem um valor máximo relativo em c.

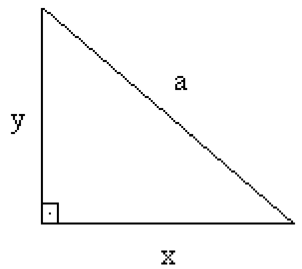
II. Se $f''(c) > 0$, f tem um valor mínimo relativo em c.

Os teoremas I e II são respectivamente conhecidos como critério de derivada primeira e critério de derivada segunda para a determinação de extremos de uma função.

5.0 APLICAÇÕES

1ª Aplicação. Calcular, entre todos os triângulos retângulos de hipotenusa a conhecida, o de área máxima.

Consideremos o seguinte triângulo retângulo de hipotenusa a e catetos x e y.



Pelo Teorema de Pitágoras temos que:

$$a^2 = x^2 + y^2, \text{ daí segue que:}$$

$$y = -\sqrt{a^2 - x^2} \text{ (não convém) ou } y = \sqrt{a^2 - x^2} \qquad \text{(I)}$$

Da matemática elementar sabemos que a área de um triângulo é dada por:

$$A = \frac{b\,.\,h}{2}.$$

Assim o triângulo acima possui área igual a:

$$A = \frac{x\,.\sqrt{a^2 - x^2}}{2}$$

Fazendo A = f(x)

$$f(x) = \frac{1}{2}.\,x\,.\sqrt{a^2 - x^2}$$

Calculemos $f'(x)$.

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left[1\,.\sqrt{a^2 - x^2} + x\,.\frac{1}{2}\,.(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}.(-2x)\right] \Rightarrow$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \left[\sqrt{a^2 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} \right] \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{a^2 - 2x^2}{2.\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Agora, fazemos $f'(x) = 0$, segue que

$$f'(x) = \frac{a^2 - 2x^2}{2.\sqrt{a^2 - x^2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x^2 = a^2 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{a\sqrt{2}}{2} \text{ (não convém) ou}$$

$$x = \frac{a\sqrt{2}}{2} \quad \text{(II)}$$

Substituindo (II) em (I), obtemos:

$$y = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Observe que x = y. Calculando $f''(x)$ obtemos

$$f''(x) = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{-4x.\sqrt{a^2 - x^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{(a^2 - 2x^2) \cdot (-2x)}{\sqrt{a^2 - x^2}}}{a^2 - x^2} \right]$$

$$f''(x) = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{-4a^2x + 4x^3 + a^2x - 2x^3}{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}} \right]$$

$$f''(x) = \frac{-3a^2x + 2x^3}{2(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Calculando $f''(x)$ para quando $x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, temos

$$f''\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{-3a^2.\frac{a\sqrt{2}}{2} + 2 \cdot \frac{2a^3\sqrt{2}}{8}}{2\left(a^2 - \frac{2a^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}} \quad \Rightarrow$$

$$f''\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{-a^3\sqrt{2}}{2\left(\frac{a^2}{2}\right)^{\frac{3}{2}}} \quad \Rightarrow \quad f''\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right) = -2$$

Então,

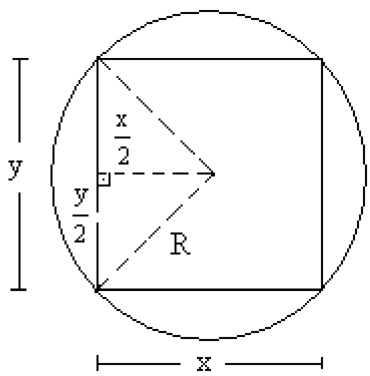
$f''\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right) < 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ é um ponto de máximo.

Portanto concluímos que o triângulo retângulo de hipotenusa a de área máxima é o triângulo retângulo isósceles, e possui área igual a

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{a^2}{4}$$

2ª Aplicação. Entre todos os retângulos inscritos em um círculo de raio dado R, qual é o de área máxima?

Consideremos o círculo de raio R, em que está inscrito o retângulo de lados x e y



Pelo Teorema de Pitágoras temos que:

$$R^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad R^2 = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} \quad \Rightarrow \quad y = -\sqrt{4R^2 - x^2} \text{ (não convém) ou}$$

$$y = \sqrt{4R^2 - x^2} \quad \text{(I)}$$

$$A_{\text{retângulo}} = b\,.\,h = x.\sqrt{4R^2 - x^2},$$

Fazendo $A_{\text{retângulo}} = f(x)$ temos:

$$f(x) = x.\sqrt{4R^2 - x^2}$$

Calculando $f'(x)$, obtemos

$$f'(x) = \sqrt{4R^2 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4R^2 - x^2}} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{4R^2 - 2x^2}{\sqrt{4R^2 - x^2}}$$

Agora, fazendo $f'(x) = 0$, segue que:

$$\frac{4R^2 - 2x^2}{\sqrt{4R^2 - x^2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad 4R^2 - 2x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -R\sqrt{2} \text{ (não convém) ou}$$

$$x = R\sqrt{2} \quad \text{(II)}$$

Substituindo (II) em (I), temos:

$$y = R\sqrt{2}.$$

Calculando $f''(x)$, obtemos

$$f''(x) = \frac{-4x\,.\sqrt{4R^2 - x^2} - \frac{1}{2}\,.\frac{(4R^2 - 2x^2).(-2x)}{\sqrt{4R^2 - x^2}}}{4R^2 - x^2} \quad \Rightarrow$$

$$f''(x) = \frac{-16R^2x + 4x^3 + 4R^2x - 2x^3}{(4R^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \Rightarrow \quad f''(x) = \frac{-12R^2x + 2x^3}{(4R^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Calculando $f''(x)$ quando $x = R\sqrt{2}$, tmos

$$f''\left(R\sqrt{2}\right) = \frac{-12R^3\sqrt{2} + 4R^3\sqrt{2}}{(2R^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \Rightarrow \quad f''\left(R\sqrt{2}\right) = -\frac{8R^3\sqrt{2}}{2R^3\sqrt{2}} \quad \Rightarrow$$

$$f''\left(R\sqrt{2}\right) = -4$$

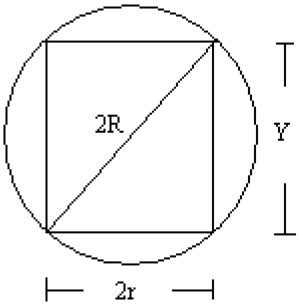
Logo, $f''\left(R\sqrt{2}\right) < 0$

Assim $x = R\sqrt{2}$ é um ponto de máximo, logo o retângulo de área máxima inscrito em um círculo de raio R é um quadrado cuja área é

$$A_{quadrado} = 2R^2$$

3ª Aplicação. Inscrever em uma esfera de raio R o cilindro que possui área lateral máxima.

Consideremos a secção meridiana seguinte:



Pelo Teorema de Pitágoras temos que

$$(2R)^2 = (2r)^2 + y^2 \quad \Rightarrow \quad y = -2.\sqrt{R^2 - r^2} \text{ (não convém) ou } y = 2.\sqrt{R^2 - r^2}$$

Sabemos que a área lateral do cilindro é dada por:

$$A = 2\pi r \,.\, h, \text{ onde } h = y$$

Assim $A = 4\pi r \,.\, \sqrt{R^2 - r^2}$, fazendo $A = f(r)$ temos:

$$f(r) = 4\pi r \,.\, \sqrt{R^2 - r^2}\text{, derivando } f(r) \text{ segue que:}$$

$$f'(r) = 4\pi \,.\, \sqrt{R^2 - r^2} + 4\pi r.\frac{1}{2}\,.\,(R^2 - r^2)^{-\frac{1}{2}}.(-2r) \quad \Rightarrow$$

$$f'(r) = \frac{4\pi.(R^2 - r^2) - 4\pi r^2}{\sqrt{R^2 - r^2}} \quad \Rightarrow$$

$$f'(r) = \frac{4\pi R^2 - 8\pi r^2}{\sqrt{R^2 - r^2}}$$

Agora, fazendo $f'(r) = 0$ segue que

$$f'(r) = \frac{4\pi R^2 - 8\pi r^2}{\sqrt{R^2 - r^2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad 4\pi R^2 - 8\pi r^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = -R\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ (não convém) ou}$$

$$r = R\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Observe que, $R = r.\sqrt{2}$ e $y = 2.\sqrt{R^2 - r^2}$, daí temos que $y = 2r$.

Calculando $f''(r)$, obtemos:

$$f''(r) = \frac{-16\pi r.\sqrt{R^2 - r^2} - (4\pi R^2 - 8\pi r^2).\frac{1}{2}.(R^2 - r^2)^{-\frac{1}{2}}.(-2r)}{R^2 - r^2} \quad \Rightarrow$$

$$f''(r) = \frac{-16\pi R^2 r + 16\pi r^3 + 4\pi R^2 r - 8\pi r^3}{(R^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \Rightarrow$$

$$f''(r) = \frac{-12\pi R^2 r + 8\pi r^3}{(R^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Calculando $f''(r)$ quando $r = R\frac{\sqrt{2}}{2}$, temos

$$f''\left(R\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{-12\pi R^2.R\frac{\sqrt{2}}{2} + 8\pi.\left(R\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3}{\left[R^2 - \left(R\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \quad \Rightarrow \quad f''\left(R\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{-4\pi R^3\sqrt{2}}{\left[\frac{R^2}{2}\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$\Rightarrow \quad f''\left(R\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{-4\pi R^3\sqrt{16}}{R^3} \quad \Rightarrow \quad f''\left(R\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -16\pi$$

Observe que:

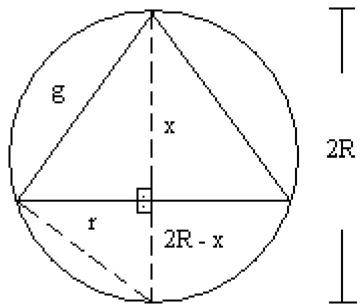
$$f''\left(R\frac{\sqrt{2}}{2}\right) < 0 \quad \Rightarrow \quad r = R\frac{\sqrt{2}}{2}$$

é ponto de máximo, portanto o cilindro de área lateral máxima inscrito em uma esfera de raio R, possui o diâmetro da base igual a altura, ou seja, é um cilindro equilátero, cuja área lateral máxima é igual a:

$$A = 4\pi\,.\,R\frac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{R^2 - \left(R\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} \quad \Rightarrow \quad A = 2\pi R^2$$

4ª Aplicação. Inscrever em uma esfera de raio R o cone de área lateral máxima.

Consideremos a secção meridiana seguinte.



Pela semelhança de triângulos temos que:

$$\frac{r}{x} = \frac{2R - x}{r} \quad \Rightarrow \quad r = -\sqrt{2Rx - x^2} \text{ (não convém) ou } r = \sqrt{2Rx - x^2}$$

E ainda,

$$g^2 = x^2 + r^2 \quad \Rightarrow \quad g = -\sqrt{2Rx} \text{ (não convém) ou } g = \sqrt{2Rx}$$

Sabemos que a área lateral do cone é dada por:

$$A = \pi rg \quad \Rightarrow \quad A = \pi \,.\, \sqrt{2Rx - x^2} \,.\, \sqrt{2Rx} \quad \Rightarrow$$

$$A = \pi \,.\, \sqrt{4R^2x^2 - 2Rx^3}$$

Fazendo $A = f(x)$ temos

$$f(x) = \pi \,.\, \sqrt{4R^2x^2 - 2Rx^3}$$

Calculemos $f'(x)$.

$$f'(x) = \frac{1}{2}\pi.\,(4R^2x^2 - 2Rx^3)^{-\frac{1}{2}}.\,(8R^2x - 6Rx^2) \quad \Rightarrow$$

$$f'(x) = \frac{\pi \,.\, (4R^2x - 3Rx^2)}{\sqrt{4R^2x^2 - 2Rx^3}}$$

Agora, fazendo $f'(x) = 0$, segue que

$$f'(x) = \frac{\pi \,.\, (4R^2x - 3Rx^2)}{\sqrt{4R^2x^2 - 2Rx^3}} = 0 \quad \Rightarrow \quad Rx \,.\, (4R - 3x) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$x = 0 \quad \text{(não convém) ou } x = \frac{4}{3}R$$

Calculando $f''(x)$, obtemos

$f''(x) =$

$$= \frac{\pi(4R^2 - 6Rx).\sqrt{4R^2x^2 - 2Rx^3} - \pi(4R^2x - 3Rx^2).\frac{1}{2}.(4R^2x^2 - 2Rx^3)^{-\frac{1}{2}}.(8R^2x - 6Rx^2)}{4R^2x^2 - 2Rx^3}$$

$$\Rightarrow \quad f''(x) = \frac{\pi(4R^2 - 6Rx).(4R^2x^2 - 2Rx^3) - \pi(4R^2x - 3Rx^2).(4R^2x - 3Rx^2)}{(4R^2x^2 - 2Rx^3)^{\frac{3}{2}}} \quad \Rightarrow$$

$$f''(x) = \frac{\pi(-8R^3x^3 + 3R^2x^4)}{(4R^2x^2 - 2Rx^3)^{\frac{3}{2}}}$$

Calculando $f''(x)$ para quando $x = \frac{4}{3}R$, temos

$$f''\left(\frac{4}{3}R\right) = \frac{\pi\left[-8R^3\left(\frac{4R}{3}\right)^3 + 3R^2\left(\frac{4R}{3}\right)^4\right]}{\left[4R^2\left(\frac{4R}{3}\right)^2 - 2R\left(\frac{4R}{3}\right)^3\right]^{\frac{3}{2}}} \quad \Rightarrow$$

$$f''\left(\frac{4}{3}R\right) = \frac{\pi\left[-8R^3\frac{64R^3}{27} + 3R^2\frac{256R^4}{81}\right]}{\left[4R^2\frac{16R^2}{9} - 2R\frac{64R^3}{27}\right]^{\frac{3}{2}}} \quad \Rightarrow$$

$$f''\left(\frac{4}{3}R\right) = \frac{\pi\left[\frac{-512R^6}{27} + \frac{256R^6}{27}\right]}{\left[\frac{192R^4 - 128R^4}{27}\right]^{\frac{3}{2}}} \quad \Rightarrow \quad f''\left(\frac{4}{3}R\right) = \frac{\pi\left[-\frac{256R^6}{27}\right]}{\left[\frac{64R^4}{27}\right]^{\frac{3}{2}}} \quad \Rightarrow$$

$$f''\left(\frac{4}{3}R\right) = \frac{\pi\left[-\frac{256R^6}{27}\right]}{\frac{512R^6}{81\sqrt{3}}} \quad \Rightarrow \quad f''\left(\frac{4}{3}R\right) = -\frac{3\pi\sqrt{3}}{2}$$

Então,

$f''\left(\frac{4}{3}R\right) < 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{4}{3}R$ é ponto de máximo.

Portanto o cone de área lateral máxima inscrito em uma esfera de raio R possui altura igual a:

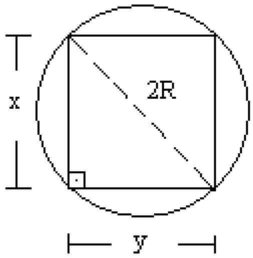
$$\frac{4}{3}R$$

E a área lateral máxima do cone é igual a:

$$A = \pi \,.\sqrt{4R^2\left(\frac{4R}{3}\right)^2 - 2R\left(\frac{4R}{3}\right)^3} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{8\pi R^2\sqrt{3}}{9}.$$

5ª Aplicação. Inscrever em um círculo de raio R, o retângulo de perímetro máximo.

Consideremos a seguinte figura:



Pelo Teorema de Pitágoras temos que:

$$(2R)^2 = x^2 + y^2 \quad \Rightarrow \quad y = -\sqrt{4R^2 - x^2} \text{ (não convém) ou } y = \sqrt{4R^2 - x^2}$$

Chamando o perímetro do retângulo de 2p, temos:

$$2p = 2x + 2y \quad \Rightarrow \quad 2p = 2x + 2.\sqrt{4R^2 - x^2}$$

Fazendo $2p = f(x)$ então

$$f(x) = 2x + 2.\sqrt{4R^2 - x^2}$$

Calculando $f'(x)$, obtemos

$$f'(x) = 2 + 2.\frac{1}{2}.(4R^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}.(-2x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2 - 2x.(4R^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow$$

$$f'(x) = 2 - \frac{2x}{\sqrt{4R^2 - x^2}}$$

Agora, fazendo $f'(x) = 0$ segue que

$$f'(x) = 2 - \frac{2x}{\sqrt{4R^2 - x^2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\sqrt{4R^2 - x^2} - 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{4R^2 - x^2} = x \quad \Rightarrow$$

$$4R^2 - x^2 = x^2 \quad \Rightarrow \quad 2x^2 = 4R^2 \quad x = -R\sqrt{2} \text{ (não convém) ou } x = R\sqrt{2}$$

Calculando agora o valor de y.

$$y = \sqrt{4R^2 - \left(R\sqrt{2}\right)^2} \quad \Rightarrow \quad y = R\sqrt{2},$$

Observe que $y = x$. Calculando $f''(x)$, obtemos

$$f'(x) = 2 - 2x(4R^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f''(x) = -\left[2.(4R^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} + 2x.\left(-\frac{1}{2}\right).(4R^2 - x^2)^{-\frac{3}{2}}.(-2x)\right] \Rightarrow$$

$$f''(x) = -\left[\frac{2}{(4R^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{2x^2}{(4R^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}\right] \Rightarrow f''(x) = -\left[\frac{2.(4R^2 - x^2) + 2x^2}{(4R^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}\right] \Rightarrow$$

$$f''(x) = -\frac{8R^2}{(4R^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Calculando $f''(x)$ quando $x = R\sqrt{2}$ temos

$$f''\left(R\sqrt{2}\right) = -\frac{8R^2}{\left(4R^2 - \left(R\sqrt{2}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow f''\left(R\sqrt{2}\right) = -\frac{8R^2}{(2R^2)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow$$

$$f''\left(R\sqrt{2}\right) = -\frac{8R^2}{2R^3\sqrt{2}} \Rightarrow f''\left(R\sqrt{2}\right) = -\frac{2\sqrt{2}}{R}$$

Então,

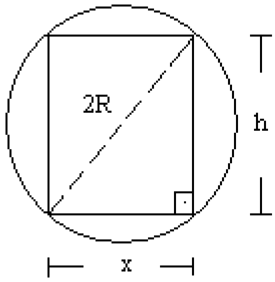
$f''\left(R\sqrt{2}\right) < 0$, logo $R\sqrt{2}$ é um ponto de máximo.

Assim o retângulo de perímetro máximo inscrito em um círculo é o quadrado de lados iguais a $R\sqrt{2}$. E possui perímetro máximo igual a:

$$2p = 2R\sqrt{2} + 2.\sqrt{4R^2 - \left(R\sqrt{2}\right)^2} \Rightarrow 2p = 4R\sqrt{2}.$$

6ª Aplicação. Calcular a altura do cilindro de revolução inscrito em uma esfera de raio R e possuindo área lateral máxima.

Consideremos a seguinte secção meridiana:



Pelo Teorema de Pitágoras temos que:

$$(2R)^2 = x^2 + h^2 \quad \Rightarrow \quad h = -\sqrt{4R^2 - x^2} \text{ (não convém)} \quad \text{ou} \quad h = \sqrt{4R^2 - x^2}\text{(I)}$$

Por hipótese temos que a área lateral do cilindro é máxima, assim nos limitaremos em calcular a altura do mesmo.

Sabemos que a área lateral do cilindro é dada por:

$$A = 2\pi r.h, \text{ assim}$$

$$A = 2\pi\frac{x}{2}.\sqrt{4R^2 - x^2} \quad \Rightarrow \quad A = \pi x.\sqrt{4R^2 - x^2}$$

Fazendo $A = f(x)$ temos:

$$f(x) = \pi x.\sqrt{4R^2 - x^2}$$

Calculando $f'(x)$, obtemos

$$f'(x) = \pi.\sqrt{4R^2 - x^2} + \pi x.\frac{1}{2}.(4R^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}.(-2x)$$

$$f'(x) = \frac{\pi.(4R^2 - x^2) - \pi x^2}{\sqrt{4R^2 - x^2}} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{4\pi R^2 - 2\pi x^2}{\sqrt{4R^2 - x^2}}$$

Agora, fazendo $f'(x) = 0$, segue que

$$f'(x) = \frac{4\pi R^2 - 2\pi x^2}{\sqrt{4R^2 - x^2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad 4\pi R^2 - 2\pi x^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = -R\sqrt{2} \quad \text{(não convém)} \quad \text{ou} \quad x = R\sqrt{2}\text{(II)}$$

Substituindo (II) em (I), temos que:

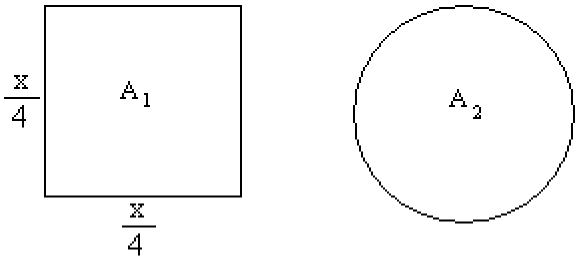
$$h = \sqrt{4R^2 - 2R^2} \quad \Rightarrow \quad h = R\sqrt{2}.$$

Portanto o cilindro de revolução de área lateral máxima inscrito em uma esfera de raio R possui altura igual a $R\sqrt{2}$.

7ª Aplicação. Um fio de comprimento *l* é cortado em dois pedaços. Com um deles se fará um círculo e com o outro um quadrado. Como devemos cortar o fio a fim de que a soma das duas áreas compreendidas pelas figuras seja mínima.

Sejam x e l - x os comprimentos dos dois pedaços do fio.

1º Caso: Consideremos o quadrado e o círculo seguinte:



Comprimento do círculo = c = $l - x$.

Tomamos x como sendo o perímetro do quadrado, e $l - x$ como o comprimento do círculo. Assim:

$$A_1 = \frac{x^2}{16}$$

Temos também que:

$$c = 2\pi r \quad \Rightarrow \quad l - x = 2\pi r \quad \Rightarrow \quad r = \frac{l - x}{2\pi}.$$

Daí, podemos obter A_2

$$A_2 = \pi r^2 \quad \Rightarrow \quad A_2 = \pi.\left(\frac{l - x}{2\pi}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad A_2 = \frac{l^2 - 2lx + x^2}{4\pi}$$

Somamos A_1 e A_2, temos:

$$A_1 + A_2 = \frac{x^2}{16} + \frac{l^2 - 2lx + x^2}{4\pi} = \frac{\pi x^2 + 4l^2 - 8lx + 4x^2}{16\pi} = \frac{(4 + \pi)x^2 - 8lx + 4l^2}{16\pi} \quad \Rightarrow$$

$$A_1 + A_2 = \frac{(4 + \pi)x^2 - 8lx + 4l^2}{16\pi}$$

Fazendo $A_1 + A_2 = f(x)$, temos:

$$f(x) = \frac{(4+\pi)x^2 - 8lx + 4l^2}{16\pi}$$

Calculando $f'(x)$, obtemos

$$f'(x) = \frac{2(4+\pi)x - 8l}{16\pi} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{(4+\pi)x - 4l}{8\pi}$$

Agora, fazendo $f'(x) = 0$ segue que

$$f'(x) = \frac{(4+\pi)x - 4l}{8\pi} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{4l}{4+\pi}$$

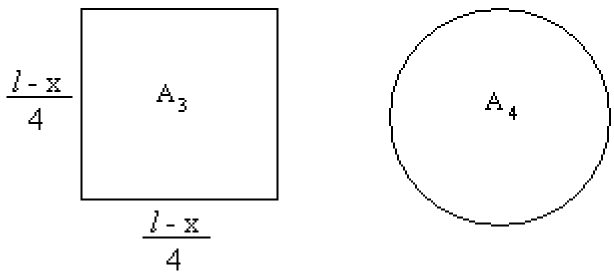
Calculando $f''(x)$, obtemos

$$f''(x) = \frac{\pi + 4}{8\pi}$$

Como $f''(x) > 0$ para todo x então, quando $x = \frac{4l}{4+\pi}$ temos que

$f''(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{4l}{4+\pi}$ é um ponto de mínimo.

2º Caso: Consideremos ainda o quadrado e o círculo, e seja $l - x$ o perímetro do quadrado, e x o comprimento do círculo.



Temos que:

$$A_3 = \frac{l^2 - 2lx + x^2}{16}$$

Como,

$$c = 2\pi r \quad \Rightarrow \quad x = 2\pi r \quad \Rightarrow \quad r = \frac{x}{2\pi},$$

Daí,

$$A_4 = \frac{x^2}{4\pi}$$

Somamos A_3 com A_4.

$$A_3 + A_4 = \frac{l^2 - 2lx + x^2}{16} + \frac{x^2}{4\pi} \quad \Rightarrow \quad A_3 + A_4 = \frac{(4+\pi)x^2 - 2\pi lx + \pi l^2}{16\pi}$$

Fazendo $A_3 + A_4 = f(x)$ temos que:

$$f(x) = \frac{(4+\pi)x^2 - 2\pi lx + \pi l^2}{16\pi}$$

Calculando $f'(x)$ obtemos

$$f'(x) = \frac{2(4+\pi)x - 2\pi l}{16\pi} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{(4+\pi)x - \pi l}{8\pi}$$

Agora, fazendo $f'(x) = 0$ segue que

$$\frac{(4+\pi)x - \pi l}{8\pi} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi l}{4+\pi}$$

Calculando $f''(x)$, obtemos

$$f''(x) = \frac{4+\pi}{8\pi}$$

Como $f''(x) > 0$ para todo x, então quando $x = \frac{\pi l}{4+\pi}$ temos que

$f''\left(\frac{\pi l}{4+\pi}\right) > 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi l}{4+\pi}$ é um ponto de mínimo.

Do 1º e 2º casos concluímos que podemos cortar o fio em pedaços do seguinte comprimento:

$$\frac{4l}{4+\pi} \quad \text{e} \quad \frac{\pi l}{4+\pi}$$

Para que possamos encontrar a soma mínima das áreas das figuras.

6.0 CONCLUSÃO

O desenvolvimento do trabalho que ora concluímos, possibilitou, além dos conhecimentos adquiridos, conviver com um ambiente diferente dos, na maioria das vezes, vivenciados em salas de aulas na atualidade. Em particular, as aulas de Cálculo são conduzidas pela grande maioria dos professores, com raríssimas exceções, de forma extremamente tradicional, restringindo-se as definições, algumas demonstrações e resolução de exercícios. Importante destacar que, não estamos desmerecendo nem criticando os procedimentos profissionais dos professores que assim se procedem metodologicamente, não só no ensino do Cálculo, bem como de qualquer outra disciplina. Todos são bons professores, cada um da sua forma. Estamos apenas constatando a prática de um modelo de ensino que precisa ser refletido por quem ensina e por quem é ensinado.

Acreditamos que uma abordagem histórica, através de fatos, personagens e datas que marcaram a evolução de determinado tema, é sempre bem vinda ao ambiente de ensino. Selecionar, mostrar e desenvolver em determinados momentos, exemplos que tornam evidentes a aplicação de uma definição, um teorema, ou mesmo uma técnica de derivação ou integração, pode se transformar num momento mágico para quem ensina e para quem aprende.

É essa, a nossa discreta contribuição por intermédio de algumas aplicações de “Máximos e Mínimos” na obtenção de áreas de figuras planas

7.0 BIBLIOGRAFIA

BOYER, Carl B; Trad. Elza F. Gomide. História da Matemática. Editora Edgar Blucher LTDA. São Paulo, 1996.

EVES Haward; Trad. Hyginio H Domingues. Introdução á História da Matemática. Editora da UNICAMP. Campinas, SP. 2004.

FLEMMING, Diva Marília., Gonçalves, Mirian Buss, Cálculo A Funções, Limite, Derivação , Integração. Makron Books. 5ª Ed. São Paulo, 1992.

OLIVEIRA, Antônio Marmo., SILVA, Agostinho. Biblioteca da Matemática Moderna. Editorial Irracional S. A. São Paulo, 1968.

SERRÃO, Alberto Nunes, Exercícios e Problemas de Álgebra Vol II. Ao livro técnico S. A. 5ª edição, Rio de Janeiro, 1970.

STEWART, James; Cálculo volume I. Thomson. 5ª edição, São Paulo. 2006.

http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/oque.html (página consultada em Janeiro de 2011).

http://ecalculo.if.usp.br/historia/historia_derivadas.htm (página consultada em Janeiro de 2011).

http://www.ufmt.br/icet/matematica/geraldo/histintegral.htm (página consultada em Janeiro de 2011).