



UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

O Teorema do Valor Intermediário e Aplicações

José Jailson Xavier de Sousa

Campina Grande - PB

Novembro de 2013

José Jailson Xavier de Sousa

O Teorema do Valor Intermediário e Aplicações

Trabalho Acadêmico Orientado apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática do Departamento de Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba em cumprimento às exigências legais para obtenção do título de licenciado em Matemática.

Orientador: Dr. Aldo Trajano Lourêdo

É expressamente proibida a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano da dissertação.

S725t Sousa, José Jailson Xavier de.
O teorema do valor intermediário e aplicações [manuscrito] /
José Jailson Xavier de Sousa. - 2013.
43 p. : il. color.
Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática)
- Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e
Tecnologia, 2013.
"Orientação: Prof. Dr. Aldo Trajano Lourédo, Departamento
de Matemática".

1. Teorema do valor intermediário. 2. Espaços métricos. 3.
Funções. 4. Polinômios. I. Título.

21. ed. CDD 515.5

JOSÉ JAILSON XAVIER DE SOUSA

O TEOREMA DO VALOR INTERMEDIÁRIO E APLICAÇÕES


Trabalho Acadêmico Orientado,
apresentado a Universidade Estadual da
Paraíba, como parte das exigências para
a obtenção do título de licenciado em
Matemática.

Local, 11 de Novembro de 2013.

BANCA EXAMINADORA



Prof. (Aldo Trajano Lourêdo)
Dpto. Matemática – CCT/UEPB
ORIENTADOR



Prof. (Luciana Roze de Freitas)
Dpto. Matemática – CCT/UEPB
EXAMINADOR



Prof. (Manuel Antolino Milla Miranda)
Dpto. Matemática – CCT/UEPB
EXAMINADOR

Dedicatória

Dedico este trabalho a toda minha família que em momento algum deixaram de me apoiar e de me incentivar para que chegasse até aqui.

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus por ter me dado forças durante todo esse tempo, pois é com as suas graças que estou hoje concluindo o curso de Licenciatura Plena em Matemática.

Agradeço a toda minha família, em especial aos meus irmãos (José Helenilson Xavier de Sousa, Janiele Xavier de Sousa e Joice Xavier de Sousa), a minha mãe (Juvinete de Sousa Xavier) e meu pai (Wilson Xavier de Sousa), pelo apoio e pelos incentivos que foram essenciais durante esse trajeto.

Também faço meus agradecimentos a todos os professores desde aqueles que me acompanharam nos primeiros dias na escola até os que estiveram comigo no decorrer da minha graduação, então a todos vocês eu só tenho palavras de agradecimentos, muito obrigado a cada um por tudo que me ensinaram e que me fez sentir-se corajoso para continuar e graças a Deus vencer esta etapa muito importante da minha vida.

Agradeço também especialmente ao meu orientador, o professor Aldo Trajano Lourêdo por todo auxílio durante a construção desse trabalho e aproveito aqui também para mencionar o nome de Reginaldo Basílio, um grande professor e amigo que tive a oportunidade de conhecer quando ainda estudava o ensino médio e que graças a ele eu acabei vindo cursar Matemática na Universidade Estadual da Paraíba.

E não poderia deixar de agradecer a Residência Universitária da UEPB, pelos quatro anos que passei aqui, pois foi através desse programa de assistência estudantil da Universidade Estadual da Paraíba que permaneci aqui em Capina Grande-PB para prosseguir nos estudos e chegar nesse momento tão especial que é o término do curso.

Epígrafe

“Quando o homem baixa a cabeça e diz perdi as esperanças, Deus também baixa a cabeça e diz perdi um homem.”

(Autor Desconhecido)

Resumo

Começamos este trabalho com um pouco da história e das contribuições do matemático Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano, entre suas obras a que mais ganhou destaque foi a prova puramente analítica do teorema que afirma que entre dois valores de sinais opostos existe pelo menos uma raiz real (**Teorema do Valor Intermediário**) e é justamente esse teorema que vamos utilizar fortemente com o objetivo de mostrar que todo polinômio de grau ímpar possui pelo menos uma raiz real. Para isto vamos falar um pouco sobre a topologia dos espaços métricos, com o intuito de definir conjuntos abertos e fechados tendo em vista que iremos precisar desses conceitos para mais adiante fazer um estudo dos conjuntos conexos e assim provar o teorema que fundamenta todo o nosso trabalho. Logo em seguida vamos observar detalhadamente as funções contínuas e ainda dentro desse estudo vamos tecer um breve comentário a respeito dos polinômios, apresentando a definição, o valor numérico e as raízes de um polinômio, que são partes essenciais do nosso trabalho. E por fim vamos ao estudo dos conjuntos conexos, com os conceitos mais importantes, as definições, algumas proposições sobre conexos e aqui está presente o **Teorema do Valor Intermediário**, onde concentra-se toda a desenvoltura do trabalho.

Palavras chave: Bolzano, Teorema do Valor Intermediário, Conjuntos Conexos

Abstract

We started this work with a little bit of history and the contributions of mathematician Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano, between their works that has won more emphasis was to purely analytical proof of the theorem which says that between two values of opposite signals there is at least one real root Theorem of Intermediary Value, and it is precisely this theorem shows that we are going to use strongly with the objective to show that every polynomial of odd degree has at least one real root. For this we are going to talk a little bit about the topology of metric spaces, with the aim of defining sets opened and closed in view that we need these concepts to later make a study of related sets and thus prove the theorem that is based around our work. Then let's take a closer look at the functions continuous and still within this study we make a brief comment about the polynomials, presenting the definition, the numeric value and the roots of a polynomial, which are essential parts of our work. And finally we are going to study the related sets, with the most important concepts, definitions, some propositions about related and here is this the Theorem of Intermediary Value, where it focuses all the aplomb of work.

Key words: Bolzano, Theorem of Intermediary Value, Related Sets.

Lista de Figuras

1	Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano	1
2.1	Funções Contínuas	18
3.1	Teorema do Valor Intermediário	30
3.2	Teorema do Valor Intermediário	31

Sumário

Introdução	1
0.1 Introdução	1
0.2 Uma prova analítica	2
1 A Topologia dos Espaços Métricos	6
1.1 Introdução	6
1.2 Espaços Métricos	7
1.3 Bolas Abertas	8
1.4 Propriedades Básicas das Bolas Abertas	8
2 Continuidade	17
2.1 Introdução	17
2.2 Funções Contínuas	17
2.3 Polinômios	24
2.3.1 Valor numérico de um polinômio	24
2.3.2 Raiz de um polinômio	25
3 Conjuntos Conexos	26
3.1 Introdução	26
3.2 Conexos em \mathbb{R}	28
3.3 Teorema do Valor Intermediário	30

Referências Bibliográficas

0.1 Introdução



Figura 1: Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano

Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano nasceu em 5 de outubro de 1781 em Praga, na Bohemia (que atualmente é parte da República Tcheca), durante o Império Austríaco. Faleceu em 1848. Foi filho de família muito católica, o que influenciou profundamente sua obra, suas concepções filosóficas e seu rígido código moral, e o inclinariam a tornar-se padre em 1804. Estudou em escolas privadas e no Liceu dos Piaristas de Praga. Após terminar seus estudos Bolzano tornou-se padre, e inicialmente pretendia estudar mais a fundo a matemática e a filosofia de Kant, autor cuja obra estava, na época, banida da Áustria.

Em 1804, Bolzano obteve o título de professor de ciências da religião católica na Universidade de Praga. O seu discurso inaugural em 1805 intitulava-se sobre a necessidade de uma fé que avance sobre bases racionais. Três meses depois, sob a acusação de kantiano, Bolzano foi informado de que perderia seu emprego após o término do ano letivo, mas se justificou sem maiores dificuldades e se tornou efetivo em 1806.

Deu importantes contribuições para a matemática, revolucionando a concepção de infinito e infinitesimal com base em estudo rigoroso desses assuntos em *Paradoxos do Infinito* (1847), que lançou as bases para a construção da teoria dos conjuntos por Cantor. Sua mais célebre obra matemática, no entanto foi a prova puramente analítica do teorema que afirma que entre dois valores de sinais opostos existe pelo menos uma raiz real (**Teorema do Valor Intermediário**),

que pode ser considerado um marco da aritmetização da análise; Bolzano foi chamado por Félix Klein, de o pai da aritmetização da análise. Os mais importantes resultados dessa obra estão contidos na maioria dos livros elementares de análise matemática, particularmente os teoremas que ficaram conhecidos como Critério de Convergência de Cauchy e o **Teorema do Valor Intermediário**.

Bolzano foi uma das poucas pessoas que, no início do século XIX, era competente e dominava os conteúdos da matemática e da filosofia. Por isso, era apto a ver algo que escapou a muitos de seus contemporâneos: que as tentativas de fundamentação da análise matemática formulados por Pascal e por Leibniz (essa última predominante até o século XIX) não mais correspondiam às necessidades colocadas pelo conjunto das construções matemáticas realizadas nesse período, nomeadamente o Cálculo Moderno, que envolvia conceitos relacionados ao infinito, tais como o conceito de infinitesimal, derivadas, integrais, limites e expansão em séries.

0.2 Uma prova analítica

A seguir apresentaremos uma prova do artigo puramente analítica do teorema que afirma que entre dois valores de sinais opostos existe pelo Menos Uma Raiz Real da Equação.

Bolzano escreveu, em 1817, o artigo prova puramente analítica do teorema do valor intermediário o método utilizado por Bolzano, o de fazer uma demonstração que não utilizasse elementos do espaço e do tempo, mas que ao mesmo tempo confirmasse a idéia intuitiva da validade do teorema, foi fundamental para a aritmetização da análise.

O início do artigo é um pequeno tratado de séries, com a análise das propriedades da expressão que Bolzano interpreta como função de seus termos r e x .

Ele define $F_r(x) = A + Bx + Cx^2 + \dots + Rx^r$ o que atualmente é escrito como $F_n(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + \dots + a_nx^{n-1}$.

Estudando a natureza da variação $F_{n+r}(x) - F_n(x) = a_{n+1}x^n + a_{n+2}x^{n+1} + a_{n+3}x^{n+2} + \dots + a_{n+r}x^{n+r-1}$, em função de n , Bolzano classifica as séries da seguinte forma: Constante, exemplo: Progressão Geométrica. Variável: Monótona e Não Monótona que são Crescente, exemplo:

Progressão Geométrica de razão $|r| > 1$ e Decrescente, exemplo: Progressão Geométrica de razão $|r| < 1$

Logo em seguida ele enuncia um lema que diz que se os valores das somas dos primeiros $n, n + 1, \dots, n + r$ termos de uma série forem denotados por $F_n x, F_{n+1} x, F_{n+2} x, \dots, F_{n+r} x$, então passamos a observar as quantidades $F_1 x, F_2 x, \dots, F_n x, \dots, F_{n+r} x, \dots$ como uma nova série. Aqui nós assumimos a propriedade especial de que a diferença entre o n -ésimo termo $F_n x$ e qualquer termo $F_{n+r} x$ (não importa quão longe de $F_n x$ esteja) se torna menor que qualquer quantidade dada se n for escolhido grande o suficiente, em virtude de a diferença entre esses dois termos poder se tornar, por hipótese, tão pequena quanto se queira, se continuarmos longe o suficiente (como se diria nos livros didáticos de hoje: se n for tomado suficientemente grande).

Mais adiante afirma que se uma sequência obedece ao critério enunciado acima (lema), então ela converge, completando exatamente o que atualmente chamamos de critério de convergência de Cauchy: se uma sequência é de Cauchy, então ela converge.

Agora, Bolzano enuncia e demonstra o teorema:

Teorema 0.1. *Se uma propriedade M não vale para todos os valores de uma variável x , mas sim vale para todos os valores que são menores do que um certo u , então há sempre uma quantidade U que é a maior daquelas para as quais pode ser afirmado que todos os x menores que ela têm a propriedade M .*

Esse teorema (que Sebestik 1992 chama de Bolzano-Gauss) equivale a afirmação da existência de um limite superior de todo conjunto não vazio e limitado superiormente de números reais, e é um dos principais conceitos analíticos que Bolzano elaborou. Para demonstrá-lo, ele constroi uma sequência que, ou tem um de seus termos coincidente com U (e, portanto, não é necessário gerar mais termos, podendo parar por aí), ou então será uma sequência de Cauchy que tenderá para U . A sequência de Cauchy é criada por meio da aproximação do número procurado por uma série de intervalos obtidos por bipartições sucessivas e cujo comprimento tem limite zero.

Na sequência, ele enuncia o teorema que utilizará para demonstrar o teorema do valor intermediário para polinômios, afirmando que:

Teorema 0.2. *Se duas funções de x , $f(x)$ e $\phi(x)$, variam de acordo com a lei da continuidade, seja para todos os valores de x ou somente para aqueles que estão entre α e β , e se $f(\alpha) < \phi(\alpha)$ e $f(\beta) > \phi(\beta)$, então existe sempre um certo valor de x entre α e β para o qual $f(x) = \phi(x)$*

Para demonstrar essa afirmação acima, Bolzano utilizou o critério de convergência de Cauchy e o teorema do limite superior já enunciado acima (Teorema de Bolzano-Gauss). Esta parte é muito importante, pois nela se articulam o conceito de limite superior com o conceito de continuidade.

Bolzano define uma propriedade M da seguinte forma: para todos os valores de ω que forem menores que um certo valor determinado, pode-se afirmar que as duas funções $f(\alpha + \omega)$ e $\phi(\alpha + \omega)$ se encontram na relação de quantidade menor para maior. Chamemos esta propriedade da variável ω de M.

Ou seja: $f(\alpha + \omega) < \phi(\alpha + \omega)$, nas condições expostas. Usando então o resultado do teorema de Bolzano-Gauss e chamando de ι uma quantidade que satisfaz $\beta = \alpha + \iota$, Bolzano conclui que podemos dizer que todos os valores de ω que são menores do que um certo valor determinado, possuem a propriedade M. No entanto, Bolzano afirma que é claro que essa propriedade M não vale para todos os valores de ω , pois, por exemplo, para $\omega = \iota$, por hipótese, $f(\alpha + \omega) < \phi(\alpha + \omega)$. Consequentemente, o teorema de Bolzano-Gauss, nos fornece um certo U que é o maior dentre os valores para os quais pode ser afirmado que todo $\omega < U$ tem a propriedade M. Em outras palavras, U é o maior dos valores que satisfazem a propriedade de que, $\forall \omega < U, f(\alpha + \omega) < \phi(\alpha + \omega)$.

A continuidade de f e ϕ entra na demonstração de que U está entre α e β . Mostraremos o raciocínio de Bolzano apenas para quando os dois valores são positivos, para mostrar como ocorre a junção da noção de continuidade com a de limite superior. Bolzano, entretanto, divide em vários casos e demonstra que U está entre α e β para cada um deles, recorrendo sempre à demonstração que será mostrada aqui. Resumindo, ele conclui que $f(\alpha + U) = \phi(\alpha + U)$ com o seguinte raciocínio:

- $f(\alpha + U)$ não pode ser maior do que $\phi(\alpha + U)$, pois pela continuidade de f e ϕ , haveria ω tal que $f(\alpha + U - \omega) > \phi(\alpha + U - \omega)$, o que contraria a hipótese de que $f(\alpha + \omega) < \phi(\alpha + \omega)$ (propriedade M) vale para todo x menor do que $\alpha + U$;

• $f(\alpha + U)$ tampouco poderá ser menor do que $\phi(\alpha + U)$, pois pela continuidade de f e ϕ , haveria ω tal que: $f(\alpha + U + \omega) < \phi(\alpha + U + \omega)$, e portanto $\alpha + U$ não poderia ser o maior valor para o qual $\forall \omega < U, f(\alpha + \omega) < \phi(\alpha + \omega)$

Então, só pode ocorrer $f(\alpha + U) = \phi(\alpha + U)$.

Após afirmar que sua demonstração não foi da unicidade da raiz, Bolzano demonstra a continuidade da função polinomial $a + bx^m + cx^n + \dots + px^r$ e, por fim, afirma que se uma função na forma $x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \dots + px + q$, na qual n é um número inteiro positivo, é positiva para $x = \alpha$ e negativa para $x = \beta$, então a equação $x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \dots + px + q = 0$ tem pelo menos uma raiz real entre α e β , usando o fato de que o polinômio $x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \dots + px + q$ pode ser dividido em dois polinômios que chamaremos de P e Q (notação nossa), no qual $P(x) - Q(x) = x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \dots + px + q$. Das hipóteses, podemos escrever $P(\alpha) > Q(\alpha)$ e $P(\beta) < Q(\beta)$. Portanto, pode-se concluir que $P(x) = Q(x)$.

Capítulo 1

A Topologia dos Espaços Métricos

1.1 Introdução

Tanto no cálculo como na geometria, para citar dois exemplos de maneira elementar ou intuitiva, é fundamental o papel que desempenha a noção de distância entre dois pontos ou conceitos derivados dessa noção, como ponto de vizinhança, por exemplo. citemos, entre outras, as definições de ponto de acumulação, limite, função contínua e comprimento de arco que, direta ou indiretamente, dependem da noção de distância (ou da noção de vizinhança). Assim parece lógico, quando se busca uma generalização do cálculo, da análise ou da geometria, visando a resolver problemas mais amplos, buscar antes uma generalização do conceito de distância que independa das particularidades dos diversos tipos de espaço em que intervêm tal noção.

Foi cantor, por volta de 1870, quem deu os primeiros passos significativos nesse sentido. Estudando por essa época a representação de funções reais por meio de séries trigonométricas, cantor procurou entender a unicidade da representação a funções dotadas de infinitos pontos singulares. Assim chegou a noção de conjunto derivado na qual está subjacente a ideia de ponto de acumulação. tais pesquisas, inclusive, ensejaram-lhe, posteriormente, a criação da aritmética transfinita e da teoria dos conjuntos com o que se consagrou, apesar das incompreensões iniciais, como um dos grandes da matemática em todos os tempos. pouco depois, na década de 1880, alguns matemáticos italianos (Ascoli e Pincherle por exemplo) fizeram uso das ideias de cantor para o estudo de espaços não convencionais, espaços em que um ponto poderia ser uma curva ou uma função.

O passo seguinte, e decisivo, foi dado por Frechet em 1906 com sua tese de doutoramento. Nesse trabalho, que marca o inicio do cálculo funcional, Frechet formulou uma generalização dos conceitos de limite, derivada e continuidade para espaços de funções e, vislumbrando economia de trabalho e o grau de generalização que poderiam advir de um estudo conjunto dos mais diversos espaços, sugeriu uma definição geral e abstrata do conceito de distância e pesquisou várias maneiras de conseguir tal objetivo, sendo este o ponto de partida da teoria dos espaços métricos. Esse assunto foi posteriormente desenvolvido por Hausdorff (1914) e ganhou sua contextura praticamente atual com Urysonhn em 1924.

1.2 Espaços Métricos

Definição 1.1. *Dado um conjunto $M \neq \emptyset$ seja $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}^+$ e indiquemos por $d(x, y)$ a imagem de um par genérico $(x, y) \in M \times M$, através da função d . dizemos que d é uma métrica sobre M se as condições se verificam para quaisquer $x, y, z \in M$:*

$$(M_1) \quad d(x, y) = 0 \iff x = y$$

$$(M_2) \quad d(x, y) = d(y, x)$$

$$(M_3) \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

Nessas condições cada imagem $d(x, y)$ recebe o nome de distância de x a y e um par (M, d) , onde d é uma métrica sobre M , é o que chamaremos de espaço métrico. Em geral ao nos referirmos a um espaço métrico cujo conjunto é M , diremos apenas espaço métrico M o que pressupõe que a métrica correspondente esteja já subentendida. Cada elemento de um espaço métrico será sempre referido como ponto desse espaço, seja ele um ponto mesmo, ou um número, ou ainda uma função ou um vetor, situações essas que se verificam comumente.

Nota: A propriedade (M_3) é conhecida como desigualdade triangular e se inspira no fato de que na geometria elementar cada lado de um triângulo tem medida menor que a soma das medidas dos outros dois lados.

O presente capítulo objetiva, entre outras coisas, por em relevo uma importante estrutura matemática subjacentes aos espaços métricos, estrutura essa que repousa nas propriedades básicas dos chamados conjuntos abertos do espaço, cuja definição daremos logo a seguir. A

Proposição 1.1 deste capítulo coloca em destaque essas propriedades básicas. De um modo geral uma coleção ζ de subconjuntos de um conjunto $E \neq \emptyset$ é uma **topologia** sobre E se:

- (i) $\emptyset, E \in \zeta$;
- (ii) $x, y \in \zeta \Rightarrow x \cap y \in \zeta$;
- (iii) se (x_i) é uma família de membros de ζ , então $\cup x_i \in \zeta$.

O par (E, ζ) é chamado **espaço topológico**.

Definição 1.2. *Seja (M, d) um espaço métrico. Um subconjunto $A \subset M$ se diz aberto se, para todo $p \in A$, existe um número real $\varepsilon > 0$ tal que $B(p, \varepsilon) \subset A$.*

Nota: É imediato, a partir da definição, que se $A \neq \emptyset$ é um conjunto aberto, então A é uma união de bolas abertas. E, ademais, se A é uma união de bolas abertas, A é um conjunto aberto. De fato, suponhamos $A = \cup B_i$, onde cada B_i é uma bola aberta. Dado então $p \in A$, existe um índice s tal que $p \in B_s$. Ora, de acordo com a propriedade (p_2) das bolas abertas, existe $\delta > 0$ tal que $B(p, \delta) \subset B_s$. Daí $B(p, \delta) \subset A$ e isto prova nossa afirmação.

1.3 Bolas Abertas

O conceito de bola aberta a ser intrduzido a seguir desempenha um papel fundamental na teoria dos espaços métricos. Apenas para uma tomada de posição inicial do leitor adiantamos que esse papel é o mesmo dos intervalos do tipo $]p - \varepsilon, p + \varepsilon[$ no estudo da análise da reta. Em suma, elas tem uma atuação equivalente à dos ε e dos δ do cálculo ou da análise real.

Definição 1.3. *Seja p um ponto de um espaço métrico (M, d) . Sendo $\varepsilon > 0$ um número real, a bola de centro p e raio ε , que indicaremos por $B(p, \varepsilon)$, é o seguinte subconjunto de M :*

$$B(p, \varepsilon) = \{x \in M / d(x, p) < \varepsilon\}$$

1.4 Propriedades Básicas das Bolas Abertas

(p_1) Dadas $B(p, \varepsilon)$ e $B(p, \delta)$, se $\varepsilon \leq \delta$, então $B(p, \varepsilon) \subset B(p, \delta)$.

Prova: Se $x \in B(p, \varepsilon)$, então $d(x, p) < \varepsilon$. Como $\varepsilon \leq \delta$, concluímos que $d(x, p) < \delta$ e portanto que $x \in B(p, \delta)$. ■

(p_2) Dado $q \in B(p, \varepsilon)$, então existe $\delta > 0$ de maneira que:

$$B(q, \delta) \subset B(p, \varepsilon)$$

Prova: Tomemos $\delta = \varepsilon - d(p, q)$, conforme indica a intuição, e mostremos que efetivamente $B(q, \delta) \subset B(p, \varepsilon)$. Seja $x \in B(q, \delta)$.

A desigualdade triangular nos garante que:

$$d(x, p) \leq d(x, q) + d(q, p), \text{ Como } d(x, q) < \delta = \varepsilon - d(p, q), \text{ então}$$

$$d(x, p) < \varepsilon - d(p, q) + d(p, q) = \varepsilon$$

O que garante que $x \in B(p, \varepsilon)$. ■

Exemplo 1.1. Consideremos sobre \mathbb{R} a métrica usual. Então $A =]a, +\infty[$ é aberto, para todo $a \in \mathbb{R}$, uma vez que dado $p \in A$, tomando $\varepsilon = \frac{p-a}{2}$, então $]p - \varepsilon, p + \varepsilon[\subset A$.

De maneira análoga se prova que são abertos neste espaço todos os intervalos do tipo $]a, b[$. De fato, se $p \in]a, b[$ tomando $\varepsilon < \min\{p - a, p + a\}$ ($\varepsilon > 0$), então $]p - \varepsilon, p + \varepsilon[\subset]a, b[$.

Nesse mesmo espaço os conjuntos $[a, b[$ e $[a, +\infty[$, para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, não são abertos porque nenhuma bola aberta de centro a está contida nesses conjuntos. Também não são abertos \mathbb{Q} e $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$; pois nenhum intervalo é formado só de números racionais ou só de números irracionais.

Exemplo 1.2. Toda bola aberta $B(p, \varepsilon)$ num espaço M é um conjunto aberto. Isto é garantido pela propriedade (p_2) das bolas abertas a qual nos diz que, para todo $q \in B(p, \varepsilon)$, existe $\delta > 0$ de maneira que $B(q, \delta) \subset B(p, \varepsilon)$

Exemplo 1.3. Se d é a métrica zero-um sobre um conjunto M , então o subconjunto $A \subset M$ é aberto. De fato, se $A = \emptyset$ é imediato. Se $A \neq \emptyset$, então $A = \cup\{p\}$ e como cada $\{p\}$ é uma bola aberta, então A é aberto e $p \in A$

O espaço \mathbb{R}^n é formado por todas as n-uplas (sequências finitas) (x_1, x_2, \dots, x_n) , onde cada $x_i \in \mathbb{R}$. Existem três métricas importantes sobre o \mathbb{R}^n , e que, de uma certa forma são equivalentes.

Sendo $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ pontos arbitrários do \mathbb{R}^n , são essas métricas definidas do seguinte modo:

- $D(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$
- $D_1(x, y) = |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n|$
- $D_2(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\}$

A métrica D é chamada euclidiana e naturalmente se inspira na fórmula da distância entre dois pontos no espaço usual. As métricas D_1 e D_2 , apesar de não parecerem tão naturais, pelo menos num primeiro exame, do ponto de vista prático são visivelmente vantajosas.

Exemplo 1.4. No espaço \mathbb{R}^n o conjunto $A = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_1 > 0, \dots, x_n > 0\}$ é aberto em relação a qualquer das métricas usuais D, D_1 ou D_2 de \mathbb{R}^n . Faremos a demonstração usando a métrica $d = D_2$ (do máximo): a conclusão para as outras métricas é uma decorrência da Proposição 1.2 deste capítulo. Seja $p = (p_1, \dots, p_n)$ um ponto de A e tomemos $\varepsilon \in \mathbb{R}$ de maneira que:

$$0 < \varepsilon < \min\{p_i\}.$$

Mostremos que $B(p, \varepsilon) \subset A$. Se $x = (x_1, \dots, x_n) \in B(p, \varepsilon)$, então $d(x, p) = \max\{|x_1 - p_1|, \dots, |x_n - p_n|\} < \varepsilon$ e daí $|x_i - p_i| < \varepsilon$, ou seja, $p_i - \varepsilon < x_i < p_i + \varepsilon$ ($1 \leq i \leq n$). Mas como cada $p_i - \varepsilon > 0$, então cada $x_i > 0$ e portanto $x \in A$.

Exemplo 1.5. Seja M um espaço métrico e seja N um subespaço de M . Um subconjunto $A \subset N$ é aberto (em relação a N) se, e somente se, $A = G \cap N$, onde G é um subconjunto aberto de M .

Solução: (\Leftarrow) Dado $p \in G \cap N$, então $p \in G$ e daí existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(p, \varepsilon) \subset G$; donde $B(p, \varepsilon) \cap N \subset G \cap N$; mas $B(p, \varepsilon) \cap N$ é uma bola aberta em N e portanto $G \cap N$ é um subconjunto aberto do subespaço N .

(\Rightarrow) Se A é aberto (em N), então $A = \cup(B_i \cap N)$, onde cada B_i é uma bola aberta em M ; daí $A = (\cup B_i) \cap N = G \cap N$, sendo $G = \cup B_i$ um subconjunto aberto do espaço M .

Proposição 1.1. Seja θ a coleção dos abertos de um espaço métrico (M, d) . Então:

$$(i) \emptyset, M \in \theta$$

$$(ii) A, B \in \theta \Rightarrow A \cap B \in \theta$$

(iii) Se (A_i) é uma família de conjuntos abertos de M , ou seja, se cada $A_i \in \theta$, então $\cup A_i \in \theta$.

Prova: (i) É claro que \emptyset é aberto, pelo fato de não conter pontos e, portanto, de não poder contrariar a definição dada. Quanto a M , toda bola de centro num ponto $p \in M$, por definição.

(ii) Seja $p \in A \cap B$. Então existem $\varepsilon > 0$ e $\lambda > 0$ tais que $B(p, \varepsilon) \subset A$ e $B(p, \lambda) \subset B$. Supondo $\varepsilon \leq \lambda$ a propriedade (P_1) das bolas abertas nos garante que

$$B(p, \varepsilon) \subset B(p, \lambda)$$

Donde $B(p, \varepsilon) \subset A \cap B$.

(iii) Seja $p \in \cup A_i$. Então existe um índice t tal que $p \in A_t$ e, como A_t é aberto, para um certo $\varepsilon > 0$ vale a relação $B(p, \varepsilon) \subset A_t$. Então $B(p, \varepsilon) \subset \cup A_i$. ■

Notas:

1. Levando em conta a introdução deste capítulo podemos dizer que θ é uma topologia sobre M e que (M, θ) é um espaço topológico.

2. É claro que por indução, pode-se provar que dados $A_1, \dots, A_n \in \theta$ ($n \geq 1$), então $A_1 \cap \dots \cap A_n \in \theta$.

3. A interseção de uma família infinita de conjuntos abertos pode, porém, não ser um conjunto aberto. De fato, na família (A_i) , onde $A_i =]-\frac{1}{i}, \frac{1}{i}[$, $i = 1, 2, 3, \dots$, cada A_i é aberto em \mathbb{R} (métrica usual); no entanto

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{0\}$$

não é aberto porque, obviamente, não existe nenhum intervalo em \mathbb{R} formado apenas pelo ponto 0. De maneira geral, num espaço métrico (M, d) qualquer, dado $p \in M$, se fizermos $B_n = B(p, \frac{1}{n})$ ($n = 1, 2, \dots$), então $\bigcap B_n = \{p\}$. Assim, toda vez que p não é um ponto isolado do espaço, a família (B_n) acima definida é mais um exemplo de que nem sempre uma interseção de conjuntos abertos é um conjunto aberto.

Proposição 1.2. *Sejam d e d' métricas equivalentes sobre M . Se θ é a coleção dos conjuntos abertos de (M, d) e θ' é a coleção dos conjuntos abertos de (M, d') , então $\theta = \theta'$*

Prova: Seja $A \in \theta$ e tomemos $p \in A$. Como $A \in \theta$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_d(p, \varepsilon) \subset A$. Da equivalência de d e d' decorre que existe $\lambda > 0$ de maneira que $B_{d'}(p, \lambda) \subset B_d(p, \varepsilon) \subset A$ o que mostra que $A \in \theta'$. Assim provamos que $\theta \subset \theta'$. Como obviamente, de maneira análoga se mostra que $\theta' \subset \theta$, então a demonstração está concluída.



Nota: A proposição acima significa que métricas equivalentes determinam a mesma estrutura topológica.

Exemplo 1.6. *Sejam M e N espaços métricos e sobre $M \times N$ consideremos a métrica D_2 . Assim*

$$D_2(p, q) = \max\{d(x_1, y_1), d(x_2, y_2)\}$$

para quaisquer $p = (x_1, x_2)$ e $q = (y_1, y_2)$ de $M \times N$. Mostremos que se $G \subset M$ e $H \subset N$ são suconjuntos abertos, então $G \times H$ é aberto em $M \times N$. Se $p = (a, b) \in G \times H$, então $a \in G$ e $b \in H$ e, portanto, existem $\varepsilon, \lambda > 0$ de maneira que $B(a, \varepsilon) \subset G$ e $B(b, \lambda) \subset H$. Tomando $\delta = \min\{\varepsilon, \lambda\}$, então $B(a, \delta) \subset G$ e $B(b, \delta) \subset H$ e daí

$$B(a, \delta) \times B(b, \delta) \subset G \times H$$

Mas $B_{D_2}(p, \delta) = B(a, \delta) \times B(b, \delta)$ e portanto

$$B_{D_2}(p, \delta) \subset G \times H$$

O que mostra que $G \times H$ é aberto segundo a métrica D_2 . Consequentemente também o será segundo as métricas D e D_1 .

Definição 1.4. *Seja (M, d) um espaço métrico. Se $A \subset M$, um ponto $p \in A$ é chamado ponto interior ao conjunto A se existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(p, \varepsilon) \subset A$. O conjunto dos pontos interiores a A é chamado interior de A e é indicado por $\overset{\circ}{A}$.*

Nota: Observemos que, se todos os pontos de A são interiores, isto é, se $A = \overset{\circ}{A}$, então A é aberto. De fato, dado $p \in A$ (logo $p \in \overset{\circ}{A}$), existe $\varepsilon > 0$ de modo que $B(p, \varepsilon) \subset A$. Como obviamente vale a recíproca deste fato, temos então que: A é aberto se, e somente se, $A = \overset{\circ}{A}$.

Exemplo 1.7. *Na reta real consideremos $A = [a, b[$ e $B = [a, +\infty[$. Em ambos os casos só o ponto a não é interior: um intervalo $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[= B(a, \varepsilon)$ certamente não está contido nem em A nem em B . Daí $\overset{\circ}{A} =]a, b[$ e $\overset{\circ}{B} =]a, +\infty[$. Ainda em \mathbb{R} temos $\mathbb{Q}^\circ = \emptyset$ e também $\mathbb{Z}^\circ = \emptyset$. De fato, um intervalo $I =]p - \varepsilon, p + \varepsilon[$ sempre contém números irracionais e portanto $I \not\subset \mathbb{Q}$ e $I \not\subset \mathbb{Z}$.*

Exemplo 1.8. *Seja d a métrica zero-um sobre um conjunto M . Como todos os subconjuntos de M são abertos neste caso, então $\overset{\circ}{A} = A$, para todo $A \in M$.*

Definição 1.5. *Seja (M, d) um espaço métrico. um subconjunto $F \subset M$ se diz **fechado** se, e somente se, F^c é aberto.*

Nota: Devemos observar inicialmente que fechado não significa não aberto. Assim dependendo do espaço M , podemos ter subconjuntos que não são nem abertos e nem fechados, como podemos ter subconjuntos que são ambas as coisas. Por exemplo na reta o conjunto \mathbb{Q} não é aberto, como já vimos, e também não é fechado: de fato como existem números racionais em qualquer intervalo $]p - \varepsilon, p + \varepsilon[$, então, tomando $p \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, $]p - \varepsilon, p + \varepsilon[\not\subset \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ o que mostra que $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ não é aberto e que, portanto, \mathbb{Q} não é fechado.

Exemplo 1.9. *Na reta real são fechados todos os intervalos do tipo $[a, b]$, $[a, +\infty[$ ou $] - \infty, a]$.*

De fato, $[a, b]^c =] - \infty, a[\cup] b, +\infty[$ e cada um destes intervalos é aberto

$$[a, +\infty[^c =] - \infty, a[$$

é aberto

$$] - \infty, a]^c =] a, +\infty[$$

é aberto

Exemplo 1.10. *Num espaço métrico (M, d) , qualquer subconjunto finito $F = \{a_1, \dots, a_n\} \subset M$ é fechado. Seja $p \in F^c$ e tomemos $\varepsilon > 0$ de maneira que $\varepsilon < \min\{d(p, a_i) | a_i \in F\}$ e mostremos que $B(p, \varepsilon) \subset F^c$ ou, o que é equivalente, que $B(p, \varepsilon) \cap F = \emptyset$. Mas isto é simples: se algum a_i pertencesse à bola $B(p, \varepsilon)$, então $d(a_i, p) < \varepsilon$, o que é impossível, dada a escolha que fizemos de ε .*

Proposição 1.3. *Seja ξ a coleção dos conjuntos fechados de um espaço métrico M . Então:*

$$(i) \emptyset, M \in \xi$$

$$(ii) H, F \in \xi \Rightarrow H \cup F \in \xi$$

$$(iii) \text{ Se } (F_i) \text{ é uma família de conjuntos fechados de } M, \text{ então } \bigcap F_i \in \xi$$

Prova: Estas propriedades são iguais daquelas para abertos que constam da proposição 1.1.

(i) \emptyset e M pertencem a ξ porque $\emptyset^c = M$ e $M^c = \emptyset$ pertencem a ξ (coleção dos abertos de M)

(ii) Temos que:

$$H \cup F = M - (M - H) \cap (M - F)$$

como H e F são fechados, isto é, $H, F \in \xi$, então, $(M - H)$ e $(M - F)$, são abertos e assim:

$$A = (M - H) \cap (M - F)$$

é aberto. Logo o conjunto $H \cup F$, é fechado por ser o complementar do aberto A . Portanto $H \cup F \in \xi$

(iii) Como cada F_i é fechado então cada F_i^c é aberto e, portanto, $\cup F_i^c = (\cap F_i)^c$ é aberto. Consequentemente $\cap F_i$ é fechado. ■

Nota: Se $F_1, F_2, \dots, F_n (n \geq 1)$ são conjuntos fechados do espaço M , então $F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_n$ também é fechado em M . Mas uma união infinita de fechados pode não ser um conjunto fechado. De fato, em \mathbb{R} cada subconjunto unitário é fechado, mas $I =]a, b[= \cup \{p\}$ não é fechado.

Definição 1.6. *Seja A um subconjunto de um espaço métrico M . Um ponto $p \in M$ se diz ponto aderente ao conjunto A se, para todo $\varepsilon > 0$, vale a relação:*

$$B(p, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset.$$

O conjunto dos pontos aderentes ao subconjunto A chama-se fecho de A e é indicado por \bar{A} .

Exemplo 1.11. *Na reta real, se $A =]a, b]$ ou $A = [a, b[$ ou $A =]a, b[$, então $\bar{A} = [a, b]$. De fato, os pontos a e b são aderentes a estes intervalos porque qualquer bola (ou seja, intervalo aberto) de centro num deles, certamente intercepta o conjunto A . Por outro lado, se $p < a$ ou $p > b$, então p não pertence \bar{A} , porque no primeiro caso, por exemplo tomando $\varepsilon = \frac{a-p}{2}$, a bola $B(p, \varepsilon) =]p - \varepsilon, p + \varepsilon[$ não intercepta A .*

Exemplo 1.12. *Ainda na reta real, temos a seguinte igualdade: $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. Isto é fácil de explicar: dado $p \in \mathbb{R}$, todo intervalo $]p - \varepsilon, p + \varepsilon[$ contém números racionais; daí*

$$]p - \varepsilon, p + \varepsilon[\cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$$

e portanto $p \in \bar{\mathbb{Q}}$.

Proposição 1.4. *Seja (M, d) um espaço métrico. Então, para todo $A \subset M$, vale a relação $(\overline{A})^c = \overline{A^c}$ (isto é, o complementar do fecho de A é igual ao interior do complementar de A).*

Prova: $p \in (\overline{A})^c \Leftrightarrow p \notin \overline{A} \Leftrightarrow \exists \varepsilon, \varepsilon > 0 : B(p, \varepsilon) \cap A = \emptyset \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : B(p, \varepsilon) \subset A^c \Leftrightarrow p \in \overline{A^c}$. ■

Corolário 1.1. *$F \subset M$ é fechado se, e somente se, $\overline{F} = F$.*

Prova: Lembremos que $A \subset M$ é aberto se, e somente se, $\overset{\circ}{A} = A$. Assim: F é fechado $\Leftrightarrow F^c$ é aberto $\Leftrightarrow \overline{F^c} = F^c \Leftrightarrow (\overline{F})^c = F^c \Leftrightarrow \overline{F} = F$. ■

Proposição 1.5. *Seja (M, d) um espaço métrico. Se $p \in M$ e $A \subset M$, então $d(p, A) = 0$ se, e somente se, $p \in \overline{A}$.*

Prova: \Rightarrow) Dado $\varepsilon > 0$, como

$$d(p, A) = \inf\{d(p, x) | x \in A\} = 0$$

existe então $a \in A$ de maneira que $0 \leq d(p, a) < \varepsilon$ (caso contrário teríamos $0 < \varepsilon \leq d(p, x), \forall x \in A$, o que não é possível em face da hipótese de que $d(p, A) = 0$). Daí $a \in B(p, \varepsilon)$ e portanto $B(p, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ o que significa que $p \in \overline{A}$

\Leftarrow) Suponhamos $d(p, A) = \varepsilon > 0$. Como por hipótese $B(p, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$, então existe $a \in A$ tal que

$$d(a, p) < \varepsilon$$

Como porém

$$\varepsilon = d(p, A) \leq d(p, a) < \varepsilon.$$

Temos ai o absurdo que encerra a demonstração. ■

Definição 1.7. *Seja A um subconjunto não vazio de um espaço métrico M . Suponhamos que exista $K \in \mathbb{R}$ de maneira que $d(x, y) < K$, para quaisquer $x, y \in A$. Nessas condições dizemos que A é um conjunto limitado e o supremo do conjunto $\{d(x, y) | x, y \in A\}$ chama-se diâmetro do conjunto A e é denotado por $d(A)$. Assim:*

$d(A) = \sup\{d(x, y) | x, y \in A\}$. Se o conjunto A não é limitado, por definição temos que $d(A) = \infty$.

Proposição 1.6. *Para todo subconjunto não vazio A de um espaço métrico M vale a igualdade $d(A) = d(\bar{A})$*

Prova: Como $A \subset \bar{A}$, então $d(A) \leq d(\bar{A})$. Por outro lado, dado $\varepsilon > 0$, para quaisquer $x, y \in \bar{A}$, existem $a, b \in A$ de modo que $d(x, a) < \frac{\varepsilon}{2}$ e $d(y, b) < \frac{\varepsilon}{2}$. Daí

$$d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, b) + d(b, y) < \varepsilon + d(A)$$

e portanto

$$d(\bar{A}) \leq \varepsilon + d(A)$$

ou seja

$$0 \leq d(\bar{A}) - d(A) \leq \varepsilon$$

para todo $\varepsilon > 0$ dado a priori. Donde $d(\bar{A}) - d(A) = 0$ ou $d(A) = d(\bar{A})$ como queríamos provar. ■

Proposição 1.7. *Se A é um subconjunto de um espaço métrico M e se p é um ponto de \bar{A} , então existe uma sequência (x_1, x_2, x_3, \dots) de pontos de A tal que $\lim x_n = p$.*

Prova: Como $p \in \bar{A}$, então cada uma das bolas abertas $B(p, \frac{1}{n})$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), contém pontos de A . A sequência (x_1, x_2, \dots) , onde $x_n \in A \cap B(p, \frac{1}{n})$, para todo $n \geq 1$, converge para p . De fato, toda bola $B(p, \varepsilon)$ contém $B(p, \frac{1}{r})$ desde que $\frac{1}{r} < \varepsilon$ e portanto, nessas condições, contém $x_r, x_{r+1}, x_{r+2}, \dots$. Como (x_n) é uma sequência de pontos de A , então a proposição está provada. ■

Capítulo 2

Continuidade

2.1 Introdução

A noção de função contínua é um dos pontos centrais da Topologia. Ela será estudada neste capítulo em seus aspectos mais básicos, como introdução a uma abordagem mais ampla e como instrumento para aplicação nos capítulos seguintes.

2.2 Funções Contínuas

Lembremos que uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua num ponto p se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ de maneira que:

$$|x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(p)| < \varepsilon.$$

Intuitivamente: estão arbitrariamente próximos de $f(p)$ os valores de f correspondentes a pontos suficientemente próximos de p .

A definição a seguir é motivada pelo que acabamos de lembrar.

Definição 2.1. *Sejam M e N espaços métricos (cujas métricas por comodidade indicaremos pelo mesmo símbolo d). Uma função $f : M \rightarrow N$ se diz contínua no ponto $p \in M$ se, para qualquer $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ de maneira que*

$$d(x, p) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(p)) < \varepsilon.$$

Dizer que f é contínua significa que f é contínua em todos os pontos de M .

Proposição 2.1. Uma função $f : M \rightarrow N$ é contínua no ponto $p \in M$ se, e somente se, dada uma bola $B(f(p), \varepsilon)$ existe uma bola $B(p, \delta)$ tal que

$$f(B(p, \delta)) \subset B(f(p), \varepsilon)$$

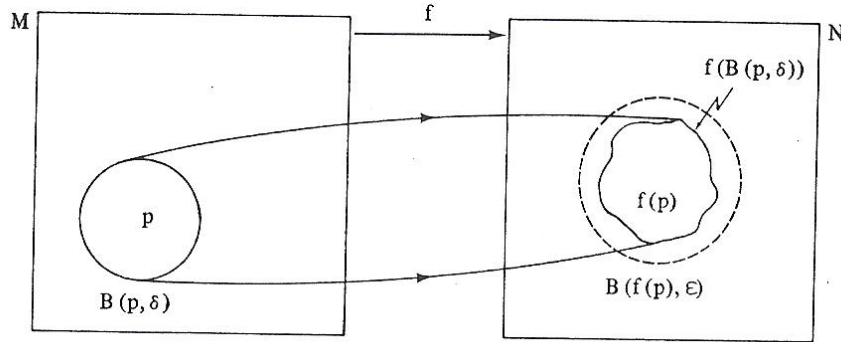


Figura 2.1: Funções Contínuas

Prova: \Rightarrow) Dada a bola $B(f(p), \varepsilon)$, considerando seu raio ε existe por hipótese, $\delta > 0$ tal que

$$d(x, p) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(p)) < \varepsilon$$

Considerando a bola $B(p, \delta)$ mostremos que sua imagem direta por f está contida em $B(f(p), \varepsilon)$. De fato, se $y \in f(B(p, \delta))$, então $y = f(x)$, com $x \in B(p, \delta)$. Daí $d(x, p) < \delta$ o que implica $d(f(x), f(p)) < \varepsilon$. Assim $y = f(x) \in B(f(p), \varepsilon)$.

\Leftarrow) Dada uma bola $B(f(p), \varepsilon)$ existe por hipótese uma bola $B(p, \delta)$ tal que $f(B(p, \delta)) \subset B(f(p), \varepsilon)$, ou seja, dado $y \in f(B(p, \delta))$ então $y = f(x)$, com $x \in B(p, \delta)$, com isso, $d(x, p) < \delta$ o que implica em $d(f(x), f(p)) < \varepsilon$ e portanto f é contínua no ponto $p \in M$

■

Proposição 2.2. Seja $f : (M, d) \rightarrow (N, d')$ uma função contínua. Se d_1 e d'_1 são métricas sobre M e N respectivamente, tais que $d \sim d_1$ e $d' \sim d'_1$, então também é contínua a função $f : (M, d_1) \rightarrow (N, d'_1)$.

Prova: (i) Mostraremos primeiro que é contínua $f : (M, d) \rightarrow (N, d'_1)$. Dado $p \in M$, consideremos uma bola $B = B_{d'_1}(f(p), \varepsilon)$, onde $\varepsilon > 0$ é arbitrário. Como $d' \sim d'_1$, existe uma bola $B_1 = B_{d'}(f(p), \lambda) \subset B$. Por hipótese então podemos achar $\delta > 0$ tal que, sendo

$B_2 = B_d(p, \delta)$, vale a inclusão $f(B_2) \subset B_1$. Donde $f(B_2) \subset B$ o que prova nossa afirmação.

(ii) Mostremos agora que $f : (M, d) \rightarrow (N, d')$ também é contínua. Dado $p \in M$, consideremos uma bola $B = B_{d'}(f(p), \varepsilon)$ onde $\varepsilon > 0$ é arbitrário. Como $d \sim d_1$, existe uma bola $B_1 = B_d(f(p), \lambda) \subset B$. Por hipótese então podemos achar $\delta > 0$ tal que, sendo $B_2 = B_{d_1}(p, \delta)$, vale a inclusão $f(B_2) \subset B_1$. Donde $f(B_2) \subset B$ o que prova nossa afirmação. De (i) e (ii) decorre a tese. ■

Nota: Não se deve perder de vista que obviamente podemos ter, em particular, $d = d_1$ ou $d' = d'_1$.

Exemplo 2.1. (i) Uma imersão isométrica é qualquer aplicação $f : M \rightarrow N$ tal que $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$, para quaisquer $x, y \in M$. Toda imersão isométrica é contínua porque, para qualquer $\varepsilon > 0$, tomando $\delta = \varepsilon$ temos:

$$d(x, p) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(p)) = d(x, p) < \delta = \varepsilon$$

qualquer que seja $p \in M$.

Vejamos algumas imersões isométricas importantes:

- As inclusões $j : X \rightarrow M$, definidas por $j(x) = x, \forall x \in X$, sendo X um subespaço de M , pois para quaisquer $x, y \in X$

$$d(j(x), j(y)) = d(x, y)$$

Em particular a aplicação idêntica $id_M : M \rightarrow M$ é contínua por ser uma imersão isométrica.

- Num produto cartesiano $M \times N$ de dois espaços métricos consideremos a métrica D (ou suas equivalentes D_1 ou D_2). Para cada $a \in M$, é uma imersão isométrica a aplicação $j_a : N \rightarrow M \times N$ dada por $j_a(y) = (a, y)$. De fato, para quaisquer $y_1, y_2 \in N : D(j_a(y_1); j_a(y_2)) = D((a, y_1); (a, y_2)) = \sqrt{d(a, a)^2 + d(y_1, y_2)^2} = d(y_1, y_2)$

- As translações num espaço vetorial normado E , definidas para cada $a \in E$ do seguinte modo: $T_a(x) = x + a, \forall x \in E$. De fato, para quaisquer $x, y \in E$:

$$d(T_a(x), T_a(y)) = \|T_a(x) - T_a(y)\| = \|x + a - (y + a)\| = \|x - y\| = d(x, y)$$

Logo as translações são isometrias.

Exemplo 2.2. As contrações fracas são aplicações $f : M \rightarrow N$ tais que

$$d(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$$

para quaisquer $x, y \in M$. Toda contração fraca é uma aplicação contínua pois, dado $\varepsilon > 0$, tomando $\delta = \varepsilon$, então:

$$d(x, p) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(p)) \leq d(x, p) < \delta = \varepsilon$$

para todo $p \in M$. Daremos exemplos a seguir de algumas contrações fracas importantes:

- Se M_1, \dots, M_n são espaços métricos, considerando sobre $M = M_1 \times \dots \times M_n$ a métrica D (ou suas equivalentes D_1 ou D_2), as projeções $p_i : M \rightarrow M_i$ são contrações fracas pois, para quaisquer $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ em M , temos:

$$d(p_i(x), p_i(y)) = d(x_i, y_i) \leq \sqrt{d(x_1, y_1)^2 + \dots + d(x_n, y_n)^2} = D(x, y)$$

- Se E é um espaço vetorial normado a adição $s : E \times E \rightarrow E$ definida por $s(x, y) = x + y$ é uma contração fraca, posto que

$$\begin{aligned} d(s(x_1, y_1), s(x_2, y_2)) &= d(x_1 + y_1, x_2 + y_2) = \|(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2)\| = \\ &= \|(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)\| \leq \|x_1 - x_2\| + \|y_1 - y_2\| = \\ &= d(x_1, x_2) + d(y_1, y_2) = D((x_1, y_1); (x_2, y_2)). \end{aligned}$$

- Toda métrica $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ pois para quaisquer $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in M \times M$:

$$\begin{aligned} |d(x_1, y_1) - d(x_2, y_2)| &= |d(x_1, y_1) - d(x_2, y_1) + d(x_2, y_1) - d(x_2, y_2)| \leq \\ &\leq d(x_1, x_2) + d(y_1, y_2) = D_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)). \end{aligned}$$

Exemplo 2.3. As aplicações lipschitzianas são aplicações $f : M \rightarrow N$ para as quais existe uma constante $c > 0$ (chamada constante de Lipschitz) tal que

$$d(f(x), f(y)) \leq cd(x, y), \forall x, y \in M.$$

- Toda aplicação lipschitziana é contínua pois, dado $\varepsilon > 0$, tomando $\delta = \frac{\varepsilon}{c}$, então $d(x, p) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(p)) \leq cd(x, p) < c\frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon$ para qualquer $p \in M$.

Vejamos um exemplo importante:

- Dado um espaço vetorial normado E , cada escalar $\alpha \neq 0$ determina uma homotetia $h_\alpha : E \rightarrow E$ definida por $h_\alpha(x) = \alpha x, \forall x \in E$. Tomemos $c > 0$ de maneira que $c \geq |\alpha|$. Temos então, para quaisquer $x, y \in E$:

$$d(h_\alpha(x), h_\alpha(y)) = d(\alpha x, \alpha y) = \|\alpha x - \alpha y\| = |\alpha| \|x - y\| \leq c \|x - y\| = cd(x, y)$$

e portanto h é lipschitziana (logo contínua).

Uma aplicação $f : M \rightarrow N$ se diz localmente lipschitziana se, para cada ponto $p \in M$, existe uma bola $B(p, \lambda)$ de maneira que a restrição de f a essa bola é lipschitziana. Mostremos que uma aplicação localmente lipschitziana é contínua. De fato, se $p \in M$, existe uma bola $B = B(p, \lambda)$ e existe uma constante $c > 0$ de modo que $d(f(x), f(y)) \leq cd(x, y), \forall x, y \in B$. Assim, dada uma bola $B(f(p), \varepsilon)$, com $\varepsilon > 0$ arbitrário, tomemos $\delta > 0$ de maneira que $\delta < \lambda$ e $\delta < \frac{\varepsilon}{c}$. Isto posto teremos: $d(x, p) < \delta \implies d(x, p) < \lambda \implies x \in B(p, \lambda) \implies d(f(x), f(p)) \leq cd(x, p) \implies d(f(x), f(p)) < c\delta \implies d(f(x), f(p)) < c\frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon$.

Veremos a seguir alguns exemplos importantes de aplicações localmente lipschitzianas:

- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^n$ onde $n \geq 1$ é um número natural dado. Dada uma bola $B = B(p, \lambda)$, seja $b \in \mathbb{R}$, tal que $|x| < b$, para qualquer $x \in B$. Devido ao teorema do valor médio, se $x, y \in B, x \neq y$, existe $t \in \mathbb{R}$, situado entre x e y , de maneira que $f(x) - f(y) = f'(t)(x - y) = nt^{n-1}(x - y)$. Daí $|f(x) - f(y)| = n|t|^{n-1}|x - y| \leq nb^{n-1}|x - y|, \forall x, y \in B$.

- $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x}, \forall x \in \mathbb{R}^*$. Tomemos inicialmente $p > 0$ e consideremos uma bola $B = B(p, \lambda) \subset \mathbb{R}^*$. Supondo $p - \lambda = a > 0$ teremos: $\forall x, y \in B, |f(x) - f(y)| = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| = \frac{|y-x|}{|x||y|} < \frac{1}{a^2}|y-x|$ o que mostra que f , restrita a B , é lipschitziana.

- A multiplicação por escalares $m : \mathbb{R} \times E \rightarrow E$ num espaço vetorial normado E é localmente lipschitziana. Provaremos esta afirmação usando sobre $\mathbb{R} \times E$ a métrica D_1 da soma: Dado uma bola $B = B(p, \lambda)$, onde p é um ponto arbitrário de $\mathbb{R} \times E$, existe uma bola de centro na origem $0 = (0, 0)$ e raio conveniente δ , de maneira que $B \subset B(0, \delta)$. (De fato, basta tomar $\delta = d((0, p) + \lambda)$).

Assim, dados dois pontos arbitrários (α, u) e (β, v) da bola B , como estes pontos estão na bola $B(0, \delta)$, valem as relações:

$$|\alpha| + \|u\| < \delta \quad e \quad |\beta| + \|v\| < \delta$$

e daí $\|u\| < \delta$ e $|\beta| < \delta$

$$\begin{aligned} d(m(\alpha, u); m(\beta, v)) &= d(\alpha u, \beta v) = \|\alpha u - \beta v\| = \\ &\|\alpha u - \beta u + \beta u - \beta v\| = \|(\alpha - \beta)u + \beta(u - v)\| \leq \\ &|\alpha - \beta|\|u\| + |\beta|\|u - v\| < \delta|\alpha - \beta| + \delta\|u - v\| = \\ &= \delta(|\alpha - \beta| + \|u - v\|) = \delta D_1((\alpha, u); (\beta, v)). \end{aligned}$$

O que mostra que m é lipschitziana em cada bola aberta de $\mathbb{R} \times E$.

Proposição 2.3. *Uma função $f : M \rightarrow N$ é contínua num ponto $p \in M$ se, e somente se, o fato de uma sequência (x_n) de pontos de M convergir para p acarretar que $(f(x_n))$ converge para $f(p)$. Ou seja: se, e somente se, $x_n \rightarrow p$ acarreta $f(x_n) \rightarrow f(p)$.*

Prova: \Rightarrow) Seja $B = B(f(p), \varepsilon)$ onde $\varepsilon > 0$ é arbitrário. Da continuidade de f vem que existe $\delta > 0$ de tal maneira que:

$$f(B(p, \delta)) \subset B.$$

Mas como $x_n \rightarrow p$, existe um índice r tal que, para todo índice $n \geq r$, se tem $x_n \in B(p, \delta)$. Daí segue que $f(x_n) \in f(B(p, \delta))$ e portanto que $f(x_n) \rightarrow f(p)$.

\Leftarrow) Se f não fosse contínua em p , existiria $\varepsilon > 0$ tal que:

$$f(B(p, \delta)) \not\subset B(f(p), \varepsilon), \forall \delta > 0$$

Assim, em particular

$$\begin{aligned} f(B(p, 1)) &\not\subset B(f(p), \varepsilon) \\ f(B(p, \frac{1}{2})) &\not\subset B(f(p), \varepsilon) \\ f(B(p, \frac{1}{3})) &\not\subset B(f(p), \varepsilon), \dots \end{aligned}$$

e portanto, para cada $n \geq 1$ existe $x_n \in M$ tal que $x_n \in B(p, \frac{1}{n})$ e $f(x_n) \notin B(f(p), \varepsilon)$. Donde a sequência $(x_1, x_2, \dots) \rightarrow p$ ao passo que $f(x_1, f(x_2), \dots) \not\rightarrow f(p)$, o que contradiz a hipótese. ■

Proposição 2.4. *Dada uma função $f : M \rightarrow N$ as seguintes afirmações são equivalentes:*

- a) f é contínua
- b) Para todo $q \in N$ e todo $\lambda > 0$, $f^{-1}(B(q, \lambda))$ é um subconjunto aberto de M
- c) Para todo aberto G de um espaço N , $f^{-1}(G)$ é um aberto de M
- d) Para todo fechado F do espaço N , $f^{-1}(F)$ é um subconjunto fechado de M .

Prova: a) \Rightarrow b) Dado $p \in f^{-1}(B(q, \lambda))$, então $f(p) \in B(q, \lambda)$ e portanto existe $\varepsilon > 0$ de maneira que $B(f(p), \varepsilon) \subset B(q, \lambda)$. Mas sendo f contínua existe então $\delta > 0$ tal que $f(B(p, \delta)) \subset B(f(p), \varepsilon)$. Como porém $B(p, \delta) \subset f^{-1}(f(B(p, \delta)))$, então $B(p, \delta) \subset f^{-1}f(B(f(p), \varepsilon)) \subset f^{-1}(B(q, \lambda))$. Assim todo ponto $p \in f^{-1}(B(q, \lambda))$ é ponto interior e portanto $f^{-1}(B(q, \lambda))$ é aberto.

b) \Rightarrow c) Se G é aberto em N , então $G = \cup B_i$, onde cada (B_i) é uma família de bolas abertas contidas em G . Daí $f^{-1}(G) = f^{-1}(\cup B_i) = \cup f^{-1}(B_i)$ e, como cada $f^{-1}(B_i)$ é aberto, o mesmo ocorre com $f^{-1}(G)$.

c) \Rightarrow d) Sendo F fechado em N , então $G = F^c$ é aberto. Daí $f^{-1}(F^c) = (f^{-1}(F))^c$ é aberto em M por hipótese. Donde seu complementar $f^{-1}(F)$ é um subconjunto fechado em M .

d) \Rightarrow a) Seja p um ponto arbitrário de M . Para um $\varepsilon > 0$ qualquer que seja $B = B(f(p), \varepsilon)$. Então B^c é um fechado em N que contém $f(p)$ e portanto $f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c$ é um fechado em M que não contém p . Logo $f^{-1}(B)$ é aberto e $p \in f^{-1}(B)$. Tomando então $\delta > 0$ de maneira que $B_1 = B(p, \delta) \subset f^{-1}(B)$ teremos que:

$$f(B_1) \subset f(f^{-1}(B)) \subset B$$

e portanto f é contínua em todo ponto $p \in M$. ■

Corolário 2.1. *Seja M e N espaços métricos. Se F e L são subconjuntos fechados de M tais que $M = F \cup L$ e se $f : M \rightarrow N$ é tal que $g = f|_F$ e $h = f|_L$ são contínuas, então f também é contínua.*

Prova: Seja P um subconjunto fechado do espaço N . Observemos primeiro $f^{-1}(P) = g^{-1}(P) \cup h^{-1}(P)$. Mas $g^{-1}(P)$ é fechado em F (devido a proposição) e como F é fechado em M , então $g^{-1}(P)$ é fechado em M . Analogamente $h^{-1}(P)$ é fechado em M . Donde $f^{-1}(P)$ é fechado neste espaço e portanto f é contínua. ■

2.3 Polinômios

Nesta seção faremos uma breve revisão dos resultados relacionados aos polinômios.

Definição 2.2. Chamamos expressão polinomial ou polinômio na variável complexa x toda expressão da forma:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

em que:

- $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_2, a_1, a_0$ são números reais denominados coeficientes;
- n é um número inteiro positivo ou não nulo;
- O maior expoente de x , com coeficiente não nulo, é o grau da expressão.

Veja, por exemplo as expressões polinomiais:

1. $4x + 6$ expressão polinomial do 1º grau (grau 1);
2. $x^2 + 3x$ expressão polinomial do 2º grau (grau 2);
3. x^3 expressão polinomial do 3º grau (grau 3).

2.3.1 Valor numérico de um polinômio

Considere um polinômio $p(x)$ e um número real α . O valor numérico do polinômio $p(x)$ para $x = \alpha$ é o número que se obtém substituindo x por α e efetuando os cálculos necessários. Indica-se por $p(\alpha)$. Então, $p(\alpha)$ é o valor numérico de $p(x)$ para $x = \alpha$.

Exemplo 2.4. O valor numérico de $p(x) = 2x^2 - 3x + 5$ para $x = 4$ é:

$$p(4) = 2(4)^2 - 3(4) + 5 = 32 - 12 + 5 = 25.$$

Logo, $p(4) = 25$.

Exemplo 2.5. Dado $p(x) = 4x^3 - 3x^2 + 5x - 10$, o valor de $p(x)$ para $x = 3$ é:

$$p(3) = 4(3)^3 - 3(3)^2 + 5(3) - 10 = 108 - 27 + 15 - 10 = 86.$$

Logo, $p(3) = 86$.

Assim, de modo geral, dado o polinômio: $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$ o valor numérico de $p(x)$ para $x = \alpha$ é:

$$p(\alpha) = a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + a_{n-2} \alpha^{n-2} + \dots + a_1 \alpha + a_0.$$

2.3.2 Raiz de um polinômio

Já sabemos que $p(\alpha)$ é o valor numérico do polinômio $p(x)$ para $x = \alpha$. Se um número real ou complexo α é tal que $p(\alpha) = 0$, então esse número α é chamado de raiz do polinômio $p(x)$.

Exemplo 2.6. *Dado o polinômio $p(x) = x^2 - 7x + 10$, temos:*

$$p(5) = 0 \Rightarrow 5 \text{ é raiz de } p(x).$$

Exemplo 2.7. *Dado o polinômio $p(x) = x^3 - 3x^2 + 2$, temos: $p(1) = 0 \Rightarrow 1$ é raiz de $p(x)$.*

Capítulo 3

Conjuntos Conexos

3.1 Introdução

A seguir, faremos um estudo referente aos conjuntos conexos visando mais adiante apresentar o Teorema do Valor Intermediário, este que é o principal objetivo do nosso trabalho.

Definição 3.1. Um espaço métrico (M, d) se diz desconexo quando existem dois conjuntos abertos G e H , ambos não vazios, de maneira que $G \cap H = \emptyset$ e $G \cup H = M$. Neste caso dizemos que o par de abertos G e H forma uma desconexão de M e indicamos tal fato por $M = G|H$. Um espaço conexo é um espaço que não é desconexo. Portanto, dizer que M é conexo significa dizer que não existe nenhuma desconexão de M . Um subconjunto $A \subset M$ se diz conexo quando o subespaço (A, d) , onde d é a métrica induzida sobre A pela métrica de M , é conexo.

Nota: Na definição acima de espaço desconexo é claro que $G \cap H = \emptyset$ e $G \cup H = M$ implica que $G = H^c$ e $H = G^c$ e portanto G e H são também conjuntos fechados.

Exemplo 3.1. Seja M um conjunto com mais do que um elemento e consideremos sobre M a métrica zero-um. Mostremos então que (M, d) é desconexo. De fato, para todo $a \in M$ são abertos e não vazios os subconjuntos $G = \{a\}$ e $H = G^c = M - \{a\}$ e obviamente $M = G|H$.

Exemplo 3.2. O subconjunto $\{0, 1\}$ de \mathbb{R} é desconexo. Tomemos $U = \{0\}$ e $V = \{1\}$. É claro que U e V são disjuntos, são ambos não vazios e sua união é o conjunto dado. Como

$$U =] - 1, \frac{1}{2}[\cap \{0, 1\}$$

e

$$V =]\frac{1}{2}, 2[\cap \{0, 1\}$$

então U e V são ambos abertos em $\{0, 1\}$, o que completa a justificativa.

Proposição 3.1. *Um espaço M é desconexo se, e somente se, existe uma função contínua e sobrejetora de M em $\{0, 1\}$*

Prova: (\Rightarrow) Por hipótese existem abertos G e H do espaço de maneira que $M = G \cup H$. Consideremos $f : M \rightarrow \{0, 1\}$ definida por $f(x) = 0$, para todo $x \in G$ e $f(x) = 1$ sempre que $x \in H$. É claro que f é sobrejetora uma vez que $G \neq \emptyset$ e $H \neq \emptyset$. E f é contínua porque, considerando os abertos de $\{0, 1\}$ que são $\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}$, todos tem como imagem inversa por f um aberto de M posto que $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset, f^{-1}(\{0\}) = G, f^{-1}(\{1\}) = H$ e $f^{-1}(\{0, 1\}) = M$.

(\Leftarrow) Por hipótese existe uma sobrejeção contínua $f : M \rightarrow \{0, 1\}$. Assim são abertos não vazios $G = f^{-1}(\{0\})$ e $H = f^{-1}(\{1\})$. Como ainda, $G \cap H = f^{-1}(\{0\}) \cap f^{-1}(\{1\}) = f^{-1}(\{0\} \cap \{1\}) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ e $G \cup H = f^{-1}(\{0, 1\}) = M$, então $M = G \cup H$. ■

Proposição 3.2. *Seja $f : M \rightarrow N$ uma função contínua. Se M é conexo então $f(M)$ é um subconjunto conexo de N .*

Prova: Suponhamos $f(M)$ desconexo. Então existe $g : f(M) \rightarrow \{0, 1\}$ é contínua e sobrejetora. Sendo então

$$f_1 : M \rightarrow f(M)$$

definida por $f_1(x) = f(x), \forall x \in M$, f_1 é obviamente sobrejetora e é contínua pelo fato de que f é contínua. Portanto a função $g \circ f_1 : M \rightarrow \{0, 1\}$ é contínua e sobrejetora o que é absurdo pois M é conexo. ■

Proposição 3.3. *Se A e B são subconjuntos conexos de um espaço M e $A \cap B = \emptyset$, então $A \cup B$ também é conexo.*

Prova: Se $A \cup B$ fosse desconexo existiria uma função $f : A \cup B \rightarrow \{0, 1\}$ contínua e sobrejetora. Seja $p \in A \cap B$ e vamos supor $f(p) = 0$. Existe então $q \in A \cup B$ de maneira que $f(q) = 1$. Supondo por exemplo que $q \in A$, então, a função $f|_A : A \rightarrow \{0, 1\}$ é contínua (restrição de uma função contínua) e sobrejetora ($(f|_A)(p) = 0$ e $(f|_A)(q) = 1$). Mas isto é absurdo, visto que A é conexo. ■

Proposição 3.4. *Seja M um espaço métrico tal que, para quaisquer $p, q \in M$, existe um subconjunto conexo $A \subset M$, de modo que $p, q \in A$. Então M é conexo.*

Prova: Suponhamos que existisse $f : M \rightarrow \{0, 1\}$ contínua e sobrejetora. Considerando então $p, q \in M$ de modo que $f(p) = 0$ e $f(q) = 1$, seja $A \subset M$ um subconjunto conexo tal que $p, q \in A \subset M$ (existe por hipótese). Logo a função $f|_A : A \rightarrow \{0, 1\}$ é contínua e sobrejetora o que é contrário a hipótese. ■

Proposição 3.5. *Dados dois espaços métricos M e N , então $M \times N$ é conexo se, e somente se, M e N são conexos.*

Prova: (\Rightarrow) Como as projeções p_1 e p_2 são contínuas e $p_1(M \times N) = M$ e $p_2(M \times N) = N$, então o fato de $M \times N$ ser conexo acarreta a conexidade de M e N .

(\Leftarrow) Sejam $p = (a, b)$ e $q = (c, d)$ pontos arbitrários do espaço $M \times N$. Como $\{a\} \times N$ é conexo pois é homeomorfo a N (a aplicação definida por $y \rightarrow (a, y)$ é um homeomorfismo de N no subespaço $\{a\} \times N$), $M \times \{d\}$ também conexo e vale a relação $(\{a\} \times N) \cap (M \times \{d\}) = \emptyset$ então $(\{a\} \times N) \cup (M \times \{d\})$ é conexo. Assim, para quaisquer $p, q \in M \times N$, existe um subconjunto conexo de $M \times N$ que contém esses pontos. A proposição anterior nos garante então que $M \times N$ é conexo. ■

3.2 Conexos em \mathbb{R}

Proposição 3.6. *Se a métrica considerada sobre \mathbb{R} é a usual, então são conexos todos os intervalos do tipo $[a, b]$, $[a, b[$ ou $]a, b]$.*

Prova: Faremos a demonstração para um intervalo $]a, b] = J$. Se J fosse desconexo existiria $f : J \rightarrow \{0, 1\}$ contínua e sobrejetora. Podemos supor que $f(b) = 1$ pois caso contrário, tomando $g(x) = 1 - f(x)$ (também contínua e sobrejetora) teríamos $g(b) = 1$. Seja $c = \sup\{x \in J | f(x) = 0\}$. Como f é contínua em c , para $\varepsilon = 1$ existe $\delta > 0$ de modo que $|x - c| < \delta$ ($a < x \leq b$) acarreta $|f(x) - f(c)| < 1$. Disto resulta então que $f(x) = f(c)$, para todo $x \in J$ tal que $c - \delta < x < c + \delta$. Ora, $c = \sup\{x \in J | f(x) = 0\}$, existe $u \in J$ de modo que $c - \delta < u \leq c$ e $f(u) = 0$, do que resulta então que $f(c) = 0$. Por outro lado, tomando $v \in J$ de maneira que se tenha $c < v < c + \delta$, então $f(v) = 1$ e daí $f(c) = 1$ o que é absurdo.

■

Corolário 3.1. *São conexos em \mathbb{R} todos os intervalos do tipo $]a, b[,]a, +\infty[,]-\infty, a[$ ou $] -\infty, a[$*

Prova: De fato, tomando $c \in]a, b[$, então

$$]a, b[=]a, c] \cup [c, b[$$

Como $]a, c]$ e $[c, b[$ são conexos e têm um ponto em comum, então sua união também é um subconjunto conexo. Nos demais casos as demonstrações são análogas a anterior.

■

Corolário 3.2. *Os espaços \mathbb{R}^n ($n \geq 1$) são conexos.*

Prova: Ora como \mathbb{R} é homeomorfo a qualquer bola aberta $] -a, a[$ e como estas são conexas, então \mathbb{R} é conexo. O corolário da proposição 5 nos garante então a conexidade de $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$.

■

Proposição 3.7. *Para que um subconjunto não vazio e não unitário $J \subset \mathbb{R}$ seja conexo é necessário e suficiente que J seja um intervalo.*

Prova: A proposição acima e seus corolários garantem que todos os intervalos em \mathbb{R} (inclusive \mathbb{R}) são conexos. Reciprocamente seja $J \subset \mathbb{R}$, $J \neq \emptyset$, um subconjunto conexo e não unitário e admitamos que J não seja um intervalo. Então existem $a, x, y \in \mathbb{R}$ de modo que $x < a < y$, $x, y \in J$ e ainda $a \notin J$. Considerando então $G = J \cap]-\infty, a[$ e simultaneamente, $H = J \cap]a, +\infty[$, temos:

- G e H são abertos em J
- $G \neq \emptyset$ e $H \neq \emptyset$, pois $x \in G$ e $y \in H$
- $G \cap H = J \cap]-\infty, a[\cap]a, +\infty[= \emptyset$
- $G \cup H = J \cap (]-\infty, a[\cup]a, +\infty[) = J$

Logo J é desconexo o que contraria nossa hipótese. Portanto J é um intervalo de \mathbb{R} .

■

3.3 Teorema do Valor Intermediário

Teorema 3.1 (Teorema do Valor Intermediário). *Seja M um espaço conexo e seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $y_1, y_2 \in f(M)$ e $y_1 < y < y_2$, então existe $x \in M$ tal que $f(x) = y$.*

Prova: Como f é contínua, então $f(M) \subset \mathbb{R}$ é conexo. Daí $f(M)$ é um intervalo e portanto $y \in f(M)$. Donde existe $x \in M$ de maneira que $y = f(x)$. ■

Nota: O resultado acima garante que se função real, definida e contínua num conexo, toma dois valores em \mathbb{R} , então essa função assume todos os valores compreendidos entre esses dois.

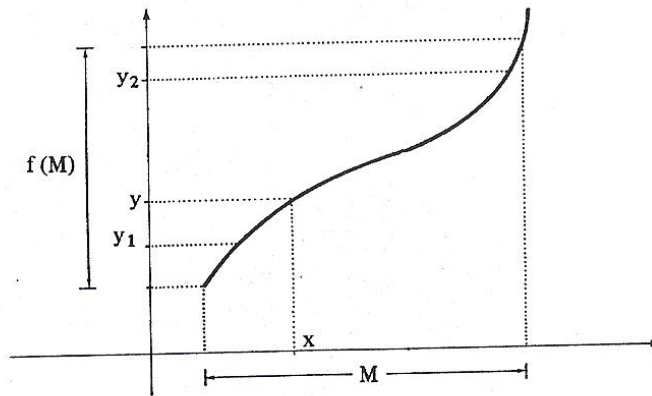


Figura 3.1: Teorema do Valor Intermediário

Como aplicação, mostraremos que todo polinômio $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, de grau ímpar, possui pelo menos uma raiz real. Seja $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ com n ímpar e $a_n \neq 0$. Para fixar as ideias, suporemos $a_n > 0$. Pondo a_nx^n em evidência podemos escrever $p(x) = a_nx^n \cdot r(x)$, onde

$$r(x) = \frac{a_0}{a_n} \cdot \frac{1}{x^n} + \frac{a_1}{a_n} \cdot \frac{1}{x^{n-1}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot \frac{1}{x} + 1$$

É claro que $\lim_{x \rightarrow +\infty} r(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} r(x) = 1$. Logo $\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} a_nx^n = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} a_nx^n = -\infty$ (porque n é ímpar). Portanto o intervalo $p(\mathbb{R})$ é ilimitado inferior e superiormente, isto é, $p(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Logo, pelo teorema do valor intermediário existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $p(c) = 0$.

Teorema 3.2 (Teorema do Ponto Fixo de Brouwer). *Dada uma função contínua $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ existe $c \in [a, b]$ de maneira que $f(c) = c$*

Prova: Vamos supor $f(a) \neq a$ e $f(b) \neq b$ e considerar $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x - f(x)$. É claro que g é contínua (diferença de duas funções contínuas) e ademais $g(a) = a - f(a) < 0$ e $g(b) = b - f(b) > 0$. Devido ao teorema do valor intermediário existe $c \in [a, b]$ de maneira que $g(c) = c - f(c) = 0$ uma vez que $g(a) < 0 < g(b)$. Donde $f(c) = c$ como queríamos provar. ■

Nota: Geometricamente o significado do teorema do ponto fixo é que a reta $y = x$ intercepta o gráfico de $y = f(x)$ em pelo menos um ponto.

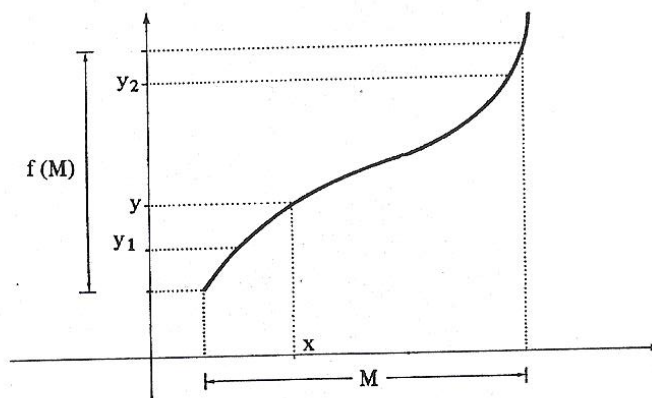


Figura 3.2: Teorema do Valor Intermediário

Como aplicação do teorema do ponto fixo de Brouwer, mostraremos que a equação $\cos x = x$ tem solução. Assim, seja $f : [0, \pi] \rightarrow [0, \pi]$ definida por $f(x) = \cos x$, claro que f é contínua nesse intervalo, então pelo teorema do ponto fixo de Brouwer, existe $x_0 \in [0, \pi]$ tal que:

$$\cos x_0 = x_0.$$

Referências Bibliográficas

- [1] DOMINGUES, Higino Hugueros. **Espaços Métricos e Introdução à Topologia**, editora Atual, São Paulo, 1982
- [2] LIMA, Elon Lages. **Análise Real**, 11^a edição, editora IMPA, Rio de Janeiro, 2012.
- [3] DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: Contexto e Aplicações**, 1^a edição, editora Ática, São Paulo, 2010
- [4] BOYER, C. B. **História da matemática**, 2^a edição, editora Edgard Blucher, São Paulo, 1996.
- [5] CLIMACO, Humberto de Assis. **Prova e Explicação em Bernard Bolzano**, Cuiabá, 2007.