UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

RENILTON DE SOUZA SILVA

FUNÇÕES HIPERBÓLICAS E APLICAÇÕES

Campina Grande/PB
Julho/2014

RENILTON DE SOUZA SILVA

FUNÇÕES HIPERBÓLICAS E APLICAÇÕES

Trabalho de conclusão do curso Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba. Em cumprimento às exigências para obtenção do Título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. LUCIANA ROZE DE FREITAS

Campina Grande/PB
Julho/2014

S586f Silva, Reniton de Souza.
Funções hiperbólicas e aplicações [manuscrito] / Reniton de Souza Silva. - 2014.
55 p. : il. color.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2014.
"Orientação: Profa. Dra. Luciana Rose de Freitas, Departamento de Matemática".

1. Ângulo hiperbólico. 2. Funções hiperbólicas. 3. Hipérbole. I. Título.

21. ed. CDD 516

RENILTON DE SOUZA SILVA

FUNÇÕES HIPERBÓLICAS E APLICAÇÕES

Trabalho de conclusão do curso Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba. Em cumprimento às exigências para obtenção do Título de Licenciado em Matemática.

BANCA EXAMINADORA:

Luciana Roze de Freitas

Profa. Dra. LUCIANA ROZE DE FREITAS

Departamento de Matemática

Orientadora

Castor da Paz Filho

Prof. Ms. CASTOR DA PAZ FILHO

Departamento de Matemática

Examinador

Francisco de Sá Ribeiro.

Prof. Ms. FRANCISCO DE SÁ RIBEIRO

Departamento de Matemática

Examinador

Campina Grande, 30 de julho de 2014

Agradecimentos

Agradeço a Deus pelas vitórias concedidas em minha vida e pela força de vencer os desafios do curso.

Aos meus pais, por todo o apoio, principalmente a minha mãe pelos conselhos valiosos.

A universidade Estadual da Paraíba, por conceder o curso de Matemática.

A Orientadora Profa. Dra. Luciana Rose de Freitas pelas orientações e colaboração para este trabalho.

Aos professores que compõem a banca examinadora, pela participação e colaboração.

A todos os professores do curso de Licenciatura em Matemática, pela valorização do curso.

Aos colegas do curso, pela amizade durante os quatros anos, em espacial, a todos.

Obrigado a todos!

Renilton de Souza Silva.

Resumo

Este trabalho é dedicado ao estudo das funções hiperbólicas. Será feita uma abordagem do conceito destas funções a partir do estudo de ângulos hiperbólicos e a construção se fará paralelamente à construção das funções trigonométricas usuais. No entanto, as funções hiperbólicas são definidas sobre a hipérbole. Vamos deduzir as principais identidades hiperbólicas, apresentar os conceitos de derivadas e integrais, bem como a análise dos gráficos de tais funções. No decorrer do trabalho será apresentado alguns exemplos e aplicações, sendo a principal delas o estudo da catenária. Por fim, faremos um breve estudo sobre as funções hiperbólicas inversas.

Palavras-chave: Ângulo Hiperbólico; Funções Hiperbólicas; Hipérbole.

Abstract

This paper but to dedicat study from the hyperbolic fuctions. Overtime feat an approach to concept draft functions appearance to study of hyperbolic angles and it construction if fared at the some time of the construction thes functions trigonometrycs it whos uses. However, hyperbolics functions them are definitely aboout it hyperbola. Come on them derivehyperbolic identity, announce concepts them to derivatives and integrals, well what it analysis file graphics maybs functions. At elapse to paper stated overtime examples some and applications them it highlight their it catenary. Lastly, fare to a paper rescript it about hyperbolic functions inverselys.

Keyword: Hyperbolics Angles, Hyperbolic Functions; Hyperbola.

Sumário

Introdução

As funções hiperbólicas surgiu da comparação da área de uma região semicircular com a área de uma região limitada por uma hipérbole, ocasionando as definições e identidades. A primeira pessoa a estudar as funções hiperbólicas foi o matemático suíço Johann Heinrich Lambert (1728-1777).

As funções hiperbólicas surgem fortemente nas áreas de engenharia e arquitetura por que traz consigo o estudo da catenária, uma curva formada entre dois pontos com uma forte tensão interna. Devido a essa tensão interna, varias obras importantes foram construídas, como por exemplo, a Ponte Lupu, em Xangai, na China e o Palácio de Astorga, em Barcelona.

No decorrer do curso de Licenciatura em Matemática, as funções hiperbólicas não é visto com detalhes, e o desejo de aprofundar o conhecimento sobre o assunto foi o motivo do presente trabalho.

O trabalho está organizado da seguinte maneira: No capítulo 1, temos a definição de hipérbole, seguido de um breve estudo sobre o ângulo hiperbólico. No capitulo 2, temos as definições de funções hiperbólicas com algumas aplicações em ângulos especiais. No capítulo 3, analise das derivadas com um estudo nas integrais, análise de gráficos e apresentação da catenária. Por fim, no capítulo 4, apresentaremos as funções hiperbólicas inversas.

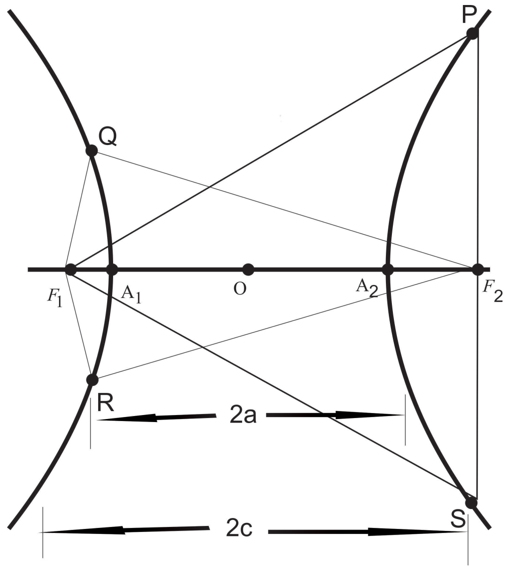
Capítulo 1

Hipérbole e Ângulo hiperbólico

Iniciamos este capítulo com um breve estudo sobre Hipérbole e em seguida vamos definir o Ângulo hiperbólico.

1.1 Hipérbole

Hipérbole é o conjunto dos pontos de um plano tais que o módulo da diferença das distâncias a dois pontos fixos é constante e menor que a distância entre eles.



$Figura$ 1.1

Consideremos no plano dois pontos distintos F_1 e F_2 tal que a distância $d(F_1F_2) = 2c$ e um número positivo a de modo que $2a < 2c$. Um ponto P pertence à hipérbole se, e somente se,

$$|PF_1 - PF_2| = 2a. \tag{1.1}$$

Observe que valem as seguintes igualdades

$$QF_2 - QF_1 = 2a$$

$$RF_2 - RF_1 = 2a$$

$$SF_1 - SF_2 = 2a$$

$$A_1F_2 - A_1F_1 = 2a$$

$$A_2F_1 - A_2F_2 = 2a$$

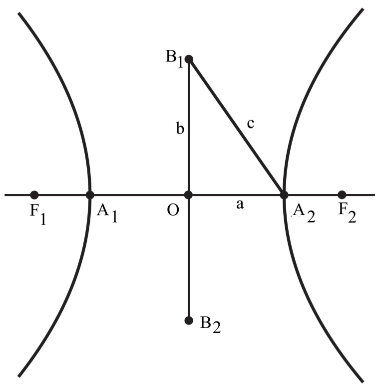
Note que o módulo é abolido desde que façamos a diferença da maior para a menor distância. Se um ponto X está no ramo da direita, temos

$$XF_1 - XF_2 = 2a \quad \text{pois} \quad XF_1 > XF_2. \tag{1.2}$$

Se X está no ramo da esquerda, temos

$$XF_2 - XF_1 = 2a \quad \text{pois} \quad XF_2 > XF_1. \tag{1.3}$$

Vejamos agora os elementos principais de uma hipérbole



$Figura$ 1.2

i) Os pontos F_1 e F_2 são chamados de focos da hipérbole.

ii) Centro é o ponto médio O do segmento F_1F_2.

iii) Eixo real ou transverso: é o segmento A_1A_2 de comprimento $2a$.

iv) Eixo imaginário ou não-transverso: é o segmento B_1B_2 de comprimento $2b$, com $B_1B_2 \perp A_1A_2$ em O.

v) $2c$ é a distância focal $d(F_1F_2)$.

vi) $2a$ é a medida do eixo real, ou seja, a distância dos vértices dos pontos A_1 e A_2.

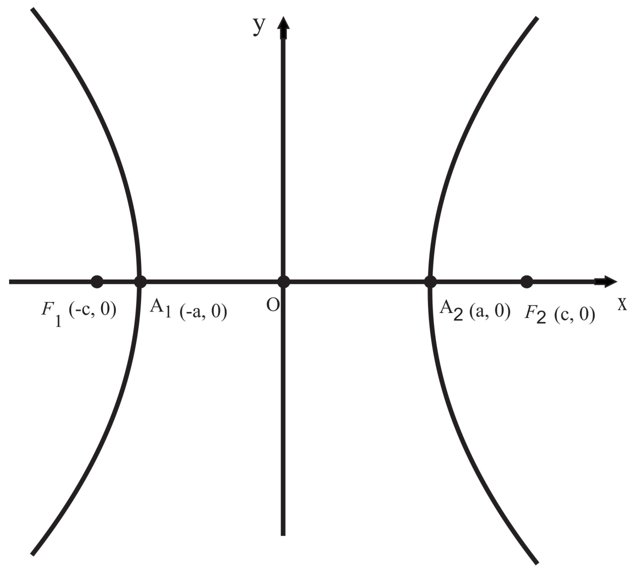
vii) $2b$ é a medida do eixo imaginário.

viii) Chama-se excentricidade da hipérbole o número

$$e = \frac{c}{a}.$$

Por ser $c > a$, tem-se que $e > 1$. A excentricidade da hipérbole está intimamente relacionada com a sua abertura.

1.2 Equação reduzida da hipérbole



$Figura\,1.3$

Observe que, quando os focos estão sobre o eixo x, temos

$$|PF_1 - PF_2| = (A_1A_2),$$

onde $P(x, y)$ é um ponto qualquer da hipérbole. Como mostra a $Figura$ 1.1, estamos chamando a distância focal $d(F_1F_2)$ de $2c$ e a distância entre os vértices de $2a$. Usando $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$, temos

$$|\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2}| = 2a$$

ou

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm 2a. \tag{1.4}$$

Depois de eliminarmos os radicais de (1.4), elevando ao quadrado, podemos escrever

$$(x+c)^2 + y^2 = (x-c)^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + 4a^2,$$

ou seja,

$$4cx - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

consequentemente,

$$cx - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

portanto,

$$(cx - a^2)^2 = a^2.(x-c)^2 + a^2y^2,$$

então,

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2,$$

e temos,

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

Fazendo-se

$$c^2 - a^2 = b^2,$$

obtemos

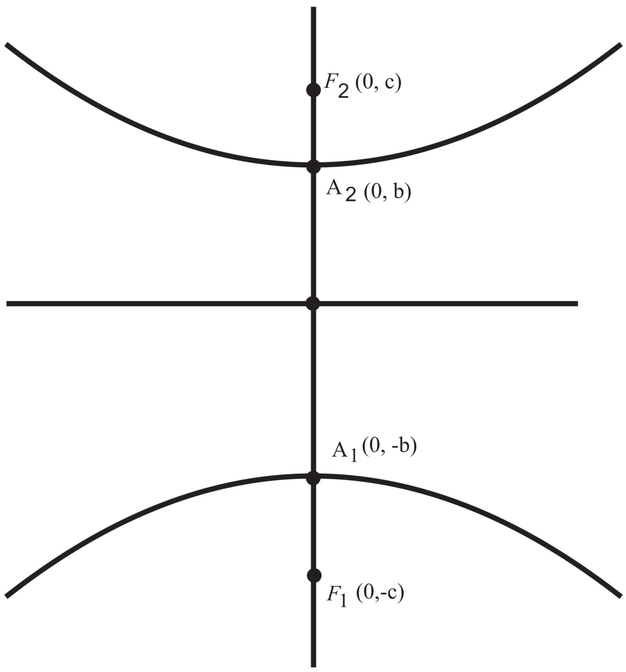
$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

ou

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{1.5}$$

que é equivalente a (1.4) e, portanto, é a equação da hipérbole.

Quando os focos da hipérbole estão sobre o eixo y, como mostra a $Figura$ 1.4, sua equação é



$Figura\,1.4$

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1, \tag{1.6}$$

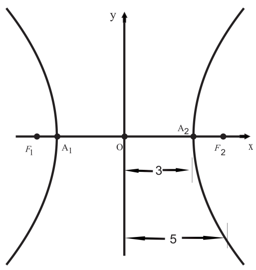
onde $2b$ é a distância entre os vértices e a é tal que

$$c^2 - b^2 = a^2.$$

As equações (1.5) e (1.6) são chamadas de equação reduzida da hipérbole.

Exemplo 1.1 *Uma hipérbole com eixo real 6 e distância focal 10, apresenta:*

$$b^2 = c^2 - a^2 = 25 - 9 = 16$$

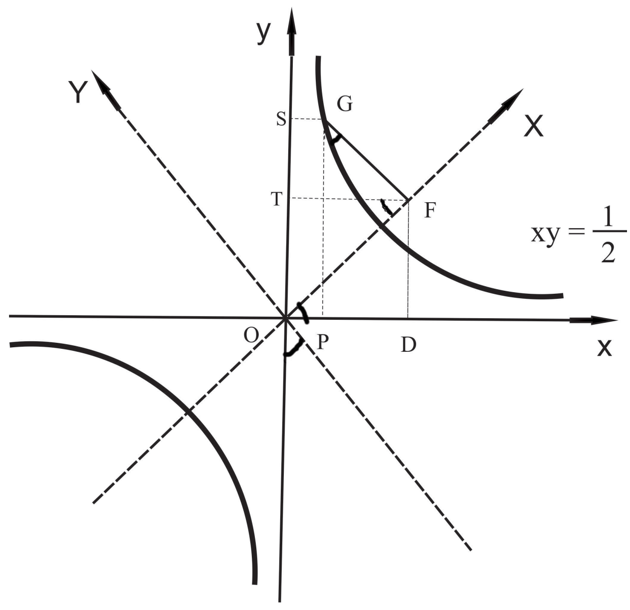


$Figura\,1.5$

Se a posição da hipérbole é a indicada na $Figura\,1.5$, então sua equação passa a ser,

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1.$$

1.3 Ângulo hiperbólico



$Figura$ 1.6

Consideremos o plano cartesiano com os eixos x e y e mais dois novos eixos X e Y, que são obtido através de uma rotação de $\frac{\pi}{4}$ (45º) dos eixos x e y.

Seja G um ponto que está sobre o gráfico da equação $xy = \frac{1}{2}$, tal que suas coordenadas serão

$$x = OP, \;\; y = OS, \;\; X = OF \;\text{ e }\; Y = FG.$$

Assim,

$$x = OP = OD - PD = OF\,cos\,\frac{\pi}{4} - FG\,sen\,\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,(X - Y) \tag{1.7}$$

e

$$y = OS = OT + TS = OF\,sen\,\frac{\pi}{4} + FG\,cos\,\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,(X + Y). \tag{1.8}$$

Então,

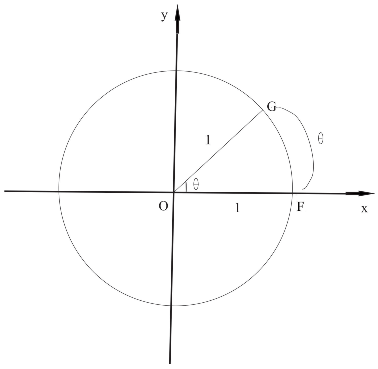
$$\frac{1}{2} = xy = \frac{\sqrt{2}}{2}\,(X - Y).\frac{\sqrt{2}}{2}\,(X + Y).$$

Logo,

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}(X^2 - Y^2) \Longrightarrow X^2 - Y^2 = 1.$$

O gráfico da equação $xy = \frac{1}{2}$ é uma hipérbole. Concluímos que $xy = \frac{1}{2}$ corresponde à $X^2 - Y^2 = 1$.

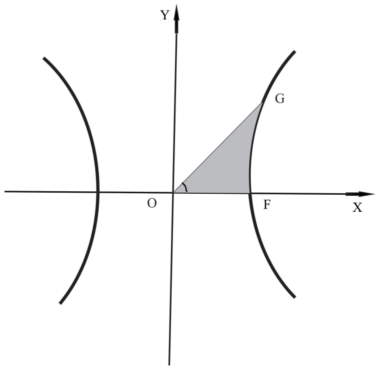
A medida de um ângulo num circulo de raio 1, em radianos, mede θ radianos se o arco circular subentendido por ele mede θ unidades de comprimento.



$Figura\,1.7$

A área do setor OFG é dada por $\frac{\theta}{2}r^2$. Como $r = 1$, temos que a área será $\frac{\theta}{2}$.

Motivado por este raciocínio, seja G um ponto sobre a hipérbole $X^2 - Y^2 = 1$ que define um setor hiperbólico FOG e um ângulo $F\widehat{O}G$ como mostra a $Figura\,1.8$.



$Figura\,1.8$

Como podemos observar o ângulo $F\widehat{O}G$ mede θ e a área do setor FOG vale $\frac{\theta}{2}$ unidades de área.

Assim, como para o círculo de raio 1, um setor de área $\frac{\theta}{2}$ corresponde a um ângulo θ, o conceito de ângulo hiperbólico seguirá o mesmo princípio, ou seja, um ângulo hiperbólico mede θ se a área do setor hiperbólico correspondente mede $\frac{\theta}{2}$. Vamos apresentar este conceito mais precisamente.

Voltemos aos eixos x e y, com a hipérbole $xy = \frac{1}{2}$. Sejam G e F dois pontos quaisquer no mesmo ramo da hipérbole.

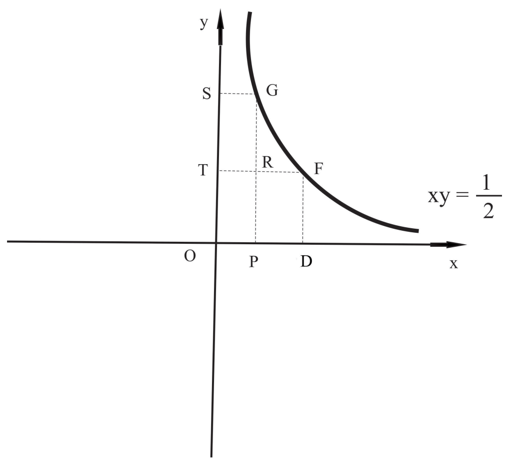


Figura 1.9

O ponto G tem coordenadas $x = OP$ e $y = OS$. Já o ponto F tem coordenadas $x = OD$ e $y = OT$. A área do retângulo $OPGS$ denotaremos por

$$A_{OPGS} = OP \cdot OS = xy = \frac{1}{2}.$$

A área do retângulo $ODFT$ é dada por

$$A_{ODFT} = OD \cdot OT = xy = \frac{1}{2}.$$

Logo $A_{OPGS} = A_{ODFT}$ e observando a *Figura* 1.9 vemos que $A_{TRGS} = A_{PDFR}$.

Para calcular a área do setor OFG, vamos rodar a figura de $\frac{\pi}{4}$ e tomar a hipérbole $X^2 - Y^2 = 1$.

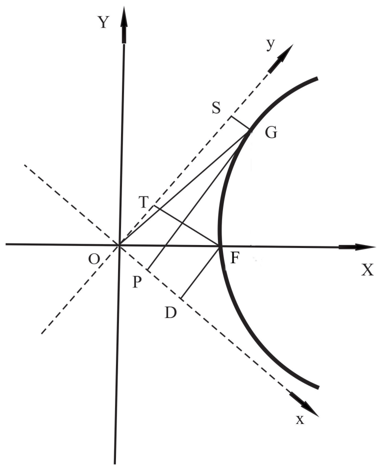


Figura 1.10

Observe que

$$A_{OPG} = \frac{1}{2}A_{OPGS} = \frac{1}{2}A_{ODFT} = A_{ODF}$$

e

$$A_{ODFG} = A_{OPG} + A_{PDFG} = A_{ODF} + A_{PDFG}.$$

Por outro lado,

$$A_{ODFG} = A_{OFG} + A_{ODF}$$

E logo,

$$A_{OFG} = A_{PDFG}. \tag{1.9}$$

Em um raciocínio análogo nos leva que a $A_{OFG} = A_{DTFG} = A_{PDFG}$.

Dessa forma, o que precisamos é calcular a área de (1.9). Se, voltarmos aos eixos x, y e à hipérbole $xy = \frac{1}{2}$, a área de (1.9) é a área sobre o gráfico de $y = \frac{1}{2x}$, compreendido entre $x = OP$ e $x = OD$.

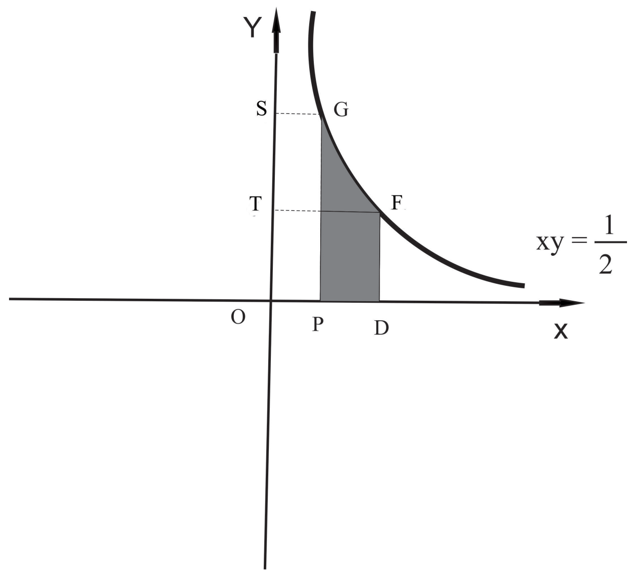


Figura 1.11

Logo,

$$A_{PDFG} = \left|\int_{OP}^{OD} \frac{1}{2x}dx\right| = \frac{1}{2}|ln\,OD - ln\,OP| = \frac{1}{2}\left|ln\frac{OD}{OP}\right|.$$

Se G está a esquerda de F então

$$A_{PDFG} = \frac{1}{2}\,ln\,\frac{OD}{OP}. \tag{1.10}$$

E se G está a direita de F então

$$A_{PDFG} = \frac{1}{2}\, ln\, \frac{OP}{OD}. \tag{1.11}$$

$$\therefore A_{OFG} = \frac{1}{2}\, ln\, \frac{OP}{OD}.$$

Analogamente, podemos calcular A_{STFG} integrando a função $x = \dfrac{1}{2y}$, obtendo

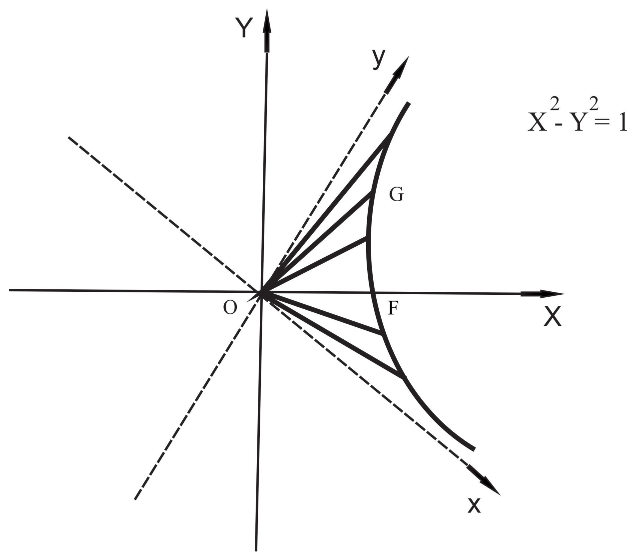
$$A_{STFG} = \frac{1}{2}\, ln\, \frac{OS}{OT}.$$

Observe também que se $G = F$ então $A_{PDFG} = 0$ e se $G \neq F$ então $A_{PDFG} > 0$.

Quando G se afasta de F pela direita, o segmento OP cresce indefinidamente. Assim, como o tamanho OD está fixo, $A_{PDFG} = \dfrac{1}{2}(ln\, OP - ln\, OD)$ cresce indefinidamente.

Quando G se afasta de F pela esquerda, o segmento OP tende a zero e $ln\, OP$ decresce indefinidamente. Assim, $A_{PDFG} = \dfrac{1}{2}(ln\, OD - ln\, OP)$ cresce indefinidamente. Logo, $A_{OFG} = A_{PDFG}$ varia de 0 a $+\infty$.

Agora vamos analisar a $Figura\, 1.12$ e convencionando, temos que



$Figura\, 1.12$

i) Se o ponto G está acima do eixo dos $X's$, o ângulo que ele define tem medida positiva.

ii) Se o ponto G está abaixo do eixo dos $X's$, o ângulo que ele define tem medida negativa.

Assim, um ângulo hiperbólico, assumirá valores entre $-\infty$ e $+\infty$.

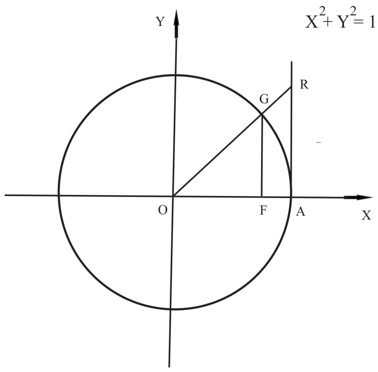
Deve-se lembrar que esta é uma medida nova, definida na hipérbole. Se os mesmos ângulos fossem medidas no circulo, seus valores estariam entre $-\dfrac{\pi}{4}$ e $\dfrac{\pi}{4}$.

Capítulo 2

Funções hiperbólicas

As funções hiperbólicas são definidas da mesma maneira que as funções trigonométricas das quais seus nomes derivam. Por isso vamos fazer um estudo sobre as funções trigonométricas sobre o circulo retirando os seus resultados e depois sobre a hipérbole. Em seguida, vamos deduzir algumas fórmulas envolvendo as funções hiperbólicas aplicadas em alguns ângulos especiais, a saber, a soma e diferenças de ângulos, ângulo metade, entre outras.

2.1 Definições e identidades



$Figura$ 2.1

Seja G um ponto sobre a circunferência de raio 1 com centro na origem de modo que o setor OAG tenha área $\dfrac{\theta}{2}$. Neste caso, o ângulo tem medida θ pois

$$A_{OAG} = \frac{A\widehat{O}G}{2}\, r^2,$$

onde $r = 1$ e $A_{OAG} = \dfrac{\theta}{2}$. O ângulo $A\widehat{O}G$ tem medida θ. Seja AR a reta tangente à curva em A. Assim,

$$OF = cos\,\theta, \quad FG = \operatorname{sen}\theta \;\text{ e }\; AR = \operatorname{tg}\theta.$$

Portanto,

$$cotg\,\theta = \frac{1}{AR} = \frac{1}{tg\,\theta} = \frac{cos\,\theta}{sen\,\theta},$$

$$sec\,\theta = \frac{1}{OF} = \frac{1}{cos\,\theta}$$

e

$$cosec\,\theta = \frac{1}{FG} = \frac{1}{sen\,\theta}.$$

Temos que para o ponto G

$$X^2 + Y^2 = OF^2 + FG^2 = 1,$$

e logo,

$$\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1. \tag{2.1}$$

Sendo o triângulo OFG semelhante ao triângulo OAR ($\Delta OFG \sim \Delta OAR$), então

$$AR = \frac{FG}{OF},$$

desta forma tem-se,

$$tg\,\theta = \frac{sen\,\theta}{cos\,\theta}. \tag{2.2}$$

Como,

$$\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1,$$

então,

$$1 + \frac{sen^2\theta}{cos^2\theta} = \frac{1}{cos^2\theta},$$

ou seja,

$$1 + tg^2\theta = sec^2\theta. \tag{2.3}$$

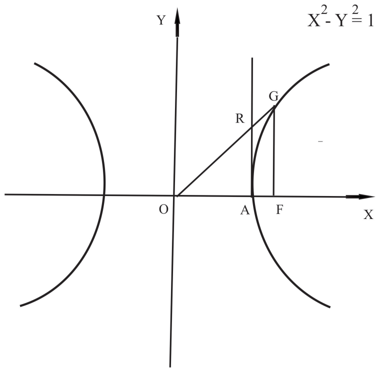
Ainda,

$$\frac{cos^2\theta}{sen^2\theta} + 1 = \frac{1}{sen^2\theta},$$

ou seja,

$$cotg^2\theta + 1 = cosec^2\theta. \tag{2.4}$$

Agora façamos o estudo semelhante sobre a hipérbole, com o objetivo de definir as funções hiperbólicas.



$Figura\,2.2$

Seja G um ponto sobre a curva de modo que o setor OAG tenha área $\dfrac{\theta}{2}$. O ângulo $A\widehat{O}G$ tem medida θ. Seja AR a reta tangente à curva em A. Assim, definimos as funções hiperbólicas da seguinte forma:

$$cosh\,\theta = OF, \quad \mathrm{sen}h\theta = FG \quad \mathrm{e} \quad \mathrm{tg}h\,\theta = AR.$$

As demais funções hiperbólicas são

$$cotgh\,\theta = \frac{1}{AR} = \frac{1}{tgh\,\theta} = \frac{cosh\,\theta}{senh\,\theta},$$

$$sech\,\theta = \frac{1}{OF} = \frac{1}{cosh\,\theta}$$

e

$$cosech\,\theta = \frac{1}{FG} = \frac{1}{senh\,\theta}.$$

Vamos agora deduzir algumas relações entre estas funções. Temos que para o ponto G, $X = OF$ e $Y = FG$. Assim,

$$X^2 - Y^2 = OF^2 - FG^2 = 1$$

e logo,

$$\cosh^2\theta - \mathrm{sen}h^2\theta = 1. \tag{2.5}$$

Sendo o triângulo OFG semelhante ao triângulo OAR ($\Delta OFG \sim \Delta OAR$), então

$$AR = \frac{FG}{OF},$$

desta forma tem-se,

$$tgh\,\theta = \frac{senh\,\theta}{cosh\,\theta}. \tag{2.6}$$

Como,

$$\cosh^2\theta - \text{sen}h^2\theta = 1,$$

então,

$$1 - \frac{senh^2\theta}{cosh^2\theta} = \frac{1}{cosh^2\theta},$$

ou seja,

$$1 - tgh^2\theta = sech^2\theta. \tag{2.7}$$

Ainda,

$$\frac{cosh^2\theta}{senh^2\theta} - 1 = \frac{1}{senh^2\theta}$$

ou seja,

$$cotgh^2\theta - 1 = cosech^2\theta. \tag{2.8}$$

Parecem ser iguais as funções trigonométricas e as hiperbólicas na definição, mas possuem grandes diferenças.

Nas funções trigonométricas temos que

i) O $sen\,\theta$ e o $cos\,\theta$ são periódicas com período 2π.

ii) A função $sen\,\theta$ é limitada, com $-1 \leq sen\,\theta \leq 1$e o $cos\,\theta$ varia entre -1 e 1.

iii) A $tg\,\theta$ pode assumir qualquer valor entre $-\infty$ e $+\infty$.

E nas funções hiperbólicas, teremos posteriormente

i) O $senh\,\theta$ e o $cosh\,\theta$ não possuem período.

ii) A função $senh\,\theta$ não é limitada, varia de $-\infty$ até $+\infty$ e o $cosh\,\theta$ varia de 1 a $+\infty$.

iii) A $tgh\,\theta$ é limitada, $-1 < tgh\,\theta < 1$.

Observe que as funções hiperbólicas são definidas em alguns livros desta maneira.

Exemplo 2.1 *Dado* $tgh\,\theta = \frac{4}{5}$*, achar os valores das outras funções hiperbólicas.*

Sabemos que $cosh^2\theta - senh^2\theta = 1$, então dividimos por $cosh^2\theta$, cada termo. Assim,

$$\frac{cosh^2\theta}{cosh^2\theta} - \frac{senh^2\theta}{cosh^2} = \frac{1}{cosh^2\theta}.$$

Logo,

$$1 - tgh^2\theta = sech^2\theta.$$

Como $tgh\,\theta = \frac{4}{5}$, então

$$1 - tgh^2\theta = sech^2\theta,$$

ou seja,

$$1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = sech^2\theta,$$

ou ainda,

$$1 - \frac{16}{25} = sech^2\theta,$$

portanto,

$$\frac{9}{25} = sech^2\theta,$$

logo,

$$sech\,\theta = \frac{3}{5}.$$

Temos $sech\,\theta$ encontrado. Agora, encontraremos o $cosh\,\theta$. Assim,

$$sech\,\theta = \frac{1}{cosh\,\theta},$$

ou seja,

$$cosh\,\theta = \frac{1}{sech\,\theta},$$

portanto,

$$cosh\,\theta = \frac{5}{3}.$$

Para encontrar $senh\,\theta$ façamos

$$tgh\,\theta = \frac{senh\,\theta}{cosh\,\theta}.$$

Assim,

$$senh\,\theta = tgh\,\theta\,cosh\,\theta,$$

ou seja,

$$senh\,\theta = \frac{4}{5}.\frac{5}{3} = \frac{4}{3}.$$

Por fim encontraremos $cotgh\,\theta$ e $cosech\,\theta$, façamos

$$cotgh\,\theta = \frac{1}{tgh\,\theta} = \frac{5}{4}.$$

e

$$cosech\,\theta = \frac{1}{senh\,\theta} = \frac{3}{4}.$$

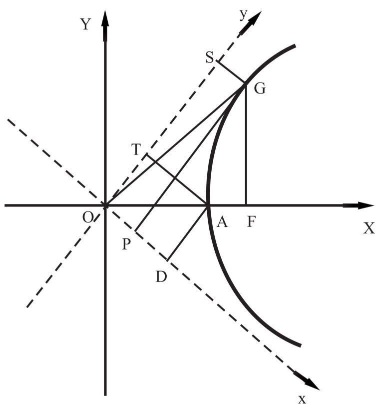
A seguir apresentaremos um importante resultado envolvendo as funções hiperbólicas.

Teorema 2.1 *As funções $cosh\,\theta$ e $senh\,\theta$ satisfazem as seguintes igualdades*

$$cosh\,\theta = \frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2}$$

e

$$senh\,\theta = \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2}.$$



$Figura\,2.3$

Demonstração: Seja G um ponto sobre a hipérbole $X^2 - Y^2 = 1$, que determina um ângulo de medida hiperbólica θ, então $A_{OAG} = \frac{\theta}{2}$. O ponto G tem coordenadas

$$X = OF = cosh\,\theta \text{ e } Y = FG = senh\,\theta$$

nos eixos X, Y e coordenadas

$$x = OP \quad \text{e} \quad y = OS$$

nos eixos x, y. Segue das equações (1.7) e (1.8) que

$$OP = x = \frac{\sqrt{2}}{2}(X - Y) = \frac{\sqrt{2}}{2}(cosh\,\theta - senh\,\theta)$$

e

$$OS = y = \frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y) = \frac{\sqrt{2}}{2}(cosh\,\theta + senh\,\theta).$$

O ponto A tem coordenadas

$$X = 1, \quad Y = 0 \quad \text{e} \quad x = OD, \quad y = OT.$$

Temos que,

$$OD = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{e} \quad OT = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Logo, as áreas das regiões $PDAG$ e $STAG$ podem ser calculada por

$$A_{PDAG} = \frac{1}{2}\,ln\,\frac{OD}{OP} = \frac{1}{2}\,ln\,\frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2\,(cosh\,\theta - senh\,\theta)} = -\frac{1}{2}\,ln\,(cosh\,\theta - senh\,\theta)$$

e

$$A_{STAG} = \frac{1}{2}\,ln\,\frac{OS}{OT} = \frac{1}{2}\,ln\,\frac{\sqrt{2}/2\,(cosh\,\theta + senh\,\theta)}{\sqrt{2}/2} = \frac{1}{2}\,ln\,(cosh\,\theta + senh\,\theta).$$

Como $A_{OAG} = A_{PDAG}$, temos

$$\frac{\theta}{2} = -\frac{1}{2}\,ln\,(cosh\,\theta - senh\,\theta) \tag{2.9}$$

e como $A_{OAG} = A_{STAG}$, temos

$$\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}\,ln\,(cosh\,\theta + senh\,\theta). \tag{2.10}$$

Assim, aplicando a função exponencial em (2.9) e (2.10), temos

$$e^{-\theta} = cosh\,\theta - senh\,\theta \tag{2.11}$$

e

$$e^{\theta} = cosh\,\theta + senh\,\theta. \tag{2.12}$$

Se somarmos a duas equações (2.11) e (2.12), temos

$$cosh\,\theta = \frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2},$$

Se subtrairmos (2.11) e (2.12), temos

$$senh\,\theta = \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2}.$$

De acordo com o teorema anterior podemos deduzir as fórmulas para as outras funções hiperbólicas envolvendo a função exponencial

i) $tgh\,\theta = \dfrac{senh\,\theta}{cosh\,\theta} = \dfrac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{e^{\theta} + e^{-\theta}}.$

ii) $cotgh\,\theta = \dfrac{1}{tgh\,\theta} = \dfrac{cosh\,\theta}{senh\,\theta} = \dfrac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{e^{\theta} - e^{-\theta}}.$

iii) $sech\,\theta = \dfrac{1}{cosh\,\theta} = \dfrac{2}{e^{\theta} + e^{-\theta}}.$

iv) $cosech\,\theta = \dfrac{1}{senh\,\theta} = \dfrac{2}{e^{\theta} - e^{-\theta}}.$

2.2 Aplicações em ângulos especiais

2.2.1 Funções hiperbólicas de $\theta + w$

As fórmulas para as funções hiperbólicas aplicadas a ângulos do tipo $\theta + w$ são as seguintes

$$senh\,(\theta + w) = senh\,\theta\,cosh\,w + cosh\,\theta\,senh\,w \tag{2.13}$$

e

$$cosh\,(\theta + w) = cosh\,\theta\,cosh\,w + senh\,\theta\,senh\,w. \tag{2.14}$$

Inicialmente vamos demonstrar a igualdade (2.13). Para isto, observe que

$$senh\,(\theta + w) = \frac{e^{\theta+w} - e^{-\theta-w}}{2} \tag{2.15}$$

e

$$cosh\,(\theta + w) = \frac{e^{\theta+w} + e^{-\theta-w}}{2}. \tag{2.16}$$

Assim, usando (2.11) e (2.12), temos

$$\begin{aligned} senh\,(\theta + w) &= \frac{e^{\theta+w} - e^{-\theta-w}}{2} \\ &= \frac{e^{\theta}e^{w} - e^{-\theta}e^{-w}}{2} \\ &= \frac{(cosh\,\theta + senh\,\theta)(cosh\,w + senh\,w) - (cosh\,\theta - senh\,\theta)(cosh\,w - senh\,w)}{2}. \end{aligned}$$

Fazendo as multiplicações e reduzindo, obtemos

$$\begin{aligned} senh\,(\theta + w) &= \frac{2\,(senh\,\theta\,cosh\,w) + 2\,(cosh\,\theta\,senh\,w)}{2} \\ &= senh\,\theta\,cosh\,w + cosh\,\theta\,senh\,w. \end{aligned}$$

Agora vamos demonstrar a identidade (2.14), segue de (2.16) que

$$\begin{aligned} cosh\,(\theta + w) &= \frac{e^{\theta+w} + e^{-\theta-w}}{2} \\ &= \frac{e^{\theta}e^{w} + e^{-\theta}e^{-w}}{2} \\ &= \frac{(cosh\,\theta + senh\,\theta)(cosh\,w + senh\,w) + (cosh\,\theta - senh\,\theta)(cosh\,w - senh\,w)}{2}. \end{aligned}$$

Fazendo as multiplicações e reduzindo, obtemos

$$\begin{aligned} cosh\,(\theta + w) &= \frac{2\,(cosh\,\theta\,cosh\,w) + 2\,(senh\,\theta\,senh\,w)}{2} \\ &= cosh\,\theta\,cosh\,w + senh\,\theta\,senh\,w. \end{aligned}$$

As identidades

$$senh\,(\theta - w) = senh\,\theta\,cosh\,w - cosh\,\theta\,senh\,w$$

e

$$cosh\,(\theta - w) = cosh\,\theta\,cosh\,w - senh\,\theta\,senh\,w,$$

demonstram-se de forma análoga.

2.2.2 Funções hiperbólicas de $2\,\theta$ e $\frac{1}{2}\,\theta$

Pondo- se $w = \theta$ em (2.13) e (2.14), temos

$$senh\,2\,\theta = 2\,senh\,\theta\,cosh\,\theta \tag{2.17}$$

e

$$cosh\,2\,\theta = cosh^2\theta + senh^2\theta. \tag{2.18}$$

A fórmula (2.18) combinada com a identidade (2.5), nos dá duas fórmulas alternativas para o $cosh\,\theta$. Assim,

$$cosh^2\theta = 1 + senh^2\theta,$$

e substituindo o valor de $cosh^2\theta$ em (2.18), temos

$$cosh\,2\,\theta = 1 + senh^2\theta + senh^2\theta,$$

ou seja,

$$cosh\,2\,\theta = 2\,senh^2\theta + 1. \tag{2.19}$$

De (2.5) vamos obter o valor de

$$senh^2\theta = 1 - cosh^2\theta$$

e substituindo o valor de $senh^2\theta$ em (2.18), temos

$$cosh\,2\,\theta = 2\,cosh^2\theta - 1. \tag{2.20}$$

Para as funções hiperbólicas de $\frac{1}{2}\,\theta$ vamos fazer o seguinte em (2.19)

$$2\,senh^2\theta = 1 - cosh\,2\,\theta,$$

ou seja,

$$senh^2\theta = \frac{1 - cosh\,2\,\theta}{2},$$

e substituindo θ por $\frac{1}{2}\,\theta$ e aplicando a raiz quadrada

$$senh\,\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - cosh\,\theta}{2}}\,. \tag{2.21}$$

Da mesma forma vamos fazer em (2.20). Assim,

$$2\,cosh^2\theta = 1 + cosh\,2\,\theta,$$

ou seja,

$$cosh^2\theta = \frac{1 + cosh\,2\,\theta}{2},$$

e substituindo θ por $\frac{1}{2}\,\theta$ e aplicando a raiz quadrada

$$cosh\,\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 + cosh\,\theta}{2}}\quad . \tag{2.22}$$

Não temos um simbolo de $\pm$ em (2.22), pois a imagem da função cosseno hiperbólico é $[1, +\infty)$.

Assim de (2.21) e (2.22), vamos obter

$$tgh\,\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - cosh\,\theta}{1 + cosh\,\theta}}\quad . \tag{2.23}$$

De (2.5) e (2.18), obtemos resultados que correspondem às fórmulas para

$$sen^2\theta = \frac{1}{2}\,cos\,2\,\theta - \frac{1}{2}$$

e

$$cos^2\theta = \frac{1}{2}\,cos\,2\,\theta + \frac{1}{2}.$$

Elas são

$$senh^2\theta = \frac{1}{2}\,cosh\,2\,\theta - \frac{1}{2} \tag{2.24}$$

e

$$cosh^2\theta = \frac{1}{2}\,cosh\,2\,\theta + \frac{1}{2}. \tag{2.25}$$

Exemplo 2.2 *Vamos deduzir a seguinte fórmula*

$$tgh\,\theta = \frac{senh\,2\,\theta}{cosh\,2\,\theta + 1}. \tag{2.26}$$

Observe que de (2.24) e (2.25), por divisão, vamos obter

$$tgh^2\theta = \frac{cosh\,2\,\theta - 1}{cosh\,2\,\theta + 1}. \tag{2.27}$$

Ora,

$$\frac{cosh\,2\,\theta - 1}{cosh\,2\,\theta + 1}.\frac{cosh\,2\,\theta + 1}{cosh\,2\,\theta + 1} = \frac{cosh^2 2\,\theta - 1}{(cosh\,2\,\theta + 1)^2}.$$

Por

$$cosh^2 2\,\theta - senh^2 2\,\theta = 1,$$

temos

$$cosh^2 2\,\theta - 1 = senh^2 2\,\theta,$$

logo (2.26), torna-se

$$tgh^2\theta = \frac{senh^2 2\,\theta}{(cosh\,2\,\theta + 1)^2}, \tag{2.28}$$

e portanto

$$tgh\,\theta = \pm\frac{senh\,2\,\theta}{cosh\,2\,\theta + 1}.$$

Vamos examinar o sinal diante do segundo membro. De (2.17) vem

$$senh\,2\,\theta = \frac{2\,senh\,\theta}{cosh\,\theta}\,cosh^2\theta = 2\,tgh\,\theta\,cosh^2\theta.$$

Logo, $senh\,2\,\theta$ e $tgh\,\theta$ têm o mesmo sinal. Vê- se também que $cosh\,2\,\theta + 1$ é sempre positiva e portanto o sinal positivo prevalece, o que demonstra (2.26).

Observe que aplicando o ângulo $\frac{1}{2}\,\theta$ na expressão (2.26) obtemos a fórmula para

$$tgh\,\frac{\theta}{2} = \frac{senh\,\theta}{cosh\,\theta + 1}. \tag{2.29}$$

Exemplo 2.3 *Mostre que a solução geral da equação diferencial*

$$\frac{d^2y}{dx^2} - a^2y = 0 \tag{2.30}$$

pode ser posta sob a forma $y = A\,senh\,ax + B\,cosh\,ax$, onde A e B são constantes.

Iremos usar a equação auxiliar que é dada pela fórmula $r^2+pr+q = 0$, de (2.30), $r^2-a^2 = 0$, cujas raízes são a e $-a$. Sabendo que a solução geral de (2.30) é dada por

$$y = c_1e^{ax} + c_2e^{-ax}.$$

Os valores de e^{ax} e e^{-ax} são obtidos de (2.11) e de (2.12), pondo $\theta = ax$. Logo

$$e^{ax} = cosh\,ax + senh\,ax,\ e^{-ax} = cosh\,ax - senh\,ax,$$

assim,

$$\begin{aligned} y &= c_1\,(cosh\,ax + senh\,ax) + c_2\,(cosh\,ax - senh\,ax) \\ &= (c_1 + c_2)\,cosh\,ax + (c_1 - c_2)\,senh\,ax. \end{aligned}$$

Pondo

$$c_1 - c_2 = A \ \text{ e } \ c_1 + c_2 = B,$$

obtemos a forma desejada.

$$y = A\, senh\, ax + B\, cosh\, ax.$$

Capítulo 3

Derivadas e Integrais

Neste capítulo vamos analisar a diferenciabilidade das funções hiperbólicas, estudar as integrais destas funções, analisar os gráficos e por fim apresentar uma aplicação envolvendo a catenária.

3.1 Derivadas

As fórmulas para as derivadas são as seguintes

i) $\dfrac{d}{d\theta}\, senh\,\theta = cosh\,\theta.$

ii) $\dfrac{d}{d\theta}\, cosh\,\theta = senh\,\theta.$

iii) $\dfrac{d}{d\theta}\, tgh\,\theta = sech^2\theta.$

iv) $\dfrac{d}{d\theta}\, cotgh\,\theta = -cosech^2\theta.$

v) $\dfrac{d}{d\theta}\, sech\,\theta = -sech\,\theta\, tgh\,\theta.$

vi) $\dfrac{d}{d\theta}\, cosech\,\theta = -cosech\,\theta\, cotgh\,\theta.$

Vamos agora justificar as fórmulas acima.

Justificativa de **i)** Recorde que

$$\frac{d}{d\theta}\,(e^{c\,\theta}) = c\,e^{\theta} \quad \text{para } c \in \mathbb{R}.$$

Usando isto deduzimos

$$\frac{d}{d\theta}\, senh\,\theta = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{e^{\theta}-e^{-\theta}}{2}\right) = \frac{e^{\theta}+e^{-\theta}}{2} = cosh\,\theta.$$

Justificativa de **ii)**

$$\frac{d}{d\theta}\, cosh\,\theta = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{e^{\theta}+e^{-\theta}}{2}\right) = \frac{e^{\theta}-e^{-\theta}}{2} = senh\,\theta.$$

Justificativa de **iii)** Utilizando a regra de derivação do quociente, temos

$$\frac{d}{d\theta}\, tgh\,\theta = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{senh\theta}{cosh\theta}\right) = \frac{cosh^2\theta - senh^2\theta}{cosh^2\theta} = \frac{1}{cosh^2\theta} = sech^2\theta.$$

Justificativa de **iv)**

$$\frac{d}{d\theta}\, cotgh\,\theta = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{tgh\,\theta}\right) = -\frac{sech^2\theta}{tgh^2\theta} = -\,cosech^2\theta.$$

Justificativa de **v)**

$$\frac{d}{d\theta}\, sech\,\theta = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{cosh\,\theta}\right) = -\frac{senh\theta}{cosh^2\theta} = -\,sech\,\theta\, tgh\,\theta.$$

Justificativa de **vi)**

$$\frac{d}{d\theta}\, cosech\,\theta = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{senh\,\theta}\right) = -\frac{cosh\theta}{senh^2\theta} = -\,cosech\,\theta\, cotgh\,\theta.$$

Com base na Regra da cadeia se θ é uma função de w, temos as fórmulas

i) $\dfrac{d}{dw}\, senh\,\theta = cosh\,\theta\, \dfrac{dw}{d\theta}$.

ii) $\dfrac{d}{dw}\, cosh\,\theta = senh\,\theta\, \dfrac{d\theta}{dw}$.

iii) $\dfrac{d}{dw}\, tgh\,\theta = sech^2\theta\, \dfrac{d\theta}{dw}$.

iv) $\dfrac{d}{dw}\, cotgh\,\theta = -cosech^2\theta\, \dfrac{d\theta}{dw}$.

v) $\dfrac{d}{dw}\, sech\,\theta = -sech\,\theta\, tgh\,\theta\, \dfrac{d\theta}{dw}$.

vi) $\dfrac{d}{dw}\, cosech\,\theta = -cosech\,\theta\, cotgh\,\theta\, \dfrac{d\theta}{dw}$.

Exemplo 3.1 *Ache* $\dfrac{dw}{d\theta}$ *sendo* $w = tgh(1-\theta^2)$.

$$\begin{aligned}\frac{dw}{d\theta} &= sech^2\,(1-\theta^2).d\theta(1-\theta^2)\\ &= -2\theta\, sech^2\,(1-\theta^2).\end{aligned}$$

Exemplo 3.2 *Ache* $f'(\theta)$ *sendo* $f(\theta) = ln\, senh\,\theta$.

$$\begin{aligned}f'(\theta) &= \frac{1}{senh\,\theta}\,.\,cosh\,\theta\\ &= \frac{cosh\,\theta}{senh\,\theta}\\ &= cotgh\,\theta.\end{aligned}$$

Exemplo 3.3 *Determine* $\dfrac{d}{d\theta}\,(tgh\sqrt{1+\theta^2})$.

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\theta}\,(tgh\sqrt{1+\theta^2}) &= sech^2\sqrt{1+\theta^2}\,.\,\frac{d}{d\theta}\,(\sqrt{1+\theta^2})\\ &= \frac{\theta}{\sqrt{1+\theta^2}}sech^2\sqrt{1+\theta^2}.\end{aligned}$$

3.2 Integrais

Nas integrais hiperbólicas temos

i) $\int\, senh\,\theta\, d\theta = cosh\,\theta + C$.

ii) $\int\, cosh\,\theta\, d\theta = senh\,\theta + C$.

iii) $\int\, sech^2\,\theta\, d\theta = tgh\,\theta + C$.

iv) $\int\, cosech^2\,\theta\, d\theta = -\, cotgh\,\theta + C$.

v) $\int\, sech\,\theta\, tgh\,\theta\, d\theta = -\, sech\,\theta + C$.

vi) $\int\, cosech\,\theta\, cotgh\,\theta\, d\theta = -\, cosech\,\theta + C$.

Exemplo 3.4 *Calcule* $\int\, tgh^2\theta\, d\theta$.

$$\begin{aligned}\int tgh^2\theta\, d\theta &= \int (1 - sech^2\theta)\, d\theta\\ &= \int d\theta - \int sech^2\theta\, d\theta\\ &= \theta - tgh\,\theta + C.\end{aligned}$$

Exemplo 3.5 *Calcule* $\displaystyle\int_0^1 senh^2\theta\, d\theta.$

$$\begin{aligned}\int_0^1 senh^2\theta\, d\theta &= \int_0^1 \frac{cosh\,2\theta - 1}{2}\, d\theta\\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 (cosh\,2\theta - 1)\, d\theta\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{senh\,2\theta}{2} - \theta\right]_0^1\\ &= \frac{senh\,2}{4} - \frac{1}{2} \approx 0,40672.\end{aligned}$$

Exemplo 3.6 *Calcule* $\displaystyle\int_0^{ln\,2} 4e^\theta senh\,\theta\, d\theta.$

$$\begin{aligned}\int_0^{ln\,2} 4e^\theta senh\,\theta\, d\theta &= \int_0^{ln\,2} 4e^\theta\, \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2}\, d\theta\\ &= \int_0^{ln\,2} (2e^{2\theta} - 2)\, d\theta\\ &= \left[e^{2\theta} - 2\theta\right]_0^{ln\,2}\\ &= (e^{2\,ln\,2} - 2\,ln\,2) - (1 - 0)\\ &= 4 - 2\,ln\,2 - 1 \approx 1,6137.\end{aligned}$$

3.3 Gráficos

Para entendermos melhor façamos o comportamento e o esboçamento do gráfico de $y = senh\,x$, observe que

i) $senh\,0 = 0.$

ii) $senh(-x) = \dfrac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = -senh\,x$, pois o seno hiperbólico é uma função ímpar, onde o domínio e a imagem são o conjunto de todos os números reais.

iii) $\dfrac{d}{dx}(senh\,x) = cosh\,x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} > 0$ para todo x, ou seja, $y = senh\,x$ varia de $-\infty$ a $+\infty$, uma função estritamente crescente.

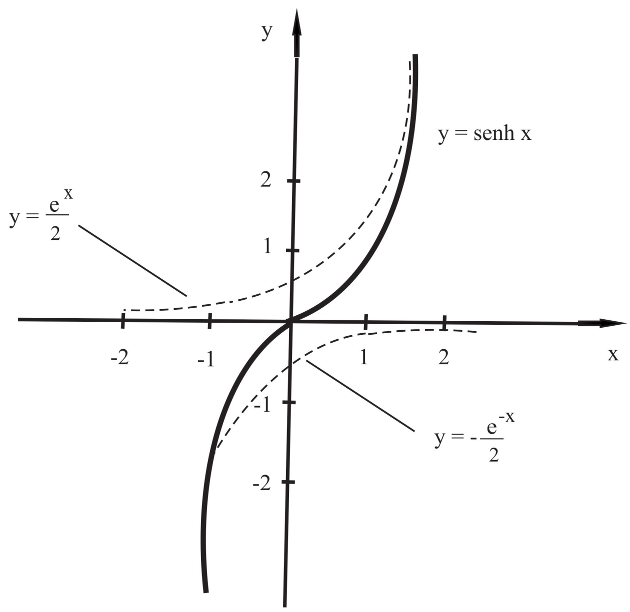
iv) $\dfrac{d^2}{dx^2}(senh\,x) = senh\,x$, pois se $x > 0$ então $y = senh\,x$ é côncava para cima e côncava para baixo se $x < 0$.

v) $\lim\limits_{x\to+\infty} senh\,x = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} senh\,x = -\infty$,ou seja, a imagem da função $y = senh\,x$ é todo o intervalo $(-\infty, +\infty)$.

vi) Se $e^x < 0$ e e^{-x} para todo x, então $-e^x < e^x - e^x < e^x$. Logo $\dfrac{-\,e^x}{2} < senh\,x < \dfrac{e^x}{2}$.

vii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(senh\,x - \dfrac{e^x}{2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-\,e^x}{2} = 0^-$ e $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(senh\,x + \dfrac{e^x}{2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{2} = 0^+$. Estas propriedades nos contam que $y = senh\,x$ se aproxima de $y = \dfrac{e^x}{2}$ quando x cresce, vindo por baixo, e se aproxima de $y = \dfrac{-\,e^{-x}}{2}$ quando x decresce, vindo por cima.

Na $Figura\,3.1$, colocamos os gráficos de $y = senh\,x$, $y = \dfrac{e^x}{2}$ e $y = -\dfrac{e^{-x}}{2}$, no mesmo par de eixos.



$Figura\,3.1$

Agora façamos o comportamento e o esboçamento do gráfico de $y = cosh\,x$, observe que

i) $cosh\, 0 = 1$.

ii) $cosh(-x) = \dfrac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = cosh\, x$, pois o cosseno hiperbólico é uma função par, onde o domínio é o conjunto de todos os números reais e a imagem é o conjunto de todos os números no intervalo $[1, +\infty)$.

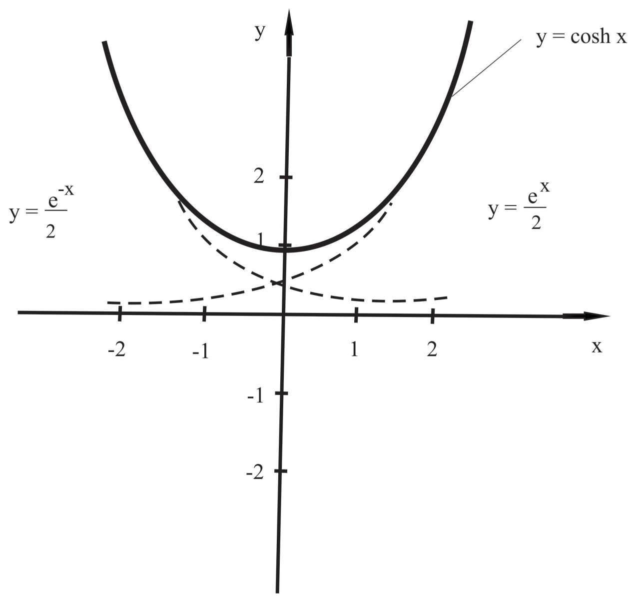
iii) $\dfrac{d}{dx}(cosh\, x) = senh\, x > 0$ se $x > 0$ e $\dfrac{d}{dx}(cosh\, x) = senh\, x < 0$ se $x < 0$. A função cosseno é decrescente se $x < 0$ e crescente se $x > 0$ e tem um mínimo global em $x = 0$. Logo , $cosh\, x \geq 1$.

iv) $\dfrac{d^2}{dx^2}(cosh\, x) = cosh\, x \geq 1$ e logo $cosh\, x$ é sempre côncava para cima.

v) $\lim\limits_{x\to+\infty} cosh\, x = \lim\limits_{x\to+\infty} cosh\, x = +\infty$ e a imagem da função é o intervalo $[1, +\infty)$.

vi) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(cosh\, x - \dfrac{e^x}{2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-\,e^{-x}}{2} = 0^+$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(cosh\, x - \dfrac{e^{-x}}{2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{2} = 0^+$. Estas propriedades nos contam que $y = cosh\, x$ se aproxima de $y = \dfrac{e^x}{2}$ quando x cresce e se aproxima de $y = \dfrac{e^{-x}}{2}$ quando x decresce, mas é sempre maior do que elas.

Na $Figura\, 3.2$ colocamos os gráficos de $y = cosh\, x$, $y = \dfrac{e^x}{2}$ e $y = \dfrac{e^{-x}}{2}$ no mesmo par de eixos.



$Figura\, 3.2$

Por fim, façamos o comportamento e o esboçamento da função $y = tgh\,x$ que pode ser escrita como

$$tgh\,x = \frac{senh\,x}{cosh\,x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}.$$

i) $tgh\,0 = 0$.

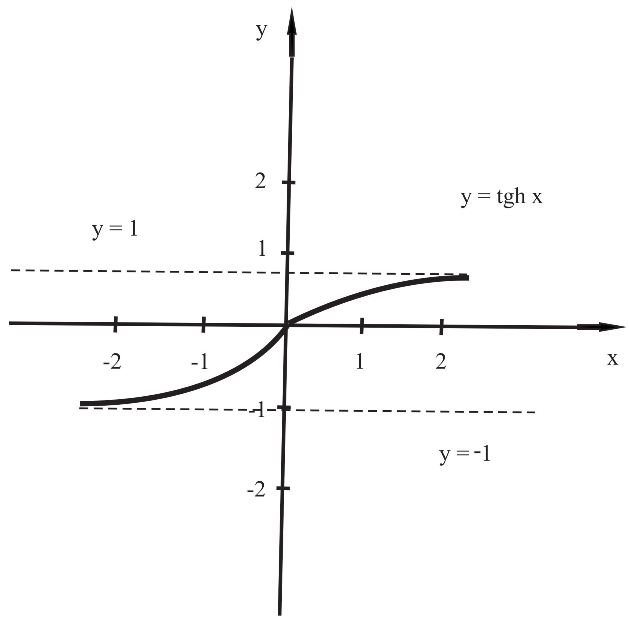
ii) $tgh(-x) = -\dfrac{senh(-x)}{cosh(-x)} = -\dfrac{senh\,x}{cosh\,x} = -tgh\,x$, ou seja, é uma função ímpar.

iii) $e^x - e^{-x} < e^x + e^x$ para todo x.

iv) $\dfrac{d}{dx}(tgh\,x) = \dfrac{1}{cosh^2 x} > 0$, ou seja, $y = tgh\,x$ é estritamente crescente.

v) $\lim\limits_{x\to+\infty} tgh\,x = 1$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} tgh\,x = -1$.

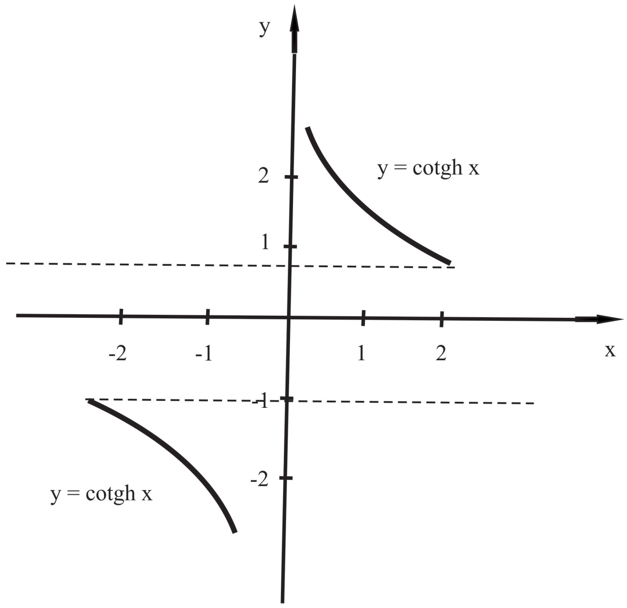
Na $Figura\,3.3$ esboçamos o gráfico de $y = tgh\,x$.



$Figura\,3.3$

As análises das demais funções nos levam aos seguintes gráficos

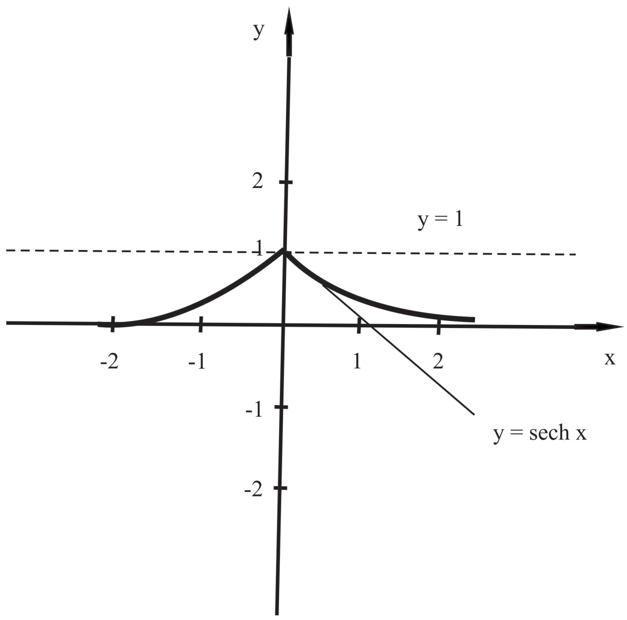
i) $cotgh\,x = \dfrac{1}{tgh\,x} = \dfrac{cosh\,x}{senh\,x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$.



$Figura\,3.4$

A $cotgh\,x$ toma qualquer valor maior que 1, em valor absoluto, pois $cotgh(-x) = -cotgh\,x$.

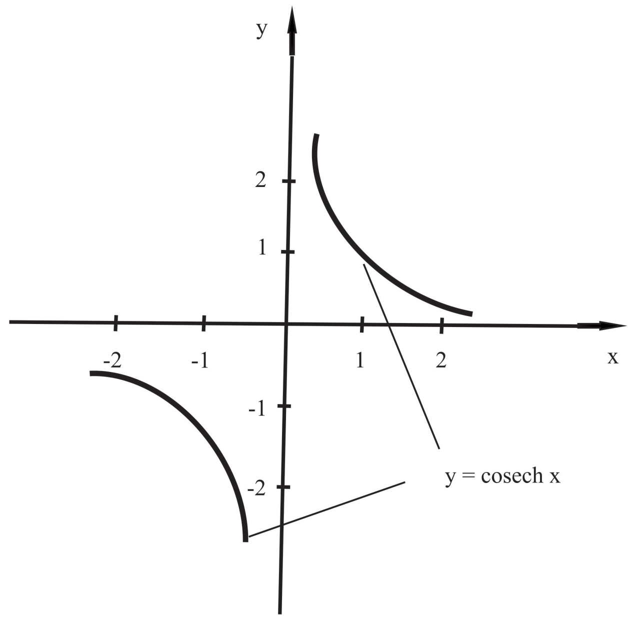
ii) $sech\,x = \dfrac{1}{cosh\,x} = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$.



$Figura\,3.5$

A $sech\,x$ toma qualquer valor positivo não maior que 1, pois $sech(-x) = sech\,x$.

iii) $cosech\, x = \dfrac{1}{senh\, x} = \dfrac{2}{e^x - e^{-x}}.$



$Figura\, 3.6$

A $cosech\, x$ toma qualquer valor, exceto zero, pois $cosech(-x) = -cosech\, x$.

3.4 Catenária

Catenária do latim *catena*, que significa corrente, é a curva formada por um cabo flexível com densidade uniforme, pendurado entre dois pontos, sob a ação de seu próprio peso. Alguns cabos de suspensão de pontes e fios de telefone presos a dois postes apresentam essa forma. O peso do cabo por unidade de comprimento w e a tensão horizontal em seu ponto mais baixo é um vetor de módulo H. Caso adotemos um sistema cartesiano para o plano do cabo no qual o eixo x seja horizontal, a força da gravidade está direcionada para baixo, os pontos do eixo y positivo estão direcionados para cima e o ponto mais baixo do cabo estará em

$$y = \frac{H}{w}$$

no eixo y como na $Figura\, 3.7$, então pode-se demonstrar que o cabo acompanha o gráfico do cosseno hiperbólico.

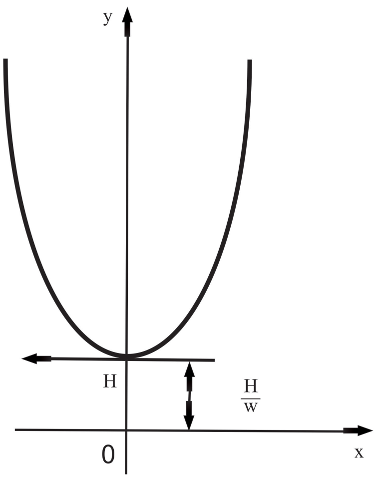


Figura 3.7

Prova-se que a equação da catenária é da forma

$$y = \frac{H}{w} cosh \frac{w}{H} x, \tag{3.1}$$

onde pode ser encontrada em [5]. E é exatamente por equilibrar a tensão interna com o seu peso que a catenária invertida se torna a maneira mais eficiente de construir arcos. Além de eficiente, dá belas construções como a Ponte de Lupu, em Xangai, na China e o Palácio de Episcopal de Astorga, em Barcelona.

Figura 3.8

$Fonte : megaengenharia.blogsport.com.bh/2014/04/ponte - lupu - xangai.htm$

Figura 3.9

$Fonte : K3shapdox.blogsport.com.bh/2011/11/antoni - gaud.htm$

Exemplo 3.7 *Mostre que* $y = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$ *satisfaz a equação diferencial*

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{w}{H}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}, \tag{3.2}$$

desde que $a = \frac{H}{w}$, H *e* w *constantes.*

Diferenciando $y = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$, obtemos

$$\frac{dy}{dx} = a\,senh\,\frac{x}{a}.\frac{1}{a} = senh\frac{x}{a}$$

e

$$\frac{d^2y}{dx^2} = cosh\,\frac{x}{a}.\frac{1}{a}.$$

Levando em (3.2), temos

$$\frac{1}{a}\,cosh\,\frac{x}{a} = \frac{w}{H}\sqrt{1+senh^2\left(\frac{x}{a}\right)},$$

empregando (2.5), sob a forma

$$1 + senh^2\theta = cosh^2\theta,$$

ou seja,

$$\frac{1}{a}\,cosh\,\frac{x}{a} = \frac{w}{H}\sqrt{cosh^2\left(\frac{x}{a}\right)},$$

e como $cosh^2\theta$ é sempre positivo, temos

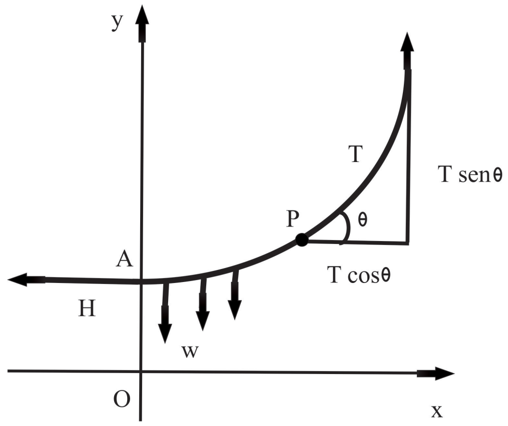
$$\sqrt{cosh^2\theta} = |cosh\,\theta| = cosh\theta,$$

ou seja,

$$\frac{1}{a}\,cosh\,\frac{x}{a} = \frac{w}{H}\,cosh\,\frac{x}{a}.$$

Observação 3.1 *A equação diferencial* (3.2) *exprime a condição de equilíbrio das forças que atuam sobre uma porção* AP *de um cabo suspenso* $Figura\,3.10$. *Supomos que removida a porção restante do cabo, a porção* AP *do ponto mais baixo* A *ao ponto genérico* $P\,(x,y)$, *em equilíbrio sobre as forças* H = *tensão horizontal em* A, T = *tensão tangencial em* P *e* $W = ws$ = *peso de* s *metros do cabo a* w *quilos por metro de comprimento de* A *a* P.

Então o equilíbrio do cabo exige que os componentes horizontal e vertical de T equilibrem H e W respectivamente.



$Figura\, 3.10$

Assim,

$$T\,cos\,\theta = H$$

e

$$T\,sen\theta = W = ws.$$

Por divisão, vem

$$\frac{T\,sen\,\theta}{T\,cos\,\theta} = tg\,\theta = \frac{W}{H}$$

ou

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ws}{H}, \tag{3.3}$$

porque

$$tg\,\theta = \frac{dy}{dx}.$$

O comprimento do arco s em (3.3), pode ser obtido por integração de

$$ds = \sqrt{1 + (dy/dx)^2}dx$$

ao invés disso, podemos diferenciar (3.3) em relação a x. Logo

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{w}{H}\frac{ds}{dx},$$

e aplicar $\sqrt{1 + (dy/dx)^2}$ em lugar de ds/dx para obter (3.2). Portanto,

$$y = a\,cosh\,\frac{x}{a}$$

com

$$a = \frac{H}{w}$$

satisfaz a equação diferencial (3.2).

Teorema 3.1 *Se a função g e sua derivada g' forem contínuas no intervalo fechado $[c, d]$, então o comprimento do arco da curva $x = g(y)$ do ponto $(g(c), c)$ ao ponto $(g(d), d)$ será dado por*

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + [g'(y)]^2}\, dy.$$

Ver [3]

Exemplo 3.8 *Ache o comprimento do arco da catenária definida por $y = a\,cosh\left(\frac{x}{a}\right)$ entre os pontos $(0, a)$ e (x_1, y_1), onde $x_1 > 0$.*

Se

$$f(x) = a\,cosh\left(\frac{x}{a}\right),$$

então

$$\begin{aligned} f'(x) &= a\,senh\left(\frac{x}{a}\right).\left(\frac{1}{a}\right) \\ &= senh\left(\frac{x}{a}\right). \end{aligned}$$

Do $Teorema$ 3.1, se o comprimento do arco dado por L unidades, temos

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{x_1} \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx \\ &= \int_0^{x_1} \sqrt{1 + senh^2\left(\frac{x}{a}\right)}\, dx \\ &= \int_0^{x_1} \sqrt{cosh^2\left(\frac{x}{a}\right)}\, dx \\ &= \int_0^{x_1} cosh\left(\frac{x}{a}\right)\, dx \\ &= \left[a\,senh\left(\frac{x}{a}\right)\right]_0^{x_1} \\ &= a\,senh\left(\frac{x_1}{a}\right) - a\,senh\,0 \\ &= a\,senh\left(\frac{x_1}{a}\right). \end{aligned}$$

Capítulo 4

Funções hiperbólicas inversas

Neste capítulo, vamos apresentar as definições, derivadas e integrais das funções hiperbólicas inversas.

4.1 Definições

A relação

$$y = senh\,\theta \tag{4.1}$$

também se escreve

$$\theta = senh^{-1}y, \tag{4.2}$$

e se lê "θ igual a função inversa do seno hiperbólico de y". Portanto $senh\,\theta$ e $senh^{-1}y$ são funções inversas uma da outra. A mesma notação e nomenclatura são usadas para as outras funções hiperbólicas inversas, que são as seguintes

i) $\theta = cosh^{-1}y$.

ii) $\theta = tgh^{-1}y$.

iii) $\theta = cotgh^{-1}y$.

iv) $\theta = sech^{-1}y$.

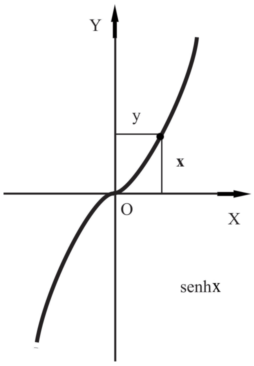
v) $\theta = cosech^{-1}y$.

Vamos agora analisar as curvas e admitir que y seja dado.

A curva

$$y = senh\, x$$

é apresentado na $Figura\, 4.1$ e vamos admitir que y pode ter qualquer valor, positivo ou negativo, e então o valor de x é univocamente determinado.



$Figura\, 4.1$

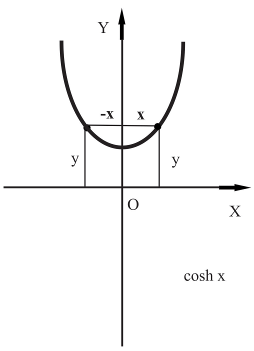
O $senh^{-1}\theta$ é univocamente determinado para qualquer valor de θ. Tem-se também

$$senh^{-1}(-\theta) = -senh^{-1}\theta.$$

A curva

$$y = cosh\, x$$

na $Figura\, 4.2$, y pode ter qualquer valor positivo não menor que 1. Quando $y > 1$, x tem dois valores iguais em valor absoluto mas de sinais contrários.



$Figura\, 4.2$

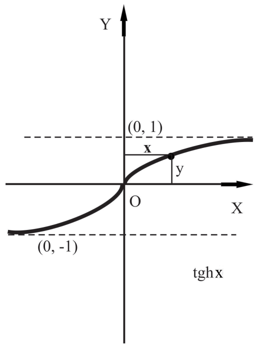
A função $cosh^{-1}\theta$, quando $\theta > 1$, tem dois valores diferindo só pelo sinal. Tem-se também

$$cosh^{-1}1 = 0.$$

A curva

$$y = tgh\, x$$

na $Figura\, 4.3$, y pode ter qualquer valor menor, em valor absoluto, que 1 então o valor de x é univocamente determinado.



$Figura\, 4.3$

A função $tgh^{-1}\theta$ é univocamente determinada quando $\theta^2 < 1$. Tem-se também $tgh^{-1}(-\theta) = -tgh^{-1}\theta$.

As funções hiperbólicas foram definidas no **Capítulo 2** em termos das funções exponenciais. As funções hiperbólicas inversas são expressas em termos das funções logarítmicas. As relações são

(A) $senh^{-1}x = ln\,(x + \sqrt{x^2+1}).$ $\quad (x\ qualquer)$

(B) $cosh^{-1}x = ln\,(x \pm \sqrt{x^2-1}).$ $\quad (x \geq 1)$

(C) $tgh^{-1}x = \dfrac{1}{2}\, ln\, \dfrac{1+x}{1-x}.$ $\quad (x^2 < 1)$

(D) $cotgh^{-1}x = \dfrac{1}{2}\, ln\, \dfrac{x+1}{x-1}.$ $\quad (x^2 > 1)$

(E) $sech^{-1}x = ln\left(\dfrac{1}{x} \pm \sqrt{\dfrac{1}{x^2} - 1}\right).$ $\quad (0 < x \leq 1)$

(F) $cosech^{-1}x = ln\left(\dfrac{1}{x} + \sqrt{\dfrac{1}{x^2} + 1}\right).$ $\quad (x^2 > 0)$

Agora vamos justificar algumas das fórmulas acima.

Justificativa de **(A).** Seja $\theta = senh^{-1}x$. Então

$$x = senh\,\theta = \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2}. \tag{4.3}$$

Para resolver (4.3) em relação a θ, vamos por sob a forma

$$e^{\theta} - \frac{1}{e^{\theta}} - 2\,x = 0$$

ou

$$e^{2\theta} - 2\,xe^{\theta} - 1 = 0.$$

Esta é uma equação do segundo grau em e^{θ}. Resolvendo,

$$e^{\theta} = x \pm \sqrt{x^2 + 1}.$$

Como e^{θ} é sempre positiva, deve-se desprezar o sinal negativo antes do radical. Logo, usando logaritmos neperianos, temos **(A).**

Justificativa de **(B).** Seja $\theta = cosh^{-1}x$. Então

$$x = cosh\,\theta = \frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2}. \tag{4.4}$$

Eliminado os denominadores e reduzindo, vem

$$e^{2\theta} - 2\,xe^{\theta} + 1 = 0.$$

Resolvendo,

$$e^{\theta} = x \pm \sqrt{x^2 - 1}.$$

Os dois valores devem ser considerados. Tomando-se os logaritmos, obtemos **(B).**

Justificativa de **(C).** Seja $\theta = tgh^{-1}x$. Então

$$x = tgh\,\theta = \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{e^{\theta} + e^{-\theta}}. \tag{4.5}$$

Efetuando os cálculos,

$$(x - 1)\,e^{\theta} + (x + 1)\,e^{-\theta} = 0.$$

Logo,

$$e^{2\theta} = \frac{1 + x}{1 - x}.$$

Tomando os logaritmos, obtemos **(C).**

As demais são justificadas de formas semelhantes.

Exemplo 4.1 *Transformar*

$$5\, cosh\, x + 4\, senh\, x \tag{4.6}$$

na forma $C\, cosh\,(x+a)$, onde C e a são constantes, e achar C e a.

Por (2.14), temos

$$C\, cosh\,(x+a) = C\, cosh\, x\, cosh\, a + C\, senh\, x\, senh\, a.$$

Logo,(4.6) terá a forma desejada se C e a satisfazerem as equações

$$C\, cosh\, a = 5$$

e

$$C\, senh\, a = 4.$$

Quadrando, subtraindo , e usando (2.5), vamos obter

$$C^2 = 9,$$

logo,

$$C = +3,$$

pois $cosh\, a$ deve ser positivo. Por divisão, obtemos também

$$tgh\, a = \frac{4}{5},$$

logo,

$$a = tgh^{-1} 0.8 = \frac{1}{2}\, ln\, 9.$$

Portanto $a = 1,099$ e

$$5\, cosh\, x + 4\, senh\, x = 3\, cosh\,(x + 1,099).$$

4.2 Derivadas

As fórmulas são as seguintes

(1) $\dfrac{d}{d\theta}\, senh^{-1}\theta = \dfrac{1}{\sqrt{\theta^2+1}}.$

(2) $\dfrac{d}{d\theta}\, cosh^{-1}\theta = \dfrac{1}{\sqrt{\theta^2-1}}.$

(3) $\dfrac{d}{d\theta}\, tgh^{-1}\theta = \dfrac{1}{1-\theta^2}.$

(4) $\dfrac{d}{d\theta}\, cotgh^{-1} = \dfrac{1}{1-\theta^2}.$

(5) $\dfrac{d}{d\theta}\, sech^{-1}\theta = -\dfrac{1}{\theta\sqrt{1-\theta^2}}.$

(6) $\dfrac{d}{d\theta}\, cosech^{-1}\theta = -\dfrac{1}{|\theta|\sqrt{1+\theta^2}}.$

Exemplo 4.2 *Ache f'(x) sendo*

$$f(x) = tgh^{-1}(cos\, 2x).$$

De **(3)** , temos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1-cos^2 2x}(-2\, sen\, 2x) \\ &= \frac{-2\, sen\, 2x}{sen^2 2x} \\ &= -\frac{2}{sen^2 2x} \\ &= -2\, cosec\, 2x. \end{aligned}$$

4.3 Integrais

As integrais são expressas em termos das funções hiperbólicas inversas, são as seguintes

i) $\displaystyle\int \frac{d\theta}{\sqrt{\theta^2+a^2}} = senh^{-1}\frac{\theta}{a} + C. \qquad (\theta\ qualquer)$

ii) $\displaystyle\int \frac{d\theta}{\sqrt{\theta^2-a^2}} = cosh^{-1}\frac{\theta}{a} + C. \qquad (\theta \geq a)$

iii) $\displaystyle\int \frac{d\theta}{a^2-\theta^2} = \frac{1}{a} tgh^{-1}\,\frac{\theta}{a} + C. \qquad (\theta^2 < a^2)$

iv) $\displaystyle\int \frac{d\theta}{\theta^2-a^2} = -\frac{1}{a} cotgh^{-1}\,\frac{\theta}{a} + C. \qquad (\theta^2 > a^2)$

v) $\displaystyle\int \frac{d\theta}{\theta\sqrt{a^2-\theta^2}} = -\frac{1}{a} sech^{-1}\,\frac{\theta}{a} + C. \qquad (0 < \theta < a)$

vi) $\displaystyle\int \frac{d\theta}{\theta\sqrt{\theta^2+a^2}} = -\frac{1}{a} cosech^{-1}\,\frac{\theta}{a} + C. \qquad (\theta \ qualquer)$

Exemplo 4.3 *Calcule* $\displaystyle\int_0^1 \frac{2\,dx}{\sqrt{3+4x^2}}$.

A integral indefinida é

$$\int_0^1 \frac{2\,dx}{\sqrt{3+4x^2}} = \int \frac{d\theta}{\sqrt{\theta^2+a^2}}.$$

Temos

$$\theta = 2\,x, \ \ d\theta = 2\,dx \ \text{ e } \ a = \sqrt{3}.$$

Assim,

$$\int_0^1 \frac{2\,dx}{\sqrt{3+4x^2}} = senh^{-1}\,\frac{\theta}{a} + C,$$

ou seja,

$$\int_0^1 \frac{2\,dx}{\sqrt{3+4x^2}} = senh^{-1}\,\frac{2\,x}{\sqrt{3}} + C.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{2\,dx}{\sqrt{3+4x^2}} &= senh^{-1}\left(\frac{2\,x}{\sqrt{3}}\right)\Bigg|_0^1 \\ &= senh^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) - senh^{-1}(0) \\ &= senh^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right). \end{aligned}$$

Conclusão

As funções hiperbólicas possuem um papel importante na matemática, pois envolvem aplicações em várias áreas do conhecimento, a exemplo da engenharia e arquitetura como vimos com o exemplo da catenária.

O aprofundamento no estudo de tais funções foi relevante para complementar o assunto que é apresentado de forma sucinta nos livros de cálculo.

As deduções das fórmulas, identidades hiperbólicas, derivadas e integrais, bem como, as aplicações em equações diferenciais ordinárias foram de fundamental importância para o desenvolvimento deste tema.

Ao estudar as funções hiperbólicas, pude somar conhecimentos e obter grande valor para a minha formação acadêmica.

Referências Bibliográficas

[1] GRANVILLE, Willian Anthony, SMITH, Percey F, LONGLEY, William Raymond. *Cálculo*. Tradução de José Abdelhay. Rio de Janeiro: Científica, 1961.

[2] IEZZI, Gelson. *Fundamentos de Matemática Elementar*. São Paulo: Atual, 1977-78.

[3] LEITHOLD, Louis. *Cálculo*. Tradução de Cyro de Carvalho Patarra. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1994.

[4] REIS, Genésio Lima dos, SILVA, Valdir Vilmar da. *Geometria Analítica*. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1996.

[5] THOMAS JR., George B. *Cálculo*. Tradução de Alfredo Alves de Farias. Rio de Janeiro: LTC. 1965. V. 2.

[6] THOMAS, George B. *Cálculo*. Tradução de Thelma Guimarães; Leila Maria Vasconcellos Figueiredo. 11. ed. São Paulo: Addilson Wesley, 2009. V. 1.