



UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

AS DESCOBERTAS DE EULER COMO EVOLUÇÃO DO  
CÁLCULO, DA TEORIA DOS NÚMEROS E DA ANÁLISE  
MATEMÁTICA

MAXWELL AIRES DA SILVA

CAMPINA GRANDE - PB  
Julho de 2014

MAXWELL AIRES DA SILVA

**AS DESCOBERTAS DE EULER COMO  
EVOLUÇÃO DO CÁLCULO, DA TEORIA DOS  
NÚMEROS E DA ANÁLISE MATEMÁTICA**

Trabalho de conclusão de curso apresentado à Coordenação do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências legais para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Dra. Luciana Roze de Freitas

CAMPINA GRANDE-PB

Julho de 2014

É expressamente proibida a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano da dissertação.

S586d Silva, Maxwell Aires da.  
As descobertas de Euler como evolução do cálculo, da teoria dos números e da análise matemática [manuscrito] / Maxwell Aires da Silva. - 2014.  
75 p. : il.

Digitado.  
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática)  
- Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2014.  
"Orientação: Profa. Dra. Luciana Roze de Freitas,  
Departamento de Matemática".

1.Cálculo matemático. 2. Análise matemática. 3. Teoria dos Números. 4. Euler, Leonhard. I. Título.

21. ed. CDD 515

MAXWELL AIRES DA SILVA

AS DESCOBERTAS DE EULER COMO  
EVOLUÇÃO DO CÁLCULO, DA TEORIA DOS  
NÚMEROS E DA ANÁLISE MATEMÁTICA

Aprovado em: 28/07/2014

COMISSÃO EXAMINADORA

*Luciana Freitas*

---

Profª. Dra. Luciana Roze de Freitas  
Dpto. Matemática - CCT/UEPB  
Orientadora

*Davis Matias de Oliveira*

---

Prof. Dr. Davis Matias de Oliveira  
Dpto. Matemática - CCT/UEPB  
Examinador

*Joselma S. Santos*

---

Profª. Ms. Joselma Soares dos Santos  
Dpto. Matemática - CCT/UEPB  
Examinadora

## Dedicatória

À Deus por ter me sustentado e ter me feito entender que Universidade é mais que um curso e sim, um Projeto de Vida. Aos meus pais, Josevânia Aires e Marccone Dias que sempre me incentivaram para os estudos, a minha esposa Jéssica Millena que sempre me impulsionou e sempre acreditou em mim. DEDICO.

## Agradecimentos

Ao Grande arquiteto do universo, autor da minha vida e da minha fé, meu Amigo, meu Senhor, meu Rei, **JESUS CRISTO!**

Aos meus pais, Josevânia Aires e Marcone Dias pelo amor e pelo carinho que recebi durante toda a minha vida, bem como, incentivo quanto aos estudos sabendo que com ele poderia ir mais longe.

A minha esposa Jéssica Millena por todo incentivo, apoio e por sempre ter acreditado que esse sonho tornar-se-ia em realidade.

Ao Professor José Elias da Silva por ter aceitado colaborar de maneira essencial nessa grande e cansativa, porém, valorosa missão.

A professora Luciana Roze de Freitas por ter aceitado a missão de ser minha orientadora na construção desse trabalho e por ser um **SHOW DE PROFESSORA!**

Aos professores Davis Matias de Oliveira e Joselma Soares dos Santos pela disponibilidade na parte de examinação do trabalho e por serem exemplos de professores em nossa universidade.

Aos meus familiares por estarem sempre do meu lado nas minhas escolhas, principalmente quanto a escolha pela academia, em especial aos meus avós, Josefa Severina Aires e José Aires de Farias pela alegria ao entrar na academia.

Aos meus amigos de curso que de forma direta ou indireta ajudaram a me fazer um pouco mais *Matemático*.

## Epígrafe

*“Quanto mais eu estudo, pesquiso e demonstro equações e propriedades matemáticas, mais os números me revelam que, esse universo foi perfeitamente construído pelas mãos de um Grande, Poderoso e Sábio DEUS.”*

Maxwell Aires da Silva

## Resumo

O presente trabalho é resultado de uma pesquisa bibliográfica realizada com o objetivo de apresentar alguns dos mais famosos resultados obtidos por esse brilhante matemático que, sem sombra de dúvidas, é o mais produtivo de todos: *Leonhard Euler* (1707-1783). Expomos aqui alguns resultados referentes a Séries infinitas, Logaritmos naturais, Exponenciais e Números Primos. Conceitos estes que levaram a um progresso da matemática em nível considerável, uma vez que, muitos desses resultados possuem grande aplicabilidade no Cálculo, na Teoria dos Números, e serviu como alicerce para o nascimento assim como crescimento da *Análise Matemática*.

**PALAVRAS CHAVE:** Cálculo, Análise Matemática, Teoria dos Números, Euler.



## Abstract

This work is the result of literature search undertaken with the aim of presenting some of the most famous results of this brilliant mathematician who, without a doubt, is the most productive of all: *Leonhard Euler* (1707 – 1783). We expose here some results for Infinite Series, natural logarithms, Exponential and Prime Numbers. Concepts that have led to a progress in math in a considerable level, since many of these results have wide applicability in Calculus, in the Theory of Numbers, and served as the foundation for the birth as well as growth of *Mathematical Analysis*.

**KEYWORDS:** Calculus, Mathematical analysis, Number Theory, Euler.

# Sumário

<b>1 Euler e o Cálculo</b>	<b>14</b>
1.1 Logaritmos naturais: Contexto histórico . . . . .	14
1.2 Construção da base universal para logaritmos . . . . .	16
1.3 Propriedades dos logaritmos . . . . .	17
1.4 Faixa de hipérbole: Uma primeira análise . . . . .	19
1.5 Faixa de hipérbole: Uma segunda análise . . . . .	23
<b>2 Euler e a Teoria dos Números</b>	<b>32</b>
2.1 Congruência . . . . .	33
2.2 Demonstração da existência de infinitos números primos . . . . .	36
2.3 A função $\varphi$ de Euler . . . . .	38
2.4 O Teorema de Euler-Fermat . . . . .	41
2.5 Outros resultados de Euler . . . . .	43
2.6 Diferença de dois quadrados . . . . .	43
<b>3 Euler e a Análise Matemática</b>	<b>45</b>
3.1 Notações criadas por Euler . . . . .	45
3.2 A equação de Euler . . . . .	46
3.2.1 Série de Taylor . . . . .	46
3.2.2 Série de Maclaurin . . . . .	48
3.2.3 Construção da Equação de Euler . . . . .	48
3.2.4 Construção da Identidade de Euler . . . . .	51
3.3 Expansão da função $f(x) = \arctan x$ . . . . .	51
3.4 Aproximação de $\pi$ . . . . .	54
3.5 Irrracionalidade do número $e$ . . . . .	55
3.5.1 Expansão do número $e$ como frações contínuas . . . . .	55
3.5.2 Prova topológica da irracionalidade do número $e$ . . . . .	59
<b>Considerações finais</b>	<b>63</b>
<b>Apêndices</b>	<b>64</b>
<b>A Demonstração de resultados utilizados no Capítulo 1</b>	<b>65</b>
A.1 Fórmula para o cálculo de juros simples e compostos . . . . .	65
A.2 Fórmula para o termo geral de uma P.G . . . . .	67
A.3 Fórmula para o somatório dos $n$ primeiros termos de uma P.G . . . . .	68
A.3.1 Parte 1 . . . . .	68
A.3.2 Parte 2 . . . . .	69

A.4	Demonstração de que $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ quando $0 <  r  < 1$ . . . . .	70
<b>B</b>	<b>Demonstração de resultados utilizados no Capítulo 2</b>	<b>71</b>
B.1	Teorema da diferença de dois quadrados . . . . .	71
<b>C</b>	<b>Demonstração de resultados utilizados no Capítulo 3</b>	<b>72</b>
C.1	Condição suficiente para que uma função seja integrável . . . . .	72
C.2	Princípio dos intervalos encaixados . . . . .	73
C.3	Intervalo degenerado apresentado no Teorema 3.3 . . . . .	74
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>75</b>

## Introdução

O ano de 1707 marcou para sempre de forma positiva a história da matemática. O mundo recebera um presente que poucos anos depois daria muitos frutos e multiplicaria o conhecimento do ser humano. Esse ano, marcou o nascimento de uma pessoa que foi sem sombra de dúvidas um dos maiores matemáticos que a humanidade já conheceu e que, com certeza, foi o mais produtivo de todos: *Leonhard Paul Euler*.

Euler foi um matemático Suíço que nasceu na cidade de Basiléia, no dia 15 de Abril de 1707, filho de *Paul Euler* e *Marguerite Brucker*, sendo Paul um pastor protestante e Marguerite filha de um pastor também protestante. Como era de se esperar, seu pai, embora sem sucesso quis que o filho seguisse a mesma carreira mas, Euler logo cedo revelou o seu talento fora do comum para a matemática.

Por sorte do próprio Euler, seu pai era amigo de uma das famílias que já vinha de quatro gerações de grandes matemáticos que era a família dos *Bernoulli*. *Nicolaus* e *Daniel Bernoulli* logo viram em Euler, alguém que na matemática iria longe. Com isso, *Johann Bernoulli* tratou de convencer Paul a trabalhar a matemática com o jovem Euler ao invés da Teologia, Grego e Hebráico.

Em 1721, aos 14 anos, Euler matriculou-se na Universidade de Basiléia e aos 16 anos, ou seja, no ano de 1723 completou seus estudos e fez sua dissertação falando sobre Descartes e Newton em nível de comparação da obra desses dois matemáticos recebendo assim, o título de *Mestre em Filosofia*.

No ano de 1727, houve-se rumores que havia uma vaga em medicina na academia de *San Petersburgo* na Rússia. Essa notícia chega aos ouvidos de Euler e o jovem com muito ânimo decide ir para a Rússia a fim de assumir tal posto, uma vez que Euler possuía conhecimento avançado nas áreas de Medicina, Astronomia, Filosofia, Teologia e Línguas Orientais. Com recomendação dos Bernoulli, Euler foi chamado a fazer parte da Seção de Medicina da academia fundada por *Catarina I*, no entanto, no dia em que Euler chegou a San Petersburgo Catarina I morrera. Dando início a seu trabalho na Rússia, três anos depois, Euler assumiu a cadeira de Filosofia, área que, de fato era formado, deixando assim a cadeira de Medicina.

No ano de 1733, Euler já era o principal matemático da academia passando a ministrar essa cadeira com a saída de Daniel Bernoulli para assumir a cadeira também de matemática, porém da Universidade de Basiléia. Durante esse período Euler casou-se, teve treze filhos e passou a dedicar-se profundamente a pesquisa matemática e, conta-se que, seu grande esforço e sua larga carga horária de estudos e pesquisas fez com que perdesse a visão do seu olho direito, o que justifica os seus retratos com o olho direito fechado.

Nosso trabalho tem como objetivo principal apresentar alguns dos mais famosos e importantes resultados de *Leonhard Euler*, com o intuito de enriquecer o conhecimento dos leitores acerca de sua obra, uma vez que expomos aqui os resultados de maneira bem detalhada e com uma linguagem clara, contudo, científica.

Nosso trabalho está dividido em três capítulos. No Capítulo 1 apresentamos o contexto histórico em que nasceu a ideia de logaritmo e, como Euler modificou a ideia apresentada por Napier no ano de 1728, assim como a universalização desse conceito proporcionou resolver o único caso não solucionado quanto a quadratura da família de curvas  $y = x^n$ , onde  $n$  é um número inteiro, que é o caso da hipérbole  $y = \frac{1}{x}$ .

No Capítulo 2, apresentamos alguns resultados de Euler que contribuíram na Teoria dos Números, resultados tais como *A demonstração de que existem infinitos números primos*, *A função de Euler*, *O Teorema de Euler-Fermat* e *Alguns outros resultados de Euler*.

Por fim, no Capítulo 3, apresentamos a contribuição de Euler para a análise matemática, alguns resultados bem importantes tais como *A Equação de Euler*, *A Identidade de Euler*, *Expansão da função  $\arctan x$* , *uma boa aproximação do número  $\pi$*  e, a expansão do número  $e$  em frações contínuas bem como uma prova topológica da irracionalidade do número  $e$ . Contribuições que levaram a uma evolução considerável nesse campo de estudo da matemática.

# Capítulo 1

## Euler e o Cálculo

### 1.1 Logaritmos naturais: Contexto histórico

Iremos aqui, apresentar uma exposição detalhada de como surgiram os logaritmos, como Euler a modificou com o tempo e, como universalizou esse conceito na sua época. Apresentaremos também, como Euler solucionou o único caso não demonstrado quanto a quadratura da família de curvas  $y = x^n$ , onde  $n$  é um número inteiro, que é o caso especial da quadratura da hipérbole  $y = \frac{1}{x}$ . Geralmente, nos cursos de cálculo a nível de graduação, esse valor nos é simplesmente informado como um valor tabelado, isto é, sempre nos é informado que

$$\int_1^x \frac{1}{t} dt = \ln x,$$

contudo, é omitido o motivo pelo qual considera-se essa definição. Apresentamos aqui, como se chegou a tal resultado e, para isso pesquisamos sobre o trabalho de importantes matemáticos tais como *Euclides de Alexandria*, *Pierre de Fermat*, *Gregoire de Saint Vincent*, e, por fim, *Leonhard Euler*. A junção desses trabalhos nos proporcionou chegar a tal conclusão.

Os logaritmos foram uma invenção que, sem sombra de dúvidas, mudou para sempre os rumos da matemática, pois carregam sobre si uma forma mais fácil de resolver problemas condizentes a potências com altos expoentes, assim como, resolver facilmente problemas de raízes quadradas ou até de índices maiores. Vale ressaltar aqui que, a noção de logaritmos que temos e a maneira como são estudados hoje em dia, diverge, um pouco, da noção que o seu célebre criador, o matemático *John Napier* propôs no ano de 1614. Na ideia de Napier, calcular o logaritmo de um número era resolver a equação:

$$N = 10^7(1 - 10^{-7})^L,$$

de forma a encontrar o expoente  $L$ , sendo este número chamado de *Logaritmo Neperiano de  $N$* .

Passados 114 anos desde a invenção dos logaritmos, no ano de 1728 *Leonhard Euler* propôs uma nova forma para os logaritmos, que traria um conforto a mais quanto a forma de calculá-los, assim como, uma notação moderna para os mesmos. Euler apresentou uma ideia que permitia o cálculo dos logaritmos em qualquer base de potência

desejada, desde que obedecessem as regras primárias de sua operação inversa que é a exponenciação.

Para Euler, calcular o logaritmo de um número em 1728, era algo do tipo:

“ $N = b^L$ , onde  $b$  é um número positivo fixo, diferente de 1, então  $L$  é o logaritmo de base  $b$  de  $N$ ”. (Ver [8])

Vemos aqui uma definição que prevalece até os dias atuais para logaritmos, onde é permitido relacioná-los totalmente com a exponenciação, uma vez que Euler apresentou o conceito de *base do logaritmo*, criando assim uma ponte de ligação direta com a exponenciação como nos é mostrada nos dias atuais:

“Dados os números reais positivos  $a$  e  $b$ , com  $a \neq 1$ , se  $b = a^c$ , então o expoente  $c$  chama-se logaritmo de  $b$  na base  $a$ , ou seja,

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b, \text{ (Ver [3]).}$$

Podemos ver claramente que, com esta definição apresentada nos livros de matemática dos dias atuais, a conceitualização de logaritmo proposta por Euler em 1728 permanece intacta com exceção das variáveis utilizadas, mesmo após mais de 250 anos de sua proposta.

Com esta definição, Euler então passou a aprofundar-se nos estudos dos logaritmos a fim de ampliar e universalizar este conceito. O problema inicial que Euler precisou resolver, foi adaptar-se com o novo conceito, além da aceitação e aplicação a essa nova forma de calcular com logaritmos pela comunidade matemática de sua época. O que vemos claramente que foi bem aceito uma vez que até os dias de hoje calcula-se com logaritmos conforme Euler propunha. Um segundo problema enfrentado por Euler foi a universalização deste conceito, pois ao passo que sua proposta se difundiu, ampliou a escolha da base que se deseja trabalhar, desde que obedeça a regra proposta na definição. No entanto, Euler queria um número que servisse como uma base fixa para os logaritmos, não que estabelecendo esta base não se pudesse calcular com outras bases, mas os logaritmos precisavam de um número que servisse como uma base *padrão* ou *universal* fazendo assim com que o conceito se tornasse também universal.

Euler começou então sua busca pela base universal dos logaritmos e encontrou esse número em um ramo da matemática que, *a priori*, não possuía ligação com os logaritmos: a *matemática financeira*. Vamos, então, entender como surgiu esse número e qual o seu valor.

Sabemos que a fórmula para o cálculo de juros compostos é dada por:

$$m = c \cdot (1 + i)^t,$$

onde  $c$  = capital;  $i$  = taxa de juros;  $t$  = tempo;  $j$  = juros e  $m$  = montante. (Ver

## Apêndice A.1)

Os bancos utilizam outra forma de calcular o juro cobrado sobre um capital qualquer, através da divisão em períodos. Por exemplo, se uma taxa de juros é cobrada anualmente sobre um capital, os bancos dividem este ano em semestres, ou trimestres, ou bimestres, de forma a cobrar a taxa mais de uma vez por ano a fim de lucrar mais com o juro cobrado sobre aquele capital. Esse mesmo exemplo pode ser acoplado a outras formas de cobrança de juros como, *juros ao mês* ou até mesmo *ao dia*.

Com base nessa estratégia utilizada pelos bancos, uma tática já antiga usada pelos mesmos, podemos elaborar uma nova forma de se calcular *juros compostos* dividindo a taxa e o tempo em períodos. Se for cobrada uma taxa  $i$  sobre o valor, essa taxa poderá ser escrita como sendo  $\frac{m}{x}$ , onde  $m$  é a taxa original e  $x$  é a quantidade de vezes que a taxa foi dividida; ou seja, o número de períodos de cálculo da taxa, transformando a fórmula dessa maneira em:

$$m = c \cdot (1 + i)^t \Rightarrow m = c \cdot \left(1 + \frac{m}{x}\right)^x. (1.1)$$

Quando temos um caso bem específico para (1.1), isto é,  $c = m = 1$  a expressão toma a seguinte forma:

$$m = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x. (1.2)$$

## 1.2 Construção da base universal para logaritmos

Com a dedução da fórmula (1.2) podemos então nos perguntar, o que acontece com o valor dessa expressão com o passar do tempo? Estamos agora, diante de uma situação em que queremos calcular o limite de (1.2) quando  $x \rightarrow \infty$ . Dessa forma, iremos criar uma tabela com os valores desse montante com o passar do tempo:

$x$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$	$m$
10	$\left(1 + \frac{1}{10}\right)^{10}$	2,5937424601
100	$\left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100}$	2,7048138294...
1.000	$\left(1 + \frac{1}{1.000}\right)^{1.000}$	2,7169233922...
10.000	$\left(1 + \frac{1}{10.000}\right)^{10.000}$	2,7181459268...
100.000	$\left(1 + \frac{1}{100.000}\right)^{100.000}$	2,7182682371...
1.000.000	$\left(1 + \frac{1}{1.000.000}\right)^{1.000.000}$	2,7182804693...
10.000.000	$\left(1 + \frac{1}{10.000.000}\right)^{10.000.000}$	2,7182816925...
100.000.000	$\left(1 + \frac{1}{100.000.000}\right)^{100.000.000}$	2,7182818148...
1.000.000.000	$\left(1 + \frac{1}{1.000.000.000}\right)^{1.000.000.000}$	2,7182818270...

Podemos ver claramente que, os incrementos que serão acrescentados a esse número serão cada vez menores de modo que as primeiras casas decimais e sua parte inteira não irá se alterar. Contudo, quanto mais esse número cresce, mais parece que ele é *irracional*, ou seja, não pode ser escrito como uma *fração*, isto é, a divisão entre



dois números inteiros. Mas, essa pequena análise não é suficiente para comprovar que esse número é irracional. Para isso, usaremos outras ferramentas da matemática. O que nós podemos concluir até o momento é que o valor numérico dessa expressão é aproximadamente igual a 2,71828. Escrevendo a expressão (1.2) como um limite, tem-se:

**Definição 1.1** *Definimos a base universal para logaritmos, que é representada pela letra  $e$ , através do limite da seguinte expressão:*

$$e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \approx 2,71828.$$

(1.3)

Esse número, que com o tempo foi tomando uma importância tão grande na matemática de modo a ser escolhido por *Leonhard Euler* como sendo a base universal dos logaritmos, pode ser expresso por meio do limite acima e, pelo próprio Euler, foi batizado de  $e$ , embora sem justificativa histórica. Alguns falam que é por conta da palavra *exponencial*, outros dizem que é por conta da primeira letra do nome *Euler*, contudo, nada se provou sobre isso, até então.

## 1.3 Propriedades dos logaritmos

Vamos agora, estabelecer algumas propriedades referentes aos logaritmos que nos ajudarão com procedimentos posteriores que envolvem logaritmos.

**Teorema 1.1** *Sejam  $a$ ,  $b$  e  $c$  números reais positivos com  $a \neq 1$ . Então é válida a seguinte propriedade:*

$$\log_a bc = \log_a b + \log_a c.$$

**Demonstração:** Primeiramente tem-se:

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b;$$

$$\log_a c = y \Leftrightarrow a^y = c;$$

$$\log_a bc = z \Leftrightarrow a^z = bc.$$

Podemos agora utilizar a propriedade das potências de mesma base, obtendo assim:

$$\begin{aligned} a^z &= bc \\ &= a^x \cdot a^y \\ &= a^{x+y}. \end{aligned}$$

Portanto, se  $a^z = a^{x+y}$  então  $z = x + y$  o que resulta em:

$$\log_a bc = \log_a b + \log_a c.$$

■

**Teorema 1.2** *Sejam  $a$ ,  $b$  e  $c$  números reais positivos com  $a \neq 1$ . Então é válida a seguinte propriedade:*

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c.$$

**Demonstração:** Iniciando tem-se:

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b;$$

$$\log_a c = y \Leftrightarrow a^y = c;$$

$$\log_a \frac{b}{c} = z \Leftrightarrow a^z = \frac{b}{c}.$$

Utilizando-se da propriedade das potências de mesma base, tem-se

$$\begin{aligned} a^z &= \frac{b}{c} \\ &= \frac{a^x}{a^y} \\ &= a^{x-y}. \end{aligned}$$

Portanto, se  $a^z = a^{x-y}$ , então  $z = x - y$  de modo que

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c.$$

■

**Teorema 1.3** *Sejam  $a$ ,  $b$  e  $c$  números reais positivos com  $a \neq 1$ . Então é válida a seguinte propriedade:*

$$\log_a b^c = c \cdot \log_a b.$$

**Demonstração:** Primeiramente tem-se:

$$\log_a b^c = x \Leftrightarrow a^x = b^c;$$

$$\log_a b = y \Leftrightarrow a^y = b.$$

Dessas igualdades, resulta que:

$$a^x = (a^y)^c.$$

Usando a regra de potência de potência, tem-se

$$\begin{aligned} a^x = a^{yc} &\Leftrightarrow x = yc \\ &\Leftrightarrow \log_a b^c = \log_a b \cdot c. \end{aligned}$$

■

**Teorema 1.4** *Sejam  $a, b$  números reais positivos com  $a \neq 1$ . Então é válida a seguinte propriedade:*

$$a^{\log_a b} = b.$$

**Demonstração:** Observe que:

$$\begin{aligned} \log_a b = x &\Leftrightarrow a^x = b \\ &\Leftrightarrow a^{\log_a b} = b. \end{aligned}$$

■

Demonstradas essas propriedades dos logaritmos, teremos agora, uma boa base para trabalharmos a construção que queremos nesse capítulo.

## 1.4 Faixa de hipérbole: Uma primeira análise

Dentre as famílias de curvas que são estudadas em todo o cálculo, com o passar do tempo a família das hipérbolas obteve certo destaque. O estudo da hipérbole é parte do estudo de secções cônicas e esta é formada a partir da secção de dois cones que estão unidos pelo vértice. No caso da hipérbole a secção é feita em um ângulo que é **maior do que o ângulo formado pela base do cone com a sua geratriz, justificando, assim, o prefixo HIPER o qual, significa: EM EXCESSO DE** (ver [8]).

Com a evolução da geometria analítica criada por *René Descartes*, passamos a trabalhar com a equação correspondente à hipérbole, sendo esta um caso especial da equação quadrática, a qual tem a seguinte forma geral:

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey = F.$$

Muitos matemáticos no decorrer dos tempos buscaram incansavelmente encontrar a quadratura dessas curvas. É interessante ressaltar aqui que quando falamos de quadratura de uma curva estamos querendo encontrar a área que se encontra abaixo desta em relação a um referencial que, em nosso caso, é o eixo  $x$ . Uma vez que nessa época calculavam-se áreas de figuras da Geometria Euclidiana tais como Retângulos, Quadrados, Triângulos, Trapézios, etc. O primeiro a buscar a quadratura de curvas foi *Euclides de Alexandria* (360 - 295a.c) que não obteve sucesso em sua busca. Euclides apenas conseguiu alguns poucos resultados tais como a área sob a parábola no intervalo de 0 a 1 que teve como resultado  $\frac{1}{3}$ .

Um matemático que obteve grande destaque nessa busca por quadraturas de curvas foi *Pierre de Fermat* (1601 - 1665). Fermat começou seus estudos, analisando uma família de curvas da forma  $y = x^n$ ; onde  $n$  é um número inteiro, e conseguiu usando um engenhoso método onde fazia com que as larguras dos retângulos formassem uma P.G decrescente, como veremos posteriormente.

Consideremos a figura 1.1 que mostra a maneira como uma hipérbole é gerada.

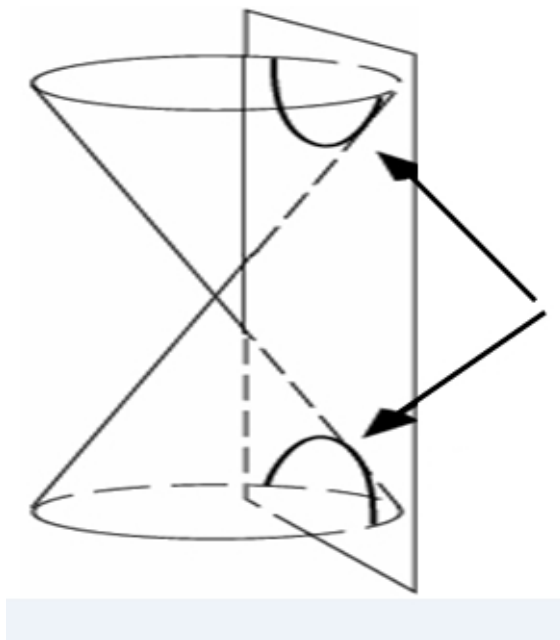


Figura 1.1: Forma como a hipérbole é gerada

Como sabemos, o somatório dos  $n$  primeiros termos de uma P.G é dada pela seguinte expressão: (Ver Apêndice A.3).

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - r^n}{1 - r}, \quad (1.4)$$

em que  $a_1$  é o primeiro termo e  $r$  é a razão.

Se considerarmos  $0 < |r| < 1$  e o limite de  $S_n$  quando  $n \rightarrow \infty$  chegamos ao seguinte resultado

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - r}. \quad (1.5)$$

Esse resultado dá-se pelo fato de

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0, \text{ se } 0 < |r| < 1.$$

Este fato está demonstrado no (Apêndice A.4) desse trabalho.

Vamos agora, aplicar o método de Fermat à curva  $y = x^n$  a fim de calcular a sua quadratura. As larguras dos retângulos estão aproximando-se da origem do gráfico da figura 1.2 e estão sempre diminuindo de comprimento. Isso justifica-se pelo fato da P.G ser decrescente como Fermat propunha.

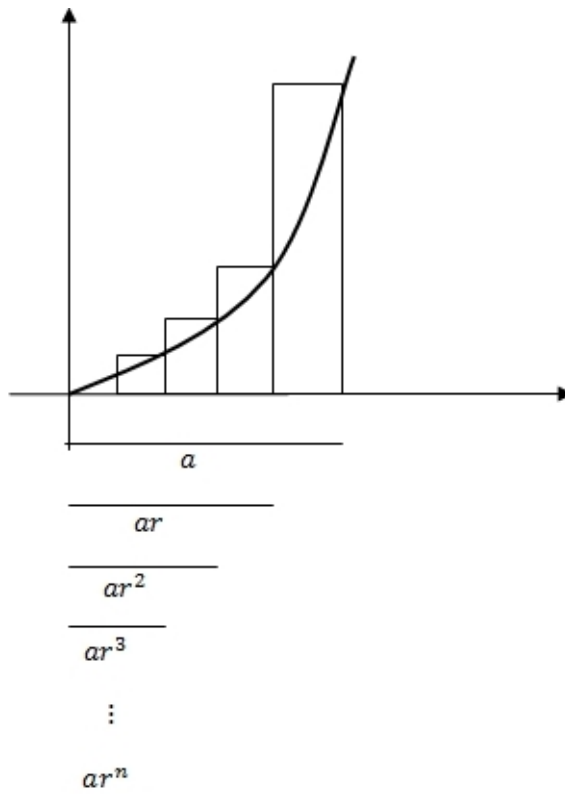


Figura 1.2: O método de Fermat aplicado à curva. Fermat propôs que as larguras dos retângulos formassem uma P.G decrescente de razão  $r$ , com  $0 < |r| < 1$ .

Dessa forma fica mais fácil calcular a soma dos  $n$  retângulos que teremos nessa figura sabendo o valor de cada um que será:

Retângulo 1:  $(a - ar)a^n \Rightarrow a(1 - r)a^n \Rightarrow a^{n+1}(1 - r)$  ;

Retângulo 2:  $(ar - ar^2) \cdot (ar)^n \Rightarrow ar(1 - r) \cdot (ar)^n \Rightarrow (ar)^{n+1}(1 - r)$  ;

Retângulo 3:  $(ar^2 - ar^3) \cdot (ar^2)^n \Rightarrow ar^2(1 - r) \cdot (ar^2)^n \Rightarrow (ar^2)^{n+1}(1 - r)$  ;

⋮

Retângulo n:  $(ar^{n-1} - ar^n) \cdot (ar^{n-1})^n \Rightarrow ar^{n-1}(1 - r) \cdot (ar^{n-1})^n \Rightarrow (ar^{n-1})^{n+1}(1 - r)$ .

⋮

Temos então que, a soma desses infinitos retângulos nos dará a quadratura ou a área sob a curva que sendo representada por  $A_r$  e sendo inserida em (1.4), obtém-se

$$A_r = \frac{a^{n+1} \cdot (1 - r)}{1 - r^{n+1}}.$$

Fermat percebeu que os encaixes dos retângulos seriam cada vez mais precisos quando  $r \rightarrow 1$ . Mas, se colocarmos este valor na expressão teremos a indeterminação

$$\frac{0}{0}.$$

Fermat, no entanto foi capaz de reverter essa situação facilmente percebendo que o denominador na sua forma fatorada será igual a

$$(1 - r) \cdot (1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^n),$$

que substituindo no denominador nos dará a seguinte forma

$$A_r = \frac{a^{n+1} \cdot (1 - r)}{(1 - r) \cdot (1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^n)}.$$

Cancelando  $(1 - r)$  ficamos com apenas

$$A_r = \frac{a^{n+1}}{(1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^n)}$$

e quando  $r \rightarrow 1$  obtém-se a seguinte expressão:

$$A_r = \frac{a^{n+1}}{n + 1}. \quad (1.6)$$

Uma fórmula muito conhecida por todos os estudantes de cálculo integral expressa nos dias atuais da seguinte forma:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n + 1} + C. \quad (1.7)$$

É importante lembrarmos aqui que a época na qual Fermat chegou ao resultado (1.6) é anterior cerca de trinta anos ao tempo em que *Newton e Leibniz* propuseram o cálculo diferencial e integral com a mesma fórmula para o cálculo de integrais, conforme mostra (1.7).

Se usarmos o método de Fermat para calcular a quadratura da curva  $y = x^2$  no intervalo  $I = [0, 1]$  teremos o seguinte resultado:

$$A_x = \frac{x^{2+1}}{2 + 1} \Rightarrow A_x = \frac{x^3}{3} \Rightarrow A_x = \frac{1^3}{3} - 0 \Rightarrow A_x = \frac{1}{3};$$

o que bate perfeitamente com a quadratura dada por *Euclides* muitos anos atrás. Portanto, Fermat triunfara em sua busca pela quadratura dessa família de curvas, o que resolve muitos casos de quadraturas de curvas que foi, sem sombra de dúvidas, um avanço considerável para a época.

Fermat, porém, percebeu que sua fórmula, embora muito geniosa e muito eficaz nesse tipo de cálculo, falhava para uma curva que teria grande destaque por sua enorme aplicabilidade tanto naqueles tempos quanto em tempos atuais, essa curva é encontrada quando temos as seguintes condições  $A = B = D = E = 0$  e  $C = F = 1$ , na equação geral da hipérbole:

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey = F.$$

Resultando na seguinte equação:

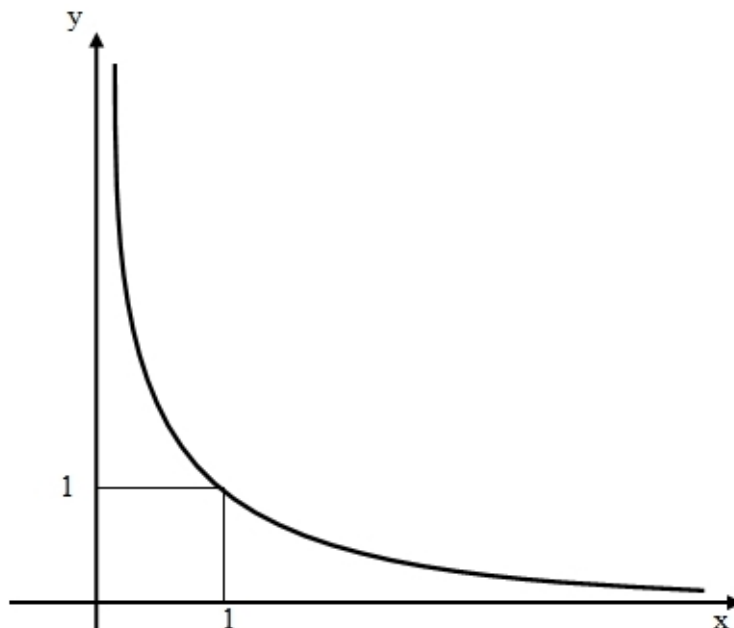


Figura 1.3: A função  $f(x) = \frac{1}{x}$

$$xy = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{x}. \quad (1.8)$$

Fermat percebeu que quando  $n = -1$  sua fórmula não funcionava, pois:

$$A_r = \frac{a^{n+1}}{n+1} \Rightarrow A_r = \frac{1}{0} (\text{expressão impossível.})$$

Quando Fermat percebeu esta falha em sua fórmula quão grande deve ter sido sua frustração por não poder resolver todos os casos possíveis. Infelizmente, um caso não resolvido por Fermat, porém, aplicável na curva (quanto ao seu método), coisa que Fermat não fez e que poderia lhe ajudar a encontrar a quadratura de (1.8) tão importante para o Cálculo.

## 1.5 Faixa de hipérbole: Uma segunda análise

Para resolver a quadratura de (1.8), usaremos o método de Fermat e veremos um resultado muito importante que foi descoberto por um Padre Jesuíta Belga cujo nome é *Gregoire de Saint Vincent* (1584 -1667) que, sem sombra de dúvidas, foi *o maior quadrador de hipérboles que a humanidade já conheceu*.

Saint Vincent foi um grande matemático na sua época e trouxe grande conhecimento em sua maior obra datada de 1668 cujo nome é *Opus geometricum posthumum per rationum* obra esta que só foi lançada um ano após sua morte, justificando assim, a palavra póstuma presente no título.

Contudo, faremos agora uma análise com base no método de Fermat e de Saint Vincent para achar a quadratura de (1.8).

Para começarmos nossa busca, faremos algumas considerações iniciais quanto aos pontos na curva em questão a fim de chegar a alguns resultados preliminares.

Para valores de  $x$  no domínio de (1.8) maiores do que ou iguais a 1, em símbolos,  $x \geq 1$ , temos as seguintes imagens por  $f$  conforme mostra tabela abaixo:

$d(f) = x$	1	2	3	4	5	$\dots n$
$im(f) = y$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\dots \frac{1}{n}$

Para valores de  $x$  no domínio dessa função variando entre 0 e 1, em símbolos,  $0 < x < 1$ , temos as seguintes imagens conforme mostra tabela abaixo:

$d(f) = x$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\dots \frac{1}{n}$
$im(f) = y$	1	2	3	4	5	$\dots n$

Com esta simples análise das duas tabelas, conseguimos enxergar claramente que, o domínio da primeira tabela corresponde perfeitamente à imagem da segunda tabela assim como o domínio da segunda tabela corresponde perfeitamente à imagem da primeira tabela. O que nos leva a concluir que, com exceção do quadrado formado pelos valores unitários de  $x$  e  $y$ , as áreas acima e ao lado do quadrado são perfeitamente iguais como mostra a figura 1.3:

Expressando matematicamente o que acabamos de dissertar acima tem-se:

$$im(f|_{(0,1)}) = (1, +\infty),$$

assim como tem-se

$$im(f|_{(1,+\infty)}) = (0, 1).$$

Expressando a área de  $f : (1, x) \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $f(x) = \frac{1}{x}$  por  $H_1^x$ , isto é, “a faixa de hipérbole com os valores variando no intervalo  $[1, x)$ ”. Tem-se, agora, uma nova forma de expressar a integral da função dada abaixo

$$\int \frac{1}{x} dx = 1 + 2 \cdot H_1^x + C,$$

ou então, uma das partes hachurada da figura 1.4, ficando assim

$$\int_1^x \frac{1}{t} dt = H_1^x.$$

Para avançarmos em nossa busca pela quadratura de (1.8), iremos aplicar o método de Fermat a esta como Saint Vincent o fez.

O gráfico abaixo da figura 1.4, deixa em evidência as duas áreas acima e ao lado do quadrado, mostrando que, de fato, são perfeitamente iguais.



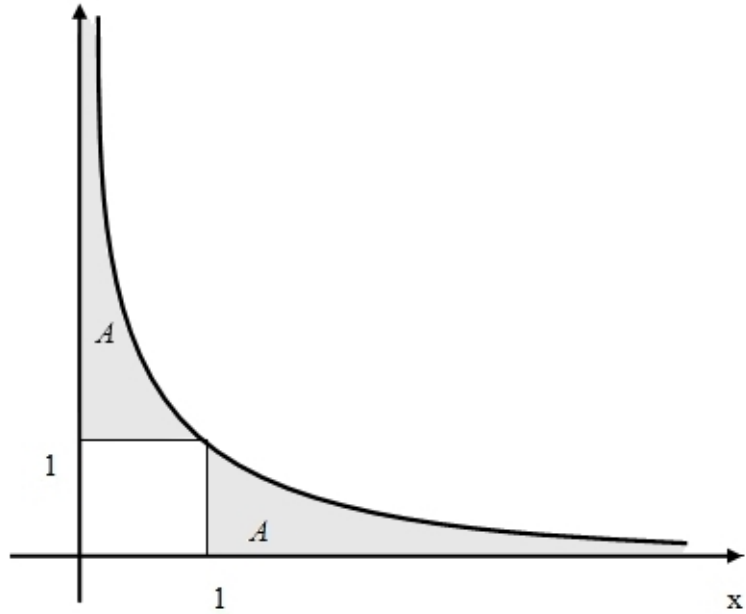


Figura 1.4: As duas áreas hachuradas são perfeitamente iguais

O gráfico, como mostra a Figura 1.5, propõe o método de Fermat aplicado a essa hipérbole usando o mesmo conceito para achar a quadratura das outras curvas, ou seja, propõe-se que, as larguras dos retângulos formem uma P.G decrescente, isto é, uma P.G cuja razão está variando assim:

$$0 \leq |r| \leq 1.$$

Vamos então, calcular a área de cada um desses retângulos a fim de analisar seus resultados.

$$\text{Retângulo 1: } A_1 = (a - ar) \cdot \frac{1}{a} \Rightarrow A_1 = a \cdot (1 - r) \cdot \frac{1}{a} \Rightarrow A_1 = (1 - r);$$

$$\text{Retângulo 2: } A_2 = (ar - ar^2) \cdot \frac{1}{ar} \Rightarrow A_2 = ar \cdot (1 - r) \cdot \frac{1}{ar} \Rightarrow A_2 = (1 - r);$$

$$\text{Retângulo 3: } A_3 = (ar^2 - ar^3) \cdot \frac{1}{ar^2} \Rightarrow A_3 = ar^2 \cdot (1 - r) \cdot \frac{1}{ar^2} \Rightarrow A_3 = (1 - r);$$

$$\text{Retângulo 4: } A_4 = (ar^3 - ar^4) \cdot \frac{1}{ar^3} \Rightarrow A_4 = ar^3 \cdot (1 - r) \cdot \frac{1}{ar^3} \Rightarrow A_4 = (1 - r);$$

⋮

$$\text{Retângulo n: } A_n = (ar^{n-1} - ar^n) \cdot \frac{1}{ar^{n-1}} \Rightarrow A_n = ar^{n-1} \cdot (1 - r) \cdot \frac{1}{ar^{n-1}} \Rightarrow A_n = (1 - r).$$

observe que:

$$A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = \dots = A_n = (1 - r).$$

Saint Vincent percebeu que, quando aplicado o método de Fermat a essa hipérbole as áreas dos  $n$  retângulos serão todas perfeitamente iguais, nos permitindo escrever a seguinte notação:

$$\int_1^x \frac{1}{t} dt = H_1^x = n(1 - r) ; \text{ com } n \in \mathbb{N} \text{ e } n \geq 1,$$

ou ainda, o cálculo da curva completa sendo:

$$\int \frac{1}{t} dt = 1 + 2 \cdot H_1^x = 1 + 2n \cdot (1 - r) + C.$$

Claro que, para saber quanto vale tal quadratura, em termos de área, irá depender da quantidade  $n$  de retângulos bem como do valor da razão  $r$  que será escolhida. No entanto, o cálculo já pode ser feito.

Vemos, com isso que a descoberta de Saint Vincent foi de grande valia para a quadratura dessa hipérbole. Embora ele não tenha conseguido tal resultado, foi um avanço considerável para conseguí-la.

Fazendo a junção dos resultados obtidos por Fermat e Saint Vincent, conseguimos perceber que, ao passo que as larguras dos retângulos crescem no decorrer da curva formando uma P.G, ou seja, *exponencialmente*, as áreas dos retângulos crescem em incrementos iguais, isto é, como uma P.A ou *aritmeticamente*. Pelo fato dessas grandezas estarem ligadas umas as outras, uma vez que estamos falando dos mesmos retângulos, podemos estabelecer uma lei de formação para estas da seguinte maneira:

$$a = b^n,$$

onde  $a$  representa o crescimento aritmético das áreas dos retângulos e  $b^n$  representa o crescimento geométrico das larguras dos retângulos e, dessa igualdade podemos extrair a seguinte identidade:

$$\log_b a = n.$$

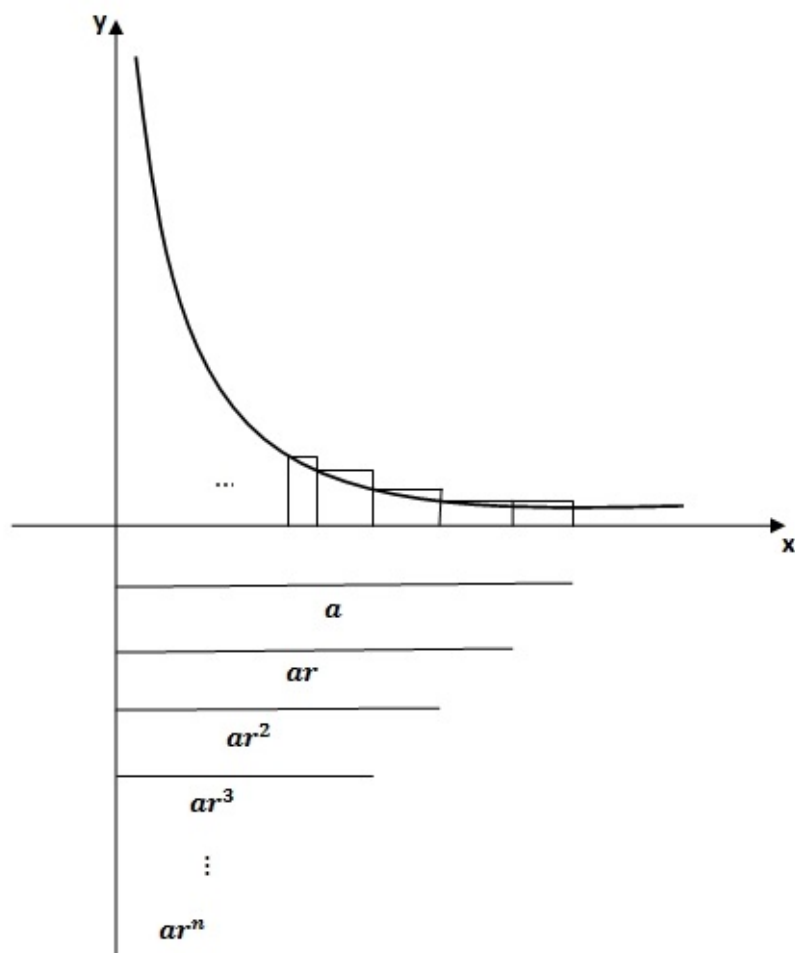


Figura 1.5: O método de Fermat aplicado à hipérbole. Método aplicado por Saint Vincent.

Com isso, sabemos que a área pode ser expressa como um logaritmo.

Se a anti derivada dessa função pode ser expressa como um logaritmo, a pergunta que fazemos agora é: *Qual é a função logarítmica cuja derivada é a função  $f(x) = \frac{1}{x}$  ?*

Entra em cena mais uma vez a grande genialidade desse brilhante matemático chamado *Euler*. Ele conhecia bem o trabalho de Fermat e o de Saint Vincent e unindo esses conhecimentos com a sua impressionante capacidade intelectual, foi capaz de entender que existia, de fato, uma relação logarítmica entre a área e a distância horizontal dessa faixa de hipérbole, pois Euler estabeleceu a base  $e$ , a qual já mencionamos no início desse capítulo, como sendo a base universal para os logaritmos. Ainda mais, Euler percebeu que o seu logaritmo de base  $e$  era uma função contínua no intervalo de todos os números reais maiores do que ou igual a 0, em símbolos  $r \geq 0$ , ou ainda  $(0, \infty)$ , como notação de intervalo.

Essa análise de Euler acabou por virar um teorema o qual iremos mencioná-lo e demonstrá-lo a fim de provar o que queremos.

**Teorema 1.5** *Seja a função dada por:*

$f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = \ln x$ . *Essa função possui derivada dada por*

$$f'(x) = \frac{1}{x}.$$

**Demonstração:** Temos primeiramente que a derivada de  $f$  é, por definição

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h}.$$

Usando a propriedade do Teorema 1.2, tem-se

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h}.$$

Fazendo a devida divisão no logaritmando tem-se

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h} \Rightarrow f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \left[ \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right) \right] \cdot \frac{1}{h} \right\}.$$

Usando a propriedade do Teorema 1.3 tem-se

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}.$$

Precisamos, agora, fazer uma manipulação algébrica para chegar ao nosso resultado final e, para isso iremos fazer a seguinte substituição:

$$\text{Fazendo: } \frac{h}{x} = \frac{1}{n} \Rightarrow h = \frac{x}{n} \Rightarrow \frac{1}{h} = \frac{n}{x}.$$

Como  $h \rightarrow 0$  implica que  $n \rightarrow \infty$ , pois

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \ln \left( 1 + \frac{h}{x} \right)^{\frac{1}{h}} \Rightarrow f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{\frac{n}{x}}.$$

Fazendo uma pequena transformação no expoente do logaritmo tem-se

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{n \cdot \frac{1}{x}}.$$

Usando novamente a propriedade do Teorema 1.3 tem-se

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n.$$

Como o limite da expressão depende da variável  $n$ , implica dizer que  $\frac{1}{x}$  funciona como uma constante, podendo assim, ser “colocada” fora do limite ficando assim a expressão

$$f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n.$$

Como foi visto no início desse capítulo o limite dessa expressão quando  $n \rightarrow \infty$  vale  $e$ . Logo, podemos escrever a expressão na forma

$$f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \ln e \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \cdot 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}.$$

■

Demonstramos assim, a quadratura da faixa de hipérbole que queríamos, o que, só foi possível após a longa pesquisa de Euler e sua criação dos logaritmos naturais. Essa proposição é tão forte na matemática superior que é toda a base da função logarítmica, uma vez que os livros de Cálculo de todos os autores trazem a seguinte definição para a função logarítmica:

**Definição 1.2** *Definimos a função  $f(x) = \ln x$  como sendo:*

$$\int_1^x \frac{1}{t} dt = \ln x.$$

Iremos agora, demonstrar que o valor do limite da expressão (1.2), na variável  $n$ , isto é,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n,$$

é o número  $e$ . Usaremos como base para essa demonstração, o Teorema 1.5.

**Teorema 1.6**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$$

**Demonstração:** Inicialmente, não iremos trabalhar com esse limite especificamente. Iremos calcular o limite do  $\ln$  dessa expressão; em símbolos:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ . A definição de  $\ln x$  é a mesma para logaritmos de outras bases, ou seja, tem-se que

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b;$$

assim, temos que

$$\ln x = y \Leftrightarrow e^y = x.$$

Então, vamos começar nossa demonstração. Primeiramente tem-se

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$$

Usando a propriedade do Teorema 1.3 demonstrado, tem-se

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

Se calcularmos esse limite encontraremos a seguinte indeterminação

$$\infty \cdot 0,$$

pois  $x \rightarrow \infty$  e  $\ln 1 = 0$ . Com isso, podemos transformar a expressão acima da seguinte forma

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

Podemos com isso, usar a regra de *L'hospital* para encontrar o valor dessa expressão: Chamando  $u = 1 + \frac{1}{x}$  tem-se

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln u}{\frac{1}{x}}.$$

Aplicando a regra tem-se

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{u} \cdot u'}{-\frac{1}{x^2}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}} \cdot \left(1 + \frac{1}{x}\right)'}{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \\ &= \frac{1}{1} = 1. \end{aligned}$$

Portanto, está terminada a primeira parte da demonstração, vamos agora, com base nesse resultado e na definição de logaritmos naturais, calcular o limite da expressão original que queríamos no começo, ou seja

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$$

Mas, tem-se que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x = 1.$$

Usando a propriedade demonstrada no Teorema 1.4 e a definição de logaritmo natural resulta

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x = e.$$

■

Com a utilização do método de Fermat, a pesquisa de Saint Vincent e a universalização dos logaritmos de Euler nós podemos demonstrar essa belíssima proposição matemática que é, sem dúvida, muito importante para o cálculo que é a base de toda a matemática superior.

## Capítulo 2

# Euler e a Teoria dos Números

A Teoria dos números é o ramo da matemática pura que preocupa-se em entender o funcionamento e comportamento dos números; suas leis e propriedades; fundamentos e conceitos, especificamente com os números inteiros que é o seu campo de grande interesse. Também é considerada uma das áreas de pesquisa mais pura da matemática, uma vez que, conforme mencionado anteriormente, preocupa-se em entender o seu comportamento e não a aplicação das descobertas acerca de seu comportamento tanto no dia a dia em si, como em outras ciências afins.

Leonhard Euler também trouxe para esse campo de estudo da matemática importantes contribuições, teoremas que ajudaram na evolução desse ramo de pesquisa. Tais contribuições foram de fundamental importância para o avanço na pesquisa científica em Teoria dos números uma vez que os resultados que Euler conseguiu em sua pesquisa serve de embasamento para muitas outras que, são vistas posteriormente.

Para começarmos a exposição dos resultados obtidos por Euler vamos, primeiramente, estabelecer algumas definições e conceitos que são indispensáveis para a construção desses resultados, sendo o mais importante deles a ideia de *congruência* trazida por outro grande matemático chamado *Carl Friedrich Gauss* (1777-1855) em sua obra prima chamada *Disquisitiones Arithmeticae*, publicada em 1801 quando Gauss tinha apenas 24 anos de idade.

Embora Euler tenha nascido bem antes de Gauss, como a datação nos mostra claramente, ele já possuía conhecimento avançado em congruência (uma vez que esse conteúdo é bem anterior a Gauss). Gauss apenas formulou o conceito e trouxe uma notação inovadora que é utilizada até os dias de hoje.

Os resultados que apresentaremos aqui, com respeito a Euler, serão:



1. A Demonstração da existência de infinitos números primos ;
2. A Função  $\varphi$  de Euler;
3. O Teorema de Euler-Fermat ;
4. Outros resultados de Euler .

Resultados esses que, sem sombra de dúvidas, contribuíram de grande forma para o avanço da Teoria dos números.

## 2.1 Congruência

**Definição 2.1** Dizemos que dois números inteiros  $a$  e  $b$  são congruentes módulo  $n$  quando a diferença de  $a$  por  $b$  for um múltiplo de  $n$ , em símbolos temos:

$$a \equiv b(\text{mod } n) \Leftrightarrow a - b = kn; \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}; \quad (2.1)$$

ou ainda,

$$a \equiv b(\text{mod } n) \Leftrightarrow a = b + kn. \quad (2.2)$$

A relação de congruência entre inteiros está bem estabelecida quanto a operação de *soma* e *multiplicação*, assim como, esta também é uma *relação de equivalência*, ou seja:

**Teorema 2.1** As propriedades reflexiva, simétrica e transitiva são válidas em congruência módulo  $n$ , isto é:

*i.*  $a \equiv a(\text{mod } n)$  (reflexiva) ;

*ii.*  $a \equiv b(\text{mod } n) \Leftrightarrow b \equiv a(\text{mod } n)$  (simétrica) ;

*iii.* se  $a \equiv b(\text{mod } n)$  e  $b \equiv c(\text{mod } n)$ , então  $a \equiv c(\text{mod } n)$  (transitiva).

**Demonstração:**

*i.* Primeiramente tem-se que:

$$\begin{aligned} a \equiv a(\text{mod } n) &\Leftrightarrow a - a = kn \\ &\Leftrightarrow 0 = kn. \end{aligned}$$

O que é verdade quando  $k = 0$ .

*ii.* Primeiramente temos:

$$\begin{aligned} a \equiv b(\text{mod } n) &\Leftrightarrow a - b = kn \\ &\Leftrightarrow b - a = -kn. \end{aligned}$$

Como  $-k$  é um inteiro, resulta que:

$$b \equiv a \pmod{n}.$$

iii. Por definição, temos:

$$a \equiv b \pmod{n} \Leftrightarrow a = b + kn \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}. \quad (2.3)$$

$$b \equiv c \pmod{n} \Leftrightarrow b = c + jn \text{ para algum } j \in \mathbb{Z}. \quad (2.4)$$

Substituindo (2.4) em (2.3), tem-se:

$$\begin{aligned} a &= c + jn + kn \\ &= c + \underbrace{(j + k)}_{\in \mathbb{Z}} n \\ &= c + mn; m = j + k \\ &= a \equiv c \pmod{n}. \end{aligned}$$

■

A relação de congruência também goza das seguintes propriedades que iremos propor e demonstrar:

**Teorema 2.2** *Sejam  $a, b, c$  e  $d$  números inteiros, então: se  $a \equiv b \pmod{n}$  e  $c \equiv d \pmod{n}$ , tem-se:*

i.  $a + c \equiv b + d \pmod{n}$ .

ii.  $a - c \equiv b - d \pmod{n}$ .

iii.  $ax \equiv bx \pmod{n}; \forall x \in \mathbb{Z}$ .

iv.  $ac \equiv bd \pmod{n}$

v.  $a^x \equiv b^x \pmod{n}; \forall x \in \mathbb{N}$ .

**Demonstração:**

i. Primeiramente tem-se que:

$$a \equiv b \pmod{n} \Leftrightarrow a = b + kn; \quad (2.5)$$

$$c \equiv d \pmod{n} \Leftrightarrow c = d + jn. \quad (2.6)$$

Somando (2.5) com (2.6) , temos:

$$\begin{aligned} a + c &= b + kn + d + jn \\ &= b + d + \underbrace{(j + k)}_{\in \mathbb{Z}} n \\ &= b + d + mn; m = j + k. \end{aligned}$$

Portanto, de (2.5) e (2.6), resulta que:

$$a + c \equiv b + d \pmod{n}.$$

*ii.* Temos que ao subtrair (2.6) de (2.5), resulta:

$$\begin{aligned} a - c &= b + kn - (d + jn) \\ &= b - d + kn - jn \\ &= b - d + \underbrace{(k - j)}_{\in \mathbb{Z}} n \\ &= b - d + mn; m = k - j. \end{aligned}$$

Daí, conclui-se que:

$$a - c \equiv b - d \pmod{n}.$$

*iii.* Multiplicando (2.5) por  $x \in \mathbb{Z}$  em ambos os membros, tem-se:

$$\begin{aligned} ax &= (b + kn)x \\ &= bx + \underbrace{kx}_{\in \mathbb{Z}} n \\ &= bx + mn; m = kx. \end{aligned}$$

Logo, conclui-se que

$$ax \equiv bx \pmod{n}.$$

*iv.* Multiplicando (2.5) por (2.6), obtém-se:

$$\begin{aligned} ac &= (b + kn)(d + jn) \\ &= bd + bjn + dkn + kjn^2 \\ &= bd + \underbrace{(bj + dk + jkn)}_{\in \mathbb{Z}} n \\ &= bd + mn; m = bj + dk + jkn \end{aligned}$$

concluindo com isso, que

$$ac \equiv bd \pmod{n}.$$

v. Por (2.5), temos o seguinte:

$$a \equiv b(\text{mod } n) \Leftrightarrow a = b + kn.$$

Usando como base *iv.* tem-se:

$$\begin{aligned} a \cdot a \equiv b \cdot b(\text{mod } n) &\Rightarrow a^2 \equiv b^2(\text{mod } n) \\ &\Rightarrow a^2 \cdot a \equiv b^2 \cdot b(\text{mod } n) \\ &\Rightarrow a^3 \equiv b^3(\text{mod } n) \\ &\Rightarrow \vdots \\ &\Rightarrow a^x \equiv b^x(\text{mod } n). \end{aligned}$$

■

Essas Propriedades nos ajudarão no desenvolvimento de nossos conceitos posteriormente.

## 2.2 Demonstração da existência de infinitos números primos

Dando continuidade a nossa pesquisa no trabalho de Euler vemos claramente que, Euler trouxe com esses teoremas um avanço considerável em Teoria dos Números. São fórmulas muito práticas e com larga aplicabilidade nesse ramo da matemática. Percebemos também que Euler trouxe muitos dos seus resultados em função de números primos.

Os números primos, por definição são aqueles que só possuem dois divisores que são um e ele próprio, ou seja, só existe dois números que são divisores dele. Eis aqui uma lista dos primeiros números primos compreendidos entre 1 e 100.

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

A quantidade de números primos é muito grande e, desde que foram descobertos foi-se feita a pergunta: *Quantos números primos existem?*

Muitos matemáticos ao longo dos tempos já demonstraram que existe uma infinidade de primos e, um deles foi Euler. Traremos aqui a demonstração feita durante sua pesquisa.

**Teorema 2.3** *Existe infinitos números primos.*

**Demonstração:** Euler propôs uma demonstração baseada no fato de que se  $p$  é um número primo então  $\frac{1}{p} < 1$ , e a soma da série geométrica de razão  $\frac{1}{p}$  e primeiro termo 1 é dada por:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p^k} = \frac{1}{1 - \frac{1}{p}}.$$

De forma análoga, se  $q$  é outro número primo temos:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{q^k} = \frac{1}{1 - \frac{1}{q}}.$$

Multiplicando, membro a membro, essas duas igualdades, obtemos:

$$1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{pq} + \frac{1}{q^2} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{q}}.$$

O primeiro membro é a soma dos inversos de todos os inteiros naturais da forma  $p^h q^k$ , com  $h, k \geq 0$ , cada um sendo contado uma, e uma só vez, porque a expressão de cada número natural, como produto de primos, é única.

Essa ideia, muito simples, está na base da demonstração de Euler, que vem apresentada a seguir.

Supõe-se que  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_r$  formam a totalidade dos números primos.

Para cada  $i = 1, 2, 3, \dots, r$  tem-se

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p_i^k} = \frac{1}{1 - \frac{1}{p_i}}.$$

Multiplicando, membro a membro, essas  $r$  igualdades, obtém-se

$$\prod_{i=1}^r \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p_i^k} \right) = \prod_{i=1}^r \frac{1}{1 - \frac{1}{p_i}}.$$

E o primeiro membro, uma vez efetuadas as operações, é a soma dos inversos de todos os números naturais da forma  $p_1^{h_1} p_2^{h_2} \dots p_r^{h_r}$ , cada um contado uma só vez, como resulta do teorema fundamental que estabelece que cada número composto se escreve de maneira única (a menos de permutações) como produto de fatores primos.

É sabido que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

é divergente e, como os seus termos são positivos, a ordem de soma desses termos é irrelevante; o primeiro membro da igualdade será então infinito, enquanto o seu segundo membro será finito. Isto é absurdo. Logo, existe infinitos números primos. (Ver [10]).

■

## 2.3 A função $\varphi$ de Euler

Vamos então, falar da função  $\varphi$  de Euler, a qual é muito importante pelo que representa na Teoria dos números. Também é chamada de *indicador de  $n$* , ou *totalizador de  $n$* , ou ainda, *função contagem de  $n$* , simbolizada, então, pela letra grega  $\varphi$  (*phi*), sendo visualizada em símbolos assim:

$$\varphi(n).$$

Em simbologia matemática tem-se:

$$\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}; \varphi(n) = \#\{x \in \mathbb{N}; 1 \leq x \leq n \text{ e } \text{mdc}(x, n) = 1\}.$$

Portanto, essa função faz a contagem dos números menores do que ou iguais que ele e que são primos com ele.

O sinal “ $\leq$ ” em  $x \leq n$ , justifica-se pelo fato de que quando calculamos  $\varphi(1)$ , tem-se  $\varphi(1) = 1$ , pois  $\text{mdc}(1, 1) = 1$  ao passo que para todo  $n > 1$  tem-se  $\varphi(n) < n$ , uma vez que se  $n > 1$  então  $\text{mdc}(x, x) = x$ . Portanto, o sinal de igualdade é útil apenas para o cálculo de  $\varphi(1)$ .

Os primeiros resultados dessa função são fáceis de calcular e iremos, agora, expressar os dez primeiros, uma vez que esses resultados nos ajudarão a entender o próximo passo para calcular o  $\varphi$  de qualquer número natural.

$$\begin{aligned}\varphi(1) &= \#\{1\} = 1 \\ \varphi(2) &= \#\{1\} = 1 \\ \varphi(3) &= \#\{1, 2\} = 2 \\ \varphi(4) &= \#\{1, 3\} = 2 \\ \varphi(5) &= \#\{1, 2, 3, 4\} = 4 \\ \varphi(6) &= \#\{1, 5\} = 2 \\ \varphi(7) &= \#\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = 6 \\ \varphi(8) &= \#\{1, 3, 5, 7\} = 4 \\ \varphi(9) &= \#\{1, 2, 4, 5, 7, 8\} = 6 \\ \varphi(10) &= \#\{1, 3, 7, 9\} = 4\end{aligned}$$

Uma coisa fácil de enxergar nessa função é que, quando calculamos o seu valor para números primos, todos os números *exceto ele próprio* é primo com ele, isso justifica-se pelo simples fato de que para um número primo  $p$  qualquer, tem-se assim:

$$\varphi(p) = \#\{x \in \mathbb{N}; 1 \leq x \leq p; \text{mdc}(p, x) = 1\} = \#\{1, 2, 3, \dots, p-1\} = p-1.$$

Temos então, o primeiro resultado da função de Euler. No entanto, isso não resolve todos os casos de inteiros. Para dar o próximo passo no cálculo dessa função, iremos propor o seguinte teorema que nos dará suporte para todos os inteiros.

**Teorema 2.4** *Dados os inteiros positivos  $k$ ,  $a$  e  $b$ , com  $\text{mdc}(a, b) = 1$ , então os restos das divisões de  $a$  por  $b$ ,  $k$ ,  $k + b$ ,  $k + 2b$ ,  $\dots$ ,  $k + (a - 1)b$  são todos diferentes.*

**Demonstração:** Sejam  $s, t \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq s, t \leq a$ . Suponhamos, por absurdo, que os restos das divisões de  $s, t$  por  $a$  não sejam diferentes. Assim,

$$k + sb = aq + r, \quad (2.7)$$

e

$$k + tb = aq' + r. \quad (2.8)$$

Vejamos então que  $a$  divide o produto

$$(s - t)b. \quad (2.9)$$

Essa expressão é encontrada na subtração de (2.8) por (2.7)

$$\begin{aligned} (k + sb) - (k + tb) &= (aq + r) - (aq' + r) \Rightarrow k + sb - k - tb = aq + r - aq' - r \\ &\Rightarrow sb - tb = aq - aq' \\ &\Rightarrow b(s - t) = a(q - q') \\ &\Rightarrow q - q' = \frac{b(s - t)}{a}. \end{aligned}$$

Mas, por hipótese tem-se que  $\text{mdc}(a, b) = 1$  logo  $a \nmid (s - t)$  contrariando a hipótese inicial  $0 \leq s, t \leq a$ . Portanto, os restos das divisões por  $a$  são diferentes. ■

O Teorema (2.4) nos dará suporte para o cálculo da função de Euler. Para isso, iremos apresentar o seguinte resultado:

**Teorema 2.5**  *$\varphi$  é uma função aritmética multiplicativa, ou seja,  $\varphi(ab) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$ ; com  $\text{mdc}(a, b) = 1$ .*

**Demonstração:** O caso  $a = 1$  ou  $b = 1$  é trivial uma vez que  $\varphi(1) = 1$ . Logo, vamos demonstrar os casos em que  $a > 1$  e  $b > 1$ .

Vamos dispor os inteiros em  $a$  linhas e  $b$  colunas a fim de retirar algumas conclusões em sua análise

$0b + 1$	$0b + 2$	$\dots$	$0b + k$	$\dots$	$1b$
$1b + 1$	$1b + 2$	$\dots$	$1b + k$	$\dots$	$2b$
$2b + 1$	$2b + 2$	$\dots$	$2b + k$	$\dots$	$3b$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$(a - 1)b + 1$	$(a - 1)b + 2$	$\dots$	$(a - 1)b + k$	$\dots$	$ab$

Os inteiros da  $k$ -ésima coluna serão primos com  $b$  apenas se  $k$  for primo com  $b$ , pois  $b$  divide  $qb + k$  apenas se  $k$  for múltiplo de  $b$ .

Na primeira linha é trivial notar que teremos  $\varphi(b)$  inteiros que são primos com  $b$  uma vez que esta é a sequência dos inteiros positivos até  $b$ . Assim, temos  $\varphi(b)$  colunas onde todos os inteiros são primos com  $b$ . Fazendo a mesma análise para o número  $a$  teremos  $\varphi(a)$  inteiros que são primos com  $a$ . Portanto, em  $\varphi(b)$  colunas teremos  $\varphi(a)$  inteiros que são primos com  $a$ .

Logo, se  $a$  e  $b$  são primos entre si temos que  $\varphi(ab) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$ .

■

Esta análise nos leva a uma consequência direta desse teorema que é expressa pelo corolário abaixo:

**Corolário 2.1** *Se os inteiros  $a, b, c, d, \dots, z$  são todos primos entre si, então temos que:  $\varphi(a \cdot b \cdot c \cdot d \cdots z) = \varphi(a) \cdot \varphi(b) \cdot \varphi(c) \cdot \varphi(d) \cdots \varphi(z)$ .*

Para a demonstração do corolário 2.1, basta usar o Teorema (2.5)  $z - 1$  vezes.

Para calcular o valor dessa função para qualquer número, precisamos decompor o número em fatores primos e aí usar a propriedade do corolário. No entanto, quando decomposmos um número em fatores primos eles aparecem com potências de expoentes naturais. Para resolver esse último caso e generalizar o conceito da função de Euler, iremos propor o seguinte resultado como último e, mais importante teorema da função de Euler:

**Teorema 2.6**  $\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1}$ ; em que  $p$  é primo e  $\alpha \in \mathbb{N}$ .

**Demonstração:** Os números inteiros menores que  $p^\alpha$  e que são primos com ele são os que não possuem o fator primo  $p$ , que são números da forma

$$p, 2p, 3p, \dots, tp; tp = p^\alpha \Rightarrow t = \frac{p^\alpha}{p} \Rightarrow t = p^{\alpha-1}.$$

O que conclui a demonstração, uma vez que o número de elementos seria  $p^\alpha - p^{\alpha-1}$ ,

portanto,

$$\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1}.$$

■

Dando um exemplo prático de como calcular um  $\varphi(n)$  qualquer, vamos calcular  $\varphi(5400)$ :



**Exemplo 2.1** Calcular o valor de  $\varphi(5400)$ .

Primeiramente temos que decompor 5400 em fatores primos, isto é

$$\varphi(5400) = \varphi(2^3 \cdot 5^2 \cdot 3^3).$$

De fato,  $2^3 = 8$ ,  $5^2 = 25$  e  $3^3 = 27$  de forma que  $8 \cdot 25 \cdot 27 = 5400$ .

Usando o Corolário 2.1 demonstrado anteriormente, tem-se que:

$$\varphi(5400) = \varphi(2^3 \cdot 5^2 \cdot 3^3) = \varphi(2^3) \cdot \varphi(5^2) \cdot \varphi(3^3).$$

Aplicando o teorema 2.6 tem-se:

$$\varphi(2^3) = 2^3 - 2^{3-1} = 2^3 - 2^2 = 8 - 4 = 4;$$

$$\varphi(5^2) = 5^2 - 5^{2-1} = 5^2 - 5 = 25 - 5 = 20;$$

$$\varphi(3^3) = 3^3 - 3^{3-1} = 3^3 - 3^2 = 27 - 9 = 18.$$

Então

$$\varphi(5400) = \varphi(2^3 \cdot 5^2 \cdot 3^3) = \varphi(2^3) \cdot \varphi(5^2) \cdot \varphi(3^3) = 4 \cdot 20 \cdot 18 = 1440.$$

Portanto, existem 1440 números entre 1 e 5400 que são primos com 5400, ou seja,

$$\varphi(5400) = \#\{x \in \mathbb{N} ; 1 \leq x \leq 5400 \text{ com } \text{mdc}(x, 5400) = 1\}.$$

Isto é,

$$\varphi(5400) = 1440.$$

## 2.4 O Teorema de Euler-Fermat

Para entrar no quarto tópico do nosso capítulo, que será sobre o *Teorema de Euler-Fermat*, precisamos falar sobre o Teorema de Fermat que é um caso anterior a este. Contudo, iremos propor e demonstrá-lo. O Teorema de Fermat, na verdade, é conhecido como *Pequeno Teorema de Fermat* uma vez que o seu resultado mais famoso ficou conhecido como *O Último Teorema de Fermat*, que foi proposto por volta do ano 1640 na margem da cópia do seu livro *Aritmética de Diofante* onde Fermat disse que havia encontrado uma maravilhosa demonstração para ele porém, a margem do livro era muito pequena para contê-la. O teorema levou por volta de 356 anos para ser demonstrado e, só foi totalmente demonstrado por *Sir Andrew Wiles*, um matemático Estadunidense da *universidade de Princeton* no ano de 1995.

Contudo, o Pequeno Teorema de Fermat, que iremos trabalhá-lo agora nos diz que:

**Teorema 2.7** Se  $a$  é um número inteiro e  $p$  um número primo temos que

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

**Demonstração:** Do fato de  $p$  ser um número primo e  $a$  ser um inteiro, pela função de Euler, sabemos que a quantidade de números que são primos com  $a$  é  $p - 1$ , pois  $\varphi(p) = p - 1$ . Portanto, nos inteiros compreendidos entre 0 e  $p - 1$  existem  $p - 1$  elementos incongruentes módulo  $p$  restando nesse conjunto apenas o número 1 que é congruente módulo  $p$ . Logo

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

■

É interessante salientarmos aqui que, Euler foi o primeiro a publicar uma demonstração desse Teorema.

**Corolário 2.2** *Se  $a$  um número inteiro e  $p$  um primo tem-se que:*

$$a^p \equiv a \pmod{p}.$$

**Demonstração:** Pelo Teorema 2.7 tem-se que

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow \frac{a^p}{a} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Se multiplicarmos ambos os lados por  $a$  pelo teorema 2.2 *iii.*, tem-se:

$$a^p \equiv a \pmod{p}.$$

■

Tendo o Teorema 2.7 e o Corolário 2.2 como base, podemos então, introduzir o Teorema de Euler-Fermat que nos diz o seguinte:

**Teorema 2.8** *Se  $m$  é um inteiro positivo e  $a$  um inteiro com  $\text{mdc}(a, m) = 1$  então:*

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}.$$

**Demonstração:** Se  $m$  for um número primo, isto é, se  $m = p$ , então

$$a^{\varphi(p)} \equiv 1 \pmod{p}.$$

O que é verdade, pois sabemos que  $\varphi(p) = p - 1$  que cai exatamente no *Pequeno Teorema de Fermat*.

Quando  $m$  é um inteiro qualquer teremos esse mesmo fato garantido tendo em vista que,  $\text{mdc}(a, m) = 1$ ; ou seja,  $a$  e  $m$  são primos entre si e constituirão um sistema completo de resíduos módulo  $m$ , portanto

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}.$$

■

## 2.5 Outros resultados de Euler

Euler, possibilitou alguns avanços consideráveis que apresentaremos aqui, pois ele apresentou uma conjectura que auxiliou na sua demonstração que é chamada na Teoria dos Números de Identidade de Euler. Esta propõe o seguinte:

**Teorema 2.9** *Para todo  $a, b, c, d, x, y, z, w$ , números inteiros. Temos que:*

$$\begin{aligned}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(w^2 + x^2 + y^2 + z^2) &= (aw + bx + cy + dz)^2 + \\ &+ (ax - bw - cz + dy)^2 + \\ &+ (ay + bz - cw - dx)^2 + \\ &+ (az - by + cx - dw)^2.\end{aligned}\tag{2.11}$$

E ainda propôs outro teorema:

**Teorema 2.10** *Para todo  $n \geq 2$  com  $n \in \mathbb{N}$ , temos que:*

$$g(n) = 2^n + \left\lfloor \left(\frac{3}{2}\right)^n \right\rfloor - 2.$$

onde  $g(n)$  é um certo número  $s$  que será o número das  $s$   $n$ -ésimas potências para um número qualquer e  $\lfloor \cdot \rfloor$  representa a parte inteira da expressão.

## 2.6 Diferença de dois quadrados

Para encerrar este capítulo, iremos propor um Teorema que foi fruto de nossa pesquisa no decorrer da produção desse Trabalho e, encontramos um resultado idêntico em uma apostila de Teoria dos números do Professor Rudolf R. Maier da universidade de Brasília, assim como um resultado no trabalho do matemático Pierre de Fermat sobre Números Primos. Contudo, esse resultado *a priori* não é plágio de nem um outro trabalho acadêmico. Nossa pesquisa em Teoria dos números nos levou ao seguinte resultado:

**Teorema 2.11** *Todo número inteiro ímpar pode ser escrito como uma diferença de dois quadrados sendo estes a diferença entre o quadrado da metade do seu sucessor e o quadrado da metade do seu antecessor, isto é, se  $x$  é um número inteiro ímpar, então:*

$$x = \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-1}{2}\right)^2.$$

**Demonstração:** Desenvolvendo o lado direito da igualdade, devemos encontrar como resultado  $x$ . De fato, se  $x = 2k + 1$ ;  $k \in \mathbb{Z}$ , tem-se:

$$x = \left[\frac{(2k+1)+1}{2}\right]^2 - \left[\frac{(2k+1)-1}{2}\right]^2.$$

Desenvolvendo os quadrados, obtemos:

$$x = \frac{(2k+1)^2 + 2(2k+1) + 1}{4} - \frac{(2k+1)^2 - 2(2k+1) + 1}{4}.$$

Reduzindo à uma única fração, resulta:

$$x = \frac{(2k+1)^2 - (2k+1)^2 + 2(2k+1) + 2(2k+1) + 1 - 1}{4}.$$

Efetuada as devidas operações, tem-se:

$$x = \frac{4(2k+1)}{4}.$$

Cancelando 4 com 4, resulta:

$$x = 2k + 1.$$

■

Na verdade, esse teorema é válido para qualquer número que pertença ao conjunto dos números complexos e a demonstração pode ser vista no (Apêndice B.1) desse trabalho. Contudo, em Teoria dos Números só trabalhamos com inteiros. Justificando a proposta do teorema somente para inteiros ímpares.

# Capítulo 3

## Euler e a Análise Matemática

Nesse terceiro e último capítulo iremos apresentar algumas descobertas de Euler que acarretou em avanços consideráveis na Análise Matemática. De fato, Euler conseguiu muitos avanços para este campo, uma vez que muitos autores o chamam de *Encarnação da Análise*. Esse fato se dá não só pelos resultados importantes desenvolvidos por ele, mas também, pela notação matemática inovadora que Euler apresentou para expressar resultados, notações estas que prevalecem até aos dias de hoje. Vamos aqui expor algumas das mais usadas e mais importantes notações criadas por Euler, as séries infinitas e, em particular da *série de Taylor* e da *série de Maclaurin* que serviram de base para Euler desenvolver seus conceitos; falaremos sobre a equação de Euler e seu caso particular, a chamada *identidade de Euler* e; apresentaremos uma aproximação do número  $\pi$  através da expansão em séries de Maclaurin da função  $\arctg x$ . Por fim, apresentaremos uma expansão do número  $e$  em frações contínuas a fim de verificar que bate com o resultado apresentado por Euler. Traremos também, uma prova topológica da irracionalidade do número  $e$ , uma prova feita em 2006 por um matemático Estadunidense chamado *J. Sondow*.

### 3.1 Notações criadas por Euler

Sabemos que séries infinitas são expressões matemáticas obtidas a partir do limite de somas parciais e que precisavam de uma forma mais simplificada de serem expressas. Pensando nisso, Euler criou uma notação muito prática para séries que foi a notação  $\sum$  (*sigma*) para somatórios. Para escrever uma série de potências, por exemplo, sua notação é a seguinte:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Notação muito mais prática comparada a forma convencional de escrever séries desse tipo:

$$a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots .$$

Para escrever a unidade imaginária dos números complexos, Euler também teve sua

participação universalizando sua representação pela letra  $i$ , isto é:

$$i = \sqrt{-1} \Rightarrow i^2 = -1.$$

Embora a notação da letra grega  $\pi$  não tenha sido inicialmente utilizada por Euler, foi ele quem a popularizou nos seus trabalhos, para designar a razão entre o comprimento e o diâmetro de uma circunferência; ou seja:

$$\frac{c}{d} = \pi;$$

onde  $c$  é o comprimento e  $d$  é o diâmetro de uma circunferência qualquer.

A mais importante notação apresentada por Euler e, sem sombra de dúvidas, a mais usada de todas é, a notação de uma função como sendo  $f(x)$ . Essa notação muito importante para a matemática é de criação desse brilhante matemático. Para expressar a função de uma variável Euler propôs o seguinte resultado:

*“Se  $x$  é uma quantidade variável, então toda a quantidade que depende de  $x$  de qualquer maneira, ou que seja determinada por aquela, chama-se função da dita variável”.* Noção esta utilizada até aos dias de hoje nos livros didáticos.

## 3.2 A equação de Euler

Vamos agora, demonstrar uma equação que é considerada até os dias de hoje como “A mais bela equação da matemática” onde Euler, com o seu brilhantismo conseguiu chegar a um resultado surpreendente deduzindo-a a como:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \forall x \in \mathbb{R}$$

e, substituindo  $x$  por  $\pi$ , encontramos a identidade:

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Para chegar a esse resultado, primeiro precisamos entender como funcionam duas séries muito importantes e com grande aplicabilidade na matemática e, nas ciências concatenadas a ela tais como a Estatística, a Física, a Química, as Engenharias e demais ciências, as quais necessitam da matemática. Essas séries chamam-se *Série de Taylor* e *Série de Maclaurin*.

### 3.2.1 Série de Taylor

A ideia de *Taylor* era propor uma forma diferenciada de descrever uma função  $f(x)$  qualquer. *Taylor* escreveu uma função como uma série de potências de  $x$  com infinitos termos em função dos coeficientes como se fosse um polinômio.

$$f(x - a) = a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + a_3(x - a)^3 + \dots + a_n(x - a)^n + \dots$$

Ou ainda, escrevendo como um somatório tem-se:

$$f(x-a) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n.$$

O problema inicial para *Taylor* era entender como funcionaria os coeficientes dessa série, ou seja,  $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  e, para obter tal resultado começou a derivar a função várias vezes e obteve o seguinte resultado:

$$f(x-a) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + a_4(x-a)^4 + \dots + a_n(x-a)^n + \dots ;$$

$$f'(x-a) = a_1 + 2 \cdot a_2(x-a) + 3 \cdot a_3(x-a)^2 + 4 \cdot a_4(x-a)^3 + 5 \cdot a_5(x-a)^4 + 6 \cdot a_6(x-a)^5 + \dots ;$$

$$f''(x-a) = 2 \cdot a_2 + 3 \cdot 2 \cdot a_3(x-a) + 4 \cdot 3 \cdot a_4(x-a)^2 + 5 \cdot 4 \cdot a_5(x-a)^3 + 6 \cdot 5 \cdot a_6(x-a)^4 + \dots ;$$

$$f'''(x-a) = 3 \cdot 2 \cdot a_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot a_4(x-a) + 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot a_5(x-a)^2 + 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot a_6(x-a)^3 + \dots .$$

Como percebido o índice do primeiro termo dessa série está acompanhado pelo fatorial do próprio índice. Logo, vamos derivar essa função  $n$  vezes, ou seja, encontrar a  $n$ -ésima derivada, dada por:

$$f^{(n)}(x-a) = n!a_n.$$

O que nos proporciona exatamente o valor do coeficiente em função da derivada da função, isto é,

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x-a)}{n!},$$

e, como definimos a função como sendo o somatório da  $n$ -ésimas derivadas da função multiplicado pelo fatorial do índice tem-se:

$$f(x-a) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x-a)}{n!} x^n,$$

ou então, escrevendo novamente como uma série com  $n$  termos

$$f(x-a) = f(a) + f'(a) \frac{(x-a)}{1!} + f''(a) \frac{(x-a)^2}{2!} + \dots + f^{(n)}(a) \frac{(x-a)^n}{n!} + \dots .$$

### 3.2.2 Série de Maclaurin

*Maclaurin* percebeu que, um caso particular dessa série ocorre quando o ponto em questão, nesse caso o ponto  $a$ , seja igual a zero. Com isso, temos a seguinte série

$$f(x) = f(0) + f'(0)\frac{x^1}{1!} + f''(0)\frac{x^2}{2!} + f'''(0)\frac{x^3}{3!} + \cdots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + \cdots,$$

ou ainda como um somatório

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Com toda essa base, agora, podemos entender o que Euler fez para chegar a equação que, mais tarde acabou recebendo seu nome.

### 3.2.3 Construção da Equação de Euler

Euler começou a observar o comportamento de algumas funções quando expandidas em uma Série de *Maclaurin* e, o primeiro exemplo que vamos mostrar é o comportamento da função que tem como base o *número de Euler* ou a *constante de Euler*, isto é, a função  $f(x) = e^x$ .

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x; \\ f'(x) &= e^x; \\ f''(x) &= e^x; \\ f'''(x) &= e^x; \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x) &= e^x. \end{aligned}$$

Aplicando a regra de Maclaurin, resulta

$$e^x = e^0 + e^0 \frac{x^1}{1!} + e^0 \frac{x^2}{2!} + e^0 \frac{x^3}{3!} + \cdots + e^0 \frac{x^n}{n!} + \cdots,$$

e como  $e^0 = 1$ , tem-se o seguinte resultado:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots.$$

Em seguida, Euler acrescentou um elemento que iria fazer toda a diferença na sua demonstração. Esse elemento é a unidade imaginária dos números complexos  $i$ , fazendo assim, com que os logaritmos ganhassem uma nova forma, uma nova cara. Euler foi capaz de fazer a junção de logaritmos com números complexos acrescentando  $\sqrt{-1}$  a sua equação. Então, iremos agora ver como se comporta a função  $f(x) = e^{ix}$ .



Vamos, inicialmente entender como funciona as derivadas dessa função e, para isso, vamos utilizar uma propriedade muito importante dos números complexos que são as potências cuja base é  $i$ . Para esse tipo de potência tem-se:

$$i^0 = 1;$$

$$i^1 = i;$$

$$i^2 = -1;$$

$$i^3 = -i;$$

com expoentes maiores do que 3, teremos agora uma repetição das potências, pois:

$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1, \text{ ou seja, } i^4 = i^0.$$

$$i^5 = i^3 \cdot i^2 = (-i) \cdot (-1) = i, \text{ ou seja, } i^5 = i^1.$$

De modo geral: se  $n$  é par:

$$\begin{aligned} i^n = i^{2k} &= 1, \text{ se } k \text{ é par,} \\ &= -1, \text{ se } k \text{ é ímpar.} \end{aligned}$$

Se  $n$  é ímpar:

$$\begin{aligned} i^n = i^{2k} \cdot i &= i, \text{ se } k \text{ é par,} \\ &= -i, \text{ se } k \text{ é ímpar.} \end{aligned}$$

Com isso, entendemos claramente que, de fato há uma repetição das potências conforme os expoentes vão crescendo. Utilizando essa regra nas sucessivas derivadas que iremos encontrar para a função  $f(x) = e^{ix}$ , obtém-se o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{ix} \\ f'(x) &= e^{ix}i; \\ f''(x) &= e^{ix}i^2; \\ f'''(x) &= e^{ix}i^3; \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x) &= e^{ix}i^n. \end{aligned}$$

Colocando-a na expansão de Maclaurin tem-se:

$$e^{ix} = 1 - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - i\frac{x^7}{7!} + \dots$$

Ainda podemos fatorar a expressão colocando os termos que contêm  $i$  em evidência, obtendo a forma:

$$e^{ix} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots\right) + i \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\right).$$

Essa parte do trabalho já foi um grande avanço para a Análise e demais áreas da matemática, uma vez que, Euler conseguiu encaixar perfeitamente com uma expansão de Maclaurin, uma série de potências que também continha a unidade imaginária dos números complexos  $i$ . Mas, Euler ainda não estava com o seu trabalho concluído e, em seguida foi em busca de outras funções que também possuíam essa propriedade de serem *cíclicas*, isto é, repetem-se obedecendo a um determinado padrão. Então, Euler logo percebeu que as funções trigonométricas possuíam essa característica como o exemplo da função  $\sin x$  e  $\cos x$  como mostrado abaixo

$$f(x) = \sin x;$$

$$f'(x) = \cos x;$$

$$f''(x) = -\sin x;$$

$$f'''(x) = -\cos x;$$

$$f^{(4)}(x) = \sin x.$$

Percebemos claramente que, tanto a função  $\sin x$  como a função  $\cos x$  ocorre a ciclicidade, isto é, se repetem conforme o grau da derivada vai crescendo. Então Euler, mais uma vez foi em busca da resposta para tais funções, ou seja, verificar como se comportam em uma expansão de Maclaurin, isto é:

$$\sin x = \sin 0 + \cos 0 \cdot x - \sin 0 \cdot \frac{x^2}{2!} - \cos 0 \cdot \frac{x^3}{3!} + \sin 0 \cdot \frac{x^4}{4!} + \dots$$

Calculando os valores de  $\sin 0$  e  $\cos 0$ , tem-se:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

A segunda parte da análise de Euler foi verificar o comportamento da função  $f(x) = \cos x$ , como uma expansão de Maclaurin.

$$\cos x = \cos 0 - \sin 0 \cdot x - \cos 0 \cdot \frac{x^2}{2!} + \sin 0 \cdot \frac{x^3}{3!} + \cos 0 \cdot \frac{x^4}{4!} + \dots$$

Novamente calculando os valores de  $\sin 0$  e  $\cos 0$  resulta:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

Analisando as duas funções calculadas, percebemos claramente que, a soma de  $\cos x$  com  $\sin x$  é exatamente a soma que foi encontrada na função  $f(x) = e^{ix}$ . Euler triunfara em sua busca por uma igualdade de funções em uma expansão de Maclaurin.

$$e^{ix} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots\right) + i \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\right);$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

### 3.2.4 Construção da Identidade de Euler

Euler conseguiu expor em uma equação relativamente simples *quanto ao seu tamanho*, uma gama de informações matemáticas. O número  $e$  base universal dos logaritmos e base de todo o cálculo que da suporte a toda a matemática superior, a unidade imaginária dos números complexos  $i = \sqrt{-1}$ , o  $x$  que governa toda a álgebra desde a elementar até a mais abstrata e, as funções que governam toda a trigonometria que são as funções  $\cos x$  e  $\sin x$ , uma vez que as demais funções trigonométricas são nada mais que consequências destas. No entanto, Euler rapidamente percebeu que o valor de  $x$  era um arco e, no lugar de  $x$  poderia substituir por  $\pi$ , ou seja, um arco que mede  $180^\circ$  que leva a grande e famosa **Identidade de Euler**.

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x;$$

substituindo  $x$  por  $\pi$

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi;$$

calculando o valor dos arcos, obtemos

$$e^{i\pi} = -1 + 0i;$$

o que resulta em

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Mostramos assim, essa belíssima equação matemática que, em minha opinião e, com certeza na opinião de muitos matemáticos também, é a mais bela de todas as equações.

### 3.3 Expansão da função $f(x) = \arctan x$

Dando continuidade a esse estudo de Euler nas séries infinitas, apresentaremos agora, um resultado de Euler que, foi muito importante para uma boa aproximação do número  $\pi$ . Para começar sua demonstração, Euler propôs a expansão em Série de Maclaurin da função  $f(x) = \arctan x$ .

Antes de fazer tal expansão vamos propor o seguinte resultado:

**Teorema 3.1** A função  $f(x) = \tan x$  é derivável e possui derivada  $f'(x) = \sec^2 x$ .

**Demonstração:** Primeiramente tem-se que a derivada de uma função por definição é

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Ainda mais, sendo:

$$f(x) = u, g(x) = v \text{ e } h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow h(x) = \frac{u}{v}.$$

Sabemos que a derivada do quociente entre duas funções é:

$$h'(x) = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2},$$

isso já nos dá base para demonstrar nosso resultado, pois tem-se que:

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x}.$$

Aplicando a regra do quociente tem-se:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}'x &= \frac{\operatorname{sen}'x \cdot \operatorname{cos} x - \operatorname{cos}'x \cdot \operatorname{sen} x}{\operatorname{cos}^2 x} \\ &= \frac{\operatorname{cos} x \cdot \operatorname{cos} x + \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} x}{\operatorname{cos}^2 x} \\ &= \frac{\operatorname{cos}^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{cos}^2 x}. \end{aligned}$$

Mas, temos que  $\operatorname{cos}^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$ .

Logo

$$\tan' x = \frac{1}{\operatorname{cos}^2 x} \Rightarrow f'(x) = \sec^2 x$$

■

**Teorema 3.2** A função  $f(x) = \arctan x$  é derivável e possui derivada:

$$f'(x) = \frac{dx}{1+x^2}; \quad dx = \sec^2 y dy \quad e \quad x = \tan y.$$

**Demonstração:** Seja a função  $f(x) = \arctan x$  ou  $y = \arctan x$  Portanto, tem-se, por definição que:  $x = \tan y$ . Logo,

$$\frac{dx}{dy} = \sec^2 y = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2.$$

Pelo teorema da função inversa:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{1+x^2};$$

portanto,

$$\frac{d}{dx}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

■

Para chegar a expansão da função  $f(x) = \arctg x$ , iremos, inicialmente, fazer algumas análises da expressão

$$\frac{1}{1+x^2}.$$

Esta expressão pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)}. \quad (3.1)$$

Agora, podemos comparar esta expressão com a expressão resultante da soma  $S_n$  de uma série geométrica que, encontra-se demonstrada no (Apêndice A.3) desse trabalho

$$S_n = \frac{a_1}{1 - r}.$$

Podemos ver, com isso que, (3.1) trata-se de uma série geométrica onde:

$$a_1 = 1 \text{ e } r = (-x^2).$$

Como a série geométrica é uma série da forma:

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^n + \dots,$$

tem-se que:

$$\frac{1}{1 + x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} + \dots.$$

Integrando membro a membro a última expressão, resulta em:

$$\int \frac{1}{1 + x^2} dx = \int (1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} + \dots) dx.$$

Usando a propriedade do Teorema 3.2 tem-se que:

$$f(x) = \arctg x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1 + x^2},$$

logo, tem-se que

$$\int \frac{1}{1 + x^2} dx = \arctg x.$$

Portanto, podemos escrever a função  $f(x) = \arctg x$  como a seguinte série geométrica

$$\arctg x = \int (1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} + \dots) dx.$$

Integrando, tem-se

$$\arctg x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots.$$

Podemos integrar essa função, pois  $\arctg x$  é uma função contínua para todo  $x$  real. Portanto, satisfazendo as condições de integrabilidade de uma função que pode ser verificada no (Apêndice C.1) desse trabalho, são válidas as igualdades acima.

Euler conseguiu, com isso, formar uma série da função  $f(x) = \arctg x$ . Contudo, Euler não parou por aí, pois ele propôs calcular essa expansão quando  $x = 1$ . Daí, tem-se

$$\arctg 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots.$$

Sabemos que o ponto em que  $\arctg$  vale 1 é o ponto

$$\frac{\pi}{4},$$

portanto, tem-se

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots. \tag{3.2}$$

### 3.4 Aproximação de $\pi$

Euler conseguiu uma excelente aproximação para a esta importante e famosa constante matemática, pois usando (3.2) obtemos:

$$\pi = 4 \left( 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots \right);$$

ou ainda,

$$\pi = 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \cdots .$$

Eis aí o número  $\pi$  com algumas casas decimais:

$$\pi = 3,14159265358979 \dots$$

## 3.5 Irracionalidade do número $e$

O primeiro matemático a demonstrar que o número  $e$  é irracional foi Euler quando construiu os logaritmos naturais que tem por base esse número. Euler fez uma prova usando frações contínuas a qual não vamos usar aqui em nosso trabalho embora seja uma prova interessante desse grande matemático. Iremos fazer uma demonstração dada em 2006 pelo matemático *J.Sondow* que usa a análise matemática, a Topologia e a teoria dos números para apresentar esta belíssima prova de que esse número tão importante para a matemática é irracional. Contudo, vamos primeiro, fazer uma construção cautelosa da fração contínua do número  $e$  a fim de comprovar que, de fato coincide com a fração exposta por Euler em meados do século XVIII, para por fim, fazer a demonstração topológica.

### 3.5.1 Expansão do número $e$ como frações contínuas

Para o número  $e$ , temos a seguinte construção:

Não estamos fazendo uma demonstração de fato, de que o número  $e$  é irracional. Estamos fazendo aqui uma expansão a fim de comprovar que coincide com a conclusão feita por Euler, anteriormente. Para começarmos, vamos fazer a expansão de Maclaurin da função  $e^x$ .

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots$$

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \dots$$

$$e = 2 + 0,5 + 0,16666\dots + 0,41666\dots + 0,0083333\dots + 0,00138888\dots + \dots$$

$$\begin{aligned}
e &= 2,7182818284590\dots \\
&= 2 + 0,7182818284590\dots \\
&= 2 + \frac{1}{\frac{1}{0,7182818284590\dots}} \\
&= 2 + \frac{1}{1,392211191177\dots} \\
&= 2 + \frac{1}{1 + 0,392211191177\dots} \\
&= 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{1}{0,392211191177\dots}}} \\
&= 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2,549646778306\dots}} \\
&= 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + 0,549646778306\dots}} \\
&= 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{1}{0,549646778306\dots}}}} \\
&= 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1,819350243590\dots}}} \\
&= 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + 0,819350243590\dots}}} \\
&= 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{1}{0,819350243590\dots}}}}}
\end{aligned}$$



$$= 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1,220479285657\dots}}}}$$

$$= 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+0,220479285657\dots}}}}$$

$$= 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{0,220479285657\dots}}}}}}$$

$$= 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{0,220479285657\dots}}}}}}$$

$$= 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+4,535573475848\dots}}}}}}$$

$$= 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+4+0,535573475848\dots}}}}}}$$

$$= 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{0,535573475848\dots}}}}}}}}$$

$$= 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1,867157439820\dots}}}}}}}}$$

$$= 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1+0,867157439820\dots}}}}}}}}$$

$$= 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{0,867157439820\dots}}}}}}}}$$

$$= 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1,153193127429\dots}}}}}}}}$$

$$= 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+0,153193127429\dots}}}}}}}}$$

$$= 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{0,153193127429\dots}}}}}}}}$$

$$= 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6,257707977392\dots}}}}}}}}$$

Euler conseguiu encontrar um curioso padrão quando expande o número  $e$  em frações contínuas. Ele percebeu que, os *quocientes parciais* eram:  $a_1 = 2$  e  $a_2 = 1$  daí em diante, tendo-se o seguinte padrão:  $a_3, a_6, a_9, \dots, a_{3k}, \dots$ , com  $k \in \mathbb{Z}$  e  $k \geq 1$  crescendo como números pares no decorrer da fração, isto é:  $a_3 = 2$ ,  $a_6 = 4$ ,  $a_9 = 6$ ,  $\dots$ . Os demais termos, isto é,  $a_4, a_5, a_7, a_8, \dots$ , serão todos iguais a 1.

Se continuarmos tal processo indefinidamente, iremos encontrar a fração contínua com a seguinte forma:

$$e = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{1 + \frac{1}{8 + \frac{1}{\ddots 2n + \frac{1}{\ddots}}}}}}}}}}}}}}$$

ou ainda, de maneira simplificada, usando apenas seus quocientes parciais:

$$e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, \dots, 2n, \dots]$$

Portanto,  $e$  é irracional.

Vamos, então, para a prova feita pelo J. Sondow em 2006.

### 3.5.2 Prova topológica da irracionalidade do número $e$

**Teorema 3.3** *A constante de Euler, isto é, o número  $e$  é irracional*

**Demonstração:** Primeiramente vamos tomar um intervalo, denotado por  $I_1$  que contém o número  $e$ ; ou seja:

$$I_1 = [2, 3].$$

Vamos agora, construir o intervalo que denotaremos por  $I_2$ , que será construído usando-se a seguinte lei de formação: O intervalo  $I_1$  será dividido em dois subintervalos de mesmo comprimento e, tomaremos o segundo intervalo da esquerda para a direita, isto é

$$I_2 = \left[ 2 + \frac{1}{2}, 3 \right].$$

Agora, tomemos o terceiro intervalo, isto é,  $I_3$ , que será construído dividindo o  $I_2$  em três subintervalos de mesmo comprimento; além disso, devemos usar a mesma regra de tomar o segundo intervalo da esquerda para a direita, ou seja:

$$I_3 = \left[ 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}, 2 + \frac{1}{2} + \frac{2}{6} \right].$$

Para facilitar a nossa linguagem quanto a escrita dos intervalos vamos escrever

$$I_1 = [2, 3] \Rightarrow I_1 = \left[ \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!}, \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{2}{2!} \right];$$

$$I_2 = \left[ 2 + \frac{1}{2}, 3 \right] \Rightarrow I_2 = \left[ \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}, \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{2}{2!} \right];$$

$$I_3 = \left[ 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}, 2 + \frac{1}{2} + \frac{2}{6} \right] \Rightarrow I_3 = \left[ \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}, \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} \right].$$

Para considerar o intervalo  $I_4$  fazemos a mesma construção; isto é, dividindo o intervalo  $I_3$  em quatro subintervalos de mesmo comprimento e tomando o segundo intervalo da esquerda para a direita, ou seja

$$I_4 = \left[ \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}, \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{2}{4!} \right].$$

Continuando esse processo teremos que o  $n$ -ésimo intervalo terá da seguinte forma

$$I_n = \left[ \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}, \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{2}{n!} \right].$$

Observe que, os comprimentos desses intervalos tem valores

$$|I_1| = \frac{1}{1!};$$

$$\begin{aligned}
|I_2| &= \frac{1}{2!}; \\
|I_3| &= \frac{1}{3!}; \\
&\vdots \\
|I_n| &= \frac{1}{n!}.
\end{aligned}$$

Percebemos, claramente com isso que, esses intervalos têm total relação com o número  $e$ , pois como foi visto anteriormente, o número  $e$  é dado pela série

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}.$$

Como  $I_n = \frac{1}{n!}$  podemos escrevê-lo da forma:

$$\begin{aligned}
I_n = \frac{1}{n!} &\Rightarrow I_n = \left[ \frac{A_n}{n!}, \frac{B_n}{n!} \right] \\
&\Rightarrow \left[ \frac{A_n}{n!}, \frac{A_n}{n!} + \frac{1}{n!} \right] \\
&\Rightarrow \left[ \frac{A_n}{n!}, \frac{A_n + 1}{n!} \right] \\
&\Rightarrow B_n = A_n + 1,
\end{aligned}$$

onde  $A_n, B_n \in \mathbb{Z}$ , são encontrados quando é realizada a operação entre as frações dos intervalos tomados acima.

De fato, tem-se que:

$$I_n = \left[ \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}, \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{2}{n!} \right].$$

Colocando em evidência  $\frac{1}{n!}$ , obtemos:

$$I_n = \frac{1}{n!} \cdot \left[ \frac{n!}{0!} + \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} + \cdots + \frac{n!}{n!}, \frac{n!}{0!} + \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} + \cdots + \frac{2(n!)}{n!} \right].$$

Isto resulta em:

$$I_n = \frac{1}{n!} \cdot [(n! + n! + n(n-1)(n-2) + \cdots + 4 \cdot 3 + \cdots + 1)].$$

Chamando:

$$A_n = n! + n! + n(n-1)(n-2) + \cdots + 4 \cdot 3 + \cdots + 1$$

e

$$B_n = n! + n! + n(n-1)(n-2) + \cdots + 4 \cdot 3 + \cdots + 2,$$

Conclui-se que  $A_n$  e  $B_n$  são inteiros .

Criamos, com isso, uma cadeia decrescente de intervalos

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots .$$

Assim, podemos perceber que existe um ponto que está na intersecção de todos esses intervalos, ou seja, existe  $\theta \in \mathbb{R}$ , tal que:

$$\theta \in \bigcap_{i=1}^{\infty} I_n.$$

Esse resultado pode ser verificado no (Apêndice C.2) desse trabalho.

Para continuarmos nossa demonstração precisamos apresentar a seguinte observação:

**Observação 3.1**  $e \in I_n, \forall n \in \mathbb{N}$ .

É claro que  $e > \frac{A_n}{n!}$ , pois  $\frac{A_n}{n!}$  é apenas uma parcela da série do  $e$ .

Para terminar a prova dessa observação, basta mostrar que  $e < \frac{A_{n+1}}{n!}$ . Provemos este fato por absurdo, isto é, suponhamos que  $e > \frac{A_{n+1}}{n!}$ , então:

$$\sum_{k=0}^{\infty} - \sum_{k=0}^n > \frac{1}{n!} \Leftrightarrow n! \sum_{k=n+1}^{\infty} > 1;$$

Como

$$n! \sum_{k=n+1}^{\infty} < 1$$

chegamos a um absurdo, isto é,  $1 > 1$ . Portanto  $e < \frac{A_{n+1}}{n!}$ . Assim,

$$e \in I_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

isto é,

$$e \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n.$$

No (Apêndice C.3) desse trabalho pode ser verificado que, as intersecções desses intervalos possuem um único ponto, isto é, a intersecção desses intervalos é um intervalo degenerado.

Como  $e \in I_n, \forall n \in \mathbb{N}$ , então  $e \in I_q$ . Então,  $q$  é o possível denominador do  $e$  .

Portanto, tem-se que:

$$\frac{A_q}{q!} < e < \frac{A_q + 1}{q!}.$$

Como  $e = \frac{p}{q}$ , tem-se que:

$$\frac{A_q}{q!} < \frac{p}{q} < \frac{A_q + 1}{q!}.$$

Podemos escrever  $\frac{p}{q}$  ainda da seguinte forma:

$$\frac{p}{q} = \frac{p(q-1)!}{q!}.$$

De fato,

$$\frac{p(q-1)!}{q!} = \frac{p(q-1)!}{q(q-1)!} = \frac{p}{q}.$$

Logo, tem-se :

$$\frac{A_q}{q!} < \frac{p}{q} < \frac{A_q + 1}{q!};$$

o que implica em:

$$\frac{A_q}{q!} < \frac{p(q-1)!}{q!} < \frac{A_q + 1}{q!};$$

que acarreta em:

$$A_q < \underbrace{p(q-1)!}_{\in \mathbb{Z}} < A_q + 1.$$

Com isso, encontramos um inteiro  $p(q-1)!$  entre dois inteiros consecutivos  $A_q$  e  $A_q + 1$  o que é um absurdo. Portanto, Chegamos a uma contradição supondo que  $e$  é racional. Logo  $e$  é irracional. Em simbologia matemática, tem-se

$$e \notin \mathbb{Q}.$$

■

Voltamos a dizer que essa não foi a demonstração feita por Euler. Contudo, Euler foi o primeiro a demonstrar a irracionalidade desse número. Logo, podemos dizer que o trabalho de Euler inspirou o trabalho dos demais matemáticos nesse sentido.

## Considerações Finais

Com esses resultados vistos por intermédio de nossa pesquisa sobre o grande matemático Euler, concluímos que sua obra foi, de fato, muito importante para o desenvolvimento e crescimento da matemática. Podemos concluir que, sem sombra de dúvidas, a matemática não seria a mesma sem a passagem desse matemático chamado *Leonhard Euler*. Sua obra como um todo não daria para ser mostrada nesse trabalho, uma vez que, toda a sua pesquisa está estipulada entre sessenta e oitenta volumes. Contudo, fizemos um apanhado geral da sua obra nessas três áreas que são de grande importância na pesquisa e no estudo da matemática.

O Cálculo está alicerçado nos Limites, nas Derivadas e nas Integrais e, muitos resultados obtidos nesses três campos de estudo do Cálculo dependem dos Logaritmos Naturais estabelecidos por Euler assim como, o caso da expressão demonstrada no Capítulo 1 do mesmo.

A Teoria dos Números está alicerçada na prática de entender como se caracteriza e, como se comportam os números, contudo, Euler trouxe grandes avanços nesse ramo da matemática com sua pesquisa em números primos, números irracionais, números transcendentos, suas funções e seus resultados que foram mostrados aqui.

A Análise, pode ser dita que é a *Matemática Passada a Limpo*, ou seja, a matemática demonstrativa. Alguns autores referem-se a Euler como sendo *a encarnação da Análise*. Essa frase dispensa comentários acerca da importância de Euler para esse campo de pesquisa.

Esperamos ter contribuído para o desenvolvimento matemático dos estudantes que, futuramente lerão esse trabalho assim como, esperamos ter contribuído para o crescimento da universidade a qual faço parte, universidade esta que me formou, me fez matemático e, me fez pesquisador, em particular, da obra de **Leonhard Euler**.

Encerramos aqui nosso trabalho com a frase de *Laplace* sobre a obra de Euler, a qual faço o meu conselho a todos os estudantes que desejam ser bons matemáticos:

*“Leiam Euler, Leiam Euler, ele é o mestre de todos nós!”*  
*Laplace*

## Apêndices



# Apêndice A

## Demonstração de resultados utilizados no Capítulo 1

### A.1 Fórmula para o cálculo de juros simples e compostos

Quando falamos de matemática financeira entramos na questão de *juros* que é um valor cobrado sobre uma quantia que chamamos de *capital*, valor este que é calculado em forma de *porcentagem* durante determinado tempo. Com isso, vamos desenvolver a forma de se calcular o juro sobre um capital qualquer. Para isso, defini-se primeiramente o conceito e os tipos de juros existentes.

**Juros Simples:** É uma taxa que é aplicada a um determinado capital que é fixo; ou seja, independente do tempo do empréstimo desse capital, o juro será aplicado sobre o capital inicial não se alterando com o tempo.

**Juros Compostos:** É uma taxa que é aplicada a um determinado capital que varia conforme passa o tempo; ou seja, o capital cresce conforme o juro é aplicado sobre ele calculando-se, neste caso, juros sobre juros.

Vamos então, determinar nossas variáveis para chegar a uma forma de calcular tanto juros simples quanto juros compostos.

Seja  $c$  = capital;  $i$  = taxa;  $t$  = tempo;  $j$  = juros;  $m$  = montante. Então, temos para o cálculo de Juros o seguinte

**Juros Simples:**

1º período:  $ci$  ;

2º período:  $ci$  ;

3º período:  $ci$  ;

⋮

n-ésimo período:  $ci$  .

Temos então que, o somatório desses períodos compõe o *tempo* que o juro foi aplicado sobre o capital, obtendo-se:

$$j = ci \cdot t \Rightarrow j = cit \Rightarrow m = c + j \text{ (Fórmula para o cálculo de juros simples).}$$

### **Juros Compostos:**

$$1^\circ \text{ período: } ci + c = c \cdot (1 + i);$$

$$2^\circ \text{ período: } c \cdot (1 + i) \cdot (1 + i);$$

$$3^\circ \text{ período: } c \cdot (1 + i) \cdot (1 + i) \cdot (1 + i);$$

⋮

$$\text{n-ésimo período: } \underbrace{c \cdot (1 + i) \cdot (1 + i) \cdots (1 + i) \cdot (1 + i)}_{n\text{-vezes}};$$

obtendo então a seguinte fórmula:

$$m = c \cdot (1 + i)^t \quad j = m - c. \text{ (Fórmula para o cálculo de juros compostos).}$$

## A.2 Fórmula para o termo geral de uma P.G

**Definição A.1** *Toda sequência de números reais não nulos, na qual é constante o quociente da divisão de cada termo (a partir do segundo) pelo anterior. Este termo constante é chamado de razão da P.G(ver [3]).*

Toda P.G possui termos que são denotados por:  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Esta notação nos permite desenvolver o conceito necessário para obter o *termo geral de uma P.G, somatório de uma P.G finita e somatório de uma P.G infinita*, que iremos propor e demonstrar a seguir.

**Teorema A.1** *O termo geral,  $a_n$ , de uma P.G pode ser expresso em relação ao primeiro termo da seguinte forma:  $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$  ou, em relação a um termo qualquer que seja anterior ao  $a_n$ , da seguinte forma:  $a_n = a_k \cdot r^{n-k}$ .*

**Demonstração:** Temos por definição que:

$$a_2 = a_1 \cdot r;$$

$$a_3 = a_2 \cdot r;$$

$$a_4 = a_3 \cdot r;$$

$\vdots$

$$a_n = a_{n-1} \cdot r.$$

Multiplicando essas  $n$  igualdades tem-se

$$a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_{n-1} \cdot a_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_{n-1} r^{n-1}.$$

Cancelando termo a termo resulta

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}.$$

Percebamos também que a regra vale para qualquer termo da P.G e, não só para o primeiro. Com isso, se queremos o termo geral em relação a um termo qualquer da P.G, um  $a_k$ , por exemplo, onde  $k \in \mathbb{N}$  e  $k > 1$ , tem-se o seguinte resultado:

$$a_n = a_k \cdot r^{n-k}.$$

■

## A.3 Fórmula para o somatório dos $n$ primeiros termos de uma P.G

### A.3.1 Parte 1

**Teorema A.2** *Seja  $a_n$  uma P.G definida para todos os seus termos. Podemos calcular o somatório de todos os  $n$  termos dessa P.G através da seguinte fórmula:*

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - r^n}{1 - r}.$$

**Demonstração:** Primeiramente tem-se que os termos dessa P.G são:

$$a_1; a_2; a_3; \dots; a_n.$$

Assim, temos que a P.G finita tem somatório  $S_n$  igual a:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n. \quad (\text{A.1})$$

Multiplicando toda a P.G pela razão  $r$  tem-se o seguinte:

$$r \cdot S_n = \underbrace{a_1 r}_{a_2} + \underbrace{a_2 r}_{a_3} + \underbrace{a_3 r}_{a_4} + \dots + \underbrace{a_{n-1} r}_{a_n} + a_n r.$$

De forma que tomamos  $rS_n$  da seguinte maneira:

$$rS_n = (a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n + a_n)r. \quad (\text{A.2})$$

Subtraindo (A.2) de (A.1), resulta:

$$S_n - rS_n = (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n) - (a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n + a_n)r.$$

Subtraindo os termos semelhantes ficamos apenas com:

$$S_n - rS_n = a_1 - a_n r.$$

Como  $a_n = a_1 r^{n-1}$  podemos substituí-lo obtendo-se assim:

$$S_n - rS_n = a_1 - a_1 r^{n-1} r \Rightarrow S_n - rS_n = a_1 - a_1 r^n.$$

Se colocarmos  $S_n$  em evidência no primeiro membro e  $a_1$  no segundo membro temos:

$$S_n = a_1 \frac{1 - r^n}{1 - r}.$$

■

### A.3.2 Parte 2

**Teorema A.3** *Seja  $a_n$  uma P.G com infinitos termos, e razão  $r$ . Se  $0 < |r| < 1$  podemos expressar o limite da soma dos infinitos termos dessa P.G da seguinte forma:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - r}.$$

**Demonstração:** Temos que, quando a P.G é finita, a soma dos termos vale:

$$S_n = a_1 \frac{1 - r^n}{1 - r}.$$

Passando o limite nessa expressão ficaremos com a seguinte forma:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_1 \frac{1 - r^n}{1 - r}.$$

Como  $0 < |r| < 1$  concluímos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ , fato este que será demonstrado no (Apêndice A.4) desse trabalho. Então, tem-se que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - r}.$$

■

## A.4 Demonstração de que $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ quando $0 < |r| < 1$

**Teorema A.4**  $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ , quando  $0 < |r| < 1$ .

**Demonstração:** Primeiramente tem-se que, se  $r = 0$  é trivial entender que  $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ . Quando  $0 < |r| < 1$  Temos que mostrar que  $\forall x \geq 0 ; \exists N ; se x \leq N \Rightarrow |r^n - 0| < x$ .

Portanto temos que:

$$|r^n - 0| < x \Rightarrow |r^n| < x.$$

Aplicando  $\ln$  em ambos os lados da desigualdade tem-se:

$$\ln |r^n| < \ln x \Rightarrow \ln |r|^n < \ln x \Rightarrow n \ln |r| < \ln x \Rightarrow n \geq \frac{\ln x}{\ln |r|}.$$

A igualdade foi invertida pelo fato de  $\ln |r|$  ser negativo, uma vez que  $0 < |r| < 1$ .

Portanto, se  $x < 0$  temos que,  $\ln x < 0$  e fazemos  $N = \frac{\ln x}{\ln |r|} > 0$ . Nesta hipótese, se  $x < N$ , então a última desigualdade da lista é verdadeira o que implica que a primeira também é verdadeira, que, na verdade, é o que queremos demonstrar. Com isso tem-se que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0 \text{ quando } 0 < |r| < 1.$$

■

# Apêndice B

## Demonstração de resultados utilizados no Capítulo 2

### B.1 Teorema da diferença de dois quadrados

**Teorema B.1** *Todo número  $x \in \mathbb{C}$  pode ser escrito como diferença de dois quadrados sendo essa diferença entre o quadrado da metade do seu sucessor e o quadrado da metade do seu antecessor.*

Em símbolos:

$$x = \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-1}{2}\right)^2.$$

**Demonstração:** Sendo  $x \in \mathbb{C}$  tem-se genericamente que:  $x = a + bi$ .

Portanto, substituindo no resultado tem-se:

$$x = \left[\frac{(a+bi)+1}{2}\right]^2 - \left[\frac{(a+bi)-1}{2}\right]^2$$

e, resolvendo os produtos notáveis, tem-se:

$$x = \frac{(a+bi)^2 + 2(a+bi) + 1}{4} - \frac{(a+bi)^2 - 2(a+bi) + 1}{4}.$$

Reduzindo à uma única fração, obtemos:

$$x = \frac{(a+bi)^2 + 2(a+bi) + 1 - (a+bi)^2 + 2(a+bi) - 1}{4}$$

e, efetuando as operações devidas, temos:

$$x = \frac{2(a+bi) + 2(a+bi)}{4}.$$

Somando ambos os termos

$$x = \frac{4(a+bi)}{4},$$

ou seja:

$$x = a + bi.$$

■

# Apêndice C

## Demonstração de resultados utilizados no Capítulo 3

### C.1 Condição suficiente para que uma função seja integrável

**Teorema C.1** *Toda função contínua  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é integrável.*

**Demonstração:** Dado  $\epsilon > 0$ , pela continuidade uniforme de  $f$  no intervalo  $[a, b]$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $x, y \in [a, b]$ ,  $|y - x| < \delta$  implicam:

$$|f(y) - f(x)| < \frac{\epsilon}{(b - a)}.$$

Seja  $P$ , uma partição de  $[a, b]$  cujos intervalos têm todos comprimento  $\leq \delta$ .

Em todo intervalo  $[t_{n-1}, t_n]$  de  $P$  existem  $x_i, y_i$ , tais que  $m_i = f(x_i)$  e  $M_i = f(y_i)$ , donde:

$$\omega_i = f(y_i) - f(x_i) < \frac{\epsilon}{(b - a)}.$$

Consequentemente,

$$\sum \omega_i(t_i - t_{i-1}) < \epsilon.$$

Logo,  $f$  é integrável. ■



## C.2 Princípio dos intervalos encaixados

**Teorema C.2** *Seja  $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots \supset I_n \supset \dots$  uma sequência decrescente de intervalos limitados e fechados  $I_n = [a_n, b_n]$ . A intersecção*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$$

*não é vazia. Isto é, existe pelo menos um número real  $x$  tal que  $x \in I_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Mais precisamente, temos  $\bigcap I_n = [a, b]$ , onde  $a = \sup a_n$  e  $b = \inf b_n$ .*

**Demonstração:** Para  $n \in \mathbb{N}$ , temos  $I_{n+1} \subset I_n$ , o que significa que:

$$a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n.$$

Podemos então escrever:

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq b_n \leq \dots \leq b_2 \leq b_1.$$

Chamemos de A o conjunto dos  $a_n$

Chamemos de B o conjunto dos  $b_n$ .

A é limitado, isto é, possui cotas inferior e superior. Por motivo semelhante, B é também limitado. Sejam  $a = \sup A$  e  $b = \inf B$ . Como cada  $b$  é cota superior de A, temos  $a \leq b$  para cada  $n$ . Assim,  $a$  é cota inferior de B e, portanto,  $a \leq b$ . Podemos então escrever:

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq a \leq b \leq b_n \leq \dots \leq b_2 \leq b_1.$$

Concluimos que  $a$  e  $b$  pertencem a todos os  $I_n$ , donde  $[a, b] \subset I_n$  para cada  $n$ . Logo,

$$[a, b] \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$$

■

### C.3 Intervalo degenerado apresentado no Teorema 3.3 .

**Teorema C.3** *Seja  $(I_n)$  uma seqüência decrescente de intervalos limitados e fechados, com*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset.$$

*Mais precisamente,*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = [a, b],$$

*onde*

$$a = \sup a_n \text{ e } b = \inf b_n.$$

*Sendo*

$$[a, b] = \left[ \frac{A_n}{n!}, \frac{A_n + 1}{n!} \right],$$

*o intervalo  $[a, b]$  é degenerado e possui um único ponto, o número  $e$ .*

**Demonstração:** Como  $a_n = \frac{A_n}{n!}$  e  $b_n = \frac{A_n + 1}{n!}$  temos:

$$a_n < e < b_n, \forall n \in \mathbb{N},$$

então  $e$  é uma cota superior para a seqüência  $(a_n)$  e, é uma cota inferior para a seqüência  $(b_n)$ . O que resulta em:

$$\sup a_n = a \leq e \leq b = \inf b_n.$$

Notemos que  $(a_n)$  e  $(b_n)$  são seqüências monótonas e limitadas, logo, são convergentes. Além disso:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup a_n = a$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \inf b_n = b.$$

Sendo assim, tem-se que:

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = e$$

e

$$b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{A_n}{n!} + \frac{1}{n!} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{A_n}{n!} = e.$$

Portanto,

$$a = b = e$$

e daí,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = e.$$

■

# Referências Bibliográficas

- [1] BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática. 3 ed.** Merzbach, Uta C. / EDGARD BLUCHER, 2012.
- [2] CLARK, Marcondes Rodrigues. **Cálculo de funções de uma variável real.** Teresina: EDUFPI, 2012.
- [3] DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: Contexto e aplicações.** São Paulo: Ática, 2010.
- [4] Edgard de Alencar Filho, Editora Nobel, 1988.
- [5] EVES, Howard. **Introdução à história da matemática** ; tradução: Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004.
- [6] LEITHOLD, Louis. **O Cálculo com Geometria Analítica vol. 1. 3 ed.** São Paulo: HARBRA Ltda. 1994.
- [7] LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise; v.1 14.ed.** – Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2013.
- [8] MAOR, Eli. **e: A história de um número.** São Paulo: Record, 1994.
- [9] MARTINEZ, Fabio Brochero; El al. **Teoria dos números: Um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo dos inteiros.** Rio de Janeiro: IMPA, 2013.
- [10] RIBENBOIM, Paulo. **Números Primos. Velhos mistérios e novos recordes. 1ed.** Rio de Janeiro: IMPA, 2012.
- [11] SANTOS, José Plínio de Oliveira. **Introdução à Teoria dos Números. 3 ed.** Rio de Janeiro: IMPA, 2012.
- [12] SINGH, Simon. **O Último Teorema de Fermat: a história do enigma que confundiu as maiores mentes do mundo durante 358 anos** / tradução de Jorge Luiz Calife. 13<sup>a</sup> ed. Rio de Janeiro: Record, 2008.

[13] SWOKOWSKI, Earl William. **CÁLCULO Com Geometria Analítica Vol 2**. Tradução de Alfredo Alves de com a colaboração dos professores Vera Reguna L. F. Flores e Márcio Quintão Moreno ; revisão técnica Antonio Pertence Júnior. 2 ed. São Paulo: Markron Books, 1994.