UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIAS – CCT
DEPARTAMENTO DE MATEÁTICA - DM
CURSO DE GRADUAÇÃO EM LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

GILVANDRO CORREIA DE MELO JÚNIOR

UMA ABORDAGEM SOBRE TAXA DE VARIAÇÃO E DERIVADA

CAMPINA GRANDE – PB
2011

GILVANDRO CORREIA DE MELO JÚNIOR

UMA ABORDAGEM SOBRE TAXA DE VARIAÇÃO E DERIVADA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento à exigência para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientador (a): Prof.Dr. Juarez Dantas Souza

CAMPINA GRANDE – PB
2011

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL – UEPB

M491u Melo Junior, Gilvandro Correia de.

Uma abordagem sobre derivada e taxa de variação [manuscrito] / Gilvandro Correia de Melo Junior. – 2011.

31 f. : il. color.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Tecnológicas, 2011.

“Orientação: Prof. Dr. Juarez Dantas de Souza, Departamento de Matemática e Estatística”.

1. Matemática - Aplicações. 2. Derivada. 3. Taxa de Variação. I. Título.

21. ed. CDD 516

GILVANDRO CORREIA DE MELO JUNIOR

UMA ABORDAGEM SOBRE TAXA DE VARIAÇÃO E DERIVADA

Monografia apresentada no Curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências para obtenção do Título de Licenciado em Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Juarez Dantas de Souza
Departamento de Matemática – CCT/UEPB (10)
Orientador

Prof. Dr. **Vandenberg Lopes Vieira**
Departamento de Matemática – CCT/UEPB
Examinador

Onildo dos Reis Freire

Prof. Ms. Onildo Reis Freire
Departamento de Matemática – CCT/UEPB
Examinador

Campina Grande, 15 de dezembro de 2011

RESUMO

A derivada e a taxa de variação surgiram historicamente da necessidade de resolver problemas ligados a geometria e a física. Cientistas como Gottfried Leibniz e Issac Newton deram grandes contribuições no estudo da derivada e da taxa de variação desenvolvendo o que hoje conhecemos por Cálculo. O conceito de derivada e taxa de variação tem aplicações em diversas áreas como na Física e na Geometria. Entre elas estão os problemas de tangencia, de velocidade, e taxas relacionadas. A derivada de uma função em um ponto corresponde à inclinação da reta tangente a uma curva. Já velocidade média de um corpo pode ser vista como a taxa de variação entre o deslocamento e o tempo gasto neste deslocamento. Já a velocidade instantânea corresponde a derivada. As aplicações da derivada e da taxa de variação na maioria das vezes não são abordadas de forma ampla nos cursos de Cálculo Diferencial, porem essas aplicações são fundamentais no sentido de justificar a importância desses conceitos.

Palavras Chave: Derivada/ Taxa de Variação/Aplicações

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O conceito de Derivada e Taxa de Variação são fundamentais na resolução de varias aplicações, como na Física e Geometria, no entanto nem sempre esses conceitos são compreendidos nos cursos iniciais de cálculo. Na antiguidade os estudiosos e filósofos já se preocupavam com problemas relacionados a tangentes, movimento dos corpos, entre outros. Todos ligados diretamente com o que nós entendemos hoje por derivadas e taxa de variação. A construção destes conceitos não foi desenvolvida de uma hora para outra, mas sim com esforços de grandes matemáticos como Issac Newton e Gottfried Leibniz.

O conceito de derivada pode ser entendido como a inclinação de uma reta tangente a uma curva ou como uma taxa de variação instantânea entre duas grandezas. Para melhor entender o conceito de taxa de variação é importante conhecer o significado de incrementos e diferenciais. Utilizando esses conceitos é possível resolver vários problemas ligados geometria, mecânica e etc..

São muitas as aplicações da derivada e da taxa de variação. Neste trabalho apresentam-se aplicações, envolvendo diferenciais, retas tangentes e taxas de variação, que são de fundamental importância para compreensão do conceito de derivada.

2. DERIVADA E TAXA DE VARIAÇÃO UMA ABORDAGEM HISTÓRICA

A origem da derivada está ligada diretamente com a preocupação em resolver problemas geométricos clássicos como os de tangência, e também a outros problemas relacionados a mecânica, velocidade, fluxo, aceleração e etc.. Estes problemas surgiram desde a antiguidade na Grécia antiga, embora estas questões tenham sido originalmente tratadas mais filosoficamente que matematicamente. A idéia de derivada só veio a ser desenvolvida entre os séculos XVII e XIII com o surgimento da Geometria Analítica e a dedicação de vários matemáticos como Pierre Fermat, René Descartes, John Wallis, Issac Barrow, Issac Newton e Gottfried Leibniz entre outros. O desenvolvimento do cálculo não é mérito de apenas um matemático, mas sim de vários como os citados acima. Em nosso trabalho vamos destacar Issac Newton Figura 1 e Gottfried Leibniz Figura 2 os que deram a maior contribuição para a criação do Cálculo e conseqüentemente para os conceitos de taxa de variação e derivada.

Isaac Newton (1642-1727) nasceu na Inglaterra na pequena cidade de Woolsthorpe Manor. Newton é considerado um dos maiores cientistas de todos os tempos contribuindo em grandes áreas da ciência entre as quais estão a Física e a Matemática. Newton começou a desenvolver o seu “cálculo de fluxions” entre os seus primeiros esforços científicos em 1663. Para Newton uma curva era gerada pelo movimento contínuo de um ponto. Feita esta suposição a abscissa e a ordenada de um ponto gerador passam a ser em geral quantidades variáveis. A uma quantidade variável ele dava o nome de fluente (uma quantidade que flui) e a sua taxa de variação dava o nome de fluxo do fluente.

Se um fluente como a ordenada do ponto gerador era indicada por y, então o fluxo desse fluente por y', que em notação moderna seria $\frac{dy}{dt}$.

Figura 1. Issac Newton

Gottfried Leibniz (1646 - 1716) nasceu na Alemanha na pequena cidade Leipzig. Leibniz divide com o seu rival Newton a invenção do cálculo. Ele considerado um dos grandes gênios da história graças as suas contribuições para a matemática principalmente no cálculo integral.

Figura 2. Gottfried Leibniz

Se para Newton a idéia de derivada estava relacionada diretamente com a taxa de variação ou o movimento, para Leibniz esta idéia estava ligada diretamente com a e idéia de diferencial ou diferenciais. Para Leibniz diferencial era a diferença entre dois valores infinitamente próximos de uma variável. Leibniz também foi o responsável pela criação da notação que usamos hoje como, por exemplo, dx, dy entre outras como a notação que usamos hoje para integral ($\int$ que significa soma)

3. A DERIVADA DE UMA FUNÇÃO

DEFINIÇÃO: Dada uma função $f: I \to R$, definida no intervalo aberto I, e x_0 um ponto pertencente ao intervalo I, chamamos de derivada da função f em x_0, e denotamos por $f'(x_0)$ o limite dada por:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \qquad (1)$$

Quando o limite acima existe diz-se que a função f é diferenciável em x_0. Do contrário, dizemos que a função não possui derivada no ponto x_0 ou que f não é derivável em x_0.

Como Δx representa uma pequena variação em x, próximo de um x_0 ou seja, tomando $x = x_0 + \Delta x$ ou $\Delta x = x - x_0$, podemos expressar a derivada de f em x_0 como sendo:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad (2)$$

Agora vamos usar a definição de derivada para calcular a derivada de algumas funções elementares.

EXEMPLO 1: $f(x) = x^2$.

SOLUÇÃO: Sabe-se que;

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$$

Portanto, $f'(x) = 2x$.

EXEMPLO 2: $f(x) = c$, com $c \in R$. (função constante).

SOLUÇÃO: Como

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Temos que;

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c - c}{\Delta x}$$

$$f'(x) = 0$$

Portanto a derivada de uma função constante é sempre igual zero.

EXEMPLO 3: $f(x) = ax + b$, com $a, b \in R$ (função afim)

SOLUÇÃO: Sabe-se que:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Logo;

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a(x + \Delta x) + b - (ax + b)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a\Delta x}{\Delta x}$$

$$f'(x) = a$$

EXEMPLO 4: $f(x) = x^n$, com $n \in IN$ e $x \neq 0$.

SOLUÇÃO: Usando a definição de derivada temos que:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$

Aplicando o teorema binomial a $(x + \Delta x)^n$ tem-se

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[x^n + nx^{n-1}.\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}.\Delta x^2 + \cdots + (\Delta x)^n\right] - x^n}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[nx^{n-1}.\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x^2 + \cdots + (\Delta x)^n\right]}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2} \Delta x + \cdots + \Delta x^{n-1} \right]}{\Delta x}$$

Daí, segue que

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} [nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2} \Delta x + \cdots + (\Delta x)^{n-1}]$$

Portanto,

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

A derivada calculada acima é chamada de derivada da função polinomial.

Como vimos nesses exemplos, calcular a derivada de uma função usando a definição de derivada, não é tão trivial na maioria das vezes. No exemplo 4 mostramos que se $f(x) = x^n$, com n natural, então $f'(x) = nx^{n-1}$. Vale salientar que esta regra também é valida para n racional não nulo. Dessa forma evita-se usar a definição de derivada.

Regras de Derivação

1. Se $f(x) = x^n$ sendo *n* um número racional diferente de zero então $f'(x) = nx^{n-1}$

2. Se f e g são duas funções e existem $f'(x)$ e $g'(x)$, então:

   I) $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$

   II) $(f.g)'(x) = f(x).g'(x) + f'(x).g(x)$

   III) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{[g(x)]^2}$, se g’(x) ≠ 0

DEMONSTRÇÃO I: Inicialmente vamos demonstrar que $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$. Por definição

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad \text{(I)}$$

e

$$g'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \qquad \text{(II)}$$

Agora, tomemos $h(x) = f(x) + g(x)$. Assim, temos que:

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x}$$

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{(f+g)(\Delta x + x) - (f+g)(x)}{\Delta x}\right]$$

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x+\Delta x) + g(x+\Delta x)] - [f(x) + g(x)]}{\Delta x}$$

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x+\Delta x) - f(x)] + [g(x+\Delta x) - g(x)]}{\Delta x}$$

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

Portanto, usando (I) e (II), Obtemos;

$$h'(x) = f'(x) + g'(x)$$

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

A demonstração para $(f-g)'(x)$ é semelhante.

DEMONSTRAÇÃO II: Tomemos $h(x) = f(x).g(x)$. Assim temos que:

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x}$$

$$h'(x) \ = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x).g(x + \Delta x) - f(x).g(x)}{\Delta x}$$

Adicionando e subtraindo ao numerador a expressão $f(x + \Delta x).g(x)$ vem:

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x).g(x + \Delta x) - g(x)f(x + \Delta x) + g(x)f(x + \Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x}$$

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x)[g(x + \Delta x) - g(x)] + g(x)[f(x + \Delta x) - f(x)]}{\Delta x}$$

$$h'(x) \ = \lim_{\Delta x \to 0} \left[f(x + \Delta x).\frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right] + = \lim_{\Delta x \to 0} \left[g(x).\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right]$$

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} f(x + \Delta x).\lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} g(x).\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Usando a definição para $f'(x)$ e $g'(x)$, tem-se;

$$(f.g)'(x) \ = f(x).g'(x) + g(x).f'(x)$$

DEMONSTRAÇÃO III: Tomemos $h(x) = f(x)/g(x)$ com $g(x) \neq 0$. Assim temos que:

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x}$$

$$h'(x) \ = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{f(x + \Delta x)}{g(x + \Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x}$$

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x).\,g(x) - f(x).\,g(x+\Delta x)}{\Delta x.\,g(x).\,g(x+\Delta x)}$$

Se somarmos e subtrairmos $f(x).\,g(x)$ ao denominador, então:

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x).\,g(x) - f(x).\,g(x) - f(x).\,g(x+\Delta x) + f(x).\,g(x)}{\Delta x.\,g(x).\,g(x+\Delta x)}$$

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[g(x).\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right] - \left[f(x).\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}\right]}{g(x).\,g(x+\Delta x)}$$

$$h'(x) = \frac{\lim\limits_{\Delta x \to 0} g(x)\,.\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} - \lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x)\,.\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} g(x).\,\lim\limits_{\Delta x \to 0} g(x+\Delta x)}$$

Usando a definição para $f'(x)$ e $g'(x)$, tem-se;

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x).\,g(x) - f(x).\,g'(x)}{[g(x)]^2}$$

3. Regra da cadeia: Se $y = g(u)$ e $u = f(x)$ e as derivadas dy/du e du/dx existem, então a composta $y = g(f(x))$ tem derivada que é da por:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} \quad \text{ou} \quad y'(x) = g'(u).\,f'(x)$$

EXEMPLO: seja $f(x) = x^{10}$ e $g(x) = 2x^3 + x^2 - 5$ calcular $f'\big(g(x)\big)$.

SOLUÇÃO: temos que; $\quad f\big(g(x)\big) = (2x^3 + x^2 - 5)^{10}$

Logo, usando a regra da cadeia tem-se; $f'\big(g(x)\big) = 10(g(x))^9$ e $g'(x) = 6x^2 + 2x$, portanto; $\quad f'\big(g(x)\big) = 10\,(6x^2 + 2x)(2x^3 + x^2 - 5)^9$

3.1 INTERPRETAÇÃO GEOMETRICA DA DERIVADA

Muitos dos problemas importantes de Cálculo envolvem a determinação da reta tangente a uma curva dada, em um determinado ponto dela. Faremos abaixo um desenvolvimento que mostra como determinar a reta tangente a uma curva e mostra como a derivada nos fornece a reta tangente a uma curva.

Considere uma função f continua em x_0 como ilustra-se na Figura 3. Queremos determinar à reta r tangente a curva no ponto $P\big(x_0, f(x_0)\big)$.

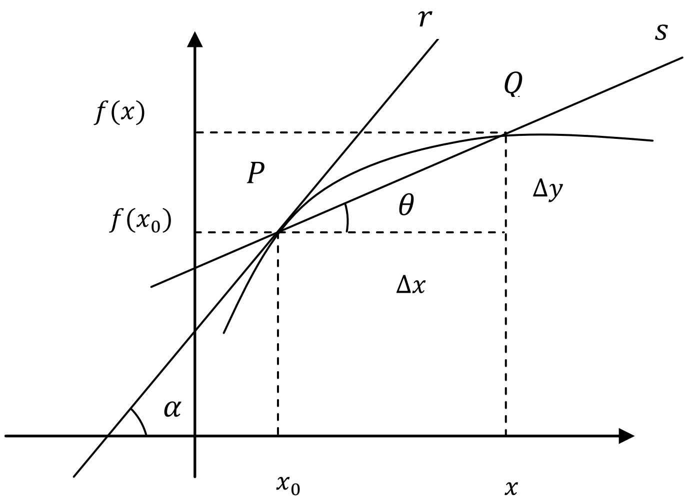

Figura 3. Reta tangente a curva em x_0

Note que a reta s de coeficiente angular $m_s = tg\theta$, que passa por P e Q é secante ao gráfico de f e a reta r de coeficiente angular $m_r = tg\alpha$ que passa por $P(x_0, f(x_0))$ é tangente ao gráfico de f. Assim temos que o coeficiente angular da reta s será:

$$m_s = tg\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Observa-se que se Q se aproxima de P, de modo que Δx tende a zero e m_s se aproxima de m_r. Desse modo podemos escrever:

$$m_r = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

ou

$$m_r = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Logo considerando a definição de derivada, Eq. (1), tem-se:

$$m_r = f'(x_0) \tag{3}$$

Com a equação (3) podemos determinar a reta tangente a uma curva, usando a definição de derivada. Se f é uma função contínua em x_0, então a equação da tangente a curva em x_0 é dada por:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \tag{4}$$

4 TAXA DE VARIAÇÃO

O conceito de Taxa de Variação é de fundamental importância no estudo do cálculo, pois, com ele podemos resolver vários problemas ligados a física, como velocidade, aceleração, fluxo entre outros. Veremos abaixo os conceitos de taxa de variação média e taxa de variação instantânea de uma função.

4.1 TAXA DE VARIAÇÃO MÉDIA

Para entendermos melhor o conceito de taxa de variação média de uma função, utiliza-se a idéia de velocidade média.

Suponha que um móvel se desloca de um ponto A para um ponto B, à posição (S) que ele ocupa entre A e B varia com o tempo (t). Logo o deslocamento é uma função do tempo t, ou seja, $S(t)$. Num um intervalo de tempo entre t_0 e t o móvel se desloca de S_0 até S. A razão entre estes intervalos ΔS e Δt de nos fornece a velocidade média (V_m) do móvel no intervalo Δt, ou seja:

$$V_{\boldsymbol{m}} = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{s - s_0}{t - t_0} = \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t}$$

Assim podemos definir a taxa de variação média, T_m de uma função $y = f(x)$ como sendo:

$$T_m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad (5)$$

A taxa de variação média de uma função entre dois pontos x_0 e x pode ser interpretada como a inclinação da reta secante ao gráfico da função que passa pelos pontos $(x_0, f(x_0))$ e $(x, f(x))$, Figura 5.

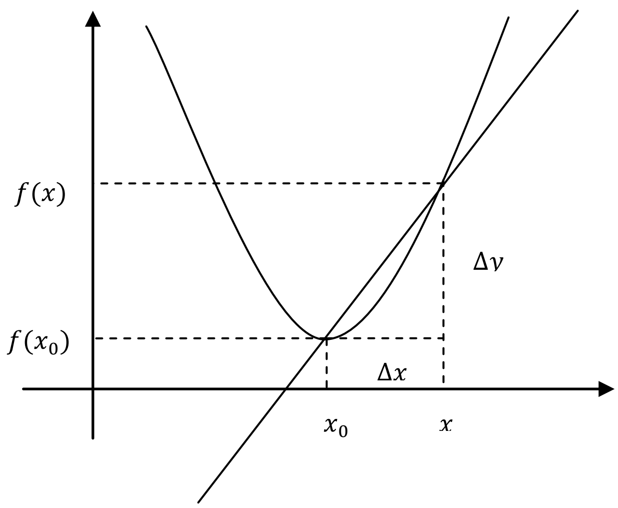

Figura 5. Reta secante ao gráfico de f passando pelos pontos $(x_0, f(x_0))$ e $(x, f(x))$.

4.2 TAXA DE VARIAÇÃO INSTANTÂNEA

Sendo $\Delta y/\Delta x$ uma taxa de variação média, em que Δx é diferente de zero. Quando Δx é infinitamente pequeno, deixamos de falar em taxa de variação média para falar em taxa de variação instantânea, de modo que ela pode ser interpretada como a derivada de uma função. Ou seja, se $y = f(x)$ a taxa de variação instantânea T_i, é definida por:

$$T_i = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \tag{6}$$

5 DIFERENCIAIS

Às vezes usamos a notação $\frac{dy}{dx}$ para representar a derivada y' de y em relação a x.

Ao contrario do que aparenta não é uma razão. Agora se introduziremos duas novas variáveis dy e dx, com a propriedade de que, caso a razão exista será a derivada.

Se f é uma função diferenciável como ilustra a Figura 6, então $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ é o coeficiente angular da reta secante que passa por P e Q , quando Δx tende a zero, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ se aproxima do coeficiente angular da tangente ao gráfico de f em P, que corresponde a derivada de f em P. Assim podemos usar a seguinte formula de Aproximação para Δy:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(x) \text{ se } \Delta x \approx 0, \text{então } \Delta y = f'(x)\Delta x \tag{7}$$

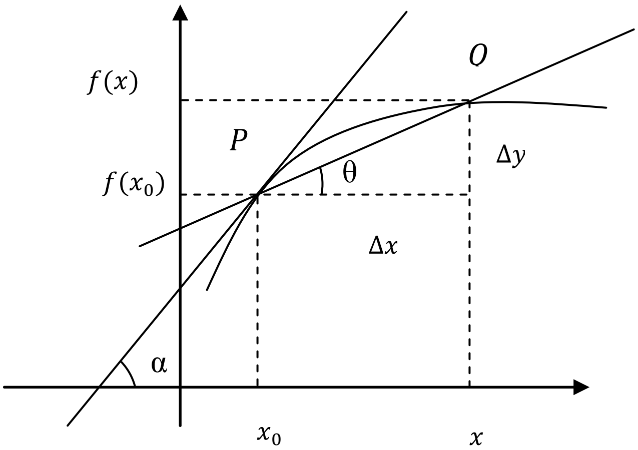

Figura 6.

DEFINIÇÃO: Se $y = f(x)$, onde f é uma função diferenciável e Δx um incremento de x, então:

I) A diferencial, dx, da variável independente x é $dx = \Delta x$

II) A diferencial, dy, da variável dependente y é $dy = f'(x)\Delta x = f'(x)dx$

Aplicando essa definição na Eq.(7), temos:

$$dy = f'(x)dx \tag{8}$$

6 APLICAÇÕES

6.1 NA FÍSICA

O deslocamento (S) de um corpo em função do tempo (t), representa-se por $S(t)$. E o deslocamento ΔS em um intervalo de tempo Δt é dado por;

$$\Delta S = S(t + \Delta t) - S(t)$$

Logo define-se a velocidade média como sendo uma taxa de variação entre ΔS e Δt;

$$V_m = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t}$$

Se Δt tende a zero, tem-se uma velocidade no instante (t), denominada velocidade instantânea $v(t)$, a qual é uma taxa de variação instantânea, ou seja:

$$v(t) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t}$$

Logo $v(t)$ é a derivada primeira de $S(t)$, ou seja, $S'(t) = v(t)$. Assim como a aceleração $a(t)$ é dada por $a(t) = v'(t)$.

EXEMPLO: Sendo $S(t) = S_0 + V_0 t + \frac{a}{2} t^2$. Encontra a equação da velocidade e da aceleração, no instante t.

SOLUÇÃO: Como vimos acima a velocidade é a derivada da posição no instante t, então:

$$v(t) = \frac{dS(t)}{dt} = V_0 + at$$

E a aceleração será dada pela derivada da velocidade no instante t, logo;

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = a$$

6.2 NA GEOMETRIA

Dentre todas as aplicações da derivada a mais clássica é a geométrica. O exemplo abaixo aborda uma dessas aplicações.

EXEMPLO: Determinar a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = x^2$, no ponto $x_0 = 2$.

SOLUÇÃO: Como $x_0 = 2$, temos que $f(2) = 2^2 = 4$, então $P(2;\ 4)$ é o ponto de tangencia, assim:

$$f'(x_0) = f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$$

$$f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

$$f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2}$$

$$f'(2) = \lim_{x \to 2} (x + 2) = 4$$

Logo, o coeficiente angular da reta tangente em $x_0 = 2$ é 4. Assim a equação da reta tangente ao gráfico de f em $x_0 = 2$, usando a Eq. (4) é:

$$y - 4 = 4(x - 2)$$

em que:

$$4x - y - 4 = 0$$

Na Figura 7 ilustra-se o gráfico da situação acima.

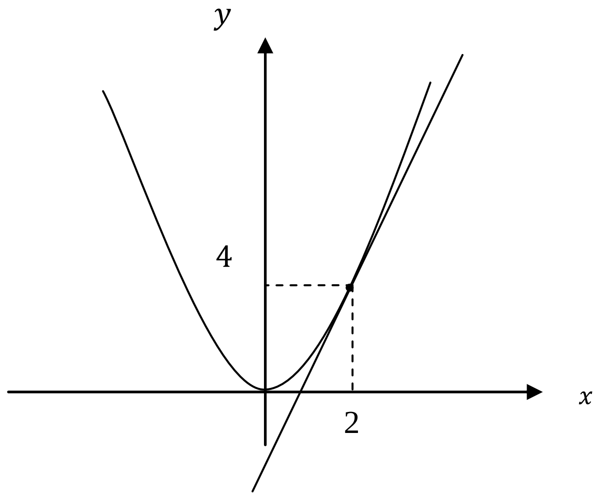

Figura 7. Gráfico de $f(x) = x^2$ e da tangente em $x = 2$.

6.3 TAXAS RELACIONADAS

Problemas que envolvem taxa de variação de variáveis relacionadas são chamados de problemas de taxas relacionadas. Na maioria dos problemas que envolvem taxas relacionadas, as variáveis têm uma ligação bem especifica com cada valor atribuído a elas, na maioria das vezes essa relação é expressa em forma de equação, abaixo veremos um exemplo de como isto acontece.

EXEMPLO 1: Uma escada de $6m$ de comprimento está apoiada em uma parede vertical. Se a base da escada começa a deslizar horizontalmente à razão de $0{,}6m/s$, com que velocidade o topo da escada percorre, a parede quando está a $4m$ do solo?

SOLUÇÃO: Comecemos por esboçar a posição geral da escada conforme a Figura 9, onde x denota a distância da base da escada a parede e y a altura que a escada toca a parede.

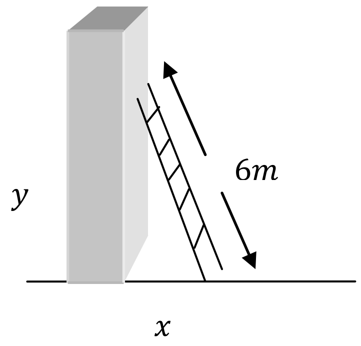

Figura 9

O problema envolve a variação de x e y, em relação a variável tempo (t), de modo que:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{0{,}6m}{s} \qquad (a)$$

e queremos encontra $\frac{dy}{dt}$

Podemos encontrar uma equação que relaciona x e y, aplicando o teorema de Pitágoras, no triângulo retângulo formado pela escada a parede e pelo solo, de modo que:

$$x^2 + y^2 = 6^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 36 \qquad (b)$$

Derivando a Eq. (b) implicitamente em relação a t, temos:

$$\frac{dx}{dt}(x^2) + \frac{dy}{dt}(y^2) = \frac{d}{dt}(36) \qquad (c)$$

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}\frac{dx}{dt} \qquad (d)$$

A Eq. (d) é uma fórmula geral relacionando as duas taxas de variação dx/dt e dy/dt. Para $y = 4$, na Eq. (b), temos $x = \sqrt{20}$. Levando em conta os valores de x, y e dy/dt, na Eq. (d) tem-se.

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{\sqrt{20}}{4}.0,6 = -0,67m/s$$

Logo a velocidade com que a escada desliza até $4m$ de altura é $-0,67m/s$.

EXEMPLO 2: Calcular o valor aproximado para $\sqrt[3]{9}$, usando diferenciais.

SOLUÇÃO: Seja $y = f(x)$, a função definida por $f(x) = \sqrt[3]{x}\cdot$, logo podemos escrever:

$$y + \Delta y = \sqrt[3]{x + \Delta x}$$

Para encontrar $\sqrt[n]{a}$, não exata, usando diferenciais, toma-se um valor b mais próximo de a que possui raiz exata com diferença $a - b = \Delta y$. Assim, fazendo; $\Delta y = dy,\ \Delta x = dx$, y = $\sqrt[3]{8} = 2$ e usando a Eq. (8);

$$2 + dy = \sqrt[3]{8 + 1}$$

$$dy = \frac{1}{3x^{2/3}}dx$$

$$dy = \frac{1}{3(8)^{2/3}}.1 = 0,0833...$$

Então,

$$\sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{8 + 1} = 2 + 0,0833 = 2,0833...$$

Assim com à ajuda das diferenciais obtemos que $\sqrt[3]{9} = 2,0833$. Note que esse valor não é exato. Observe que $\Delta x = 1$ é considerado um valor grande. Para encontrar valores de $\sqrt[n]{a + \Delta x}$ com pouca margem de erro é preciso que $\sqrt[n]{a}$ seja exata e Δx seja pequeno, de forma que o erro tende a zero quando Δx também tende a zero.

EXEMPLO 3: O raio de uma circunferência cresce a razão de $21cm/s$. Qual a taxa de crescimento do comprimento da circunferência em relação ao tempo t?

SOLUÇÃO: Sejam

r o raio da circunferência

t o tempo

l o comprimento da circunferência

Da geometria plana sabemos que $l = 2\pi r.$ Sabemos que a taxa de crescimento de r em relação a t é dada por:

$$\frac{dr}{dt} = 21cm/s$$

Logo a taxa de crescimento de l em relação a t é dada por

$$\frac{dl}{dt}$$

Usando o Teorema II (regra da cadeia), temos que:

$$\frac{dl}{dt} = \frac{dl}{dt}.\frac{dr}{dt}$$

$$= 2\pi.\frac{dr}{dt}$$

$$= 2\pi.21 \quad = 42\pi cm/s$$

Assim a taxa de crescimento do comprimento da circunferência é $42\pi\ cm/s$

EXEMPLO 4: Um tanque tem forma de um cone invertido de $16m$ de altura e uma base de raio $4m$. A água flui no tanque a uma taxa de $2m^3/min$. Com que velocidade o nível da água estará se elevando quando sua profundidade for $5m$?

SOLUÇÃO: Seja t o tempo medido em minutos desde que a água começou a fluir dentro do tanque e h a altura em metros do nível da água. Sendo r a medida do raio da superfície da água e V o volume da água em m^3, em qualquer instante, o volume de água pode ser expresso pelo volume do cone. Veja figura 10.

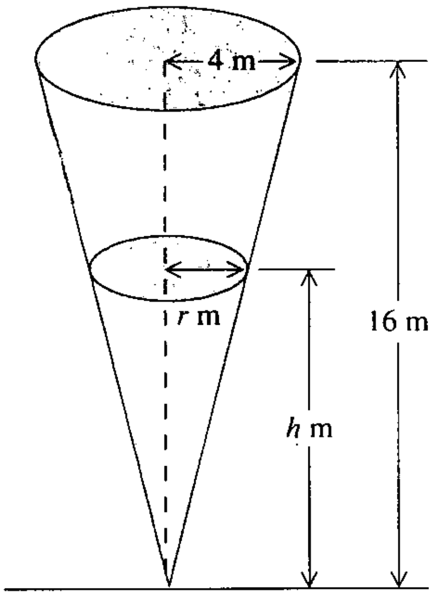

Figura 9.

Sabemos que o volume do cone pode ser expresso por:

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} \qquad (a)$$

onde V, h, r são funções do tempo (t) e como a água esta fluindo a uma taxa de $2m^3/min$, então;

$$\frac{dV}{dt} = 2$$

E queremos encontrar $\frac{dh}{dt}$ quando $h = 5$

Para expressar r em função de h podemos usar a semelhança de triângulos. Consulte a Figura 10.

$$\frac{r}{h} = \frac{4}{16} \Rightarrow r = \frac{h}{4} \qquad (b)$$

Substituindo a Eq.(b) na Eq. (a), obtem-se;

$$V = \frac{\pi\left(\frac{h}{4}\right)^2 . h}{3} \Rightarrow V = \frac{\pi h^3}{48} \qquad (c)$$

Derivando ambos os termos da equação (c) em relação a t, temos;

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi h^2}{16} . \frac{dh}{dt}$$

Fazendo $\frac{dV}{dt} = 2$, obtem-se;

$$\frac{dh}{dt} = \frac{32}{\pi h^2}$$

Como queremos encontra a taxa com que a velocidade flui quando $h = 5$, temos;

$$\left.\frac{dh}{dt}\right]_{=5} = \frac{32}{25\pi}$$

Logo, o nível da água esta subindo a uma taxa de $\frac{32}{25\pi} m/min$ quando a profundidade da água for igual a $5m$.

Na maioria dos livros de Cálculo Diferencial podemos encontra vários tipos de problemas que envolvem o conceito de taxas relacionadas, problemas que relacionam o conceito de derivada e taxa de variação com a geometria, física, economia e etc.

7 CONCLUSÃO

Historicamente a idéia de derivadas e taxa de variação surgiram da necessidade de resolver problemas geométricos e físicos. Hoje em dia nem todos os cursos de cálculo diferencial fazem uma abordagem dando ênfase às aplicações da derivada e taxa de variação.

São muitas as aplicações da derivada e da taxa de variação, neste trabalho mostramos algumas aplicações referentes a tangentes a uma curva, taxas relacionadas e a Física. Daí a importância em mostra que a o estudo da derivada não é só calcular derivadas de funções e aplicar regras operacionais, já que temos importantes áreas de aplicações desses conceitos.

8 REFERÊNCIAS BIBLIOGRAFICAS

- FLEMMING, D. M. Cálculo A.6ª Ed. Pearson: São Pulo 2006.
- HOWARD, E. Introdução à História da Matemática. Editora da Unicamp. Campinas – SP 2004.
- LEITHOLD, L. O Cálculo com Geometria Analítica. Vol.1,3ª Ed. Harbra Ltd.: São Paulo 1994.
- SWOKOWSKI, E. Cálculo com Geometria Analítica. Vol.1,2ª Ed: Makron Books do Brasil: São Paulo 1994.
- THOMAS, G. B. Cálculo. Vol. 1,10ª Ed. Pearson: São Paulo 2006.