UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA-UEPB
CAMPUS I
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA-CCT
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

JOSIEL CUSTÓDIO DA SILVA

RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS:
HISTÓRIA, CONCEITOS, FORMAS E APLICAÇÕES

Campina Grande/PB
Maio/2014

JOSIEL CUSTÓDIO DA SILVA

RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS:
HISTÓRIA, CONCEITOS, FORMAS E APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão do Curso Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba. Em cumprimento às exigências para obtenção do Título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. JUAREZ DANTAS DE SOUZA

Campina Grande/PB
Maio/2014

S586r Silva, Josiel Custodio da.
Razões trigonométricas [manuscrito] : história, conceitos, formas e aplicações / Josiel Custodio da Silva. - 2014.
44 p. : il.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2014.
"Orientação: Prof. Dr. Juarez Dantas de Souza, Departamento de Matemática".

1. Trigonometria. 2. Razões trigonométricas. 3. História da matemática. I. Título.

21. ed. CDD 516.24

JOSIEL CUSTÓDIO DA SILVA

RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS:
HISTÓRIA, CONCEITOS, FORMAS E APLICAÇÕES

Aprovado em: 30/ 05 / 2014

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Juarez Dantas de Souza
Departamento de Matemática– CCT/UEPB
Orientador

Prof. Dr. Vandenberg Lopes Vieira
Departamento de Matemática– CCT/UEPB
Examinador

Prof. MS. Fernando Luis Tavares da Silva
Departamento de Matemática– CCT/UEPB
Examinador

Campina Grande, Maio de 2014

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a todas as pessoas, que mesmo passando por dificuldades não se deixam abalar, e buscam sempre vencer os obstáculos da vida confiando em Deus.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a gradeço a Deus, por nunca ter me deixado desanimar, sempre estando comigo, mesmo nas horas mais difíceis; ao prof. Dr. Juarez Dantas, que se disponibilizou, orientou, escutou, sugeriu, e me incentivou construindo um verdadeiro respeito a ele; a milha esposa Aparecida e filhos Jennifer Estefane, Jeovanna Jasmim e Jean Carlos Moises que sempre estiveram comigo compartilhando momentos bons e difíceis me dando alegria e força; aos amigos José Claudio, Tiago, Klemir e Jucicleide, que sempre estiveram presentes quando eu mais precisava; aos amigos e amigas. Deyse, Aluska, Eliane, Eduardo e outros que no momento não me recordo de seus nomes, mas que me deram apoio para continuar; ao professor Ms. Francisco Sá, por ser um dos melhores professores que já tive e pela ótima pessoa que ele é; ao professor Ms. Orlando Almeida, por saber ensinar e por ser compreensivo com os alunos; ao professor Ms. Samuel Duarte, por ser um grande profissional na área em que ensina; ao professor Dr. Osmundo, pela contribuição significativa para a minha aprendizagem e vida; ao professor Ms. Fernando Luís, por ser um mestre em ensinar trigonometria e ser o principal responsável pelo incentivo a este trabalho; aos meus irmãos Joilson e Joelma, que sempre me ajudaram quando estavam com tempo; aos familiares, Antônia, José Cosmo, Josué, Valdo, Mazinho, Tarcísio, Jordão e irmãos, que me deram apoio moral e ajuda quando precisei; enfim, a todos que contribuíram direta e indiretamente, na execução deste trabalho.

RESUMO

As razões trigonométricas surgiram da necessidade da humanidade de encontrar caminhos matemáticos para resolução de problemas de astronomia, agrimensura, navegação e construção. A partir dessa busca nasceu a trigonometria, parte da matemática que se dedica ao estudo das relações entre as medidas dos lados e dos ângulos de um triângulo. Podemos afirmar que os primeiros métodos de resolução desses problemas tiveram inicio com o astrônomo Hiparco de Nicéia no século II a.C. este que é considerado o "pai da trigonometria", e se desenvolveu com Claudio Ptolomeu (85-165 d.C.), provavelmente com base no trabalho de Hiparco. O surgimento das razões trigonométricas contribuiu muito para o desenvolvimento da humanidade. Não só na astronomia e na matemática, mas também na medicina, na física, na aeronáutica, na mecânica, na acústica, na música, na engenharia etc. Por isso, o grande interesse em desenvolver este trabalho tendo a trigonometria como base de pesquisa.

Neste trabalho é feita uma abordagem sobre as razões trigonométricas no triângulo retângulo, levando em conta alguns temas importantes na trigonometria: relações fundamentais, relações decorrentes, transformações e a importância das razões trigonométricas, levando em conta alguns aspectos históricos, conceitos e demonstrações. Procuramos seguir uma ordem lógica na apresentação de conceitos e propriedades e nas respectivas demonstrações.

AB STRACT

The trigonometric ratios of mankind arose from the need to find ways to solve mathematical problems of astronomy, surveying, navigation and construction. From this search, part of mathematics that deals with the study of the relationships between the measures of sides and angles of a triangle is born. We can say that the first methods of solving these problems began with the astronomer Hipparchus of Nicea in the second century BC this is considered the “father of trigonometry ", and developed with Claudio Ptolemy (85-165 AD), probably based on the work of Hipparchus. The emergence of trigonometric ratios contributed much to the development of humanity. Not only in astronomy and mathematics, but also in medicine, physics, aeronautics, mechanical, structural acoustics, music, engineering etc. Hence the great interest in developing this work with trigonometry based research. In this paper an approach to the trigonometric ratios in right triangle is made, taking into account some important topics in trigonometry: fundamental relations, relations arising, transformations and importance of trigonometric ratios, taking into account some historical aspects, concepts and follow and statements. Seek logical order in the presentation of concepts and properties and in their statements.

SUMÁRIO

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

1.1. INTRODUÇÃO

Acredita-se que os primeiros estudos da Trigonometria ocorreram na antiguidade através dos egípcios, dos gregos e dos Babilônios para suprir necessidades práticas principalmente relacionadas com a demarcação de terra, construção de prédios e monumentos, traçado de mapas e de rotas, tanto terrestres como marítimas, para a elaboração de calendários e na Astronomia. A partir desses estudos a trigonometria passou a ter aplicações na engenharia, na mecânica, na acústica, na eletrônica, na medicina, na aeronáutica e na música (Giovanni Jr e Castrucci, 2009). Hoje ela é utilizada no estudo de todos os fenômenos que envolvem padrões periódicos, por exemplo, os fenômenos que envolvem movimentos ondulatórios tais como: transmissão de energia, de calor, de som, batimentos cardíacos e séries climáticas.

A palavra trigonometria significa medida das partes de um triângulo (Giovanni Jr e Castrucci, 2009), e sua origem está em união com três radicais gregos: tri, que significa três; gonos, que quer dizer ângulo e metron, que significa medida (Bianchini e Paccola, 2003).

As relações entre lados e ângulos de um triângulo retângulo ocorreram a partir do astrônomo e matemático grego Hiparco de Nicéia que viveu em (190-120 a.C), considerado o Pai da trigonometria (Bianchini e Paccola, 2003), ele contribuiu junto a outros nomes importantes da matemática, para o surgimento da trigonometria que até o Século XVII d.C era basicamente o estudo das relações nos triângulos retângulos, das razões trigonométricas e de suas tabelas; seria equivalente ao que é visto nas nossas escolas no 9º ano do Ensino Fundamental e médio.

A trigonometria no triângulo retângulo é muito útil no cálculo de exemplos dos componentes das forças que atuam sobre corpos em planos inclinados, como na rampa da Praça dos Três Poderes em Brasília (Bianchini e Paccola, 2003). Hoje ela não se limita mais a estudar apenas os triângulos, mas possui diversas aplicações na Matemática, na Física (Mecânica, Eletricidade e Acústica), na Medicina, na Música, na Engenharia civil, na Aeronáutica, etc.

Os conceitos sobre razões trigonométricas têm contribuído muito nas construções civis, pois através deles podemos calcular alturas, distâncias e outras medidas dos prédios, casas, pontes, campos, e ainda na construção de carros, aviões, barcos, etc.

1.2. ASPECTOS HISTÓRICOS

Não se sabe com certeza, em que época começaram os primeiros estudos da trigonometria, mas sabemos que ela não é tão nova assim e que surgiu da necessidade humana de encontrar caminhos matemáticos para resolução de problemas de astronomia, agrimensura, navegação e construção (Matsubara 2010 e Giovanei Jr e Castrucci, 2009).

Se levarmos em conta o termo como ciência analítica estudada atualmente, veremos que a origem da trigonometria se deu no século XVII, após o desenvolvimento do simbolismo algébrico. Mas, se considerarmos literalmente medidas do triângulo, veremos que o grego Aristarco de Samos (310-230 a.C.), considerado por muitos o primeiro grande astrônomo da história (Matsubara 2010), fez uso das idéias da trigonometria ao estabelecer um método geométrico para investigar a razão entre as distâncias terra-sol e terra-lua, trabalhando o triângulo retângulo. E junto com Erastóstenes de Cirene (276-194 a.C.) e Arquimedes (287-212 a.C.) produziram a mais notável medida da Antiguidade para a circunferência da Terra, usando semelhança de triângulos e razões trigonométricas, o que o levou a perceber a necessidade de relações mais sistemáticas entre ângulos e cordas. Embora existam traços anteriores de seu uso, as origens remontam aos trabalhos de Hiparco de Nicéia em (190-120 a.C.), que levando em consideração a geometria acoplada à Astronomia, trabalhou as relações entre lados e ângulos de um triângulo retângulo. Suas idéias básicas, porém, já haviam sido manifestadas pelos babilônios que as utilizaram na resolução de problemas práticos como cálculo de distâncias em Astronomia, navegação e agrimensura que lhe daria o titulo de inventor da trigonometria, ou seja, o Pai da trigonometria. Os hindus, os árabes e os persas também deram sua contribuição e muitos outros nomes importantes no decorrer da história da matemática.

Os primeiros indícios de trigonometria surgiram no Egito e na Babilônia a partir do cálculo de razões entre números e entre lados de triângulos semelhantes. No Egito, foi observado o Papiro de Ahmes, conhecido como Papiro de Rhind, que se acredita ter surgido aproximadamente em 1650 a.C., e que contém 84 problemas. Eles também trabalharam com a trigonometria nas medições das pirâmides. Na Babilônia foi construído um calendário astrológico no século 28 a.C., durante o reinado de Sargon, e elaboraram a partir do ano 747 a.C., uma tábua que registrava os eclipses lunares. Nomes são considerados como excelentes astrônomos (Smith, 1958) por ter um grande interesse pela área, tanto por razões religiosas, quanto pelas conexões com o calendário e épocas de plantio, onde também consideraram os triângulos para realizarem seus cálculos.

Uma importante contribuição para a trigonometria é o conceito de ângulo e de como efetuar sua medida, uma vez que ele é fundamental em diversas situações como, por exemplo, na compreensão das razões trigonométricas em um triângulo retângulo. Existem evidências de tentativas de medi-los, em datas muito remotas, chegando até nossos dias fragmentos de círculos que parecem ter feito parte de astrolábios primitivos, provavelmente usados com propósito de medições (Smith, 1958).

A China, também já havia trabalhado com os triângulos retângulos, pois existem evidências no reinado de Chóu-pei Suan-ching, aproximadamente 1110 a.C, tanto do conhecimento das relações trigonométricas quanto do conceito de ângulo e a forma de medi-los.

Neste campo, a Grécia produziu grandes sábios; entre eles Thales de Mileto (625-546 a.C.) com seus estudos de semelhança que embasam a trigonometria, e seu discípulo Pitágoras (570-495 a.C.), este que fez a primeira demonstração do teorema que leva seu nome: “Em todo triângulo retângulo a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos”. Deste teorema deriva a relação fundamental da Trigonometria.

Hiparco construiu a primeira tabela trigonométrica com os valores das cordas de uma série de ângulos de 0º a 180°, em cuja montagem utilizou interpolação linear. Ele observou que num dado círculo a razão do arco para a corda diminui quando o arco diminui de 180º para 0°. Mas foi com Ptolomeu (85-165 d.C), operando com as cordas dos arcos que surgiram as fórmulas de seno da soma e da diferença de dois arcos, isto é sen (a+b) e sen (a-b). Especialmente a fórmula para a corda da diferença foi usada por ele para a construção da tabela trigonométrica.

1.3. CONCEITOS

Neste capítulo apresentamos conceitos sobre as razões trigonométricas: Seno, Cosseno e Tangente.

As primeiras idéias sobre razões trigométricas tiveram início no século II a.C.com o astrônomo e matemático Hiparco de Nicéia. A partir dele foram estabelecidos os conceitos de razões trigonométricas, definidos como seguem.

Temos que um triângulo é retângulo quando um de seus ângulos internos é reto. Na Figura 1, como exemplo, o ângulo $\hat{A}$.

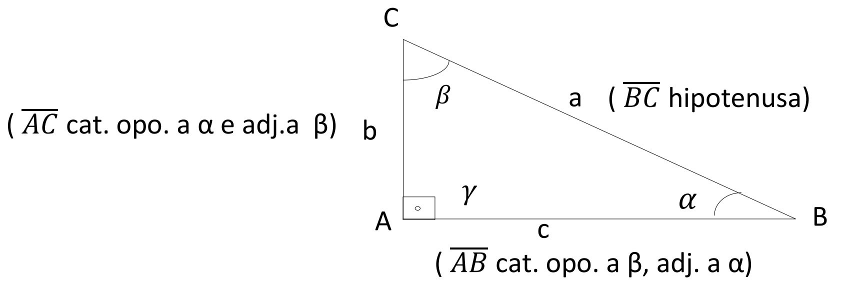

Figura 1. Triangulo retângulo em A

Sempre que tratarmos de um triângulo ABC retângulo, daqui por diante estaremos pensando que o ângulo interno A mede 90°. Analogamente, diremos que os ângulos internos do triângulo são $\widehat{A}, \widehat{B}$ e $\widehat{C}$.

Na Figura 1, o triângulo ABC, retângulo em A, tem os seguintes elementos:

- Ângulos internos $\hat{A}, \hat{B}$ e $\hat{C}$ cujas medidas representamos por γ,α e β. Daí temos: $\alpha + \beta + \gamma = 180°(\gamma = 90°)$.
- O lado $\overline{BC}$, equivalente a, **a**, denominado hipotenusa
- Os lados $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, equivalentes a **b** e **c**, respectivamente, denominados catetos.

2. RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO:

Dado o triângulo ABC, retângulo em A, Figura 2, se estabelecem entre a hipotenusa, a, e os catetos b e c, as seguintes razões trigonométricas:

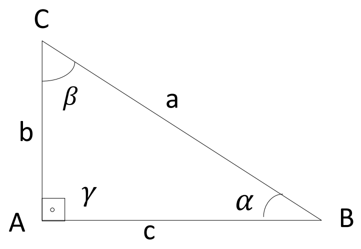

Figura 2. Triângulo retângulo em A

Seno

O seno de um ângulo agudo é a razão entre a medida do cateto oposto ao ângulo e a medida da hipotenusa. Na Figura 2 tem-se:

$$sen\alpha = \frac{b}{a} \tag{1a}$$

$$sen\beta = \frac{c}{a} \tag{1b}$$

Cosseno

O cosseno de um ângulo agudo é a razão entre a medida do cateto adjacente ao ângulo e a medida da hipotenusa.

$$cos\alpha = \frac{c}{a} \tag{2a}$$

$$cos\beta = \frac{b}{a} \tag{2b}$$

Tangente

A tangente de um ângulo é razão entre a medida do cateto oposto ao ângulo e a medida do cateto adjacente ao ângulo

$$tg\alpha = \frac{b}{c} \tag{3a}$$

$$tg\beta = \frac{c}{b} \tag{3b}$$

2.1. VALORES NOTÁVEIS

a) Do ângulo de 45°

Dado um triângulo isósceles, Figura 3, com catetos de medida 1 (um).

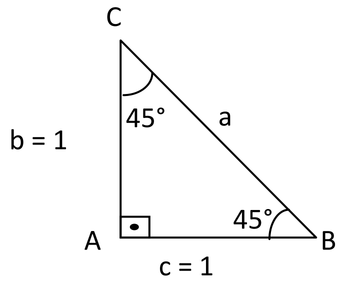

Figura 3. Triângulo isósceles retângulo em $\hat{A}$, $\hat{B}$ = $\hat{C}$ = 45°, b = c = 1

Aplicando o teorema de Pitágoras temos:

$$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow a^2 = 1^2 + 1^2 \rightarrow a^2 = 1 + 1 \rightarrow a^2 = 2 \rightarrow a = \sqrt{2}$$

Daí, teremos:

$$\text{sen } \hat{B} = \frac{b}{a} \rightarrow \text{ sen } 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos \hat{B} = \frac{c}{a} \rightarrow \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tg } \hat{B} = \frac{b}{c} \rightarrow \text{tg } 45° = \frac{1}{1} = 1$$

b) Do ângulo de 30° e 60°

No triângulo eqüilátero ABC, Figura 4, $\hat{A}$ = $\hat{B}$ = $\widehat{C}$ = 60° de lado = 2 (dois). M é o ponto médio do lado $\overline{AB}$ e CM a altura relativa ao lado $\overline{AB}$ e os triângulos AMC e MBC são semelhantes. De acordo com a geometria plana sabemos que $\overline{CM}$ é mediana, altura e bissetriz.

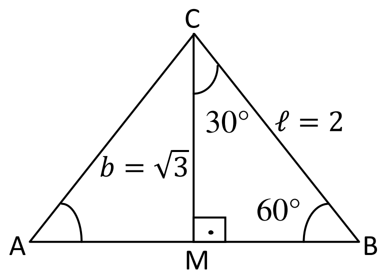

Figura 4. Triângulo eqüilátero de lado 2.

Por Pitágoras, no triângulo retângulo AMC, temos:

$$\overline{AC}^2 = (\overline{AM})^2 + \overline{CM}^2$$

$$2^2 = 1^2 + \overline{CM}^2$$

$$4 = 1 + \overline{CM}^2$$

$$\overline{CM}^2 = 4 - 1$$

$$\overline{CM}^2 = 3$$

$$\overline{CM} = \sqrt{3}$$

Para o ângulo de 30°, temos:

$$\text{sen } 30° = \frac{\overline{AM}}{\overline{AC}} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30° = \frac{\overline{CM}}{\overline{AC}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tg } 30° = \frac{\overline{AM}}{\overline{CM}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Para o ângulo de 60°, temos:

$$\text{sen } 60° = \frac{\overline{CM}}{\overline{AC}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60° = \frac{\overline{AM}}{\overline{AC}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{tg } 60° = \frac{\overline{CM}}{\overline{AM}} = \sqrt{3}$$

Essas razões podem ser resumidas na Tabela 1, de dupla entrada:

Ângulo / Razão	30°	45°	60°
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Tabela 1. Resumo dos valores notáveis.

3. RELAÇÕES FUNDAMENTAIS

Nesta parte iremos deduzir as relações fundamentais:

R1) $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

R2) $\text{tg x} = \frac{\text{sen x}}{\cos \text{x}}$

R3) $\text{cotg x} = \frac{\cos \text{x}}{\text{sen x}}$

$R4)\ \sec x = \frac{1}{\cos\ \text{x}}$

$R5)\ \text{cossec}\, x = \frac{1}{\text{sen}\ \text{x}}$

Demonstrações:

Demonstrando R1)

Usando as relações no triângulo retângulo.

Considerando o triângulo retângulo da Figura 2, e as razões trigonométricas que envolvem o ângulo α, temos que:

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{b}{a} \Rightarrow a \cdot \text{sen}\ \alpha = b \text{ e } \cos\alpha = \frac{c}{a} \Rightarrow a \cdot \cos\alpha = c$$

Então, de acordo com o teorema de Pitágoras: $b^2 + c^2 = a^2$. Logo:

$$(a \cdot \text{sen}\ \alpha)^2 + (a \cdot \cos\alpha)^2 = a^2$$

$$a^2 \cdot \text{sen}^2\ \alpha + a^2 \cdot \cos^2\alpha = a^2$$

$$a^2(\text{sen}^2\ \alpha + \cos^2\alpha) = a^2$$

Dividindo toda a equação por a^2, temos:

$$\frac{a^2}{a^2}(\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha) = \frac{a^2}{a^2}$$

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Usando o ciclo trigonométrico, Figura 5, pode-se afirmar que para todo x real, $x \in [0, 2\pi]$, vale a relação:

$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

i) No caso especial em que $x \in \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\}$, podemos verificar diretamente na Tabela 2:

x	sen x	cos x	$\text{sen}^2 x + \cos^2 x$
0	0	1	1
$\frac{\pi}{2}$	1	0	1
π	0	-1	1
$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	1
2π	0	1	1

Tabela 2.Valores dos ângulos de seno e cosseno na relação fundamental 1

ii) Se x $\notin$ {0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, 2π}, a imagem de x é distinta de A, B, A' e B', respectivamente, no triângulo OP_2P retângulo em P_2, Figura 5, aplicando o teorema de Pitágoras.

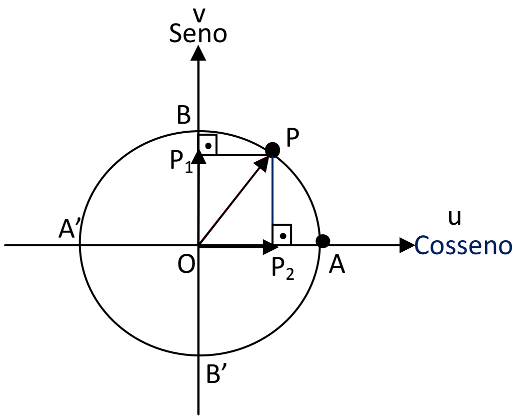

Figura 5. Representação da relação fundamental 1 no ciclo

$$|OP_2|^2 + |P_2P|^2 = |OP|^2$$

ou seja:

$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

Demonstrando R2)

Usando as relações no triângulo retângulo, na figura 2, Considere a razão $\frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$, temos:

$$\frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} \rightarrow \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{b}{a}\cdot\frac{a}{c} \rightarrow \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{b}{c}$$

Logo

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$$

Usando o ciclo trigonométrico, Figura 6. Para todo x real, x ϵ [0, 2π] e

x $\notin$ {$\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$}, vale a relação:

$$tg\ x = \frac{sen\ x}{cos\ x}$$

i) Se x $\notin \{0, \pi, 2\pi\}$, a imagem de x é distinta de A, B, A' e B', então temos:

$$\Delta OAT \sim \Delta OP_2 P$$

$$\frac{|AT|}{|OA|} = \frac{|P_2P|}{|OP_2|}$$

$$|\text{tg } x| = \frac{|\text{sen } x|}{|\cos x|}$$

Utilizando a Tabela 3, observamos que o sinal da tg x é igual ao do quociente $\frac{\text{sen } x}{\cos x}$.

ii) Se x ϵ $\{0, \pi, 2\pi\}$, temos:

$$\text{tg } x = 0 = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$$

$$\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$$

Intervalos	Sinal de Tg $x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$
$0 < x < \frac{\pi}{2}$	+
$\frac{\pi}{2} < x < \pi$	-
$\pi < x < \frac{3\pi}{2}$	+
$\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$	-

Tabela 3. Quadro de sinais da relação fundamental 2.

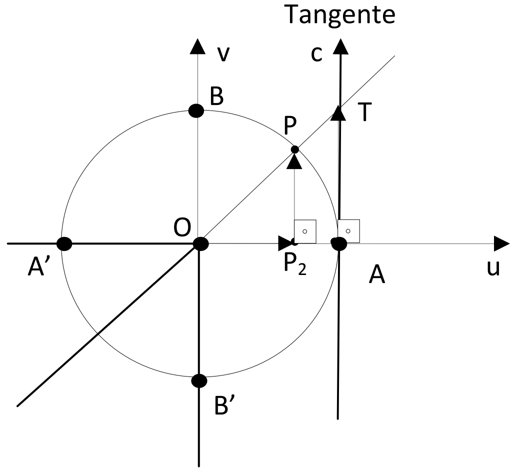

Figura 6. Representação da relação fundamental 2 no ciclo

Demonstrando R3)

Usando o ciclo trigonométrico, figura 7. Considere a razão $\frac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha}$. Então temos:

$$\frac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{\frac{c}{a}}{\frac{b}{a}} = \frac{c}{a}\cdot\frac{a}{b} = \frac{c}{b} = \text{cotg}\,\alpha$$

Logo

$$\text{cotg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha}$$

Para todo x real, x ϵ [0, 2π] e x $\notin$ {0, π, 2π}, vale a relação:

$$\text{cotg}\,x = \frac{\cos x}{\text{sen}\,x}$$

Intervalos	Sinal de Cotg x = $\frac{\cos x}{\text{sen}\,x}$
$0 < x < \frac{\pi}{2}$	+
$\frac{\pi}{2} < x < \pi$	–
$\pi < x < \frac{3\pi}{2}$	+
$\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$	–

Tabela 4, quadro de sinais da relação fundamental 3

ii) Se x = $\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2}$, temos

$$\text{cotg}\,x = \frac{\cos x}{\text{sen}\,x}.$$

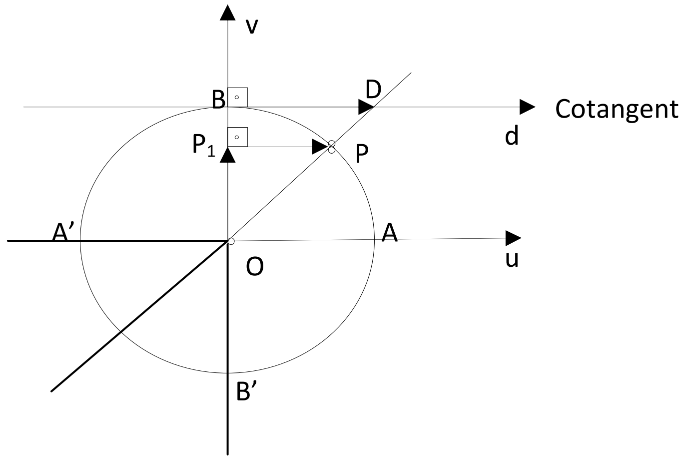

Figura 7. Representação da relação fundamental 3 no ciclo

Demonstrando R4)

Usando o ciclo trigonométrico, Figura 7. Para todo x real, x ϵ [0, 2π] e x $\notin\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$, vale a relação

$$\sec\ x = \frac{1}{\cos x}$$

i) Se x ∉{0, π, 2π}, a imagem de x é distinta de A, B, A' e B', então, temos:

$$\Delta OPS \sim \Delta OP_2 P$$

$$\frac{|OS|}{|OP|} = \frac{|OP|}{|OP_2|}$$

$$\left|\sec x\right| = \frac{|1|}{|\cos x|}$$

Utilizando a Tabela 5, observamos que o sinal de sec x é igual ao sinal de cos x.

Intervalos	Sinal de sec x = 1/cosx
$0 < x < \frac{\pi}{2}$	+
$\frac{\pi}{2} < x < \pi$	−
$\pi < x < \frac{3\pi}{2}$	−
$\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$	+

Tabela 5. Quadro de sinais da relação fundamental 4

ii) Se x = { 0, π, 2π }, temos:

$$\sec x = 1 = \frac{1}{\cos\ x}, \text{ (x = 0 ou x = 2π)}$$

$$\sec x = -1 = \frac{1}{\cos\ x}, \text{ (x = π)}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos\ x}.$$

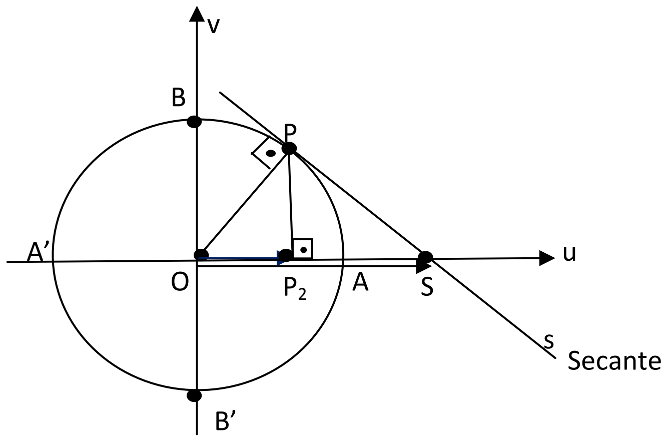

Figura 8. Representação da relação fundamental 4 no ciclo

Demonstrando R5)

Usando o ciclo trigonométrico, figura 8. Para todo x real, x ϵ [0, 2π] e x ∉ {0, π, 2π}, vale a relação:

$$\text{cossec x} = \frac{1}{\text{sen x}}.$$

i) Se x $\notin \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$, a imagem de x é distinta de A, B, A' e B', então, temos:

$$\Delta OPC \sim \Delta OP_1\, P$$

$$\frac{|\,OC\,|}{|\,OP\,|} = \frac{|\,OP\,|}{|\,OP_1\,|}$$

$$|\text{cossec x}\,| = \frac{1}{|\text{ sen x}\,|}$$

Utilizando a Tabela 6, observamos que o sinal de cossecx é igual ao de sen x.

Intervalos	Sinal de cossec x $= \frac{1}{\text{sen x}}$
$0 < x < \frac{\pi}{2}$	+
$\frac{\pi}{2} < x < \pi$	+
$\pi < x < \frac{3\pi}{2}$	–
$\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$	–

Tabela 6. Quadro de sinais da relação fundamental 5

ii) Se x = $\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$, temos:

$$\text{cossec x} = 1 = \frac{1}{\text{sen x}}, \ (\text{x} = \frac{\pi}{2})$$

$$\text{cossec x} = -1 = \frac{1}{\text{sen x}}, \ (\text{x} = \frac{3\pi}{2})$$

$$\text{cossec x} = \frac{1}{\text{sen x}}$$

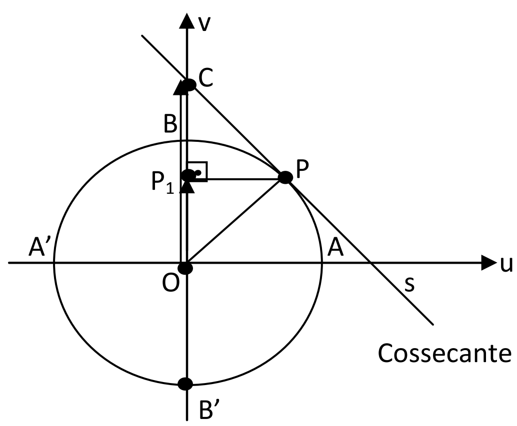

Figura 9. Representação da relação fundamental 5 no ciclo

4. RELAÇÕES DECORRENTES

A partir das cinco relações fundamentais, podemos deduzir as chamadas “relações decorrentes”, definidas abaixo.

Para todo x real, x ∈ [0, 2π] e x diferente de $\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\}$, utilizamos as relações:

R6) $\text{cotg x} = \dfrac{1}{\text{tg x}}$

R7) $\text{tg}^2\text{x} + 1 = \sec^2 \text{x}$

R8) $1 + \text{cotg}^2 \text{x} = \text{cossec}^2\text{x}$

R9) $\cos^2 \text{x} = \dfrac{1}{1 + \text{tg}^2 \text{x}}$

R10) $\text{sen}^2 \text{x} = \dfrac{\text{tg}^2 \text{x}}{1 + \text{tg}^2 \text{x}}$

Demonstrando R6)

$$\text{cotg x} = \frac{\cos \text{x}}{\text{sen x}}$$

$$\text{cotg x} = \frac{\frac{\cos \text{x}}{\cos x}}{\frac{\text{sen x}}{\cos \text{x}}}$$

$$\text{cotg x} = \frac{1}{\frac{\text{sen x}}{\cos \text{x}}}$$

$$\text{cotg x} = \frac{1}{\text{tg x}}$$

Demonstrando R7)

$$\text{tg}^2\text{x} + 1 = \frac{\text{sen}^2 \text{x}}{\cos^2 \text{x}} + 1$$

$$\text{tg}^2 x + 1 = \frac{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x}$$

$$\text{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\text{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x$$

Demonstrando R8)

$$1 + \text{cotg}^2 x = 1 + \frac{\cos^2 x}{\text{sen}^2 x}$$

$$1 + \text{cotg}^2 x = \frac{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}{\text{sen}^2 x}$$

$$1 + \text{cotg}^2 x = \frac{1}{\text{sen}^2 x}$$

$$1 + \text{cotg}^2 x = \text{cossec}^2 x$$

Demonstrando R9)

$$\cos^2 x = \frac{1}{\sec^2 x}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \text{tg}^2 x}$$

(Demonstrando R10)

$$\text{sen}^2 x = \cos^2 x \cdot \frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x}$$

$$\text{sen}^2 x = \cos^2 x \cdot \text{tg}^2 x$$

$$\text{sen}^2 x = \frac{1}{1 + \text{tg}^2 x} \cdot \text{tg}^2 x$$

$$\text{sen}^2 x = \frac{\text{tg}^2 x}{1 + \text{tg}^2 x}$$

5. TRANSFORMAÇÕES

Podemos obter o seno, o cosseno ou a tangente de certo arco a partir da medida de dois ângulos cujos valores trigonométricos já são conhecidos.

Conhecendo os valores de sen 30° e sen 45°, por exemplo, podemos obter, em função deles, os valores de sen 75° e o sen15°, isto é:

$$\text{sen } 75° = \text{sen } (45° + 30°)$$

$$\text{sen } 15° = \text{sen } (45° - 30°)$$

5.1. ARCO DA SOMA E ARCO DA DIFERENÇA

Agora vamos deduzir fórmulas para calcular as razões trigonométricas da soma (a + b) e da diferença (a − b) de dois arcos quaisquer a e b, onde são validas as seguintes relações:

T1) Cosseno da soma: $\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \text{sen } a \cdot \text{sen } b$

T2) Cosseno da diferença: $\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \text{sen } a \cdot \text{sen } b$

T3) Seno da soma: $\text{sen } (a+b) = \text{sen } a \cdot \cos b + \text{sen } b \cdot \cos a$

T4) Seno da diferença: $\text{sen } (a-b) = \text{sen } a \cdot \cos b - \text{sen } b \cdot \cos a$

T5) Tangente da soma: $\text{tg } (a+b) = \dfrac{\text{tg } a + \text{tg } b}{1 - \text{tg } a \cdot \text{tg } b}$

T6) Tangente da diferença: $\text{tg } (a-b) = \dfrac{\text{tg } a - \text{tg } b}{1 + \text{tg } a \cdot \text{tg } b}$

Observação nas demonstrações a seguem o sinal das razões seno e cosseno para um dado ângulo a onde:

$$\cos(-a) = \cos(a)$$

$$\text{sen } (-a) = -\text{sen } (a)$$

Demonstrando T1)

Na figura 10, os pontos do ciclo P, Q e R associados aos números a, a + b e –b, respectivamente, têm como coordenadas:

P (cos a, sen a)

Q (cos (a + b), sen (a + b))

R (cos b, – sen b)

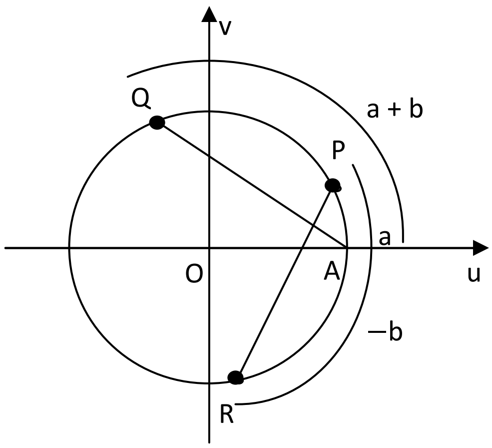

Figura 10. Representação sistema cartesiano uOv

Os arcos $\widehat{AQ}$ e $\widehat{RP}$ têm medidas iguais, então $\widehat{AQ}$ e $\widehat{PR}$ têm a mesma medida. Utilizando, a fórmula da distância entre dois pontos, a distância entre os pontos A e Q é:

$$d^2_{AQ} = (x_Q - x_A)^2 + (y_Q - y_A)^2$$

$$d^2_{AQ} = [\cos (a + b) - 1]^2 + [\text{sen } (a + b) - 0]^2$$

$$d^2_{AQ} = \cos^2 (a + b) - 2 \cos (a + b) + 1 + \text{sen}^2 (a + b)$$

$$d^2_{AQ} = [\cos^2 (a + b) + \text{sen}^2 (a + b)] - 2 \cos (a + b) + 1$$

$$d^2_{AQ} = 1 - 2 \cos (a + b) + 1$$

$$d^2_{AQ} = 1 + 1 - 2 \cos (a + b)$$

$$d^2_{AQ} = 2 - 2 \cos (a + b) \ (1)$$

E a distância entre os pontos R e P é:

$$d^2_{RP} = (x_P - x_R)^2 + (y_P - y_R)^2$$

$$d^2_{RP} = [\cos a - \cos b]^2 + [\text{sen } a + \text{sen } b]^2$$

$$d^2_{RP} = \cos^2 a - 2 \cos a \cdot \cos b + \cos^2 b + \text{sen}^2 a + 2 \text{ sen } a \cdot \text{sen } b + \text{sen}^2 b$$

$$d^2_{RP} = [\cos^2 a + \text{sen}^2 a] + [\cos^2 b + \text{sen}^2 b] - 2 \cos a \cdot \cos b + 2 \text{ sen } a \cdot \text{sen } b$$

$$d^2_{RP} = 1 + 1 - 2 \cos a \cdot \cos b + 2 \text{ sen } a \cdot \text{sen } b$$

$$d^2_{RP} = 2 - 2 \cos a \cdot \cos b + 2 \text{ sen } a \cdot \text{sen } b \ (2)$$

combinando (1) e (2) onde $d^2_{AQ} = d^2_{RP}$

$$2 - 2 \cos (a + b) = 2 - 2 \cos a \cdot \cos b + 2 \text{ sen } a \cdot \text{sen } b$$

$$-2 \cos (a + b) = -2 + 2 - 2 \cos a \cdot \cos b + 2 \text{ sen } a \cdot \text{sen } b$$

$$-2 \cos (a + b) = 0 - 2 \cos a \cdot \cos b + 2 \text{ sen } a \cdot \text{sen } b$$

$$-2 \cos (a + b) = -2(\cos a \cdot \cos b - \text{sen } a \cdot \text{sen } b)$$

$$\cos (a + b) = \frac{-2(\cos a \cdot \cos b - \text{sen } a \cdot \text{sen } b)}{-2}$$

Logo

$$\cos (a + b) = \cos a \cdot \cos b - \text{sen } a \cdot \text{sen } b$$

Demonstrando T2)

Na transformação T1, temos:

$$\cos (a - b) = \cos [a + (-b)] = \cos a \cdot \cos (-b) - \text{sen } a \cdot \text{sen } (-b)$$

$$\cos (a - b) = \cos a \cdot \cos b - \text{sen } a \cdot (-\text{sen } b)$$

$$\cos (a - b) = \cos a \cdot \cos b - (-\text{sen } a \cdot \text{sen } b)$$

Logo

$$\cos (a - b) = \cos a \cdot \cos b + \text{sen } a \cdot \text{sen } b$$

Demonstrando T3)

Primeiro é preciso consideraras relações entre as funções trigonométricas de arcos complementares:

i) $\text{sen x} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$,

ii) $\cos \text{x} = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$,

Assim temos:

$$\text{sen (a + b)} = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\text{a} + \text{b})\right]$$

$$\text{sen (a + b)} = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - \text{b}\right]$$

$$\text{sen (a + b)} = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - a\right) + (-\text{b})\right]$$

De acordo com a relação R1, temos:

$$\text{sen (a + b)} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cdot \cos(-\text{b}) - \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cdot \text{sen}(-\text{b})$$

$$\text{sen (a + b)} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cdot \cos \text{b} - \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cdot (-\text{sen b})$$

$$\text{sen (a + b)} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cdot \cos \text{b} - \left(-\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cdot \text{sen b}\right)$$

$$\text{sen (a + b)} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cdot \cos \text{b} + \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cdot \text{sen b}$$

Portanto,

$$\text{sen (a + b)} = \text{sen a} \cdot \cos \text{b} + \cos \text{a} \cdot \text{sen b}$$

Demonstrando T4)

Na transformação T3, temos:

$$\text{sen}\,[\text{a} + (-\text{b})] = \text{sen (a} - \text{b)}$$

$$\text{sen (a} - \text{b)} = \text{sen a} \cdot \cos(-\text{b}) + \text{sen}(-\text{b}) \cdot \cos \text{a}$$

$$\text{sen (a} - \text{b)} = \text{sen a} \cdot \cos \text{b} + (-\text{sen b}) \cdot \cos \text{a}$$

$$\text{sen (a} - \text{b)} = \text{sen a} \cdot \cos \text{b} - \text{sen b} \cdot \cos \text{a}$$

Logo

$$\text{sen (a} - \text{b)} = \text{sen a} \cdot \cos \text{b} - \cos \text{a} \cdot \text{sen b}$$

Demonstrando T5)

Considerando dois arcos de uma circunferência trigonométrica, cujas medidas são a e b, com (a $\neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, b $\neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ e a+ b $\neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, k z □ Z), podemos definir as seguintes relações:

$$\text{tg}\,(a + b) = \frac{\text{sen}\,(a + b)}{\cos(a + b)}$$

$$\text{tg}\,(a + b) = \frac{\text{sen a} \cdot \cos b + \text{sen b} \cdot \cos a}{\cos a \cdot \cos b - \text{sen a} \cdot \text{sen b}}$$

$$\text{tg}\,(a + b) = \frac{\frac{\text{sen a} \cdot \cos b + \text{sen b} \cdot \cos a}{\cos a \cdot \cos b}}{\frac{\cos a \cdot \cos b - \text{sen a} \cdot \text{sen b}}{\cos a \cdot \cos b}}$$

$$\text{tg}\,(a + b) = \frac{\frac{\text{sen a} \cdot \cos b}{\cos a \cdot \cos b} + \frac{\text{sen b} \,.\cos a}{\cos a \cdot \cos b}}{\frac{\cos a \cdot \cos b}{\cos a \cdot \cos b} - \frac{\text{sen a} \cdot \text{sen b}}{\cos a \cdot \cos b}}$$

$$\text{tg}\,(a + b) = \frac{\frac{\text{sen a}}{\cos a} + \frac{\text{sen b} \,.1}{1 \cdot \cos b}}{1 - \frac{\text{sen a} \cdot \text{sen b}}{\cos a \cdot \cos b}}$$

$$\text{tg}\,(a + b) = \frac{tg\,\text{a} + \frac{\text{sen b}}{\cos b}}{1 - tg\,\text{a} \cdot tg\,b}$$

Logo

$$\text{tg}\,(a + b) = \frac{tg\,\text{a} + tg\,b}{1 - tg\,\text{a} \cdot tg\,b}$$

Está formula é valida se:

$$a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ e } a + b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Demonstrando T6)

Na transformação T5, fazendo $(a - b) = [a + (-b)]$ temos:

$$\text{tg}\,(a - b) = \text{tg}\,[a + (-b)]$$

Usando a transformação T5, temos:

$$\text{tg}\,(a - b) = \frac{\text{tg}\,a + \text{tg}\,(-b)}{1 - \text{tg}\,a \cdot \text{tg}\,(-b)}$$

$$\text{tg}\,(a - b) = \frac{\text{tg}\,a + (-\,\text{tg}\,b)}{1 - \text{tg}\,a \cdot (-\text{tg}\,b)}$$

$$\text{tg}\,(a - b) = \frac{\text{tg}\,a - \text{tg}\,b}{1 - (-\,\text{tg}\,a \cdot \text{tg}\,b)}$$

Portanto

$$\text{tg}\,(a - b) = \frac{\text{tg}\,a - \text{tg}\,b}{1 + \text{tg}\,a \cdot \text{tg}\,b}$$

Está formula é valida se:

$$a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ e } a - b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

5.2. FÓRMULA PARA ARCO DUPLO

Nesta parte iremos deduzir fórmulas para calcular os arcos duplo, de um arco a, 2a e 3a, onde:

AD1) $\cos 2a = \cos^2 a - \text{sen}^2 a$

AD2) $\text{sen}\,2a = 2\text{sen}\,a \cdot \cos a$

AD3) $\text{tg}\,2a = \dfrac{2\text{tg}\,a}{1 - tg^2 a}$

AD4) $\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$

AD5) $\text{sen}\,3a = 3\text{sen}\,a - 4\text{sen}^3 a$

AD6) $\text{tg}\,3a = \dfrac{3\text{tg}\,a + tg^3 a}{1 - 3tg^2 a}$

Demonstrando AD1)

Usando a transformação T1, temos:

$$\cos 2\,a = \cos\,(a + a)$$

$$\cos 2\,a = \cos a \cdot \cos a - \text{sen}\, a \cdot \text{sen}\, a$$

Logo

$$\cos 2\,a = \cos^2 a - \text{sen}^2\, a$$

Demonstrando AD2)

Usando a transformação T3, temos:

$$\text{sen}\, 2a = \text{sen}\,(a + a)$$

$$\text{sen}\, 2a = \text{sen}\, a \cdot \cos a + \text{sen}\, a \cdot \cos a$$

Logo

$$\text{sen}\, 2a = 2\,\text{sen}\, a \cdot \cos a$$

Demonstrando AD3)

Pela transformação T5, temos:

$$\text{tg}\, 2a = \text{tg}\,(a + a)$$

$$\text{tg}\, 2a = \frac{\text{tg}\, a + \text{tg}\, a}{1 - \text{tg}\, a \cdot \text{tg}\, a}$$

Logo

$$\text{tg}\, 2a = \frac{2\text{tg}\, a}{1 - tg^2 a}$$

$$a \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{4} \text{ e } a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Demonstrando AD4)

Usando o arco duplo AD1, temos:

$$\cos 3a = \cos(2a + a)$$

$$\cos 3a = \cos 2a \cdot \cos a - \operatorname{sen} 2a \cdot \operatorname{sen} a$$

Usando os arcos duplos AD1 e AD2, temos:

$$\cos\ 3a = \cos 2a \cdot \cos a - \operatorname{sen} 2a \cdot \operatorname{sen} a$$
$$\cos\ 3a = (2\cos^2 a - 1) \cdot \cos a - (2\operatorname{sen} a \cdot \cos a) \cdot \operatorname{sen} a$$
$$\cos\ 3a = (2\cos^2 a - 1) \cdot \cos a - 2\operatorname{sen} a \cdot \cos a \cdot \operatorname{sen} a$$
$$\cos\ 3a = (2\cos^2 a - 1) \cdot \cos a - 2\operatorname{sen}^2 a \cdot \cos a$$

Utilizando relação R1, temos:

$$\cos 3a = (2\cos^2 a - 1) \cdot \cos a - 2\operatorname{sen}^2 a \cdot \cos a$$
$$\cos 3a = (2\cos^2 a - 1) \cdot \cos a - 2 \cdot \operatorname{sen}^2 a \cdot \cos a$$
$$\cos 3a = (2\cos^2 a - 1) \cdot \cos a - 2(1 - \cos^2 a) \cdot \cos a$$
$$\cos 3a = 2\cos^3 a - \cos a - (2 - 2\cos^2 a) \cdot \cos a$$
$$\cos 3a = 2\cos^3 a - \cos a - (2\cos a - 2\cos^3 a)$$
$$\cos 3a = 2\cos^3 a - \cos a - 2\cos a + 2\cos^3 a)$$
$$\cos 3a = 2\cos^3 a + 2\cos^3 a - \cos a - 2\cos a$$

Portanto

$$\cos\ 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$$

DemonstrandoAD5)

$$\operatorname{sen} 3a = \operatorname{sen}(2a + a)$$
$$\operatorname{sen} 3a = \operatorname{sen} 2a \cdot \cos a + \operatorname{sen} a \cdot \cos 2a$$

Usando a transformação T3 e o arco duplo AD1, temos:

$$\operatorname{sen} 3a = \operatorname{sen} 2a \cdot \cos a + \operatorname{sen} a \cdot \cos 2a$$
$$\operatorname{sen} 3a = (2\operatorname{sen} a \cdot \cos a) \cdot \cos a + \operatorname{sen} a \cdot (1 - 2\operatorname{sen}^2 a)$$
$$\operatorname{sen} 3a = (2\operatorname{sen} a \cdot \cos a \cdot \cos a + \operatorname{sen} a - 2\operatorname{sen}^3 a$$
$$\operatorname{sen} 3a = 2\operatorname{sen} a \cdot \cos^2 a + \operatorname{sen} a - 2\operatorname{sen}^3 a$$

Substituindo o valor de $\cos^2 a$, conforme a relação R1, temos:

$$\operatorname{sen} 3a = 2\operatorname{sen} a \cdot \cos^2 a + \operatorname{sen} a - 2\operatorname{sen}^3 a$$

$$\text{sen } 3a = 2\text{sen } a \cdot (1 - \text{sen}^2 a) + \text{sen } a - 2\text{sen}^3 a$$

$$\text{sen } 3a = 2\text{sen } a - 2\text{sen}^3 a + \text{sen } a - 2\text{sen}^3 a$$

$$\text{sen } 3a = 2\text{sen } a + \text{sen } a - 2\text{sen}^3 a - 2\text{sen}^3 a$$

Logo

$$\text{sen } 3a = 3\text{sen } a - 4\text{sen}^3 a$$

Demonstrando AD6)

$$\text{tg } 3a = \text{tg } (2a + a)$$

Usando a transformação T5, temos:

$$\text{tg } 3a = \frac{\text{tg } 2a + \text{tg } a}{1 - \text{tg } 2a \cdot \text{tg } a}$$

Aplicando a transformação T5 e o arco duplo AD3, temos:

$$\text{tg } 3a = \frac{\text{tg } 2a + \text{tg } a}{1 - \text{tg } 2a \cdot \text{tg } a}$$

$$\text{tg } 3a = \frac{\frac{2\text{tg } a}{1 - tg^2 a} + \text{tg } a}{1 - \frac{2\text{tg } a}{1 - tg^2 a} \cdot \text{tg } a}$$

$$\text{tg } 3a = \frac{\frac{2\text{tg } a + (1 - tg^2 a) \cdot \text{tg } a}{1 - tg^2 a}}{\frac{(1 - tg^2 a) \cdot 1 - 2tg^2 a}{1 - tg^2 a}}$$

$$\text{tg } 3a = \frac{\frac{2\text{tg } a + (\text{tg } a - tg^3 a)}{1 - tg^2 a}}{\frac{1 - tg^2 a - 2tg^2 a}{1 - tg^2 a}}$$

$$\text{tg } 3a = \frac{\frac{3\text{tg } a + tg^3 a}{1 - tg^2 a}}{\frac{1 - 3tg^2 a}{1 - tg^2 a}}$$

$$\text{tg } 3a = \frac{3\text{tg } a + tg^3 a}{1 - tg^2 a} \cdot \frac{1 - tg^2 a}{1 - 3tg^2 a}$$

Logo

$$\text{tg } 3a = \frac{3\text{tg a} + tg^3\text{a}}{1 - 3tg^2\text{a}}$$

5.3. FÓRMULA DO ARCO METADE

Nesta seção vamos deduzir as fórmulas para calcularas os arcos metade, onde:

$$\text{AM1) } \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

$$\text{AM2) } \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$$

$$\text{AM3) } \text{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$$

Demonstrando AM1)

Na fórmula para arco duplo AD1, sabendo que cos 2a = 2 $\cos^2$ a – 1temos:

$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$$

fazendo 2a = x

$$\cos x = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1$$

$$2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1 + \cos x$$

$$cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 + \cos x}{2}$$

Logo

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

Demonstrando AM2)

Na formula para arco duplo AD1, sabemos que cos 2a = 1 – 2 sen^2 a temos:

$$\cos 2a = 1 - 2\,\text{sen}^2 a$$

fazendo 2a = x

$$\cos x = 1 - 2\,\text{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$-2\,\text{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) = -1 + \cos x$$

$$sen^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{-1 + \cos x}{-2}$$

$$sen^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos x}{2}$$

Logo

$$\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$$

Demonstrando AM3)

Usando relação R2, temos:

$$\text{tgx} = \frac{\text{sen x}}{\cos x}$$

Considerando a = $\frac{x}{2}$.

$$\text{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$\text{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\pm\sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}}{\pm\sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}}$$

$$\text{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{\frac{1 - \cos x}{2}}{\frac{1 + \cos x}{2}}}$$

$$\text{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos x}{2} \cdot \frac{2}{1 + \cos x}}$$

Portanto

$$\text{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$$

6. ALGUMAS APLICAÇÕES

Nesta parte iremos trabalhar algumas situações problemas envolvendo razões trigonométricas.

- **SITUAÇÃO 1**

Uma pessoa esta à 90 m da base de um prédio e vê o seu ponto mais alto sob um ângulo de 30° em relação à horizontal. Observe a Figura 11, e responda qual é altura do prédio?

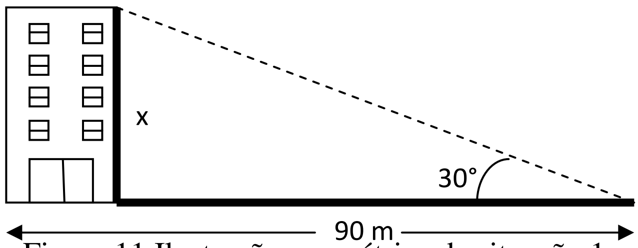

Figura 11.Ilustração geométrica da situação 1.

RESOLUÇÃO

Temos que:

x = medida do cateto oposto ao ângulo de 30°

90 = medida do cateto adjacente ao ângulo de 30°

tg 30° $= \frac{x}{90}$

Usando o valor de tg 30°, conforme a tabela 1.

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{90}$$

$$x = \frac{90\sqrt{3}}{3} = 30\sqrt{3} \text{ m}$$

Portanto a altura do prédio é $30\sqrt{3}$ m.

- **SITUAÇÃO 2**

Uma pequena árvore, cuja altura está representada por x, ao ser replantada, foi escorada por duas escoras de madeira, como mostra o esquema na Figura 12. Determinar as medidas x e y.

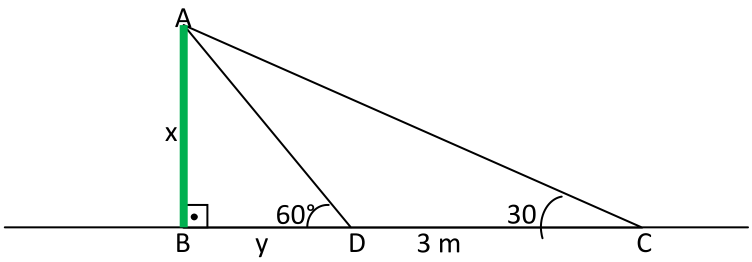

Figura 12. Ilustração geométrica da situação 2.

RESOLUÇÃO

Analisando o triângulo ABC da Figura 12, emrelação ao ângulo de 30°, o cateto oposto é x e o cateto adjacente é y + 3, de modo que:

$$\text{tg } 30° = \frac{x}{y+3}$$

Conforme o valor da tg 30° na tabela 1

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{y+3}$$

$$(y+3)\sqrt{3} = 3x$$

$$x = \frac{y\sqrt{3} + 3\sqrt{3}}{3} \text{ (I)}$$

No triângulo ABD a tangente de 60° é:

$$\text{tg } 60° = \frac{x}{y}$$

Conforme o valor da tg 60° na tabela 1

$$\sqrt{3} = \frac{x}{y}$$

Ou seja:

$$x = y\sqrt{3} \text{(II)}$$

Substituindo (II) em (I), obtemos:

$$y\sqrt{3} = \frac{y\sqrt{3} + 3\sqrt{3}}{3}$$

$$y\sqrt{3} = \frac{y\sqrt{3}}{3} + \frac{3\sqrt{3}}{3}$$

$$y\sqrt{3} = \frac{y\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3}$$

$$y\sqrt{3} - \frac{y\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$$

$$\frac{3y\sqrt{3} - y\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$$

$$\frac{2y\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$$

$$\mathrm{y} \cdot \frac{2y\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$$

$$\mathrm{y} = \sqrt{3} \cdot \frac{3}{2\sqrt{3}}$$

$$\mathrm{y} = \frac{3}{2}\ \mathrm{m}$$

Como x = $y\sqrt{3}$, temos:

$$\mathrm{x} = \frac{3}{2}\sqrt{3}\ \mathrm{m}$$

Assim, x = $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ m e y = $\frac{3}{2}$ m.

- **SITUAÇÃO 3**

Um barqueiro pretendia ir de uma margem à outra de um rio pela travessia mais curta possível. No entanto, a correnteza o arrastou para 27 m além do local previsto para a chegada. Do local aonde chegou, avista-se o ponto de partida sob um ângulo de 60° com a margem em que está. Qual é a largura do rio?

Para melhor visualizar a situação, observe a Figura 13 a seguir.

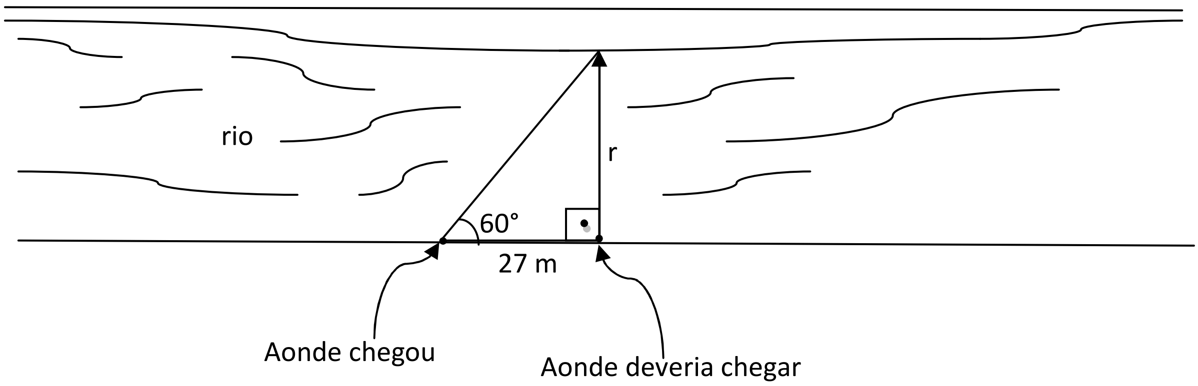

Figura 13. Ilustração geométrica da situação 3.

RESOLUÇÃO

Nesse caso, para calcular a largura, representada por r na Figura 17, usamos a tangente 60°, pois ela relaciona a largura (cat. oposto ao ângulo de 60°) com a distância de 27 m (cat. adjacente ao ângulo de 60°):

tg 60° = $\frac{r}{27}$ (consultando a Tabela 1, temos que tangente de 60° é igual á $\sqrt{3}$), então temos:

$$\text{tg } 60° = \frac{r}{27} \rightarrow \sqrt{3} = \frac{r}{27} \rightarrow 27 \cdot \sqrt{3} = r \rightarrow \text{r} = 27 \cdot \sqrt{3} \rightarrow \text{r} = 27\sqrt{3}$$

Considerando $\sqrt{3}$ = 1, 73, obtemos:

$\text{r} = 27\sqrt{3} \rightarrow \text{r} = 27 \cdot 1,73 \rightarrow \text{r} = 46,71$ m

Logo, a largura do rio é 46, 71 m.

- **SITUAÇÃO 4**

Vamos imaginar que um foguete foi lançado formando com o solo um ângulo de 45°. Depois de percorrer 1.500 m em linha reta, a que altura estava do chão?

Para melhor visualizar a situação, é interessante observar a Figura 14:

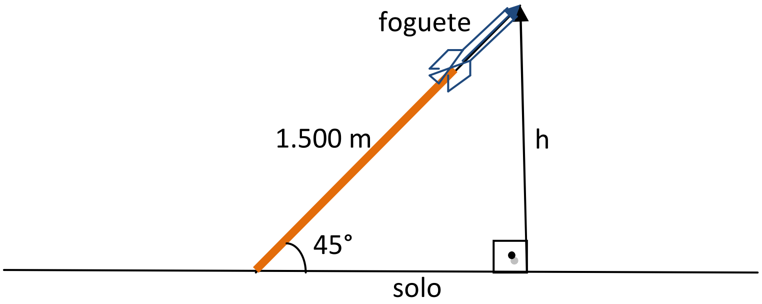

Figura 14. Ilustração geométrica da situação 4.

RESOLUÇÃO

Neste caso, para calcular a altura do foguete, representada no esboço por h, usamos o seno de 45°, pois o seno relaciona a altura (cat. oposto ao ângulo de 45°) com a distância de 1.500 m (hipotenusa).

sen 45° = $\frac{h}{1.500}$ (consultando a Tabela 1, temos que seno de 45° é igual á $\frac{\sqrt{2}}{2}$), então temos:

$$\text{sen } 45° = \frac{h}{1.500}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{h}{1.500}$$

$$1.500 \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot h$$

$$1.500\sqrt{2} = 2 \cdot h$$

$$2 \cdot h = 1.500\sqrt{2}$$

$$h = \frac{1.500\sqrt{2}}{2}$$

Portanto o foguete estava à

$h = 750\sqrt{2}$m do chão.

7. CONCLUSÃO

A trigonometria não é só a penas um simples conceito de Geometria ou nem mesmo uma pequena parte da matemática que estuda apenas triângulos. Mas sim uma das maiores descobertas da humanidade, pois há milênios de anos, os antigos povos da Babilônia, Mesopotâmia Egito e muitas outras nações já utilizavam na resolução de problemas de diversas áreas e na busca de entender melhor nossa origem. Com ela não só podemos calcular alguns problemas matemáticos, mais também resolver varias situações problemas. Pois ela esta relacionada a tudo que envolve nosso redor, ou seja, a demarcação de terra, construção de prédios e monumentos, traçado de mapas e de rotas, tanto terrestres como marítimas, para a elaboração de calendários, na Astronomia,na engenharia, na eletrônica, na medicina, na aeronáutica e na música. Hoje ela é utilizada no estudo de todos os fenômenos que envolvem padrões periódicos, por exemplo, os fenômenos que envolvem movimentos ondulatórios tais como transmissão de energia, de calor, de som, batimentos cardíacos e séries climáticas.

Neste trabalho, houve uma preocupação, não só em demonstra algumas formulas, mas também, comentar um pouco de sua história para poder explicar os conceitos e demonstrá-la. Foi levado em conta a grande importância da trigonometria para a humanidade, mesmo sabendo que ainda há muita coisa para ser descoberta através da trigonometria.

8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRAFICAS

IEZZI, G. Fundamentos de matemática elementar, 3: trigonometria. Ed. – Atual, São Paulo, 2004.

IEZZI, G.; OGAWA, A. K.;DOLCE, O.;DEGENSZAJN, D.; PÉRIGO, R.; ALMEIDA, N. Matemática: ciência e aplicações, 1ª e 2 ª séries do ensino médio, 2ª. Ed. Ed. Atual, São Paulo, 2004.

DANTE, L. R. Matemática: contexto e aplicações, vl 1 e 2, Ed. Ática, São Paulo, 2010.

BARROSO, J. M. Conexões com a matemática. Obra coletiva. Concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna. 1ª. Ed., São Paulo, 2010.

ROBERTO, J. S. Novo olhar matemática, 1ª. Ed., São Paulo: FTD, 2010

EDWALDO, B. e PACCOLA, H.Curso de Matemática. Volume único, 3ª. Ed. rev. e ampl. São Paulo: Moderna, 2003.

JACKSON, R. Matemática: ciências, linguagem e tecnologia, 1 e 2: ensino médio São Paulo: Scipione, 2010.

SMOLE, K. C. S. e DINIZ, C. I. S. V. Matemática: ensino médio: volume 2 / Kátia Cristina Ignez de Souza Vieira. 6ª. Ed. – São Paulo: Saraiva, 2010.

GIOVANNI, J. R. e BONJORNO, J. R. Matemática completa, 2ª. Ed. renov. – São Paulo: FTD, 2005. – (Coleção matemática completa) 1ª e 2ª séries.

GIOVANNI, J. R, e Castrucci, B.: A conquista da matemática, 9º ano. Ed. renovada. – FTD, São Paulo, 2009.

MARCONDES, C. A.; Gentil e Sérgio. Matemática: série novo ensino médio, volume único: ensino médio, 6ª. Ed. – São Paulo: Ática, 2002.