
Universidade Estadual da Paraíba
Centro de Ciências e Tecnologia
Departamento de Matemática

Carlos Pinheiro do Nascimento

Os Números Complexos e Algumas Aplicações

15 de Dezembro de 2011

Campina Grande-PB

Carlos Pinheiro do Nascimento

Os Números Complexos e Algumas Aplicações

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado na Universidade Estadual da Paraíba, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Dr. Vandenberg Lopes Vieira

15 de Dezembro de 2011
Campina Grande-PB

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL – UEPB

N17n Nascimento, Carlos Pinheiro do.
Os números complexos e algumas aplicações [manuscrito]
/ Carlos Pinheiro do Nascimento. – 2011.
41 f. : il. color.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Tecnológicas, 2011.

“Orientação: Prof. Dr. Vandemberg Lopes Vieira, Departamento de Matemática e Estatística”.

1. Matemática - Aplicações. 2. Números Complexos. 3. Circuito Elétrico. I. Título.

21. ed. CDD 516

Os Números Complexos e Algumas Aplicações

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento à exigência para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Aprovada em: 15/12/2011.

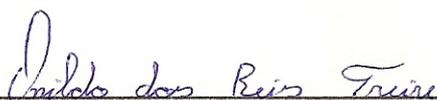
Banca Examinadora:



Prof. Dr. Vandenberg Lopes Vieira – UEPB

Orientador

(Depto. de Matemática/CCT/UEPB)



Prof. Ms. Onildo dos Reis Freire

Examinador

(Depto. de Matemática/CCT/UEPB)



Prof. Ms. Edvaldo de Oliveira Alves

Examinador

(Depto. de Física/CCT/UEPB)

A todos os meus professores e amigos que me ajudaram na realização deste trabalho e por seguinte me proporcionar um riquíssimo aprofundamento sobre o conhecimento matemático vigente, levando comigo do pouco do conhecimento que a matemática traz consigo mesma.

DEDICO

Agradecimentos

Neste presente momento da minha vida, onde concluo mais um passo que foi a minha graduação em Licenciatura Plena em Matemática, agradeço em primeiro lugar a minha mãe, Dona Célia Maria Pinheiro do Nascimento, ao meu pai Sr. Antônio Felizardo do Nascimento e aos meus irmãos e em especial ao meu primo Ronaldo Cavalcante Pinheiro Filho e sua esposa Joana D'arc que abriram suas portas para que eu viesse fazer este curso que desejo desde as séries iniciais de escola.

Agradeço também ao orientador e amigo Prof. Vandenberg Lopes Vieira pela atenção que tanto me dedicou. Agradeço também por sua valorosa amizade.

A todos agradeço por este feito, obrigado.

Resumo

Neste trabalho apresentamos o conjunto dos números complexos \mathbb{C} juntamente com suas principais propriedades relacionadas às suas operações habituais de soma e produto. O conjunto \mathbb{C} junto com essas operações se mostra um ambiente adequado em que questões que não são possíveis em outros conjuntos, são completamente consideradas nele. Isso certamente é verdadeiro quando do estudo da Teoria dos Circuitos Elétricos.

Palavras-chave: Números Complexos, Circuito Elétrico.

Sumário

Lista de Figuras	xi
1 Introdução	1
2 Os Números Complexos	9
3 Números Complexos e Circuitos Elétricos	19
3.1 Representação dos Números Complexo e Circuitos Elétricos	20
3.2 Observações adicionais	27
3.3 Conclusão	28

Lista de Figuras

2.1	Simetria de z e \bar{z}	11
2.2	Soma de z_1 e z_2	14
2.3	O complexo z com o argumento θ	15
2.4	Representação gráfica de U_5	18
3.1	Representação da fem.	23
3.2	Representação do indutor.	23
3.3	Indutor e circuito CA.	24
3.4	O gráfico da voltagem e da corrente do indutor.	24
3.5	Representação de um capacitor.	25
3.6	Um circuito CA capacitivo.	25
3.7	Gráfico da voltagem e da corrente do capacitor.	26

Capítulo 1

Introdução

Desde¹ os tempos primitivos, a busca da complexidade para solucionar questões matemáticas vinha sendo estudada. Embora a ideia de número seja anterior à criação da palavra para o designar, pode-se dizer que o desenvolvimento do conhecimento caminhou junto com o da respectiva linguagem. A partir deste, civilizações antigas buscaram juntos aos números a solução para resolver problemas de sua época.

No desenvolver das civilizações, observa-se as diversas formas de solução para os problemas aritméticos e algébricos de acordo com o conjunto estabelecido por estas. A exemplo, pode-se destacar os matemáticos gregos, que desempenharam importante papel no desenvolvimento da matemática. Eles resolviam alguns tipos de equações do 2º grau com auxílio da régua e compasso.

A numeração impôs-se desde o momento em que o homem primitivo precisou contar as peças que acompanhavam da caça e os filhos que tinham. A partir de então, nasce o conceito de número natural. No conjunto dos números naturais, indicado por (\mathbb{N}) , estão definidas duas operações, soma e produto, mas não divisão ou subtração, pois $2, 3 \in \mathbb{N}$, mas $2 - 3 = -1 \notin \mathbb{N}$ e $3 \div 2 \notin \mathbb{N}$. Daí, surge o conjunto dos números inteiros, que em geral é representado por \mathbb{Z} , munido não apenas da soma e produto, mas também da subtração. Neste, a divisão também não é definida. Isso dá origem à construção de um conjunto cujos elementos sejam frações. Tal conjunto, denominado *conjuntos dos números racionais*, indicado por \mathbb{Q} , é definido como

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z} \text{ com } b \neq 0 \right\}.$$

De acordo com a identificação² de um número inteiro a com a fração $\frac{a}{1}$, vê-se claramente que \mathbb{Z} é um subconjunto de \mathbb{Q} .

Entretanto, há números que não podem ser escritos sob a forma de fração. Por

¹A base do texto desta introdução foi extraída das referências [2] e [4].

²Esta palavra é justificada no estudo de estruturas algébricas, especificamente, quando é apresentado *Corpo de Frações de um Domínio*.

exemplo, não existem³ inteiros a e b de maneira que $\sqrt{3} = \frac{a}{b}$. Números assim são ditos *números irracionais*, o qual em geral se indica por \mathbb{I} . A união deste com \mathbb{Q} , gera um novo e importante conjunto, o conjunto dos números reais, representado em geral por \mathbb{R} . Assim,

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}.$$

Tem-se que $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$; por isso diz-se que \mathbb{R} é a união disjunta de \mathbb{Q} e \mathbb{I} .

A busca para solucionar equações sempre foi um assunto que fascinou matemáticos ao longo da história. Os matemáticos antigos da Babilônia conseguiam resolver algumas equações do 2º grau baseados no que hoje se chama de *completamento de quadrado*.

Com a conquista de Roma sobre o império grego, praticamente acabou com o domínio da Matemática Grega. Logo após o fim do Império Romano e a ascensão do Cristianismo, o desenvolvimento da Matemática ficou nas mãos dos árabes e dos hindus.

Os matemáticos hindus avançaram nas pesquisas em Álgebra, e Baskara (1114 - 1185 aproximadamente) é o nome que imediatamente vem à nossa memória quando falamos de equações de 2º grau. No entanto, a fórmula de Baskara não foi descoberta por ele, mas sim pelo matemático hindu Sridhara, no século XI.

Relembrando, dada a equação $ax^2 + bx + c = 0$ com $a \neq 0$, a fórmula de Baskara garante que suas raízes são

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Dependendo da equação, pode acontecer que o número $\Delta = b^2 - 4ac$ seja negativo. Entretanto, isso não perturbava muito os matemáticos da época. Neste caso, eles simplesmente diziam que o problema não tinha solução. Um novo interesse pelo estudo da Matemática ressurgiu na Europa, mais especificamente na Itália, no século XVI. Lá, durante a disputa entre Cardano e Tartaglia pelo desenvolvimento da equação do 2º grau, é que se percebeu que os números reais não eram suficientes e as primeiras reflexões da criação do conjunto dos números complexos surgiram. Consta que, por volta de 1510, um matemático italiano de nome Scipione Del Ferro encontrou uma forma geral para resolver equações do tipo $x^3 + px + q = 0$; mas morreu sem publicar sua descoberta. Seu aluno, Antônio Maria Fior, conhecia tal solução e tentou ganhar notoriedade com ela. Na época, eram comuns os desafios entre estudiosos. Como Tartaglia era um nome que começava a se destacar nos meios culturais da época, Fior propôs a Tartaglia um desafio. Tartaglia, apesar de não saber resolver ainda tais equações, aceitou o desafio, confiando em seu potencial. Sabendo que Fior conhecia a solução

³Isso em geral é demonstrado em um curso Introdutório em Teoria dos Números.

das equações acima citadas, não só deduziu a resolução para este caso, como também resolveu as equações do tipo $x^3 + \rho x^2 + q = 0$.

Nesta época, Cardano estava escrevendo a prática *Arithmetica e Generalis*, que continha ensinamentos sobre Álgebra, Aritmética e Geometria. Ao saber que Tartaglia achara a solução geral da equação de grau 3^o, pediu-lhe que a revelasse, para que fosse publicada em seu próximo livro. Tartaglia não concordou, alegando que ele mesmo iria publicar sua descoberta. Cardano acusou-o de mesquinho e egoísta, e não desistiu. Após muitas conversas e súplicas este, jurando não divulgar tal descoberta, conseguiu que Tartaglia lhe revelasse a solução. Daí, por seguinte, Cardano quebrou todas as promessas e, em 1545, fez publicar na *Ars Magna* a fórmula de Tartaglia. No final, como em muitos outros casos, a posteridade não fez justiça a Tartaglia — sua fórmula é até hoje conhecida como *Fórmula de Cardano*.

A seguir destacaremos a fórmula que gerou tanta polêmica.

Considere a equação geral do 3^o grau, $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$. Mostre que esta equação pode ser transformada numa equação do tipo $y^3 + \rho y + q = 0$, fazendo uma substituição $y = x + m$, com algum m conveniente. (verifique que, de fato, tal m sempre existe).

Sendo assim, é possível resolver qualquer equação do terceiro grau, desde que se saiba resolver equações do tipo $x^3 + px + q = 0$. A ideia de Tartaglia foi supor que a solução procurada é do tipo $X = A + B$.

Considere a equação $x^3 + px + q = 0$.

(a) Substituindo $x = A + B$ e notando que $x^3 = A^3 + B^3 + 3ABx$, conclua que $3AB = -\rho$ e $A^3 + B^3 = -q$. Portanto,

$$A^3 B^3 = \frac{-\rho^3}{27} \quad \text{e} \quad A^3 + B^3 = -q.$$

(b) Conclua que A^3 e B^3 são soluções da equação $x^2 + qx - \frac{\rho^3}{27} = 0$ e mostre que suas soluções são

$$A^3 = \frac{-q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{\rho}{3}\right)^3} \quad \text{e} \quad B^3 = \frac{-q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{\rho}{3}\right)^3}.$$

(c) Mostre que

$$X = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{\rho}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{\rho}{3}\right)^3}}.$$

Um problema inquietante, que abordaremos a seguir, foi o que levou os matemáticos à descoberta dos números complexos.

Considere a equação $x^3 - 15x - 4 = 0$.

- (a) Mostre que $x = 4$ é solução da equação.
- (b) Divida $x^3 - 15x - 4 = 0$ por $x - 4$.
- (c) Encontre as outras duas soluções da equação e verifique que são números reais.
- (d) Aplique a fórmula de Cardano (Tartaglia!) e verifique que a solução fornecida pela fórmula é:

$$X = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

- (e) Reflita: Não parece que há algo de errado com essas soluções?

Assim, questões realmente perturbadoras surgiram e não podiam ser ignoradas. Além da extração de raízes quadradas de números negativos também nos deparamos com uma extração de raízes cúbicas de números de natureza desconhecidas. Quando, nas equações de grau dois a fórmula de Báskara levava à raiz quadrada de números negativos, era fácil dizer que aquilo indicava a não existência de soluções. Agora, entretanto, nota-se que há equações de grau três com soluções reais conhecidas, mas cuja determinação passava pela extração de raízes quadradas de números negativos. Isto não ocorre só com esta equação! Pode-se mostrar, com relativa facilidade, que a equação do tipo $x^3 + \rho x + q = 0$ tem as três raízes reais se, e somente se,

$$\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{\rho}{3}\right)^3 \leq 0.$$

Não havia como negar que os números reais eram insuficientes para se tratar de equações algébricas. O que estava acontecendo no século XVI era semelhante ao que ocorreu no tempo dos gregos antigos, quando se verificou a insuficiência dos números racionais com a construção do número $\sqrt{2}$, que não era racional: o conceito de número precisava ser estendido.

Foi Rafael Bombelli, engenheiro hidráulico nascido em Bolonha, Itália, em 1530, quem conseguiu atravessar a barreira e chegar aos novos números.

Conforme seu próprio relato em 1572 no livro *L'Algebra parte maggiore dell'Arithmetica*, sua ideia foi supor a existência de expressões da forma $a + \sqrt{-b}$ e $a - \sqrt{-b}$ que possam ser consideradas, respectivamente, como $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$ e $\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$.

Substituindo essas expressões no Problema 1 no item (d), obté-se $(a + \sqrt{-b}) + (a - \sqrt{-b}) = 4$.

Neste ponto, felizmente, as quantidades “não existentes” se cancelam e obtemos $a = 2$. Com esse resultado, pode-se voltar à equação $(a - \sqrt{-b})^3 = 2 + \sqrt{-121}$ e deduzir quer $b = 1$.

Supondo que $\sqrt{-1}$ é um número conhecido e que, com ele opera-se do mesmo modo que com os outros números que já conhecemos, então

$$(2 - \sqrt{-1})^3 = 2 + \sqrt{-121} \quad \text{e} \quad (2 + \sqrt{-1})^3 = 2 + \sqrt{-121}.$$

No meio do caminho, reflita e tente responder:

Quais devem ser as regras para operar com $\sqrt{-1}$?

(b) Como devem ser a adição e a multiplicação de dois números da forma $m + n\sqrt{-1}$?

(c) Quando dois números desta forma são iguais?

(d) Conclua que $X = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 4$.

A partir da concepção pioneira de Bombelli, ainda se demorou mais de dois séculos para que se conseguisse, através de Euler⁴, saber como extrair raízes de números complexos.

Depois que Euler mostrou que as equações do tipo $z^n = w$ tinham n soluções em \mathbb{C} , os matemáticos passaram a acreditar que toda equação de grau n deveria ter n raízes complexas. Vários matemáticos tentaram provar esta conjectura, e Jean Le Rond d'Alembert publicou, em 1746, algo que considerou uma prova deste fato. Entretanto, um jovem matemático mostrou que tal prova era “insatisfatória e ilusória” e apresentou uma demonstração correta. Este matemático foi Carl Friedrich Gauss; aos 21 anos, em 1799, Gauss apresentou o que ainda hoje é considerado a maior tese de doutorado em Matemática de todos os tempos. Nela, está a prova do *Teorema Fundamental da Álgebra*, cuja denominação foi dada pelo próprio Gauss. Esse teorema afirma que:

Toda equação polinomial de coeficientes reais ou complexos tem, pelo menos, uma raiz complexa. A demonstração deste importante resultado não é simples. A mais fácil disponível foi produzida por Argand em 1815 e simplificada por Cauchy. Com o teorema de Gauss, o procurado e esperado resultado sobre equações algébricas pode finalmente ser provado. A seguir veremos por que é que *toda equação de grau n tem exatamente n raízes*, eventualmente repetidas.

Seja $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, onde, para cada $i = 0, \dots$, os coeficientes a_i , são números complexos.

(a) Aplicando o Teorema Fundamental da Álgebra, conclua que a equação $P(x) = 0$ tem uma solução que denotaremos por α_1 . Conclua também que $P(x)$ é divisível por $(x - \alpha_1)$.

⁴Leonhard Euler (1707-1783), matemático suíço, é considerado o matemático mais prolífero de todos os tempos.

- (b) Como $P(x) = (x - \alpha_1) \cdot Q(x)$, o que se pode dizer sobre o grau de $Q(x)$?
- (c) Aplique novamente o Teorema Fundamental da Álgebra, agora para o polinômio $Q(x)$, e conclua que $P(x)$ tem duas raízes.
- (d) Repetindo este raciocínio, note que $P(x)$ deve ter n raízes, eventualmente repetidas.

Assim, o Teorema Fundamental da Álgebra resolveu a questão das soluções de equações algébricas e ainda mostrou que o conjunto dos números complexos é mais completo no que se refere principalmente ao trato de raízes de polinômio, pois contém todas as soluções de qualquer equação algébrica, de qualquer grau.

Entretanto, encontrar as soluções não é tarefa simples. Fórmulas gerais para as de graus 2 e 3 já tinham sido encontradas. Outro matemático italiano, Ludovico Ferrari (1522-1560), discípulo de Cardano, encontrou uma maneira de obter as soluções de uma equação geral de grau 4. Seu mérito maior foi o de mostrar que é possível encontrar as soluções de uma equação de quarto grau apenas com operações algébricas ordinárias.

Vários matemáticos tentaram encontrar fórmulas gerais para obter as raízes das equações de graus superiores a 5. Entretanto, o matemático norueguês Neils Henrik Abel (1802-1829) demonstrou que, embora algumas equações particulares possam ser resolvidas completamente, é impossível a equação geral de grau 5 utilizando-se apenas operações algébricas, isto é, usando-se apenas adição, subtração, multiplicação, divisão e radiciação. Isso é traduzido afirmando que nem toda equação do quinto grau é solúvel por radicais.

Tanto a Aritmética como a Geometria tiveram origens distintas, mas que no decorrer dos tempos foram sendo descobertas relações entre os números e formas. Na metade do século XVII, os matemáticos franceses Pierre de Fermat e René Descartes criaram, independentemente e quase simultaneamente, o que hoje a chamamos de Geometria Analítica. Fermat pouco se preocupou em publicar as suas ideias, ao contrário de Descartes que, no Apêndice de seu mais famoso livro *Discurso sobre o método* de bem utilizar a razão e de encontrar a verdade nas ciências, publicou em 1637, um trabalho denominado *La Geometrie*, que é considerado a pedra fundamental da Geometria Analítica.

Com o auxílio da geometria Analítica, Descartes estudou, entre outros, as equações algébricas. Em uma passagem do *Discurso de Método*, ele escreveu a seguinte frase: “Nem sempre as raízes verdadeiras (positivas) ou falsas (negativas) de uma equação são reais. Às vezes elas são imaginárias”. Foi por este, que até hoje o número $\sqrt{-1}$ é chamado de número imaginário, termo que se consagrou juntamente com a expressão “número complexo”.

Depois de Bombelli, em 1530, outros personagens importantes da História da Matemática deram contribuições ao desenvolvimento da teoria dos números complexos, dentre os quais o matemático francês Abraham de Moivre, amigo de Isaac Newton, e também os irmãos Jacques e Jean Bernoulli. Mas quem fez o trabalho mais importante e decisivo sobre o assunto foi Euler. Leonhard Euler nasceu em Basileia, Suíça, no ano de 1707, quando o Cálculo Diferencial e integral, inventado por Newton e Leibniz, estava em expansão. Foi um dos matemáticos que mais produziram e publicou em todos os tempos. Aos 28 anos perdera a vista esquerda e viveu totalmente cego os últimos 18 anos de sua vida, período em que continuou produzindo, guiado pela sua memória; faleceu em 1783. Seu nome ficou ligado para sempre ao número irracional e , conhecido como número de Euler, cujo valor é aproximadamente 2,71828, e que aparece frequentemente em equações que descrevem fenômenos físicos. A descoberta deste número ocorreu devido a uma pergunta de Jacques Bernoulli sobre juros compostos.

Dentre as inúmeras contribuições de Euler foi notável seu empenho na melhoria da simbologia. Muitas das notações que utilizamos hoje foram introduzidas por ele. Dentre as representações propostas por Euler destacamos o i substituindo $\sqrt{-1}$.

Euler passou a estudar números da forma $z = a + bi$ onde a e b são números reais e $i^2 = -1$. Esses números são chamados de números complexos.

Capítulo 2

Os Números Complexos

Muitos dos resultados deste capítulo podem ser estudados com mais detalhes nas referências [1] e [7].

Os conjuntos dos números naturais, inteiros e racionais são, basicamente, os mais familiares para a maioria dos estudantes do ensino médio. Infelizmente, o conjunto dos números complexos, \mathbb{C} , e suas propriedades são muito menos conhecidos por ela.

Neste capítulo vamos considerar o conjunto dos números complexos — objeto central do trabalho. Faremos uma apresentação sucinta, mais objetiva, de alguns de seus resultados.

As propriedades de \mathbb{C} serão fundamentalmente estudadas a partir da adição e multiplicação usuais nele definidas.

O conjunto dos números complexos é definido como sendo o produto cartesiano $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, com adição e multiplicação dadas por

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$
$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc), \forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{C}.$$

Consideremos os números complexos da forma $(x, 0)$ com $x \in \mathbb{R}$, ou seja, o subconjunto

$$\mathbb{R} \times \{0\} = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}.$$

Dados $(x, 0), (y, 0) \in \mathbb{R} \times \{0\}$, tem-se que

$$(x, 0) + (y, 0) = (x + y, 0) \text{ e } (x, 0) \cdot (y, 0) = (xy, 0).$$

Isto nos permite identificar cada complexo $(x, 0)$ com o número real x e, por conseguinte, considerar \mathbb{R} como subconjunto de \mathbb{C} . Assim, de agora em diante, escrevermos x no lugar de $(x, 0)$ ou vice-versa, quando necessário. Portanto, dado $z = (a, b) \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}
 (a, b) &= (a, 0) + (0, b) \\
 &= (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1) \\
 &= a + bi,
 \end{aligned}$$

em que $i = (0, 1)$, ou seja, $(a, b) = a + bi$.

Observa-se que $i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$. Logo, o número i não pode ser real, pois o quadrado de um número real é sempre positivo. Temos então:

1. Todo número complexo $z = (a, b)$ pode ser escrito da forma $z = a + bi$ com $a, b \in \mathbb{R}$ e $i^2 = -1$. Esta é a notação comum dos complexos. Assim,

$$\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}. \quad (2.1)$$

Usando a notação em (2.1), tem-se que

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c \quad \text{e} \quad b = d.$$

Além disso,

2. $(a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + (b \pm d)i$.
3. $(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$.

Por exemplo, se $z_1 = 6 + 4i$ e $z_2 = 4 - 5i$, então $z_1 + z_2 = 10 - i$ e $z_1 \cdot z_2 = 44 - 14i$.

O surgimento do número complexo i com $i^2 = -1$, é o ponto chave da parte histórica dos números complexos. Eles surgiram de modo a solucionar determinadas equações algébricas reais de grau 2, ou seja, equações da forma.

$$x^2 + ax + b = 0, \quad a, b \in \mathbb{R}. \quad (2.2)$$

Sabe-se que quando o número $\Delta = b^2 - 4ab < 0$, a equação em (2.2) não possui raízes reais. Mas, com o advento do número $i \in \mathbb{C}$, esta equação tem as raízes

$$z_1 = \frac{-a}{2} + i\sqrt{b - \frac{a^2}{2}} \quad \text{e} \quad z_2 = \frac{-a}{2} - i\sqrt{b - \frac{a^2}{2}}.$$

Portanto, a equação $x^2 + ax + b$ tem a seguinte fatoração

$$x^2 + ax + b = (x - z_1) \cdot (x - z_2).$$

Por exemplo, para a equação algébrica $x^2 - 4x + 5 = 0$, temos $\Delta = -4 < 0$. Logo, suas raízes são $z_1 = 2 + i$ e $z_2 = 2 - i$.

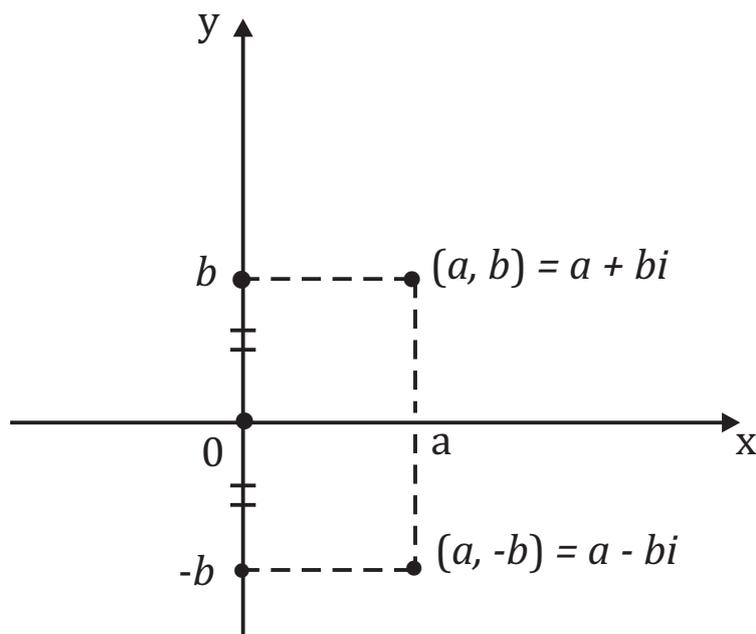


Figura 2.1: Simetria de z e \bar{z} .

Para um número complexo $z = a + bi$, os números a e b chamam-se **parte real** e **parte imaginária** de z , respectivamente. Em símbolos

$$a = \operatorname{Re} z \quad \text{e} \quad b = \operatorname{Im} z.$$

Quando $a = 0$, $z = bi$ é dito **imaginário puro**.

Na Figura 2.1, o eixo- x é o real e o eixo- y é o imaginário. O número complexo $\bar{z} = a - bi$ é o conjugado de $z = a + bi$. Geometricamente, \bar{z} corresponde a uma reflexão de z em relação ao eixo real. Temos também,

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \quad \text{e} \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}).$$

Proposição 2.0.1 *Dados $z, w \in \mathbb{C}$, valem as seguintes propriedades:*

1. $\overline{\bar{z}} = z$.
2. $\overline{(z + w)} = \bar{z} + \bar{w}$.
3. $\overline{(z \cdot w)} = \bar{z} \cdot \bar{w}$.
4. $z \cdot \bar{z} \geq 0$, com igualdade se, e somente se, $z = 0$.

Demonstração: Vamos demonstrar apenas as propriedades 3 e 4, pois as duas primeiras são obtidas diretamente da definição de conjugado.

3) Consideremos $z = a + bi$, e $w = c + di$. Logo,

$$\overline{z \cdot w} = \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i}$$

$$\begin{aligned}
&= (ac - bd) - (ad + bc)i \\
&= (a - b) \cdot (c - di) \\
&= \bar{z} \cdot \bar{w}.
\end{aligned}$$

4) Agora, $z \cdot \bar{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2 \geq 0$, pois $a^2 \geq 0$ e $b^2 \geq 0$. Além disso,

$$a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 = -b^2 \Leftrightarrow a = b = 0.$$

■

O fato de $z \cdot \bar{z} \geq 0$ para qualquer complexo z dá origem à definição de norma de um número complexo. O **módulo** ou **norma** do complexo $z = a + bi$, em símbolo $\|z\|$, é o número real não-negativo

$$\|z\| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Observa-se que, geometricamente, a norma $\|z\|$ é a distância Euclidiana entre z e a origem $0 = 0 + 0i \in \mathbb{C}$. Todo número complexo $z = a + bi \neq 0$ possui em \mathbb{C} inverso multiplicativo, isto é, existe $w \in \mathbb{C} - \{0\}$ com

$$z \cdot w = 1 = w \cdot z.$$

De fato, o elemento

$$w = \frac{(a - bi)}{(a^2 + b^2)} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \left(\frac{a}{a^2 + b^2} \right) i$$

é tal que $z \cdot w = 1$. Portanto, o inverso multiplicativo de z , $w = z^{-1}$, é

$$z^{-1} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{\bar{z}}{\|z\|^2}.$$

Nota-se que se $z = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$, então $\|z\| = 1$. Por isso,

$$(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^{-1} = \cos \theta - i \operatorname{sen} \theta.$$

o caso par.

Proposição 2.0.2 *As operações de adição e multiplicação usuais em \mathbb{C} gozam, para quaisquer $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, das seguintes propriedades:*

1. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$. (comutativa da adição)
2. $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$. (comutativa da multiplicação)
3. $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$. (associativa da adição)

4. $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$. (associativa da multiplicação)
5. $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$. (distributiva em relação à adição)

As propriedades do conjunto \mathbb{C} apresentadas até agora fazem dele o que, em álgebra abstrata, chama-se de corpo.

Proposição 2.0.3 Para $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, temos

1. $z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2 \in \mathbb{R}$.
2. $\|z_1 + z_2\| = \|z_1\| \cdot \|z_2\|$.
3. $\|z_1 + z_2\| \leq \|z_1\| + \|z_2\|$. (**Desigualdade Triangular**)

Demonstração: A primeira propriedade é imediata; demonstraremos 2 e 3.

2) Por definição, $\|z_1\| = \sqrt{z_1 \cdot \overline{z_1}}$ e $\|z_2\| = \sqrt{z_2 \cdot \overline{z_2}}$. Logo,

$$\begin{aligned} \|z_1 \cdot z_2\| &= \sqrt{(z_1 \cdot z_2) \cdot \overline{(z_1 \cdot z_2)}} = \sqrt{(z_1 \cdot z_2) \cdot (\overline{z_1} \cdot \overline{z_2})} \\ &= \sqrt{(z_1 \cdot \overline{z_1}) (z_2 \cdot \overline{z_2})} = \sqrt{z_1 \cdot \overline{z_1}} \cdot \sqrt{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \|z_1\| \cdot \|z_2\|. \end{aligned}$$

O que prova 2.

3) Temos que se $z_1 = 0$, então o resultado segue e, por isso, vamos supor que $z_1 \neq 0$.

Para $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} 0 \leq \|\alpha z_1 + z_2\|^2 &= (\alpha z_1 + z_2) \cdot \overline{(\alpha z_1 + z_2)} = (\alpha z_1 + z_2) \cdot (\alpha \overline{z_1} + \overline{z_2}) \\ &= \alpha^2 z_1 \cdot \overline{z_1} + \alpha z_1 \cdot \overline{z_2} + \alpha \overline{z_1} \cdot z_2 + z_2 \cdot \overline{z_2} \\ &= \alpha^2 \|z_1\|^2 + \alpha(z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2) + \|z_2\|^2 \end{aligned}$$

Pelo item 1, sabemos que $z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2 \in \mathbb{R}$. Portanto,

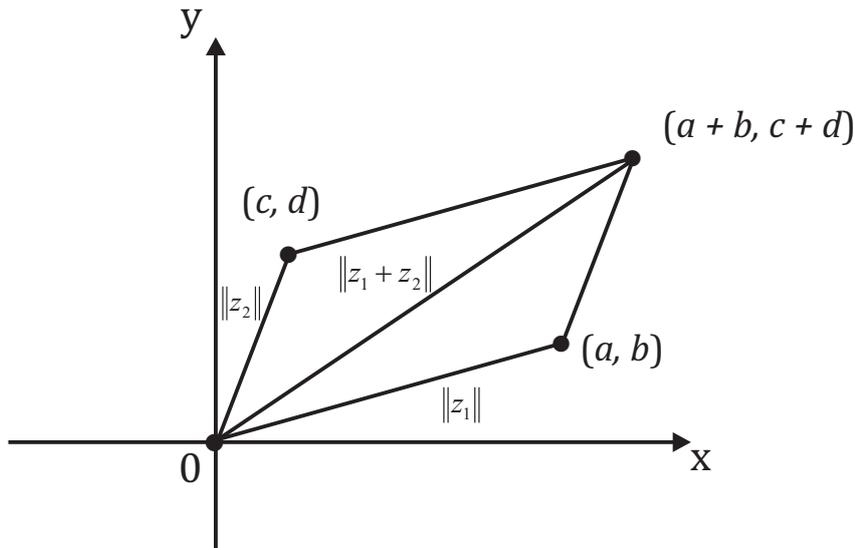
$$\alpha^2 \|z_1\|^2 + \alpha(z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2) + \|z_2\|^2 \geq 0,$$

é uma equação do segundo grau na variável α com coeficientes reais. Desse modo, seu discriminante é no máximo zero, ou seja,

$$\Delta = b^2 - 4ac \leq 0.$$

Mas,

$$b^2 - 4ac = (z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2)^2 - 4 \cdot \|z_1\|^2 \|z_2\|^2 \leq 0.$$

Figura 2.2: Soma de z_1 e z_2 .

Portanto, $(z_1 \cdot \bar{z}_2 + \bar{z}_1 \cdot z_2)^2 \leq 4 \cdot \|z_1\|^2 \|z_2\|^2$. Por conseguinte,

$$z_1 \cdot \bar{z}_2 + \bar{z}_1 \cdot z_2 \leq 2 \cdot \|z_1\|^2 \|z_2\|^2. \quad (2.3)$$

Desenvolvendo $\|z_1 + z_2\|^2$ e usando a desigualdade de (2.3), obtemos

$$\begin{aligned} \|z_1 + z_2\|^2 &= (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = (z_1 \bar{z}_1 + z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2) \\ &\leq \|z_1\|^2 + \|z_2\|^2 + 2\|z_1\| \cdot \|z_2\| = (\|z_1\| + \|z_2\|)^2, \end{aligned}$$

isto é,

$$\|z_1 + z_2\|^2 \leq (\|z_1\| + \|z_2\|)^2. \quad (2.4)$$

Tomando a raiz quadrada em ambos os lados de (2.4), obtemos

$$\|z_1 + z_2\| \leq \|z_1\| + \|z_2\|.$$

■

Justifiquemos a denominação da propriedade 3 da Proposição 2.0.3. Vamos olhar os números complexos de forma geométrica, $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (o plano cartesiano). Dados os complexos $z_1 = (a, b)$ e $z_2 = (c, d)$, então $z_1 + z_2 = (a + c, b + d)$. Representando esses complexos no plano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, obtemos a seguinte representação dada na Figura 2.2.

A desigualdade $\|z_1 + z_2\| \leq \|z_1\| + \|z_2\|$ traduz simplesmente o fato de que, em um triângulo, o comprimento de um de seus lados é menor do que a soma dos comprimentos dos outros dois lados. Isso justifica o termo desigualdade triangular.

Para $z = a + bi$ com $\|z\| \neq 0$, temos geometricamente

em que o ângulo θ medido no sentido anti-horário, chama-se argumento de z . Da Figura 2.3, segue que

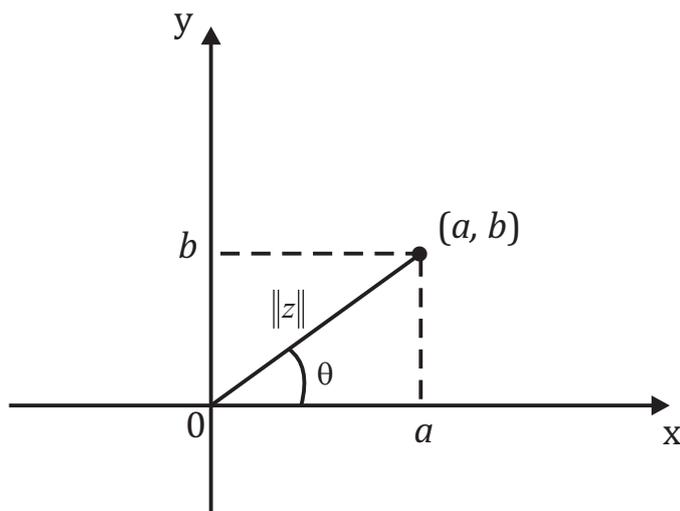


Figura 2.3: O complexo z com o argumento θ .

$$\cos \theta = \frac{a}{\|z\|} \quad \text{e} \quad \text{sen} \theta = \frac{b}{\|z\|}.$$

Logo, $a = \|z\| \cdot \cos \theta$ e $b = \|z\| \cdot \text{sen} \theta$. Consequentemente,

$$z = \|z\| \cdot (\cos \theta + i \cdot \text{sen} \theta),$$

que é a representação **polar** ou **trigonométrica** do complexo z .

A partir dos Cálculos diferencial e integral, sabe-se que, $e^x \cos x$ e $\text{sen} x$ têm as seguintes representações em séries de potências:

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \dots, \\ \cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)x^{2n}}{(2n)!} + \dots, \\ \text{sen} x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)x^{2n-1}}{(2n-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots, \end{aligned}$$

Portanto,

$$e^{i\theta} = 1 + \theta i - \frac{\theta^2}{2!} - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \frac{\theta^5}{5!} \dots$$

Daí,

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \text{sen} \theta,$$

que é conhecida como a fórmula de Euler.

Exemplo 2.0.4 Estabeleça as fórmulas

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{e} \quad \text{sen} \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

usando a fórmula de Euler.

Solução: Sabemos que:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta \quad \text{e} \quad e^{-i\theta} = \cos \theta - i \operatorname{sen} \theta. \quad (2.5)$$

Desse modo, somando $e^{i\theta}$ e $e^{-i\theta}$, obtemos

$$2 \cos \theta = e^{i\theta} + e^{-i\theta} \quad \text{ou} \quad \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2},$$

Similarmente, tem-se que

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$



A partir da fórmula de Euler, obtém-se também que $z = \|z\| \cdot (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) = \|z\| e^{i\theta}$, isto é,

$$z = \|z\| e^{i\theta}. \quad (2.6)$$

A representação do complexo z dada em (2.6) é interessante (mais prático) no cálculo de produto de números complexos. Considerando $z_1 = \|z_1\| e^{i\theta_1}$ e $z_2 = \|z_2\| e^{i\theta_2}$ e assumindo que as propriedades das funções exponenciais são válidas para expoentes complexos, obtemos

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= \|z_1\| e^{i\theta_1} \cdot \|z_2\| e^{i\theta_2} = \|z_1\| \cdot \|z_2\| e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \\ &= \|z_1\| \cdot \|z_2\| \cdot (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)). \end{aligned}$$

Desse modo, geometricamente, multiplicamos dois números complexos, multiplicando seus dois módulos e somando seus argumentos.

Exemplo 2.0.5 Se $z_1 = 5(\cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2})$ e $z_2 = 8(\cos \frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{6})$, então

$$z_1 \cdot z_2 = 40 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} \right).$$



Sejam $z = \|z\| e^{i\theta}$ e k um número natural. Considerando mais uma vez as propriedades da exponencial, temos

$$z^k = \underbrace{\|z\| e^{i\theta} \dots \|z\| e^{i\theta}}_{k \text{ vezes}} = \|z\|^k e^{i(k\theta)},$$

ou seja,

$$z^k = \|z\|^k e^{i(k\theta)}.$$

$$z^{-k} = \|z\|^{-k} e^{i(-k\theta)} = \|z\|^{-k} (\cos k\theta + i \operatorname{sen} k\theta).$$

Teorema 2.0.6 (De Moivre). *Sejam $z = \|z\| \cdot (\cos \theta + i \cdot \text{sen} \theta) \in \mathbb{C}$ e $k \in \mathbb{Z}$. Então*

$$z^k = \|z\|^k (\cos k\theta + i \cdot \text{sen} k\theta). \quad (2.7)$$

A fórmula em (2.7) é muito proveitosa para o cálculo das raízes complexas da equação (**raízes n -ésima de α**)

$$z^k = \alpha, \quad (2.8)$$

em que $\alpha \in \mathbb{C}$ e $n \geq 1$. Assim,

$$z^k = \alpha \Leftrightarrow z = \sqrt[n]{\alpha}.$$

É claro que se $\alpha = 0$ então $z = 0 \in \mathbb{C}$ é a única solução de (2.8). Desse modo, vamos assumir que $\alpha \neq 0$. Consideremos a forma trigonométrica de α ,

$$\alpha = \|\alpha\| \cdot (\cos \theta + i \cdot \text{sen} \theta).$$

Seja $\sqrt[n]{|\alpha|}$ a raiz n -ésima positiva¹ de α . Considerando

$$z_k = \sqrt[n]{|\alpha|} \left(\cos \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \text{sen} \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right) \quad \text{com } k \in \mathbb{Z}, \quad (2.9)$$

temos que

$$\begin{aligned} z_k^n &= \sqrt[n]{|\alpha|}^n \left(\cos \left(\frac{n(\theta + 2k\pi)}{n} \right) + i \text{sen} \left(\frac{n(\theta + 2k\pi)}{n} \right) \right) \\ &= |\alpha| (\cos(\theta + 2k\pi) + i \text{sen}(\theta + 2k\pi)) = \alpha, \end{aligned}$$

pois as funções seno e cosseno são periódicas de período 2π . Portanto, todo número complexo como em (2.9) é raiz da equação em (2.8) e, para determinar todas as suas raízes, basta considerarmos $k = 0, 1, \dots, n - 1$. Por isso, a equação $z^n = \alpha$ possui n raízes complexas distintas,

$$z_k \quad \text{com } k = 0, 1, \dots, n - 1. \quad (2.10)$$

Geometricamente, as raízes de $z^n = \alpha$ são n pontos da circunferência C de raio $r = \sqrt[n]{|\alpha|}$ e centro $(0, 0)$. Além disso, unindo esses pontos por segmentos de retas, obtemos um polígono regular de n lados inscritos em C .

Particularmente, quando $\alpha = 1$, as raízes da equação $z^n = 1$ são as raízes n -ésimas da unidade que, por (2.9), são dadas (considerando o fato de $\theta = 0$) por

$$z_k = \cos \left(\frac{2k\pi}{n} \right) + i \text{sen} \left(\frac{2k\pi}{n} \right). \quad (2.11)$$

O conjunto das raízes n -ésimas raízes da unidade será simbolizado por U_n , $U_n = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}$, ou seja,

$$U_n = \left\{ z_k = \cos \left(\frac{2k\pi}{n} \right) + i \text{sen} \left(\frac{2k\pi}{n} \right) : k = 0, 1, \dots, n - 1 \right\}. \quad (2.12)$$

¹Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, existe único número real $\beta > 0$ tal que $\beta^n = \alpha$.

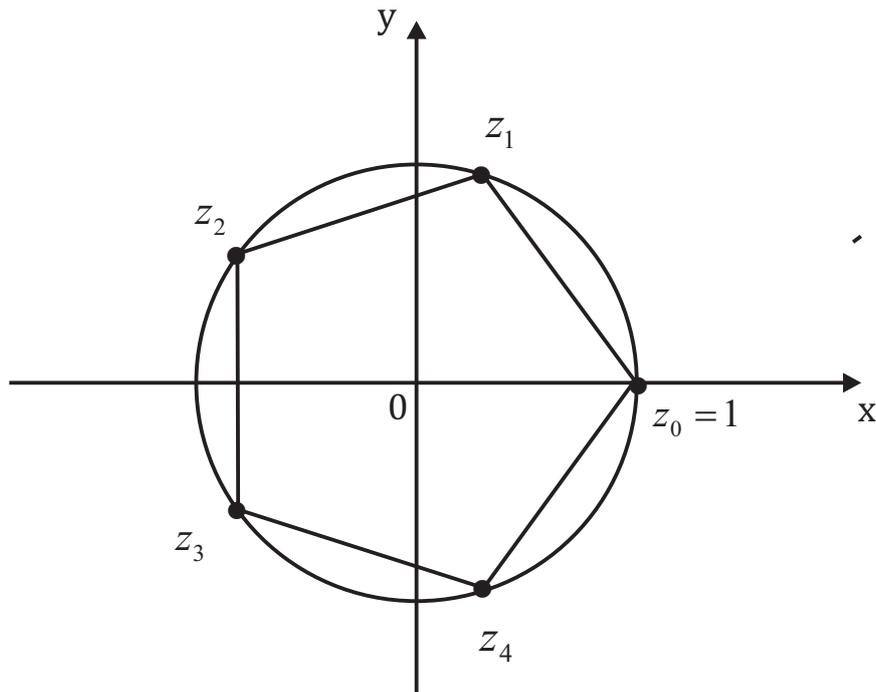


Figura 2.4: Representação gráfica de U_5 .

Observa-se que

$$U_n = \{\xi^k : k \in \mathbb{C}\},$$

em que $\xi = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i \cdot \text{sen}\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = e^{\frac{2\pi i}{n}}$.

Exemplo 2.0.7 Determinar as raízes quintas da unidade.

Solução: Vamos determinar os complexos z tais que $z^5 = 1$. Por (2.12), sabemos que

$$U_5 = \left\{ z_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{5}\right) + i \text{sen}\left(\frac{2k\pi}{5}\right) : k = 0, 1, 2, 3, 4 \right\}.$$

Assim,

$$k = 0 \Rightarrow z_0 = 1,$$

$$k = 1 \Rightarrow z_1 = \cos \frac{2\pi}{5} + i \text{sen} \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1+i(\sqrt{10+2\sqrt{5}})}{4},$$

$$k = 2 \Rightarrow z_2 = \cos \frac{4\pi}{5} + i \text{sen} \frac{4\pi}{5} = \frac{-\sqrt{5}-1+i(\sqrt{10-2\sqrt{5}})}{4},$$

$$k = 3 \Rightarrow z_3 = \cos \frac{6\pi}{5} + i \text{sen} \frac{6\pi}{5} = \frac{-\sqrt{5}-1-i(\sqrt{10-2\sqrt{5}})}{4},$$

$$k = 4 \Rightarrow z_4 = \cos \frac{8\pi}{5} + i \text{sen} \frac{8\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1-i(\sqrt{10+2\sqrt{5}})}{4}.$$



Capítulo 3

Números Complexos e Circuitos Elétricos

Para mais detalhes dos conceitos aqui estudados sugerimos as referências [5] e [6]. Por outro lado, base da parte histórica desta seção encontra-se [5].

Neste capítulo, dedicaremos apenas a aplicações dos números complexos em circuitos de corrente alternada, ou seja, aplicações referentes à utilização da unidade imaginária i junto ao estudo dos números complexos para resolver problemas que envolvem esta para o estudo da Física. Para que não haja confusão entre I , símbolo de corrente elétrica, e i , unidade imaginária, usaremos j como unidade imaginária na representação algébrica $a + bj$, pois esta é a forma que os engenheiros eletricitista utilizam para resolver questões relacionadas com o auxílio dos números complexos.

A primeira aplicação de números complexo à teoria de circuitos elétricos parece ter sido realizada pelo cientista alemão Hermann Von Helmholtz (1821-1894). A aplicação de números complexos na análise de circuitos elétricos de corrente alternada (CA) foi disseminada nos Estados Unidos por Arthur Edwin (1861-1936) e Charles Steinmetz (1865-1923) com auxílio de Julius Berg (1871-1941) no final do século XIX. Em 1823, Edwin adotou o termo Impedância (inventado por Heavisíde) assim como os números complexos para os elementos dos circuitos elétricos CA o que foi seguido por Steinmetz. Desde então, os números complexos são fundamentais para a Engenharia Elétrica.

Em 1882, na cidade de Nova York, Thomas Edison construiu a primeira usina geradora de energia em grande escala. Com o objetivo de vender suas lâmpadas elétricas (inventada poucos anos atrás); Thomas junto com sua companhia (que passou a se chamar General Electric) é atualmente uma das maiores fabricantes de equipamentos elétricos no mundo.

Sua proposta era empregar o sistema de corrente contínua (CC) para equipamentos elétricos; mas por outro lado, George Westinghouse propôs o sistema de corrente alternada (CA). Esse debate tecnológico (que durou 20 anos), teve como vencedor o sistema proposto por George Westinghouse (CA) em transmissões de longa distância. Atual-

mente, esse sistema se espalha pelos Estados Unidos e por outros países, daí temos que para qualquer dispositivo elétrico “ligado” a uma tomada emprega um circuito CA.

3.1 Representação dos Números Complexo e Circuitos Elétricos

Os números complexos podem ser definidos de diversas formas, representando as mais diversas grandezas físicas e entidades matemáticas. Os números complexos foram criados, a princípio, para facilitar os cálculos de equações que possuíam raízes quadradas de números negativos. Verificou-se que poderiam ser representados de outras formas (matricialmente, como um ponto no plano cartesiano, como um vetor, etc.) e assim, realizar diversas operações nas mais variadas aplicações.

Passaremos a representar o número complexo como:

$$z = a + bj. \quad (3.1)$$

Como, qualquer número complexo é completamente caracterizado por um par de números reais, podemos representá-lo em um sistema de coordenadas cartesianas.

Tanto na eletrônica como na eletricidade, a análise de circuitos de corrente alternada é feita com o auxílio dos números complexos. Grandeza como a impedância (em ohms) e a potência aparente (em volt-ampére) são exemplos de quantidades complexas. A função impedância, ou simplesmente impedância, é a relação entre os fasores da tensão e da corrente.

Por outro lado, a impedância pode ser calculada através do número complexo $z = R + jX$, ou na forma polar $z = ||z|| \cdot (\cos \theta + j \cdot \text{sen} \theta)$, onde $j^2 = -1$, θ é o ângulo (argumento) de defasagem entre a tensão aplicada e a corrente no circuito, $||z||$ é o módulo, R é a resistência elétrica e X é a resultante das reatâncias¹ indutivas e capacitivas do circuito.

Já a potência aparente, é o número complexo $P = Pr + j \cdot Px$, ou na sua forma polar $\rho = ||\rho|| \cdot (\cos \theta + j \cdot \text{sen} \theta)$, onde $j^2 = -1$, $||\rho||$ é o módulo, θ é o ângulo de defasagem entre a tensão e a corrente, Pr é a potência real ou ativa (em watts), Px é a potência reativa (em volt-ampére reativo). Junto a este, pode-se calcular o aproveitamento da energia que está sendo gasta a partir do valor dos $\cos \theta$ (fator² de potência).

Agora apresentaremos algumas definições referentes a aplicações da unidade imaginária em circuitos de corrente alternada (CA) para circuitos indutivos e capacitivos.

¹ *Reatância* é a resistência oferecida à passagem de corrente alternada por um indutor ou capacitor num circuito elétrico.

² *Fator de potência* é a relação entre as potências ativa e reativa.

Definição 3.1.1 *Corrente elétrica* é o fluxo ordenados de cargas elétricas em um determinado condutor.

A unidade no SI (Sistema internacional) de corrente é o coulomb por segundo, denominado ampère (A):

$$1\text{ampère} = 1A \equiv 1\text{coulomb por segundo} = 1C/s.$$

Definição 3.1.2 *Corrente Alternada* é toda corrente elétrica que muda periodicamente de sentido e intensidade.

Definição 3.1.3 Denomina-se **circuito elétrico** ao conjunto de aparelhos onde se pode estabelecer uma corrente elétrica.

Definição 3.1.4 **Fasor** é um vetor que gira em sentido anti-horário ao redor da origem, com frequência angular .

A partir da relação $U = Ri$, estudada na física do ensino médio e que utiliza dos números reais, torna-se $U = Zi$, em que U é a tensão, Z é a impedância e i é a corrente elétrica, sendo que estas grandezas como acabamos de ver podem ser representadas através de números complexos.

Exemplo 3.1.5 Uma fonte de tensão, de valor eficaz $220\angle 0^\circ$, alimenta uma carga de impedância $Z = (10 + 10j)\text{ohm}$. Determinar a corrente elétrica fornecida por esta fonte.

Solução: Temos pela 1ª lei de Ohm a seguinte relação:

$$U = Ri \Rightarrow i = \frac{U}{Z}.$$

Para efetuarmos essa divisão, é preferível obtermos U e Z na sua forma polar. Daí, já temos $U = 220\angle 0^\circ = 220 \cdot (\cos \theta + j \cdot \text{sen} \theta)$, e agora precisamos obter a forma polar de Z :

$$Z = 10 + 10j \Rightarrow ||Z|| = \sqrt{10^2 + 10^2} = 10\sqrt{2}.$$

Logo,

$$\cos \theta = \frac{10}{10\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{e} \quad \text{sen} \theta = \frac{10}{10\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = 45^\circ.$$

Desse modo,

$$10 + 10j = 10\sqrt{2} \cdot (\cos 45^\circ + i \cdot \text{sen} 45^\circ) = 10\sqrt{2}\angle 45^\circ.$$

Portanto, a corrente fornecida pela fonte é dada por

$$\begin{aligned} i &= \frac{U}{Z} = \frac{220}{10\sqrt{2}} [\cos(0^\circ - 45^\circ) + i \cdot \text{sen}(0^\circ - 45^\circ)] = \\ &= 11\sqrt{2} [\cos(-45^\circ) + i \cdot \text{sen}(-45^\circ)] \\ &= 11\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}j \right) = 11 - 11j \quad (\text{ou } 11\sqrt{2} \angle -45^\circ). \end{aligned}$$

Agora para representa-lo na forma exponencial utilizamos a identidade de Euler, ou seja:

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \text{sen} \theta. \quad (3.2)$$

Multiplicando ambos os membros da identidade de Euler pelo número real w , obtemos

$$we^{j\theta} = w \cos \theta + wj \cdot \text{sen} \theta \quad (3.3)$$

Comparando as equações (3.1) e (3.3) temos:

$$w \cdot \cos \theta = a \quad (3.4)$$

$$w \cdot \text{sen} \theta = b \quad (3.5)$$

Elevando as equações (3.4) e (3.5) ao quadrado, temos:

$$w^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow w = \sqrt{a^2 + b^2}. \quad (3.6)$$

Dividindo a equação (3.5) pela equação (3.4), segue que

$$\frac{b}{a} = \tan \theta \Rightarrow \theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right).$$

A representação de um número complexo na forma polar é essencialmente a mesma da forma exponencial, exceto por uma pequena diferença de simbologia, ou seja:

$$\hat{w} = w \angle \theta.$$

Agora apresentaremos algumas definições referentes a aplicações da unidade imaginária em circuitos de corrente alternada (CA) para circuitos indutivos e capacitivos.

A partir das definições 3.1.1, 3.1.2, 3.1.3 e 3.1.4, obtém-se a representação gráfica, dada pela Figura 3.1.

A **fem** (Força Eletromotriz), geralmente denotada por ε , é a propriedade de um dispositivo, que tende a produzir corrente elétrica. Um modo para representar uma fem (sua unidade no SI é o Volt), e entre outras quantidades oscilatórias, é por meio de um diagrama fasorial, conforme a Figura 3.1. Daí, ao pensar em um gerador CA, ou oscilador, como uma bateria cuja voltagem de saída oscila de forma senoidal, a fem

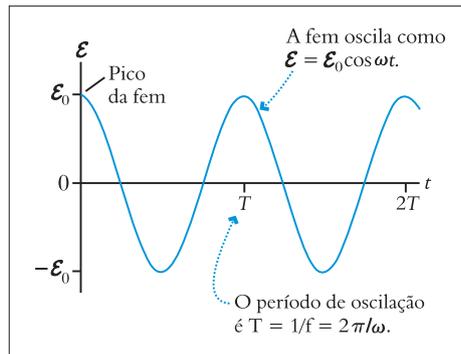


Figura 3.1: Representação da fem.

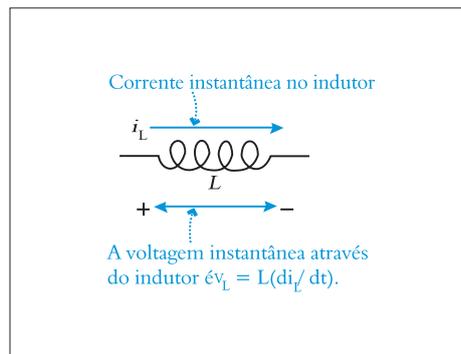


Figura 3.2: Representação do indutor.

instantânea de um gerador ou oscilador, representada pela Figura 1, pode ser escrita como sendo:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \cos \omega t,$$

onde ε_0 é o valor de pico da fem, ou fem máxima, e $\omega = 2\pi f$ é a frequência angular, em radianos por segundo (rad/s).

Aplicando essas definições aos circuitos indutivos e capacitivos alimentados a uma fonte de corrente alternada (CA) teremos que nos circuitos indutivos, a corrente CA em um indutor “está atrasada” em relação a tensão do indutor em $\frac{\pi}{2} rad$, ou 90° . Logo, a partir da Figura 3.4, pode-se analisar o comportamento da corrente e da tensão no indutor.

Podemos observar que a corrente é máxima em um quarto de período após a tensão atingir seu máximo. O ângulo do fasor da corrente observada pelo diagrama fasorial é $\frac{\pi}{2} rad$, atrasado em relação ao ângulo do fasor da tensão.

Se a corrente instantânea i_l no indutor for variável, teremos a seguinte relação:

$$v_l = L \frac{di_l}{dt}. \quad (3.7)$$

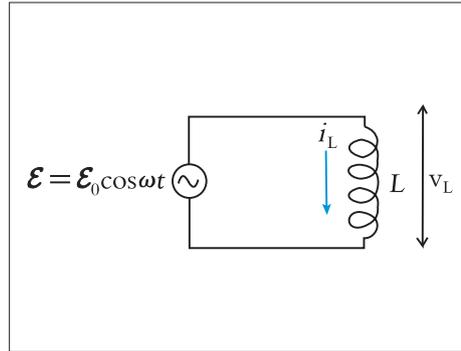


Figura 3.3: Indutor e circuito CA.

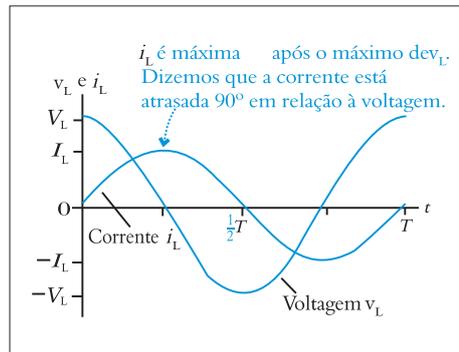


Figura 3.4: O gráfico da tensão e da corrente do indutor.

Aplicando este a um circuito CA, o indutor L que está conectado à fonte CA, de maneira que a tensão através do indutor é igual a fem: $v = \varepsilon = \varepsilon_0 \cos \omega t$. Temos então a relação

$$v_l = V_l \cos \omega t, \quad (3.8)$$

onde V_l é a tensão de pico, ou máxima, no indutor.

Por outro lado, para determinarmos a corrente do indutor i_l integrando a equação (3.8) e reescrevendo a equação (3.7) obteremos:

$$di_l = \frac{V_l}{L} \cos \omega t dt. \quad (3.9)$$

Agora, integrando a equação (3.4), obtemos:

$$\begin{aligned} i_l &= \frac{V_l}{L} \int \cos \omega t dt = \frac{V_l}{\omega L} \text{sen} \omega t = \frac{V_l}{\omega L} \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right), \\ &= I_l \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned} \quad (3.10)$$

onde $I_l = \frac{v_l}{L}$ que é a corrente de pico, ou máxima no indutor.

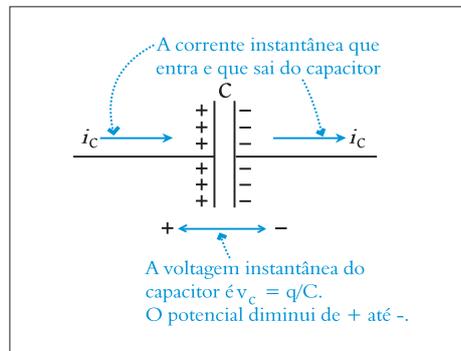


Figura 3.5: Representação de um capacitor.

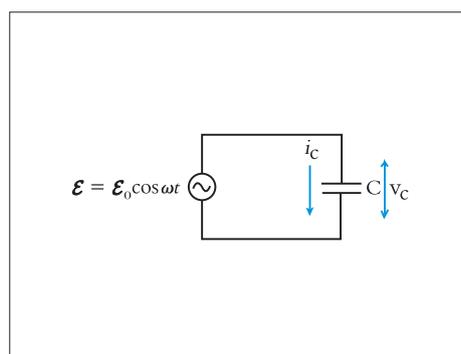


Figura 3.6: Um circuito CA capacitivo.

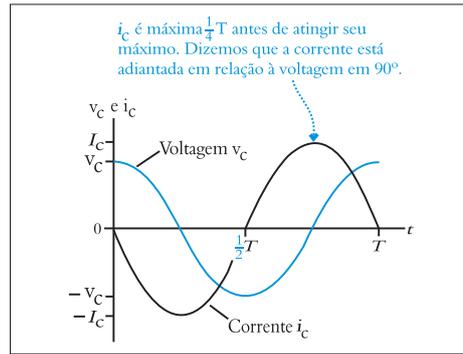


Figura 3.7: Gráfico da tensão e da corrente do capacitor.

Por outro lado, nos circuitos capacitivos a corrente CA que entra e que sai de um capacitor está “adiantada” em $\frac{\pi}{2} rad$, ou 90° , com relação à tensão através do capacitor.

De forma análoga ao circuito indutivo e a partir do diagrama fasorial, o gráfico da tensão e da corrente i_c instantâneas, o pico da corrente está em um quarto de período ADIANTADA em relação ao pico da tensão, que por conseguinte, o ângulo de fase do fasor da corrente é de $\frac{\pi}{2} rad$ (que corresponde a um quarto de ciclo) maior do que o ângulo de fase do fasor da tensão. O que mostra que a corrente i_c que carrega um capacitor C , a tensão instantânea do capacitor é dada por $v_c = \frac{q}{C}$, onde $\pm q$ são as cargas nas duas placas do capacitor neste instante de tempo.

A partir do circuito CA capacitivo, o capacitor está em paralelo com a fonte, daí a tensão do capacitor é igual a fem: $v_c = \varepsilon = \varepsilon_0 \cos \omega t$.

Logo,

$$v_c = V_c \cos \omega t, \quad (3.11)$$

onde V_c é a tensão de pico, ou máxima, do capacitor.

Para determinarmos a corrente que entra e a corrente que sai do capacitor, vamos usar a seguinte equação:

$$v_c = \frac{q}{C} \Rightarrow q = C.v_c = CV_c \cos \omega t.$$

Temos que a corrente é a taxa ao qual a carga flui através dos fios, ou seja, $i_c = \frac{dq}{dt}$; assim,

$$i_c = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}(CV_c \cos \omega t) = -\omega CV_c \text{sen}(\omega t).$$

Fazendo uso da identidade trigonométrica $-\text{sen}(x) = \cos(x + \frac{\pi}{2})$, obtém-se:

$$i_c = \omega CV_c \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right). \quad (3.12)$$

3.2 Observações adicionais

A partir destas relações pode-se estabelecer essas quantidades de maneira que venham a ser utilizadas a unidade j como unidade imaginária. Partindo das igualdades em (3.10) e (3.12), obtém-se:

$$i_L = \frac{V_L}{\omega L} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = i_{L\max} \left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow i_{Li_c\max} = \frac{V_L}{\omega L}.$$

Logo,

$$X_L = \frac{V_L}{\omega L} = \omega L,$$

em que X_L representa a resistência (para reatância indutiva). Tem-se também

$$\begin{aligned} i_c &= \omega C V_c \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = i_{c\max} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \\ &\Rightarrow i_{c\max} = \omega C V_c \Rightarrow X_C = \frac{1}{\omega C}, \end{aligned}$$

em que X_C é a resistência (para reatância capacitiva).

Com relação à impedância, temos que

$$Z = R + X.$$

Sabemos que $v(t) = R \cdot i(t)$, em que $i(t) = i_{\max} \cos(\omega t + \theta)$. Assim,

$$v(t) = R i_{\max} \cos(\omega t + \theta) \quad \text{e} \quad v(t) = \text{Re} [R i_{\max} e^{j(\omega t + \theta)}].$$

Então, para o capacitor teremos a seguinte relação:

$$\begin{aligned} i(t) &= C \frac{dv(t)}{dt} \Rightarrow i(t) = \text{Re} [j\omega C V e^{j(\omega t + \theta)}] \\ &\Rightarrow X_C = \frac{V}{i(t)} = \frac{1}{j\omega C} \quad \text{e} \quad X_C = \frac{1}{\omega C} \angle -\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Por outro lado, para o indutor,

$$\begin{aligned} v(t) &= L \frac{di(t)}{dt} \Rightarrow v = j\omega L i \Rightarrow X_L = \frac{V}{i} = j\omega L \\ &\Rightarrow X_L = \omega L \angle \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Por seguinte, estabelecemos as seguintes formas de representação para a unidade j como sendo:

Para circuito capacitivo

$$Z = R + \frac{1}{j\omega C}.$$

Para circuito indutivo

$$Z = R + j\omega L.$$

3.3 Conclusão

Neste trabalho, consideramos o conjunto dos números complexos, \mathbb{C} , dotado de suas duas operações ordinárias, soma e produto. Foram destacadas as principais propriedades inerentes a estas operações, de modo a considerá-las quando do estudo das aplicações dos números complexos na Teoria dos Circuitos Elétricos. Foram abordados tópicos referentes à utilização da unidade imaginária, a qual é uma ferramenta imprescindível no estudo da engenharia elétrica.

Bibliografia

- [1] ÁVILA, Geraldo. *Variáveis Complexas e Aplicações*. 3ª ed. Rio de Janeiro. LTC, 2008.
- [2] BOYER, C. B. *História da Matemática*. São Paulo. EDusp, 1974.
- [3] DANTE, L. R. *Matemática: Contexto e Aplicações*. 1ª ed. Vol. 3. São Paulo. Editora Ática, 2010.
- [4] GILBERO, G.G. *O Romance das Equações Algébricas*. Makron Books, 1997.
- [5] KNIGHT, R. *Física 3: Uma Abordagem Estratégica*. Tradução: Manuel Almeida Andrade Neto. 2ª ed. Porto Alegre: Bookman, 2009.
- [6] RAMALHO, F. J. e GILBERTO, F. N. *Os Fundamentos da Física*. 6ª ed. São Paulo: Moderna, 1993.
- [7] SPIEGEL, M. R. *Variáveis Complexas: Resumo da Teoria*. Tradução: José Raimundo Braga Coelho. São Paulo: Mc Graw-Hill do Brasil; Brasília, INL, 1973. (Coleção Schaum).