UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA - UEPB

CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLEYSON CASSIMIRO DE SOUZA

O USO DA TRIGONOMETRIA NO ESTUDO DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Campina Grande – PB

2014

CLEYSON CASSIMIRO DE SOUZA

O USO DA TRIGONOMETRIA NO ESTUDO DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado na Universidade Estadual da Paraíba, como parte dos requisitos exigidos para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Ms. Fernando Luiz Tavares da Silva

Campina Grande – PB

2014

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL - UEPB

S729u Souza, Cleyson Cassimiro de.
O uso da trigonometria no estudo do cálculo diferencial e integral [manuscrito] / Cleyson Cassimiro de Souza. - 2014.
85 p.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2014.
"Orientação: Prof. Me. Fernando Luiz Tavares da Silva, Departamento de Matemática".

1. Trigonometria. 2. Cálculo diferencial. 3. Ensino de matemática. I. Título.

21. ed. CDD 516.24

CLEYSON CASSIMIRO DE SOUZA

O USO DA TRIGONOMETRIA NO ESTUDO DO

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado na Universidade Estadual da Paraíba, como parte dos requisitos exigidos para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Aprovado em: 24 de Julho de 2014

Prof. Ms. Fernando Luiz Tavares da Silva

Departamento de Matemática – CCT/UEPB

Orientador

Prof. Esp. Roberto Aroldo Pimentel

Departamento de Matemática – CCT/UEPB

Examinador

Profª. Drª. Maria Isabelle Silva

Departamento de Matemática – CCT/UEPB

Examinadora

DEDICATÓRIA

Aos meus pais, Severino Cassimiro e Maria Josileide, por todo apoio e incentivo, DEDICO.

AGRADECIMENTOS

A Deus pelo dom da vida, pela saúde, paz e força para ter chegado até aqui.

Aos meus pais Severino Cassimiro e Maria Josileide, pelo amor, pelos ensinamentos e incentivo ao longo da minha caminhada acadêmica.

A minha família, em especial aos meus avós Firmino Souza (*in memorium*) e Creuza por sempre acreditarem no meu sucesso.

A minha namorada Gerlane Macedo por todo carinho, compreensão e incentivo no desenvolvimento deste trabalho e no dia a dia.

Aos professores do Departamento de Matemática da UEPB pela dedicação e preocupação com a qualidade na formação de bons professores de matemática.

Ao meu orientador Fernando Luiz pela paciência e ensinamentos.

Aos meus amigos, em especial a Mauri, Benedito, Marcelo, Newton, Dayvson, Rogério e Lilian, pelos momentos de apoio, estudo e diversão.

Enfim, a todos que contribuíram direta ou indiretamente para que eu chegasse até aqui.

RESUMO

Neste trabalho, apresentaremos aplicações da trigonometria no ensino do cálculo diferencial e integral. Estas aplicações são partes fundamentais para o desenvolvimento de diversos estudos e resolução de várias questões de cálculo diferencial e integral. Para isto, exploramos primeiramente os principais conceitos e fórmulas do ensino da trigonometria e em seguida apresentamos os tópicos referentes ao cálculo diferencial e integral onde essas aplicações aparecem com mais frequência. No que se refere ao cálculo foram abordados conceitos abrangentes a limite, derivada e integral.

Palavras-chave: Trigonometria, Cálculo diferencial e integral, Aplicações.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

No ensino médio não tive a oportunidade de ter um contato completo com a trigonometria. Estudei o segundo ano do Ensino Médio em escola pública e devido as inúmeras adversidades, como troca de professor durante o decorrer do ano e vários dias sem aula, não tive acesso à alguns conceitos e resultados básicos desse ramo da matemática. Mesmo com todas as dificuldades, sempre fui um apaixonado pela matemática, e era nessa disciplina que eu apresentava meu melhor desempenho. No terceiro ano do Ensino Médio fiz vestibular para Matemática na UEPB, Ciências Econômicas na UFCG e Agronomia na UFPB. Logrei êxito nos três vestibulares e desde o momento que recebi o resultado positivo já tinha a plena convicção que queria cursar Matemática. Muitos colegas me incentivaram a escolher outro curso, mas apesar disso sempre me mantive firme e forte na minha decisão de cursar Matemática e mesmo durante minha graduação tendo conseguido aprovação em cursos como, por exemplo, Administração e Ciências Contábeis nunca sequer pensei em abandonar o curso ao qual estava dedicado.

Cursando Matemática, tive a oportunidade de me aproximar mais ainda dos números, conhecer novos ramos da matemática e me aprofundar nos que, até então, tinha visto apenas superficialmente. Foi no componente curricular Matemática Básica II, sob os ensinamentos do professor Fernando Luiz, que pude ver o quanto é amplo, fascinante e importante estudar trigonometria. Ao poder acompanhar todas as construções e deduções daquelas fórmulas que haviam sido me passadas já prontas no Ensino Médio tomei gosto pelo estudo deste ramo matemático. Já nos componentes curriculares Cálculo Diferencial e Cálculo Integral e Séries, sob os ensinamentos dos professores Leomarques e Ernesto, respectivamente, e ao aprofundar os estudos em casa pude perceber o tanto quanto era importante os conhecimentos adquiridos no estudo da trigonometria para que eu conseguisse entender muitos resultados e resolver diversas questões de limites, derivadas e integrais.

Esses estudos e descobertas ao longo da graduação, em especial nos componentes curriculares citados no paragrafo anterior, foram as principais fontes inspiradoras para que eu decidisse desenvolver este trabalho de conclusão de curso. O principal objetivo do mesmo é mostrar utilização da trigonometria no estudo e resoluções de questões do cálculo diferencial e integral.

Iniciaremos o trabalho fazendo de uma abordagem histórica sobre a matemática e também sobre a trigonometria mostrando os principais avanços desta ciência e deste ramo nas civilizações ao longo dos anos. Em seguida faremos uma explanação sobre os principais conceitos e fórmulas da trigonometria, com definições e demonstrações que serviram de base para o objetivo principal do trabalho. Finalizaremos o trabalho com a aplicação desses conceitos e fórmulas de trigonometria no cálculo diferencial e integral no desenvolvimento de limites, derivadas e integrais.

2. REFERENCIAL HISTÓRICO

2.1 História da Matemática

A ciência matemática não surgiu a partir da descoberta de um individuo, mas sim a partir de necessidades fundamentais para a vida humana. Podemos considerar que o início da matemática é caracterizado pela contagem e pela descoberta do número. A contagem é uma necessidade que acompanha o homem desde a antiguidade. Ao saber quantas ovelhas estão no pasto, quantas pessoas participaram de uma reunião, quantos ingressos foram vendidos para um jogo de futebol, entre outras diversas situações que ocorrem diariamente em nossas vidas, estamos usando o principio da contagem. (Crepaldi, 2005)

Com a contagem, vem a noção de semelhança entre certos objetos, a percepção de uma propriedade abstrata comum entre eles. No inicio, para expressar essa propriedade, agrupar elementos e facilitar a contagem, o homem utilizava símbolos. A lua, asas, trevo são símbolos que se equiparam aos atuais um, dois, três. Depois de muito tempo, os homens começaram a fazer grupos de cinco pedras como método de correspondência, devido ao fato daquele agrupamento lhe ser familiar por observação do seu corpo (mãos e pés). A partir dai, já começavam a associar os símbolos de antes aos números. Conforme nos esclarece Boyer (1996, p. 2).

> *Quando os dedos humanos eram inadequados, podiam ser usados montes de pedras para representar uma correspondência com elementos de um outro conjunto. Quando o homem primitivo usava tal método de representação, ele frequentemente amontava as pedras em grupos de cinco, pois os quíntuplos lhe eram familiares por observação da mão e pé humanos.*

As escolas Pitagórica e Jônia (representadas de forma oficial por Pitágoras[1] e Tales[2] respectivamente) concentravam alguns dos principais relatos sobre a origem da matemática, apesar de que as reconstruções dos seus pensamentos se baseiam em tradições elaboradas posteriormente. (Crepaldi, 2005)

Na segunda metade do quinto século a.C, surgem relatos persistentes e consistentes que inúmeros matemáticos, mesmo não contando com muitos recursos, se dedicaram

[1] Pitágoras. Importante filosofo e matemático grego. Nasceu no ano 570 a.C e faleceu provavelmente entre os anos de 496 e 497 a.C.

[2] Tales de Mileto (640 a.C-550 a.C). Foi o primeiro matemático grego e foi incluído entre os sete sábios da antiguidade.

intensamente a significantes problemas matemáticos. Esse período ficou conhecido como “Idade Heroica” da Matemática, o que se justifica pelo esforço desses verdadeiros heróis do desenvolvimento da matemática, que formaram a base dos posteriores avanços na geometria.

A matemática foi se desenvolvendo em diversas civilizações. Os povos egípcios, babilônicos, gregos, árabes, chineses e hindus contribuíram cada um com suas peculiaridades especiais.

No Egito, foi criado um dos primeiros sistemas de numeração da história da matemática, representando quantidades de diversas formas nesse sistema de numeração de base dez e composto por específicos símbolos numéricos.

Os Babilônios apresentavam um sistema simbólico com diferentes formas geométricas, com uma regra de contagem sexagesimal. Apresentavam um bom desenvolvimento nos campos da geometria e da álgebra. Além de trabalharem com o teorema pitagórico.

A matemática grega apresentava um caráter dedutivo. Os trabalhos e estudos matemáticos eram realizados com a utilização de axiomas, proposições, teoremas e demonstrações não havendo livros contendo problemas.

O período mais crítico do desenvolvimento da matemática foi a primeira metade do império muçulmano devido a falta de entusiasmo intelectual e o desinteresse pela cultura naquela época. Porém, isso foi mudando e os árabes escreveram tratados que serviram de base para estudos futuros sobre álgebra e aritmética. O sistema de numeração utilizado pelos Árabes era o hindu. (Boyer, 2001)

2.2 História da Trigonometria

A trigonometria é um ramo da matemática que, igualmente a maioria dos outros, não foi descoberta de um único individuo, mas sim de grupos de várias civilizações (egípcia, babilônica, grega, árabe, chinesa e hindu) que impulsionados pela necessidade de resolver situações que surgem constantemente em suas vidas começaram a realizar estudos que são considerados as raízes da nossa atual trigonometria.

Os percussores de trabalhos que são considerados rudimentos de trigonometria são os egípcios e os babilônicos calculando razões entre lados de triângulos semelhantes como, por exemplo, em medições das famosas pirâmides egípcias. Foi no Egito que surgiu a ideia de relacionar a sombra projetada de uma vareta vertical com a marcação das horas funcionando como relógio. Boyer nos evidência essa passagem da construção da história da trigonometria no trecho: *"Na construção de pirâmides era essencial manter uma inclinação constante das faces e pode ter sido essa preocupação a levar os egípcios a introduzir um conceito equivalente ao de co-tangente de um ângulo."* (1996, p. 13).

A contribuição dos babilônicos se deu expressamente pelo fascino desse grupo pelo estudo astronômico. Através disto surgiu a necessidade de usar os triângulos e suas relações para prosseguir com estudos sobre fases da lua, estações do ano entre outros que eram de interesse dos moradores dessa civilização.

No Oriente, mais precisamente na China, o cálculo de distâncias, comprimento e profundidade eram constantemente realizados com o auxilio dos triângulos retângulos. Costa (1997), cita uma passagem da literatura chinesa para mostrar que desde o segundo milênio a.C a trigonometria plana já era conhecida. Se traduzirmos essa passagem chegaremos a: "*O conhecimento vem da sombra, e a sombra vem do gnômon*".

A contribuição grega com a trigonometria vem dos estudos de sábios como Thales (625-546 a.C) e Pitágoras (570-495 a.C), que usando seus conhecimentos de geometria - o desenvolvimento da trigonometria está estreitamente relacionado com a geometria – desenvolveram trabalhos que serviram de base para o estudo da trigonometria.

Hiparco[3] de Nicéia (180-125 a.C), considerado o "Pai da Trigonometria" foi o responsável por grandes avanços nesse ramo da matemática. Realizou trabalhos essenciais para prosseguimentos e avanços nesse sentido, como por exemplo, o fato de dividir a circunferência em 360 partes e a denominação de cada parte dessas como sendo o arco de 1 grau. Influenciado pela matemática dos babilônios, que acreditavam que a base 60 era melhor para contagem, Hiparco ainda dividiu cada arco de 1 grau em 60 partes iguais resultando assim o arco de 1 minuto.

[3] Hiparco (190 a.C-120 a.C) foi um astrônomo, construtor, cartógrafo e matemático grego que foi considerado o "Pai da Trigonometria" por seus importantes trabalhos nesse ramo da matemática.

Outros que contribuíram para o desenvolvimento da trigonometria foram os hindus, os árabes e os persas. Os hindus contribuíram, entre outras coisas, com a inserção das principais “funções” trigonométricas. Através das influências de trabalhos árabes foi o introduzido os estudos no circulo de raio unitário. Já os trabalhos dos persas (com destaque para o astrônomo persa Nasîr ed-dên al-Tûsî) contribuíram diretamente para que a trigonometria se desvinculasse da astronomia e passasse a figurar como uma ciência por ela própria.

Na Europa, a trigonometria já vinha se desenvolvendo desde o século XI e o campo que mais se desenvolveu foi os das funções trigonométricas que tiveram seu conceito consolidado e passaram a ser definidas como função do ângulo e não do arco. No século XVI o termo trigonometria surge pela primeira vez, como titulo de um dos livros publicados por Bartholomäus Pitiscus[4] (1561-1613). Outros importantes avanços forma o uso de equações e a definição de funções trigonométricas de números puros e a demonstração de sua periodicidade.

Com Leonahrd Euler[5] (1707-1783) a trigonometria toma sua forma atual. Grandes avanços são obtidos por suas ideias, simbologias e terminologia. Euler adotou a medida do raio de um circulo igual a unidade e foi o responsável para que a transição das razões trigonométricas para as funções periódicas atingisse seu ápice. Ele ainda usou pela primeira vez as abreviações que conhecemos hoje (sen, cos, tg, cotg, sec e cossec) e apresentou todos os teoremas trigonométricos como corolário da teoria das funções complexas. (Souza, 2011)

A trigonometria teve, em seu início, uma participação apenas como uma auxiliar da astronomia e no decorrer de um longo caminho, com importantes contribuições de vários povos, foi se transformando autônoma até chegar a ser parte da Análise Matemática.

---

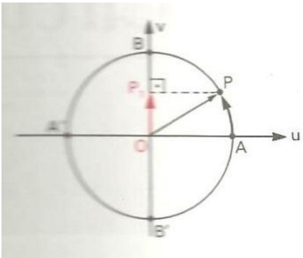
[4] Bartholomäus Pitiscus nasceu em família pobre da cidade de Grünberg, Silésia no ano de 1561. Em seu livro, Trigonometria: sive de solutes triangulorum Tractatus brevis et perspicuus , a palavra trigonometria surge pela primeira vez.

[5] Leonhard Euler nascido em Basel na Suiça em 1707. Foi o escritor matemático mais produtivo de todos os tempos.

3. NOÇÕES DE TRIGONOMETRIA

3.1 Seno de um arco

Definição 3.1: Dado um número real $x \in [0,2\pi]$, seja P sua imagem no ciclo. Denominamos $seno$ de x (e indicamos $sen\ x$) a ordenada OP_1 do ponto P em relação ao sistema uOv.



3.1.1 Função Seno

Definição 3.2: Denominamos $função\ seno$ a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que associa a cada real x o real $\overline{\mathrm{OP}_1}$ = $sen\ x$, isto é:

$$\boldsymbol{f(x) = sen\ x}$$

O domínio da função seno é $\mathbb{R}$ e sua imagem o intervalo [-1,1], ou seja, $-1 \leq Sen\, x \leq 1$ para todo x real.

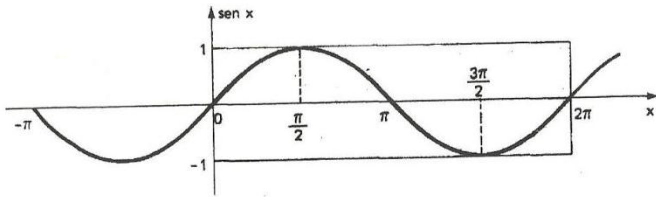
Estudaremos o comportamento da função seno a partir das propriedades apresentadas na tabela abaixo:

Quadrante	Crescimento	Sinal
1º	↑	+
2º	↓	+

3º	↓	-
4º	↑	-

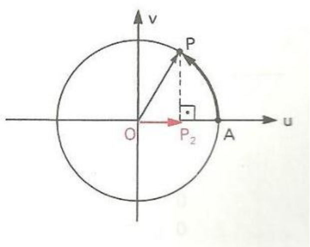
A função seno é periódica e seu período é 2π.

O seguinte gráfico representa a variação da função seno e é denominado *senóide*.



3.2 Cosseno de um arco

Definição 3.3: Dado um número real $x \in [0,2]$ seja P sua imagem no ciclo. Denominamos $cosseno$ de x (indicamos $cos\ x$) a abscissa OP_2 do ponto P em relação ao sistema uOv.



3.2.1 Função Cosseno

Definição 3.4: Denominamos $função\ cosseno$ a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que associa a cada real x o real $OP = \cos x$, isto é:

$$\boldsymbol{f(x) = \cos x}$$

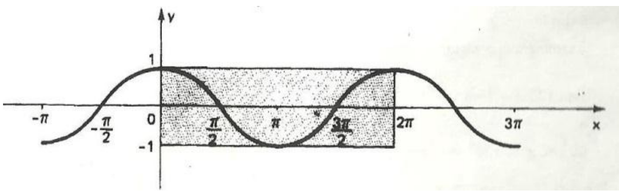
O domínio da função cosseno é $\mathbb{R}$ e sua imagem é o intervalo [-1,1], ou seja, $-1 \leq \cos x \leq 1$ para todo x real.

Estudaremos o comportamento da função cosseno a partir das propriedades apresentadas na tabela abaixo:

Quadrante	**Crescimento**	**Sinal**
1º	↓	+
2º	↓	-
3º	↑	-
4º	↑	+

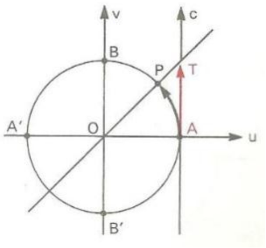
A função cosseno é periódica e seu período é 2π.

O seguinte gráfico representa a variação da função cosseno e é denominado *cossenóide*.



3.3 Tangente de um arco

Definição 3.5: Dado um número real $x \in [0,2\pi]$, $x \neq \frac{\pi}{2}$ e $x \neq \frac{3\pi}{2}$, seja P sua imagem no ciclo. Consideremos a reta $\overleftrightarrow{OP}$ e seja T sua interseção com o eixo das tangentes. Denominamos $tangente$ de x (e denominamos $tg\ x$) a medida algébrica do segmento $\overline{AT}$.



3.3.1 Função Tangente

Definição 3.6: Denominamos $função\ tangente$ a função $f: D \to \mathbb{R}$ que associa a cada real x, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, o real $\overline{AT} = tg\ x$, isto é:

$$\boldsymbol{f(x) = tg\ x}$$

Observe que, para $x = \frac{\pi}{2}$, P está em B e, para $x = \frac{3\pi}{2}$, P está em B' e, então, a reta $\overleftrightarrow{OP}$ fica paralela ao eixo das tangentes. Como neste caso não existe o ponto T, a $tg\ x$ não está definida.

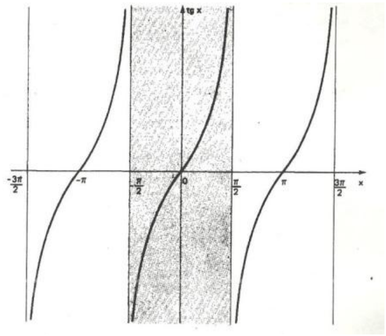
O domínio da função tangente é $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$ e sua imagem é $\mathbb{R}$, ou seja, para todo y real existe um x real tal que $tg\ x = y$.

Estudaremos o comportamento da função tangente a partir das propriedades apresentadas na tabela abaixo:

Quadrante	**Crescimento**	**Sinal**
1º	↑	+
2º	↑	-
3º	↑	+
4º	↑	-

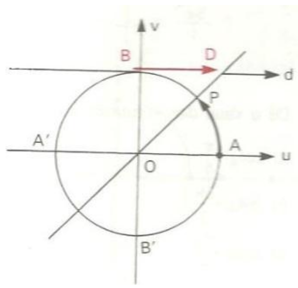
A função tangente é periódica e seu período é π.

O seguinte gráfico representa a variação da função tangente e é denominado *tangentóide*.



3.4 Cotangente de um arco

Definição 3.7: Dado um número real $x \in [0,2\pi]$, $x \notin \{0, \pi, 2\pi\}$, seja P sua imagem no ciclo. Consideremos a reta $\overleftrightarrow{OP}$ e seja D sua interseção com o eixo das cotangentes. Denominamos $cotangente$ de x (e indicamos $cotg\ x$) a medida algébrica do segmento $\overline{BD}$.



3.4.1 Função Cotangente

Definição 3.8: Denominamos $função\ cotangente$ a função $f: D \to \mathbb{R}$ que associa a cada real x, $x \neq k\pi$, o real $\overline{BD} = cotg\ x$, ou seja:

$$\boldsymbol{f(x) = cotg\ x}$$

Observe que, para $x = k\pi$, P está em A ou em A' e, então a reta $\overleftrightarrow{OP}$ fica paralela ao eixo das cotangentes. Neste caso não existe o ponto D e, portanto, a $cotg\ x$ não está definida.

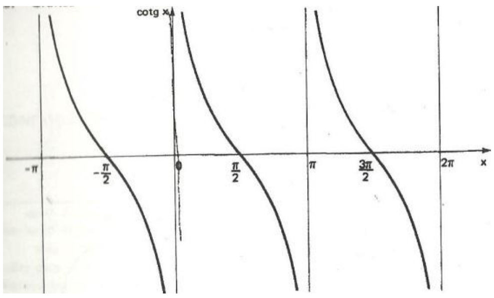
O domínio da função cotangente é $D = \{x \in \mathbb{R} \mid \ x \neq k\pi\}$ e sua imagem é $\mathbb{R}$, isto é, para todo y real existe um x tal que $cotg\ x = y$.

Estudaremos o comportamento da função cotangente a partir das propriedades apresentadas na tabela abaixo:

Quadrante	**Crescimento**	**Sinal**
1º	↓	+
2º	↓	-
3º	↓	+
4º	↓	-

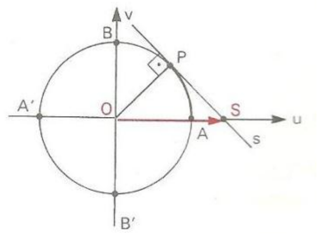
A função cotangente é periódica e seu período é π.

O seguinte gráfico representa a variação da função cotangente.



3.5 Secante de um arco

Definição 3.9: Dado um número real $x \in [0,2\pi]$, $x \notin \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$, seja P sua imagem no ciclo. Consideremos a reta s tangente ao ciclo em P e seja S sua interseção com o eixo dos cossenos. Denominamos $secante$ de x (e indicamos $\sec x$) a abscissa OS do ponto S.



3.5.1 Função Secante

Definição 3.10: Denominamos $função\ secante$ a função $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada real x, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, o real $\overline{OS} = \sec x$, ou seja:

$$\boldsymbol{f(x) = sec\ x}$$

Observe que, para $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, P está B em ou B', então a reta s fica paralela ao eixo dos cossenos. Neste caso não existe o ponto S e, portanto, a $\sec x$ não está definida.

O domínio da função secante é $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$ e sua imagem é $\mathbb{R} -]-1,1[$, ou seja, para todo real y, com $y \leq -1$ ou $y \geq 1$, existe um x real tal que $\sec x = y$.

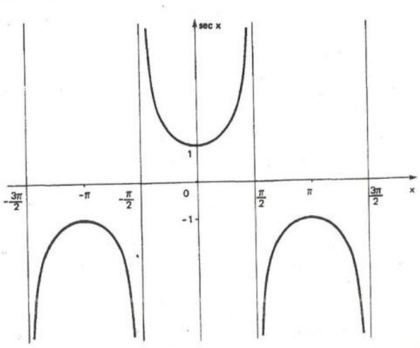
Estudaremos o comportamento da função secante a partir das propriedades apresentadas na tabela abaixo:

Quadrante	**Crescimento**	**Sinal**
1º	↑	+
2º	↑	-

3º	↓	-
4º	↓	+

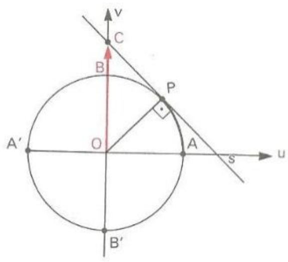
A função secante é periódica e seu período é 2π.

O seguinte gráfico representa a variação da função secante.



3.6 Cossecante de um arco

Definição 3.11: Dado um número real $x \in [0,2\pi]$, $x \notin \{0, \pi, 2\pi\}$, seja P sua imagem no ciclo. Consideremos a reta s tangente ao ciclo P e seja C sua interseção com o eixo dos senos. Denominamos $cossecante$ de x (e indicamos $cossec\ x$) a ordenada OC do ponto C.



3.6.1 Função Cossecante

Definição 3.12: Denominamos $função\ cossecante$ a função $f: D \to \mathbb{R}$ que associa a cada real x, $x \neq k\pi$, o real $\overline{OC} = cossec\ x$, isto é:

$$\boldsymbol{f(x) = cossec\ x}$$

Observe que, para $x = k\pi$, P está em A ou A' e, então, a reta s fica paralela ao eixo dos senos. Neste caso não existe o ponto C e, portanto, a $cossec\ x$ não é definida.

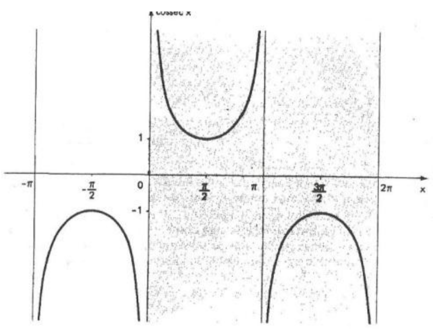
O domínio da função cossecante é $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi\}$ e sua imagem é $\mathbb{R} -]-1,1[$, ou seja, para todo real y, com $y \leq -1$ ou $y \geq 1$, existe um x real tal que $cossec\ x = y$.

Estudaremos o comportamento da função cossecante a partir das propriedades apresentadas na tabela abaixo:

Quadrante	**Crescimento**	**Sinal**
1º	↓	+
2º	↑	+
3º	↑	-
4º	↓	-

A função cossecante é periódica e seu período é 2π.

O seguinte gráfico representa a variação da função cossecante.



3.7 Funções trigonométricas inversas

Para definirmos as funções trigonométricas inversas, necessitamos restringir o domínio das funções trigonométricas que devido a sua periodicidade apresentam infinitos valores do domínio com a mesma imagem.

3.7.1 Função arco seno

Definição 3.13: Seja $f\colon \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$ a função definida por $f(x) = sen\, x$. A função inversa de f, será chamada $arco\ seno$, e denotada por$f^{-1}\colon [-1,1] \to \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, onde $f^{-1}(x) = arc\ sen\ x$.

Simbolicamente, temos a equivalência:

$$y = arc\ sen\ x \Leftrightarrow sen\ y = x, para\ \frac{-\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$$

3.7.2 Função arco cosseno

Definição 3.14: Seja $f\colon [0,\pi] \to [-1,1]$ a função definida por $f(x) = \cos x$. A função inversa de f será chamada $arco\, cosseno$, e denotada por $f^{-1}\colon [-1,1] \to [0,\pi]$, onde $f^{-1}(x) = arc \cos x$.

Simbolicamente, temos a equivalência:

$$y = arc \cos x \Leftrightarrow x = \cos y\,, para\ 0 \leq y \leq \pi$$

3.7.3 Função arco tangente

Definição 3.15: Seja $f: \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = tg\ x$. A função inversa de f, será chamada $função\ arco\ tangente$ e denotada por $f^{-1}: \mathbb{R} \to \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, onde $f^{-1}(x) = arc\ tg\ x$.

Simbolicamente, temos a equivalência:

$$y = arc\ tg\ x \Leftrightarrow x = tg\ y$$

Note que a função inversa $f^{-1}(x) = arc\ tg\ x$ é definida para todo número real.

3.8 Relações Fundamentais

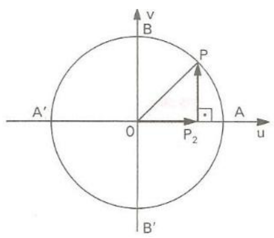
Agora, após definirmos $sen\ x, \cos x\ , tg\ x, cotg\ x, \sec x\ \ e\ cossec\ x$ no ciclo trigonométrico, vamos demonstrar as relações existentes entre esses números. Essas relações são denominadas relações fundamentais.

Teorema 3.1: Para todo x real, $x \in [0,2\pi]$, vale a relação:

$$\boldsymbol{sen^2x + cos^2x = 1}$$

Demonstração 3.1: Temos que analisar duas situações distintas.

- Para $x \notin \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\right\}$,



a imagem de x é distinta de A, B, A' e B' e, então, existe o triângulo OP_2P retângulo.

Aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$$|OP_2|^2 + |P_2P|^2 = |OP|^2$$

Note que:

Note que a medida algébrica de $\overline{OP_2}$ é o $\cos x$ e a medida algébrica de $\overline{P_2P}$ é o $sen\ x$.

Além disso, $\overline{OP}$ é o raio do circulo trigonométrico. Portanto, a medida de $\overline{OP}$ é igual a 1.

Daí temos,

$$|OP_2|^2 + |P_2P|^2 = |OP|^2 \Rightarrow (\cos x)^2 + (sen\ x)^2 = 1^2 \Rightarrow cos^2x + sen^2x = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{sen^2x + cos^2x = 1}$$

- Para $x \in \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\right\}$, verificamos diretamente a validade da identidade:

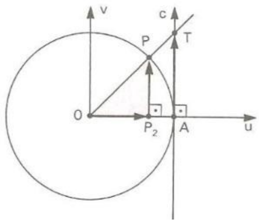
$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{sen\ x}$	$\boldsymbol{\cos x}$	$\boldsymbol{sen^2x + cos^2x}$
$\boldsymbol{0}$	0	1	1
$\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$	1	0	1
$\boldsymbol{\pi}$	0	-1	1
$\boldsymbol{\frac{3\pi}{2}}$	-1	0	1
$\boldsymbol{2\pi}$	0	1	1

Teorema 3.2: Para todo x real, $x \in [0,2\pi]$ e $x \notin \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$, vale a relação:

$$\boldsymbol{tg\ x = \frac{sen\ x}{\cos x}}$$

Demonstração 3.2: Temos que analisar duas situações distintas.

- Para $x \notin \{0, \pi, 2\pi\}$, temos que



a imagem de x é distinta de A, B, A' e B', então, por semelhança de triângulos temos:

$$\triangle\, OAT \sim \triangle\, OP_2 \Rightarrow \frac{|AT|}{|OA|} = \frac{|P_2P|}{|OP_2|}$$

Note que:

- A medida algébrica de $\overline{AT}$ é a $tg\ x$;
- A medida algébrica de $\overline{P_2P}$ é o $sen\ x$;
- A medida algébrica de $\overline{OP_2}$ é o $\cos x$;
- $\overline{OA}$ é o raio do ciclo trigonométrico, logo a medida de $\overline{OA}$ é igual 1.

Daí,

$$\frac{|AT|}{|OA|} = \frac{|P_2P|}{|OP_2|} \Rightarrow \frac{|tg\ x|}{|1|} = \frac{|sen\ x|}{|\cos x|} \Rightarrow \boxed{|tg\ x| = \frac{|sen\ x|}{|\cos x|}} \ ①$$

Agora estudando o sinal do quociente $\frac{sen\ x}{\cos x}$, através da tabela de sinais abaixo, observamos que o sinal de $tg\ x$ é igual ao de $\frac{sen\ x}{\cos x}$. ②

Quadrante	**Sinal de $tg\ x$**	**Sinal de $\frac{sen\ x}{\cos x}$**
1º	+	+

2º	-	-
3º	+	+
4º	-	-

De ① e de ② decorre a tese.

- Para $x \in \{0, \pi, 2\pi\}$, temos que:

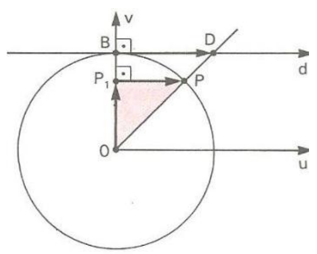
$$tg\ x = 0 = \frac{sen\ x}{\cos x}$$

Teorema 3.3: Para todo x real, $x \in [0,2\pi]$ e $x \notin \{0, \pi, 2\pi\}$, vale a relação:

$$\boldsymbol{cotg\ x = \frac{\cos x}{sen\ x}}$$

Demonstração 3.3: Temos que analisar duas situações distintas.

- Para $x \notin \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$, temos que



a imagem de x é distinta de $A, B, A' e B'$, então, por semelhança de triângulos temos:

$$\triangle\ OBD \sim \triangle\ OP_1P \Rightarrow \frac{|BD|}{|OB|} = \frac{|P_1P|}{|OP_1|}$$

Note que:

- A medida algébrica de $\overline{BD}$ é a $cotg\ x$;
- A medida algébrica de $\overline{P_1P}$ é o $\cos x$;
- A medida algébrica de $\overline{OP_1}$ é o $sen\ x$;
- $\overline{OB}$ é o raio do ciclo trigonométrico, logo a medida de $\overline{OB}$ é igual a 1.

Daí,

$$\frac{|BD|}{|OB|} = \frac{|P_1P|}{|OP_1|} \Rightarrow \frac{|cotg\ x|}{|1|} = \frac{|\cos x|}{|sen\ x|} \Rightarrow \boxed{|cotg\ x| = \frac{|\cos x|}{|sen\ x|}}\ ①$$

Agora estudando o sinal do quociente $\frac{\cos x}{sen\ x}$, através da tabela de sinais abaixo, observamos que o sinal de $cotg\ x$ é igual ao de $\frac{\cos x}{sen\ x}$.②

Quadrante	**Sinal de $\boldsymbol{cotg\ x}$**	**Sinal de $\boldsymbol{\frac{\cos x}{sen\ x}}$**
1º	+	+
2º	-	-
3º	+	+
4º	-	-

De ① e de ② decorre a tese.

- Para $x = \frac{\pi}{2}\ ou\ x = \frac{3\pi}{2}$, temos que:

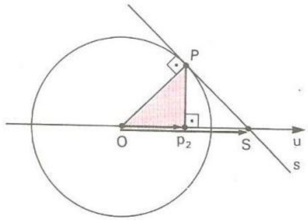
$$cotg\ x = 0 = \frac{\cos x}{sen\ x}$$

Teorema 3.4: Para todo x real, $x \in [0,2\pi]$ e $x \notin \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$, vale a relação:

$$\boldsymbol{sec\ x = \frac{1}{cos\ x}}$$

Demonstração 3.4: Temos que analisar duas situações distintas.

- Para $x \notin \{0, \pi, 2\pi\}$, temos que



a imagem de x é distante de $A, B, A'\ e\ B'$, então, por semelhança de triângulos temos:

$$\triangle\ OPS \sim \triangle\ OP_2P \Rightarrow \frac{|OS|}{|OP|} = \frac{|OP|}{|OP_2|}$$

Note que:

- A medida algébrica de $\overline{OS}$ é a $\sec x$;
- A medida algébrica de $\overline{OP_2}$ é o $\cos x$;
- $\overline{OP}$ é o raio do ciclo trigonométrico, logo a medida de $\overline{OP}$ é 1.

Daí,

$$\frac{|OS|}{|OP|} = \frac{|OP|}{|OP_2|} \Rightarrow \frac{|\sec x|}{|1|} = \frac{|1|}{|\cos x|} \Rightarrow \boxed{|\sec x| = \frac{1}{|\cos x|}}\ ①$$

Agora estudando o sinal de $\sec x$ e de $\cos x$, através da tabela de sinais abaixo, observamos que o sinal de $\sec x$ e igual ao de $cos\ x$. ②

Quadrante	**Sinal de $\sec x$**	**Sinal de $\cos x$**
1º	+	+
2º	-	-
3º	-	-
4º	+	+

De ① e de ② decorre a tese.

- Para $x \in \{0, \pi, 2\pi\}$, temos:

✓ $\sec x = 1 = \frac{1}{\cos x}, (x = 0\ ou\ x = 2\pi)$

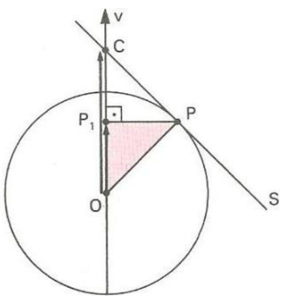
✓ $\sec x = -1 = \frac{1}{\cos x}, (x = \pi)$

Teorema 3.5: Para todo x real, $x \in [0,2\pi]$ e $x \notin \{0, \pi, 2\pi\}$, vale a relação:

$$\boldsymbol{cossec\ x = \frac{1}{sen\ x}}$$

Demonstração 3.5: Temos que analisar duas situações distintas.

- Para $x \notin \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$, temos que



a imagem de x é distinta de $A, B, A'\ e\ B'$, então, por semelhança de triângulos temos:

$$\triangle\ OPC \sim \triangle\ OP_1P \Rightarrow \frac{|OC|}{|OP|} = \frac{|OP|}{|OP_1|}$$

Note que:

- A medida algébrica de $\overline{OC}$ é a $cossec\ x$;
- A medida algébrica de $\overline{OP_1}$ é o $sen\ x$;
- $\overline{OP}$ é o raio do ciclo trigonométrico, logo a medida de $\overline{OP}$ é 1.

Daí,

$$\frac{|OC|}{|OP|} = \frac{|OP|}{|OP_1|} \Rightarrow \frac{|cossec\ x|}{|1|} = \frac{|1|}{|sen\ x|} \Rightarrow \boxed{|cossec\ x| = \frac{1}{|sen\ x|}}\ ①$$

Agora estudando o sinal de $cossec\, x$ e de $sen\, x$, através da tabela de sinais abaixo, observamos que o sinal de $cossec\ x$ é igual ao de $sen\ x$.②

Quadrante	**Sinal de $cossec\ x$**	**Sinal de $sen\ x$**
1º	+	+
2º	+	+
3º	-	-
4º	-	-

De ① e de ② decorre a tese.

- Para $x \in \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$, temos:

✓ $cossec\ x = 1 = \frac{1}{sen\ x}, \left(x = \frac{\pi}{2}\right)$;

✓ $cossec\ x = -1 = \frac{1}{sen\ x}, \left(x = \frac{3\pi}{2}\right)$.

A partir das relações fundamentais demonstradas acima, podemos encontrar outras identidades trigonométricas que nos ajudarão no decorrer deste trabalho.

Corolário 3.1: Para todo x real, $x \in [0,2\pi]$ e $x \notin \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\right\}$, valem as relações:

✓ $\boxed{cotg\ x = \frac{1}{tg\ x}}$

$$cotg\ x = \frac{\cos x}{sen\ x} = \frac{1}{\frac{sen\ x}{\cos x}} \Rightarrow \boxed{cotg\ x = \frac{1}{tg\ x}}$$

✓ $\boxed{tg^2 x + 1 = sec^2 x}$

$$tg^2x + 1 = (tg\ x)^2 + 1 = \left(\frac{sen\ x}{\cos x}\right)^2 + 1 = \frac{sen^2x}{cos^2x} + 1 = \frac{sen^2x}{cos^2x} + \frac{cos^2x}{cos^2x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow tg^2x + 1 = \frac{sen^2x + cos^2x}{cos^2x} = \frac{1}{cos^2x} = \frac{1^2}{(\cos x)^2} = \left(\frac{1}{\cos x}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{tg^2x + 1 = sec^2x}$$

✓ $\boxed{1 + cotg^2x = cossec^2x}$

$$1 + cotg^2x = 1 + (cotg\ x)^2 = 1 + \left(\frac{\cos x}{sen\ x}\right)^2 = 1 + \frac{cos^2x}{sen^2x} = \frac{sen^2x}{sen^2x} + \frac{cos^2x}{sen^2x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + cotg^2x = \frac{sen^2x + cos^2x}{sen^2x} = \frac{1}{sen^2x} = \frac{1^2}{sen^2x} = \left(\frac{1}{sen\ x}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{1 + cotg^2x = cossec^2x}$$

✓ $\boxed{cos^2x = \frac{1}{1+tg^2x}}$

$$cos^2x = (\cos x)^2 = \left(\frac{1}{\frac{1}{\cos x}}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sec x}\right)^2 = \frac{1^2}{(\sec x)^2} = \frac{1}{sec^2x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{cos^2x = \frac{1}{1 + tg^2x}}$$

✓ $\boxed{sen^2x = \frac{tg^2x}{1+tg^2x}}$

$$sen^2x = \frac{\cos^2 x\ .\ sen^2x}{\cos^2 x} = \cos^2 x\,.\frac{sen^2x}{\cos^2 x} = \frac{1}{1 + tg^2x}.\left(\frac{sen\ x}{\cos x}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow sen^2x = \frac{1}{1 + tg^2x}.(tg\ x)^2 = \frac{1}{1 + tg^2x}.tg^2x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{sen^2x = \frac{tg^2x}{1 + tg^2x}}$$

3.9 Simetria: Funções pares e funções impares

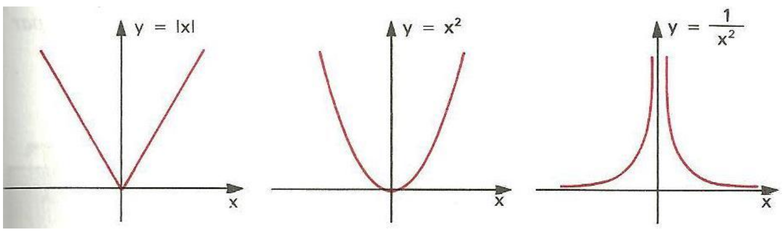
A partir do estudo da simetria do gráfico das funções em relação ao eixo vertical (eixo das ordenadas) ou em relação à origem, podemos classifica-las em função par ou função ímpar.

Definição 3.13: Uma função $f: A \to B$ é denominada $função\ par$ se, e somente se:

$$f(x) = f(-x), \forall x \in A$$

Neste caso, o gráfico da função é simétrico ao eixo vertical (eixo das ordenadas), pois:

$$(x, y) \in f \Rightarrow (-x, y) \in f$$

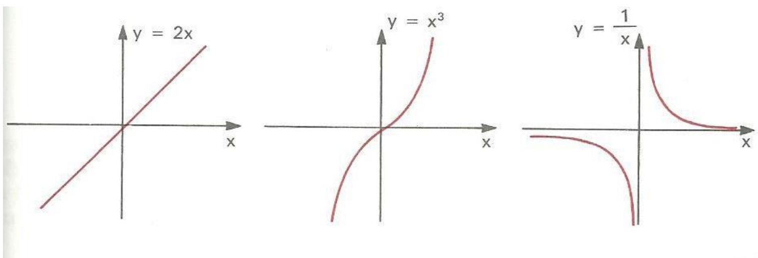


Definição 3.14: Uma função $f: A \to B$ é denominada $função\ ímpar$ se, e somente se:

$$f(-x) = -f(x), \forall x \in A$$

Neste caso, o gráfico da função é simétrico em relação à origem do sistema cartesiano, pois:

$$(x, y) \in f \Rightarrow (-x, -y) \in f$$

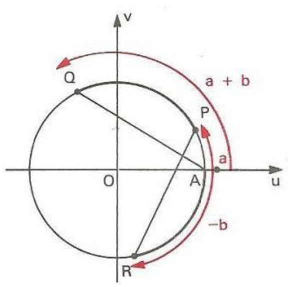


3.10 Transformações: Fórmulas de adição

Vamos agora deduzir fórmulas para obtermos o seno, o cosseno ou a tangente de certo arco a partir de dois ângulos que já conhecemos seus valores trigonométricos. Essas fórmulas nos permitem calcular as funções trigonométricas da soma e da diferença de dois arcos.

3.10.1 Cosseno da soma

Sejam $P, Q\ e\ R$ pontos do ciclo, associados aos números $a, a + b, -b$, respectivamente.



As coordenadas desses pontos, em relação ao sistema cartesiano uOv, são:

$$P(\cos a\,, sen\ a)$$

$$Q(\cos(a + b)\,, sen(a + b))$$

$$R(\cos(-b)\,, sen(-b))$$

Observe que, pela definição de função par e de função impar, a função cosseno é uma função par e a função seno é uma função ímpar, sendo assim temos:

$$\cos(-b) = \cos b\,, \forall\ b \in \mathbb{R}$$

e

$$sen(-b) = -sen\, b, \forall\, b \in \mathbb{R}$$

E assim, as coordenadas do ponto R, em relação à uOv, ficam:

$$R(\cos b\,, -sen\, b)$$

Os arcos $\widehat{AQ}$ e $\widehat{RP}$ têm a mesma medida, logo as cordas $\widehat{AQ}$ e $\widehat{PR}$ têm medidas iguais.

Agora, usando a fórmula da geometria analítica, para calcular a distância entre dois pontos, vamos calcular a distância entre os pontos A e Q e entre os pontos R e P.

A distância entre o ponto A e o ponto Q é dada por:

$$d_{AQ} = \sqrt{(x_Q - x_A)^2 + (y_Q - y_A)^2} \Longrightarrow d^2{}_{AQ} = \left(x_Q - x_A\right)^2 + \left(y_Q - y_A\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d^2{}_{AQ} = [\cos(a+b) - 1]^2 + [sen(a+b) - 0]^2 =$$

$$= [\cos(a+b)]^2 - 2.1.\cos(a+b) + 1^2 + [sen(a+b)]^2 =$$

$$= cos^2(a+b) - 2.\cos(a+b) + sen^2(a+b) + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d^2{}_{AQ} = cos^2(a+b) + sen^2(a+b) - 2.\cos(a+b) + 1$$

Do teorema 3.1, segue que:

$$\cos^2(a+b) + sen^2(a+b) = 1$$

Portanto,

$$d^2{}_{AQ} = \cos^2(a+b) + sen^2(a+b) - 2.\cos(a+b) + 1 =$$

$$= 1 - 2.\cos(a+b) + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{d^2{}_{AQ} = 2 - 2.\cos(a+b)}$$

A distância entre o ponto R e o ponto P é dada por:

$$d_{RP} = \sqrt{(x_P - x_R)^2 + (y_P + y_R)^2} \Rightarrow d^2{}_{RP} = (x_P - x_R)^2 + (y_P - y_R)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d^2{}_{RP} = (\cos a - \cos b)^2 + [sen\, a - (-sen\, b)]^2 =$$

$$= (\cos a - \cos b)^2 + (sen\, a + sen\, b)^2 =$$

$$= (\cos a)^2 - 2.\cos a\,.\cos b + (\cos b)^2 + (sen\ a)^2 + 2.sen\ a\,.sen\ b + (sen\ b)^2 =$$

$$= \cos^2 a - 2.\cos a\,.\cos b + \cos^2 b + sen^2 a + 2.sen\ a\,.sen\ b + sen^2\ b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d^2{}_{RP} = sen^2 a + \cos^2 a + sen^2\ b + \cos^2 b + 2.sen\ a\,.sen\ b - 2.\cos a\,.\cos b$$

Do teorema 3.1, segue que:

$$sen^2 a + cos^2 a = sen^2 b + \cos^2 b = 1$$

Portanto,

$$d^2{}_{RP} = sen^2 a + \cos^2 a + sen^2 b + \cos^2 b + 2.sen\ a\,.sen\ b - 2.\cos a\,.\cos b =$$

$$= 1 + 1 - 2.\cos a\,.\cos b + 2\ sen\ a\,.sen\ b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{d^2{}_{RP} = 2 - 2.\cos a\,.\cos b + 2.sen\ a\,.sen\ b}$$

As cordas $\overline{AQ}$ e $\overline{PR}$ tem a mesma medida, então:

$$d_{AQ} = d_{RP} \Rightarrow d^2{}_{AQ} = d^2{}_{RP} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 - 2.\cos(a+b) = 2 - 2.\cos a\,.\cos b + 2.sen\ a\,.sen\ b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2.\cos(a+b) = -2 + 2 - 2.\cos a\,.\cos b + 2.sen\ a\,.sen\ b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2.\cos(a+b) = -2.\cos a\,.\cos b + 2.sen\ a\,.sen\ b$$

Dividindo ambos os lados da igualdade por (-2), obtemos a fórmula do cosseno da soma:

$$\boxed{\cos(a+b) = \cos a\,.\cos b - sen\ a\,.sen\ b}$$

3.10.2 Cosseno da diferença

Vamos agora à dedução da fórmula para calcularmos o cosseno da diferença.

$$\cos(a-b) = \cos[a + (-b)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos(a-b) = \cos a\,.\cos(-b) - sen\ a\,.sen\ (-b)$$

Da definição de função ímpar e de função par segue que:

$$\cos(-b) = \cos b \quad e \quad sen\,(-b) = -sen\, b$$

Daí, temos:

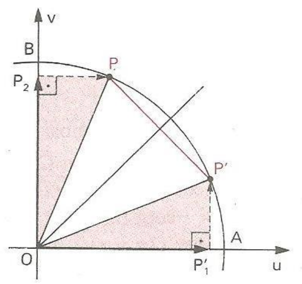
$$\cos(a - b) = \cos a\ .\cos b - sen\, a\, .(-sen\, b) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos(a - b) = \cos a\ .\cos b + sen\, a\, .sen\, b}$$

3.10.3 Seno da soma

Antes de iniciarmos o processo de dedução da fórmula do seno da soma é necessário observar o seguinte:

Dado o número real x tal que $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$, seja P a imagem de x no ciclo.



Seja P' o ponto, do ciclo trigonométrico, simétrico de P em relação a bissetriz do 1º quadrante.

Temos:

$\boxed{\widehat{AP} + \widehat{PB} = \frac{\pi}{2}}$ ① (no sentido anti-horário)

Como P é simétrico a P' em relação à bissetriz do 1º quadrante, então:

$$\boxed{\widehat{PB} = \widehat{AP'}} ②$$

De ① e de ②, vem:

$$\widehat{AP} + \widehat{PB} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \widehat{AP} + \widehat{AP'} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x + \widehat{AP'} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \widehat{AP'} = \frac{\pi}{2} - x$$

Os triângulos $\triangle\, OPP_2$ e $\triangle\, OP'P'_1$ são semelhantes, portanto, por semelhança de triângulos temos:

$$OP_2 = OP' \Rightarrow \boxed{senx = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} \ ③$$

$$P_2P = P'_1P' \Rightarrow \boxed{\cos x = sen\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} \ ④$$

A partir de agora podemos dar início ao processo de dedução da fórmula do seno da soma.

A partir de ③, temos que:

$$sen(a+b) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (a+b)\right] = \cos\left[\frac{\pi}{2} - a - b\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow sen(a+b) = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - b\right]$$

Usando a fórmula deduzida para o cosseno da diferença temos:

$$sen(a+b) = cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - b\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow sen(a+b) = cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right).\cos b + sen\left(\frac{\pi}{2} - a\right).sen\, b$$

Agora, a partir das igualdades ③ e ④, obtemos a fórmula:

$$\boxed{sen(a+b) = sen\, a\,.\cos b + \cos a\,.sen\, b}$$

3.10.4 Seno da diferença

Vamos agora à dedução da fórmula para calcularmos o seno da diferença.

$$sen(a-b) = sen[a+(-b)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow sen(a-b) = sen\ a\,.\cos(-b) + sen(-b).\cos a$$

Da definição de função par e de função ímpar, decorre que:

$$\cos(-b) = \cos b \quad e \quad sen(-b) = -sen\ b$$

Com isso chegamos à fórmula:

$$sen(a-b) = sen\ a\,.\cos b + (-sen\ b).\cos a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{sen(a-b) = sen\ a\,.\cos b - sen\ b\,.\cos a}$$

3.10.5 Tangente da soma

Levando em consideração o teorema 3.2, usaremos as fórmulas do cosseno da soma e do seno da soma pra deduzirmos a fórmula da tangente da soma.

$$tg(a+b) = \frac{sen(a+b)}{\cos(a+b)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow tg(a+b) = \frac{sen\ a\,.\cos b + sen\ b\,.\cos a}{\cos a\,.\cos b - sen\ a\,.sen\ b}$$

Vamos agora dividir o numerador e o denominador por $\cos a\,.\cos b$. Com $\cos a\,.\cos b \neq 0$.

$$tg(a+b) = \frac{\dfrac{sen\ a\,.\cos b + sen\ b\,.\cos a}{\cos a\,.\cos b}}{\dfrac{\cos a\,.\cos b - sen\ a\,.\ sen\ b}{\cos a\,.\cos b}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow tg(a+b) = \frac{\dfrac{sen\ a\,.\cancel{\cos b}}{\cos a\,.\cancel{\cos b}} + \dfrac{sen\ b\,.\cancel{\cos a}}{\cancel{\cos a}.\cos b}}{\dfrac{\cancel{\cos a}.\cancel{\cos b}}{\cancel{\cos a}.\cancel{\cos b}} - \dfrac{sen\ a\,.\ sen\ b}{\cos a\,.\cos b}} = \frac{\dfrac{sen\ a}{\cos a} + \dfrac{sen\ b}{\cos b}}{1 - \dfrac{sen\ a}{\cos a}.\dfrac{sen\ b}{sen\ b}}$$

Aplicando o teorema 3.2, obtemos a fórmula:

$$\boxed{tg(a+b) = \frac{tg\ a + tg}{1 - tg\ a\,.\ tg\ b}}$$

Note que está fórmula só é aplicável se:

$$a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \qquad b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \;\; e \;\; a + b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Pois, o domínio da função tangente é $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$.

3.10.6 Tangente da diferença

Vamos agora à dedução da fórmula para calcularmos a tangente da diferença.

$$tg(a - b) = tb[a + (-b)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow tg(a - b) = \frac{tg\ a + tg(-b)}{1 - tg\ a\ .\ tg(-b)}$$

Da definição de função ímpar, vem que:

$$tg(-b) = -tg\ b$$

Portanto, temos:

$$tg(a - b) = \frac{tg\ a + (-tg\ b)}{1 - tg\ a\ .\ (-tg\ b)} = \frac{tg\ a - tg\ b}{1 - (-tg\ a\ .\ tg\ b)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{tg(a - b) = \frac{tg\ a - tg\ b}{1 + tg\ a\ .\ tg\ b}}$$

Note que esta fórmula só é aplicável se:

$$a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \qquad b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \;\; e \;\; a - b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Pois, o domínio da função tangente é $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$.

3.10.7 Cotangente da soma

Levando em consideração o teorema 3.3, usaremos a fórmula do cosseno da soma e a do seno da soma para chegarmos à fórmula da cotangente da soma.

$$cotg(a+b) = \frac{\cos(a+b)}{sen(a+b)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow cotg(a+b) = \frac{\cos a \,.\cos b - sen\, a\,.\ sen\, b}{sena\ a\,.\cos b + sen\ b\,.\cos a}$$

Vamos a gora dividir o denominador e o numerador por $sen\ a\ .\ sen\ b$. Com $sen\ a\ .\ sen\ b \neq 0$.

$$cotg(a+b) = \frac{\frac{\cos a\,.\cos b - sen\ a\ .\ sen\ b}{sen\ a\ .\ sen\ b}}{\frac{sen\ a\,.\cos b + sen\ b\,.\cos a}{sen\ a\ .\ sen\ b}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow cotg(a+b) = \frac{\frac{\cos a\,.\cos b}{sen\ a\ .\ sen\ b} - \frac{\cancel{sen\ a}\ .\ \cancel{sen\ b}}{\cancel{sen\ a}\ .\ \cancel{sen\ b}}}{\frac{\cancel{sen\ a}\,.\cos b}{\cancel{sen\ a}\ .\ sen\ b} + \frac{\cancel{sen\ b}.\cos a}{sen\ a\ .\ \cancel{sen\ b}}} = \frac{\frac{\cos a}{sen\ a}.\frac{\cos b}{sen\ b} - 1}{\frac{\cos b}{sen\ b} + \frac{\cos a}{sen\ a}}$$

Aplicando o teorema 3.3, obtemos a fórmula:

$$\boxed{cotg(a+b) = \frac{cotg\ a\ .\ cotg\ b - 1}{cotg\ a + cotg\ b}}$$

Note que esta formula só é aplicável se:

$$a \neq k\pi, \qquad b \neq k\pi \ \ e \ \ a+b \neq k\pi$$

Pois o domínio da função cotangente é $D = \{x \in \mathbb{R} \times \mid x \neq k\pi\}$.

3.10.8 Cotangente da diferença

Vamos agora à dedução da fórmula para calcularmos a cotangente da diferença.

$$cotg(a-b) = cotg[a+(-b)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow cotg(a-b) = \frac{cotg\ a\ .\ cotg(-b) - 1}{cotg\ a + cotg(-b)}$$

Da definição de função ímpar, vem que:

$$cotg(-b) = -cotg\ b$$

Portanto, temos:

$$cotg(a-b) = \frac{cotg\ a\ .\ (-cotg\ b) - 1}{cotg\ a + (-cotg\ b)}$$

Agora, multiplicando o numerador e o denominador por (-1) chegamos à fórmula:

$$cotg(a-b) = \frac{(-cotg\ a\ .\ cotg\ b - 1)}{(cotg\ a - cotg\ b)} . \frac{(-1)}{(-1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{cotg(a-b) = \frac{cotg\ a\ .\ cotg\ b + 1}{cotg\ b - cotg\ a}}$$

Note que essa fórmula só é aplicável se:

$$a \neq k\pi, \qquad b \neq k\pi \ \ e \ \ a-b \neq k\pi$$

Pois, o domínio da função cotangente é $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi\}$.

3.11 Fórmulas de Werner

Ao combinarmos adequadamente as fórmulas de adição, vistas no tópico anterior, chegamos relações que nos ajudam a transformar as somas e as diferenças trigonométricas em produtos. Essas fórmulas recebem o nome de fórmulas de reversão ou fórmulas de Werner, em homenagem ao sacerdote e matemático alemão Johann Werner[6], primeiro a utilizar essas relações.

Agora vamos à demonstração de como chegar às fórmulas de Werner.

[6] Johann Werner (1468-1522). Sacerdote e matemático nascido em Nuremberg, Alemanha.

No tópico das fórmulas de adição vimos que:

$$\cos(a+b) = \cos a \,.\cos b - sen\ a\,.sen\ b \quad ①$$

$$\cos(a-b) = \cos a \,.\cos b + sen\ a\,.sen\ b \quad ②$$

$$sen(a+b) = sen\ a\,.\cos b + sen\ b\,.\cos a \quad ③$$

$$sen(a-b) = sen\ a\,.\cos b - sen\ b\,.\cos a \quad ④$$

Fazendo ① + ②, temos:

$$\cos(a+b) + \cos(a-b) =$$

$$= (\cos a\,.\cos b - sen\ a\,.sen\ b) + (\cos a\,.\cos b + sen\ a\,.sen\ b) =$$

$$= \cos a\,.\cos b - sen\ a\,.sen\ b + \cos a\,.\cos b + sen\ a\,.sen\ b =$$

$$= \cancel{sen\ a\,.sen\ b} - \cancel{sen\ a\,.sen\ b} + \cos a\,.\cos b + \cos a\,.\cos b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2.\cos a\,.\cos b} \quad ⑤$$

Fazendo ① − ②, temos:

$$\cos(a+b) - \cos(a-b) =$$

$$= (\cos a\,.\cos b - sen\ a\,.sen\ b) - (\cos a\,.\cos b + sen\ a\,.sen\ b) =$$

$$= \cos a\,.\cos b - sen\ a\,.sen\ b - \cos a\,.\cos b - sen\ a\,.sen\ b =$$

$$= -sen\ a\,.sen\ b - sen\ a\,.sen\ b + \cancel{\cos a\,.\cos b} - \cancel{\cos a\,.\cos b} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos(a+b) - \cos(a-b) = -2.sen\ a\,.sen\ b} \quad ⑥$$

Fazendo ③ + ④, temos:

$$sen(a+b) + sen(a-b) =$$

$$= (sen\ a\,.\cos b + sen\ b\,.\cos a) + (sen\ a\,.\cos b - sen\ b\,.\cos a) =$$

$$= sen\ a\,.\cos b + sen\ b\,.\cos a + sen\ a\,.\cos b - sen\ b\,.\cos a =$$

$$= sen\ a\,.\cos b + sen\ a\,.\cos b + \cancel{sen\ b\,.\cos a} - \cancel{sen\ b\,.\cos a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{sen(a+b)+sen(a-b)=2.sen\ a\ .\cos b} \quad ⑦$$

E fazendo ③ − ④, temos:

$$sen(a+b)-sen(a-b)=$$

$$=(sen\ a\ .\cos b+sen\ b\ .\cos a)-(sen\ a\ .\cos b-sen\ b\ .\cos a)=$$

$$=sen\ a\ .\cos b+sen\ b\ .\cos a-sen\ a\ .\cos b+sen\ b\ .\cos a=$$

$$=\cancel{sen\ a\ .\cos b}-\cancel{sen\ a\ .\cos b}+sen\ b\ .\cos a+sen\ b\ .\cos a\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{sen(a+b)-sen(a-b)=2.sen\ b\ .\cos a} \quad ⑧$$

As relações ⑤, ⑥, ⑦ e ⑧ são denominadas fórmulas de reversão ou fórmulas de Werner.

Fazendo em ⑤, ⑥, ⑦ e ⑧:

- ✓ $a+b=p$
- ✓ $a-b=q$ portanto, $a=\frac{p+q}{2}$ e $b=\frac{p-q}{2}$

Chegamos às fórmulas de transformação em produto:

$$\boxed{\cos p+\cos q=2\ .\cos\frac{p+q}{2}.\cos\frac{p-q}{2}}$$

$$\boxed{\cos p-\cos q=-2\ .sen\ \frac{p+q}{2}.sen\ \frac{p-q}{2}}$$

$$\boxed{sen\ p+sen\ q=2\ .sen\ \frac{p+q}{2}.\cos\frac{p-q}{2}}$$

$$\boxed{sen\ p-sen\ q=2\ .sen\ \frac{p-q}{2}.\cos\frac{p+q}{2}}$$

A partir destas fórmulas deduzimos mais duas fórmulas de transformação em produto:

Do teorema 3.2 temos que:

$$tg\ p+tg\ q=\frac{sen\ p}{\cos p}+\frac{sen\ q}{\cos q}=$$

$$= \frac{sen\ p \,.\cos q + sen\ q \,.\cos p}{\cos p \,.\cos q}$$

Aplicando a fórmula do seno da soma:

$$\boxed{tg\ p + tg\ q = \frac{sen(p+q)}{\cos p \,.\cos q}}$$

E ainda,

$$tg\ p - tg\ q = \frac{sen\ p}{\cos p} - \frac{sen\ q}{\cos q} =$$

$$= \frac{sen\ p \,.\cos q - sen\ q \,.\cos p}{\cos p \,.\cos q}$$

Aplicando a fórmula do seno da diferença:

$$\boxed{tg\ p - tg\ q = \frac{sen(p-q)}{\cos p \,.\cos q}}$$

4. CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

4.1 Limites

Definição 4.1: Seja $f(x)$ definida num intervalo aberto I, contendo a, exceto possivelmente no próprio a. Dizemos que limite de $f(x)$ quando x aproxima-se de a é L, e escrevemos,

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

Se para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$.

Apresentaremos agora propriedades que serão usadas para facilitar o processo de encontrar muitos limites.

- ✓ Se $a, m\ e\ n$ são números reais, então:

$$\lim_{x\to a}(m.x + n) = m.a + n$$

- ✓ Se $\lim_{x\to a} f(x)$ e $\lim_{x\to a} g(x)$ existem, e c é um número real qualquer, então:
  a) $\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$;
  b) $\lim_{x\to a} c.f(x) = c.\lim_{x\to a} f(x)$;
  c) $\lim_{x\to a} f(x).g(x) = \lim_{x\to a} f(x).\lim_{x\to a} g(x)$;
  d) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$, desde que $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$;
  e) $\lim_{x\to a}[f(x)]^n = [\lim_{x\to a} f(x)]^n$ para qualquer $n \in \mathbb{Z}_+^*$;
  f) $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$, se $\lim_{x\to a} f(x) > 0$ e $n \in \mathbb{Z}$ ou se $\lim_{x\to a} f(x) \leq 0$ e n é inteiro positivo ímpar;
  g) $\lim_{x\to a} \ln[f(x)] = \ln[\lim_{x\to a} f(x)]$, se $\lim_{x\to a} f(x) > 0$;
  h) $\lim_{x\to a} \cos[f(x)] = \cos[\lim_{x\to a} f(x)]$;
  i) $\lim_{x\to a} sen[f(x)] = sen[\lim_{x\to a} f(x)]$;
  j) $\lim_{x\to a} e^{f(x)} = e^{\lim_{x\to a} f(x)}$

- ✓ Se $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ para todo x em um intervalo aberto contendo a, exceto possivelmente em $x = a$, e se

$$\lim_{x \to a} f(x) = L = \lim_{x \to a} g(x)$$

Então,

$$\lim_{x \to a} h(x) = L.$$

Essa última propriedade também é conhecida como Teorema do "Sanduíche".

4.1.1 Limite trigonométrico fundamental

A trigonometria aprece mais enfaticamente no cálculo de limites envolvendo funções trigonométricas. Iremos recorrer frequentemente às fórmulas, relações e definições vistas no estudo de trigonometria. Essas serão essenciais para que possamos realizar transformações a fim de aplicar os teoremas e propriedades de limite e com isso conseguirmos encontrar os valores dos limites.

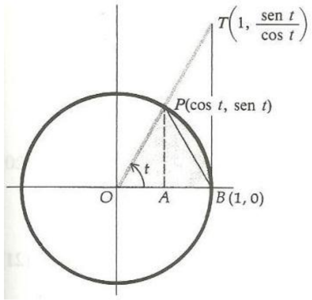
O teorema que iremos demonstrar abaixo é o conhecido limite trigonométrico fundamental, que é importantíssimo no estudo das taxas instantâneas de variação das funções trigonométricas.

Teorema 4.1:

$$\lim_{t \to 0} \frac{sen\ t}{t} = 1$$

Demonstração 4.1: Seja x pertencente ao primeiro quadrante, ou seja, $0 < t < \frac{\pi}{2}$.

Observe a figura abaixo.



A área do setor circular BOP, da circunferência com raio unitário, é dado por:

$$S = \frac{1}{2}.r^2.t = \frac{1}{2}.1^2.t \Rightarrow S = \frac{t}{2}$$

Considerando o triângulo $\triangle\, BOP$, temos que sua área é dada por:

$$K_1 = \frac{b_1.h_1}{2}$$

Note que $|\overline{OB}|$ é a base e $|\overline{AP}|$ é a altura de $\triangle\, BOP$. Sendo assim,

$$K_1 = \frac{|\overline{OB}|.|\overline{AP}|}{2}$$

Como $|\overline{OB}| = 1$ e $|\overline{AP}| = sen\ t$, temos que:

$$K_1 = \frac{1.sen\ t}{2} \Rightarrow K_1 = \frac{sen\ t}{2}$$

A reta que passa pelos pontos $O(0,0)$ e $P(\cos t\,, sen\ t)$tem por inclinação $\frac{sen\ t}{\cos t}$, logo sua equação é

$$y = \frac{sen\ t}{\cos t}.x$$

$T\left(1, \frac{sen\ t}{\cos t}\right)$ é o ponto de intercessão dessa reta com a reta $x = 1$.

Considerando o triângulo $\triangle\, BOT$, temos que sua área é dada por:

$$K_2 = \frac{b_2.h_2}{2}$$

Note que $|\overline{OB}|$ é a base e $|\overline{BT}|$ é a altura de $\triangle\, BOT$. Sendo assim,

$$K_2 = \frac{|\overline{OB}|.|\overline{BT}|}{2}$$

Como $|\overline{OB}| = 1$ e $|\overline{BT}| = \frac{sen\ t}{\cos t}$, temos que:

$$K_2 = \frac{1.\frac{sen\ t}{\cos t}}{2} = \frac{\frac{sen\ t}{\cos t}}{2} = \frac{sen\ t}{\cos t}.\frac{1}{2} \Rightarrow K_2 = \frac{sen\ t}{2.\cos t}$$

Note que:

$$área\ de\ \ \triangle\ BOP < área\ do\ setor\ circular\ BOP < área\ de\ \triangle\ BOT$$

Daí,

$$K_1 < S < K_2$$

$$\frac{sen\ t}{2} < \frac{t}{2} < \frac{sen\ t}{2.\cos t}$$

Multiplicando cada membro da desigualdade por $\frac{2}{sen\ t} > 0$ (pois $0 < t < \frac{\pi}{2}$) a desigualdade fica da forma:

$$1 < \frac{t}{sen\ t} < \frac{1}{\cos t}$$

Tomando o inverso de cada membro e invertendo os sinais das desigualdades, chegamos a

$$\cos t < \frac{sen\ t}{t} < 1 \quad ①$$

Da desigualdade à direita, segue que:

$$\frac{sen\ t}{t} < 1 \Rightarrow sen\ t < t \quad ②$$

Da formula trigonométrica 3.10.1, segue que:

$$\cos(2a) = \cos(a + a) = \cos a\,.\cos a - sen\ a\ .sen\ a \Rightarrow \cos(2a) = \cos^2(a) - sen^2(a) \quad ③$$

Do teorema 3.1, decorre:

$$sen^2(a) + \cos^2(a) = 1 \Rightarrow cos^2\ = 1 - sen^2 a \quad ④$$

Substituindo ④ em ③, obtemos:

$$\cos(2a) = 1 - sen^2 a - sen^2 a \Rightarrow \cos(2a) = 1 - 2.sen^2 a \quad ⑤$$

Fazendo $2a = t \Rightarrow a = \frac{t}{2}$ em ⑤, a relação trigonométrica obtida será:

$$\cos t = 1 - 2.sen^2\left(\frac{t}{2}\right) \Rightarrow 2.sen^2\left(\frac{t}{2}\right) = 1 - \cos t \Rightarrow sen^2\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1-\cos t}{2} \quad ⑥$$

Agora, substituindo t por $\frac{t}{2}$ e elevando ao quadrado ambos os membros da desigualdade ②, temos:

$$\left[sen\left(\frac{t}{2}\right)\right]^2 < \left(\frac{t}{2}\right)^2 \Rightarrow sen^2\left(\frac{t}{2}\right) < \frac{t^2}{4} \quad ⑦$$

Substituindo ⑥ em ⑦,

$$\frac{1-\cos t}{2} < \frac{t^2}{4}$$

Multiplicando cada membro da desigualdade acima por 2,

$$\frac{2.(1-\cos t)}{2} < \frac{2.t^2}{4} \Rightarrow 1 - \cos t < \frac{t^2}{2} \Rightarrow 1 - \frac{t^2}{2} < \cos t \quad ⑧$$

Como $1 - \frac{t^2}{2} < \cos t$, $\cos t < \frac{sen\ t}{t} < 1$ e $0 < t < \frac{\pi}{2}$, temos:

$$1 - \frac{t^2}{2} < \frac{sen\ t}{t} < 1 \quad se\ 0 < t < \frac{\pi}{2} \quad ⑨$$

Se $-\frac{\pi}{2} < t < 0$, então $0 < -t < \frac{\pi}{2}$; e assim da desigualdade ⑨,

$$1 - \frac{(-t)^2}{2} < \frac{sen(-t)}{(-t)} < 1 \quad se -\frac{\pi}{2} < t < 0 \quad ⑩$$

$f(t) = sen\ t$ é uma função par, logo conforme definição 3.13:

$$sen(-t) = -sen\ t$$

Assim, podemos escrever a desigualdade ⑩ como,

$$1 - \frac{t^2}{2} < \frac{-sen\ t}{-t} < 1 \quad se -\frac{\pi}{2} < t < 0$$

E, portanto,

$$1-\frac{t^2}{2}<\frac{sen\ t}{t}<1 \quad se -\frac{\pi}{2}<t<0 \quad (11)$$

De (9) e (11) podemos concluir que:

$$1-\frac{t^2}{2}<\frac{sen\ t}{t}<1 \quad se -\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\ e\ t\neq 0 \quad (12)$$

Por fim, usando as propriedades de limite, temos que:

- ✓ $\lim_{t\to 0}\left(1-\frac{t^2}{2}\right)=1-\frac{0^2}{2}=1$
- ✓ $\lim_{t\to 0} 1=1$

De (12) e usando o teorema do "sanduiche", concluímos a demonstração do teorema,

$$\lim_{t\to 0}\left(1-\frac{t^2}{2}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{sen\ t}{t}=\lim_{t\to 0}1$$

Portanto,

$$\lim_{t\to 0}\frac{sen\ t}{t}=1$$

Exemplo 4.1: Ache o limite, se existir:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen\ 3x}{sen\ 4x}$$

Solução:

Devemos, inicialmente, escrever o quociente $\frac{sen\ 3x}{sen\ 4x}$ de formas que possa ser aplicado o teorema 4.1. Multiplicando o numerador por $\frac{3x}{3x}$ e o denominador por $\frac{4x}{4x}$, se $x\neq 0$, temos:

$$\frac{\left(\frac{sen\ 3x}{3x}\right).3\cancel{x}}{\left(\frac{sen\ 4x}{4x}\right).4\cancel{x}}=\frac{3.\left(\frac{sen\ 3x}{3x}\right)}{4.\left(\frac{sen\ 4x}{4x}\right)}$$

Daí,

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen\ 3x}{sen\ 4x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{3.\left(\frac{sen\ 3x}{3x}\right)}{4.\left(\frac{sen\ 4x}{4x}\right)}\right]$$

Usando as propriedades de limite,

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{3.\left(\frac{sen\ 3x}{3x}\right)}{4.\left(\frac{sen\ 4x}{4x}\right)}\right] = \frac{3.\lim_{x\to 0}\left(\frac{sen\ 3x}{3x}\right)}{4.\lim_{x\to 0}\left(\frac{sen\ 4x}{4x}\right)}$$

Quando x tende a zero, $3x$ e $4x$ também tendem a zero. Logo, usando o teorema 4.1, temos:

- ✓ $\lim_{x\to 0}\frac{sen\ 3x}{3x} = \lim_{3x\to 0}\frac{sen\ 3x}{3x} = 1$
- ✓ $\lim_{x\to 0}\frac{sen\ 4x}{4x} = \lim_{3x\to 0}\frac{sen\ 4x}{4x} = 1$

Portanto,

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen\ 3x}{sen\ 4x} = \frac{3.\lim_{x\to 0}\left(\frac{sen\ 3x}{3x}\right)}{4.\lim_{x\to 0}\left(\frac{sen\ 4x}{4x}\right)} = \frac{3}{4}.\frac{1}{1} \Rightarrow \boxed{\lim_{x\to 0}\frac{sen\ 3x}{sen\ 4x} = \frac{3}{4}}$$

Usando o teorema 4.1, podemos demonstrar mais um teorema envolvendo limite trigonométrico.

Teorema 4.2:

$$\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t} = 0$$

Demonstração 4.2: Inicialmente devemos multiplicar o denominador e o numerador do quociente $\frac{1-\cos t}{t}$ por $\frac{1+\cos t}{1+\cos t}$.

$$\frac{1-\cos t}{t}.\frac{1+\cos t}{1+\cos t} = \frac{(1-\cos t).(1+\cos t)}{t.(1+\cos t)} = \frac{1^2-(\cos t)^2}{t.(1+\cos t)} = \frac{1-cos^2 t}{t.(1+\cos t)}$$

Do teorema 3.1, decorre que:

$$sen^2 t + cos^2 t = 1 \Rightarrow sen^2 t = 1 - cos^2 t$$

Com isso,

$$\frac{1-cos^2 t}{t.(1+\cos t)} = \frac{sen^2 t}{t.(1+\cos t)}$$

Daí,

$$\lim_{t \to 0} \frac{1 - \cos t}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{sen^2 t}{t.(1 + \cos t)} = \lim_{t \to 0} \left(\frac{sen\ t}{t} . \frac{sen\ t}{1 + \cos t} \right)$$

Usando as propriedades de limites, temos:

$$\lim_{t \to 0} \left(\frac{sen\ t}{t} . \frac{sen\ t}{1 + \cos t} \right) = \lim_{t \to 0} \frac{sen\ t}{t} . \lim_{t \to 0} \frac{sen\ t}{1 + \cos t}$$

Do teorema 4.1,

$$\lim_{t \to 0} \frac{sen\ t}{t} = 1$$

As função seno e a função cosseno são continuas em 0. Logo,

$$\lim_{t \to 0} \frac{sen\ t}{1 + \cos t} = \frac{0}{1 + 1} = \frac{0}{2} = 0$$

Portanto,

$$\lim_{t \to 0} \frac{1 - \cos t}{t} = 1.0 \Rightarrow \lim_{t \to 0} \frac{1 - \cos t}{t} = 0$$

Exemplo 4.2: Ache o limite, se existir:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{sen\ x}$$

Solução:

Se aplicarmos as propriedades de limites obteremos uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$, pois:

$$\lim_{x \to 0} 1 - \cos x = 0\ e\ \lim_{x \to 0} sen\ x = 0$$

Deveremos, então, multiplicar o numerador e o denominador por $\frac{1}{x}$, $x \neq 0$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{sen\ x} = \lim_{x \to 0} \left[\frac{(1 - \cos x).\frac{1}{x}}{(sen\ x).\frac{1}{x}} \right] = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\frac{1 - \cos x}{x}}{\frac{sen\ x}{x}} \right)$$

Usando as propriedades de limites e os teoremas 4.1 e 4.2, temos:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{1-\cos x}{x}}{\frac{sen\ x}{x}}\right)=\frac{\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}}{\lim_{x\to 0}\frac{sen\ x}{x}}=\frac{0}{1}=0$$

Portanto,

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{sen\ x}=0}$$

Exemplo 4.3: Ache o limite, se existir:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg\ x}{x}$$

Solução:

Usando o teorema 3.2,

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg\ x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{sen\ x}{\cos x}}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{sen\ x}{\cos x}.\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{sen\ x}{x}.\frac{1}{\cos x}\right)$$

Agora, aplicando as propriedades de limites, temos:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg\ x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{sen\ x}{x}.\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}$$

Do teorema 4.1,

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen\ x}{x}=1$$

Usando as propriedades de limites,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{1}=1$$

Portanto,

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg\ x}{x}=1.1\Rightarrow\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{tg\ x}{x}=1}$$

4.2 Derivadas

Nesta seção, vamos realizar o estudo da derivada de uma função com foco principalmente no estudo das derivadas das funções trigonométricas. Iremos apresentar a definição da derivada de uma função, as regras de derivação e demonstraremos as integrais de todas as funções trigonométricas. Para isso, utilizaremos fórmulas, relações e definições estudadas em trigonometria.

4.2.1 Derivada de uma função

Definição 4.2: A derivada de uma função $y = f(x)$ é a função denotada por $f'(x)$, tal que, seu valor em qualquer $x \in D(f)$ é dado por:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

se este limite existir.

Uma função é derivável quando existe a derivada em todos os pontos de seu domínio.

As notações que podem ser usadas no lugar de $y' = f'(x)$ são as seguintes:

- ✓ $D_x f(x)$
- ✓ $D_x y$
- ✓ $\frac{dy}{dx}$

4.2.2 Regras de derivação

Apresentaremos agora algumas regras que permitem o cálculo das derivadas sem o uso da definição.

- *Derivada de uma função constante:* Se c é uma função constante e $f(x) = c$ para todo x, então $f'(x) = 0$.
- *Regra da potência:* Se n é um número inteiro positivo e $f(x) = x^n$, então $f'(x) = n.x^{n-1}$. Se $f(x) = x^{-n}$ onde n é um inteiro positivo e $x \neq 0$, então $f'(x) = -n.x^{-n-1}$.
- *Derivada do produto de uma constante por uma função:* Sejam f uma função, c uma constante e g a função definida por $g(x) = c.f(x)$. Se $f'(x)$ existe, então $g'(x) = c.f'(x)$.
- *Derivada de uma soma:* Sejam f e g duas funções e h a função definida por $h(x) = f(x) + g(x)$. Se $f'(x)$ e $g'(x)$ existem, então $h'(x) = f'(x) + g'(x)$.
- *Derivada de um produto:* Sejam f e g funções e h a função definida por $h(x) = f(x).g(x)$. Se $f'(x)$ e $g'(x)$ existem, então:

$$h'(x) = f(x).g'(x) + f'(x).g(x)$$

- *Derivada de um quociente:* Sejam f e g funções e h a função definida por $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, onde $g(x) \neq 0$. Se $f'(x)$ e $g'(x)$ existem, então:

$$h(x) = \frac{g(x).f'(x) - f(x).g'(x)}{[g(x)]^2}$$

- *Regra da cadeia (Derivada da função composta):* Se $y = g(u)$, $u = f(x)$ e as derivadas $\frac{dy}{du}$ e $\frac{du}{dx}$ existem, então a função composta $y = g[f(x)]$ tem derivada que é dada por:

$$y'(x) = g'(u).f'(x).$$

4.2.3 Derivadas das funções trigonométricas

O ponto de partida para a obtenção das derivadas das funções trigonométricas será as formulas de transformação em produto. Iremos utilizar também as regras de derivação e algumas das principais relações trigonométricas estudadas.

4.2.3.1 Derivada da função seno

Teorema 4.3: Se $f(x) = sen\ x$, então $f'(x) = \cos x$.

Demonstração 4.3:

Seja $f(x) = \cos x$. Para obtermos $f'(x)$ devemos aplicar a definição 4.2. Então:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{sen(\Delta x + x) - sen(x)}{\Delta x}$$

Das fórmulas trigonométricas de transformação em produto,

$$\operatorname{sen}(x + \Delta x) - \operatorname{sen} x = 2. sen\left(\frac{x + \Delta x - x}{2}\right). \cos\left(\frac{x + \Delta x + x}{2}\right) =$$

$$= 2. sen\left(\frac{\Delta x}{2}\right). \cos\left(\frac{2x + \Delta x}{2}\right) = 2. sen\left(\frac{\Delta x}{2}\right). \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

Daí,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2. sen\left(\frac{\Delta x}{2}\right). \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{2. sen\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}. \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right] =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\cancel{2}. sen\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\cancel{2}. \frac{\Delta x}{2}}. \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right] = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{sen\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}. \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right]$$

Das propriedades de limites,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{sen\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}. \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{sen\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}. \cos\left[\lim_{\Delta x \to 0} \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right] =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{sen\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}. \cos x$$

Do teorema 4.1,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{sen\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} = 1$$

Portanto,

$$f'(x) = 1.\cos x \Rightarrow \boxed{f'(x) = \cos x}$$

4.2.3.2 Derivada da função cosseno

Teorema 4.4: Se $f(x) = \cos x$, então $f'(x) = -sen\ x$.

Demonstração 4.4: Seja $f(x) = \cos x$. Para obtermos $f'(x)$ devemos aplicar a definição 4.2. Então:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x}$$

Das fórmulas trigonométricas de transformação em produto,

$$\cos(x + \Delta x) - \cos x = -2.sen\left(\frac{x + \Delta x + x}{2}\right).sen\left(\frac{x + \Delta x - x}{2}\right) =$$

$$= -2.sen\left(\frac{2x + \Delta x}{2}\right).sen\left(\frac{\Delta x}{2}\right) = -2.sen\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).sen\left(\frac{\Delta x}{2}\right)$$

Daí,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2.sen\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).sen\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[-sen\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).2.\frac{sen\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}\right] =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[-sen\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).\cancel{2}.\frac{sen\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\cancel{2}.\frac{\Delta x}{2}}\right] = \lim_{\Delta x \to 0} \left[-sen\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).\frac{sen\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}\right]$$

Das propriedades de limites,

$$f' = \lim_{\Delta \to 0} -sen\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right). \lim_{\Delta x \to 0} \frac{sen\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} = -sen\left[\lim_{\Delta x \to 0}\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right]. \lim_{\Delta x \to 0} \frac{sen\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} =$$

$$= -sen\, x. \lim_{\Delta x \to 0} \frac{sen\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}$$

Do teorema 4.1,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{sen\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} = 1$$

Portanto,

$$f'(x) = -sen\, x\, .1 \Rightarrow \boxed{f'(x) = -sen\, x}$$

4.2.3.3 Derivada da função tangente

Teorema 4.5: Se $f(x) = tg\ x$, então $f'(x) = sec^2 x$.

Demonstração 4.5: Seja$f(x) = tg\ x$. Para obtermos $f'(x)$ devemos aplicar a definição 4.2. Então:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{tg(x + \Delta x) - tg\ x}{\Delta x}$$

Das fórmulas trigonométricas de transformação em produto,

$$tg(x + \Delta x) - tg\ x = \frac{sen(x + \Delta x - x)}{\cos(x + \Delta x) . \cos x} = \frac{sen\ \Delta x}{\cos(x + \Delta x) . \cos x}$$

Daí,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\frac{sen\ \Delta x}{\cos(x + \Delta x) . \cos x}}{\Delta x}\right] = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{sen\ \Delta x}{\cos(x + \Delta x) . \cos x} . \frac{1}{\Delta x}\right] =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{1}{\cos(x + \Delta x) \,.\, \cos x} . \frac{sen\ \Delta x}{\Delta x} \right]$$

Das propriedades de limites,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\cos(x + \Delta x) \,.\, \cos x} . \lim_{\Delta x \to 0} \frac{sen\ \Delta x}{\Delta x} = \frac{\lim_{\Delta x \to 0} 1}{\lim_{\Delta x \to 0} [\cos(x + \Delta x) \,.\, \cos x]} . \lim_{\Delta x \to 0} \frac{sen\ \Delta x}{\Delta x} =$$

$$= \frac{1}{\cos\left[\lim_{\Delta x \to 0} (x + \Delta x)\right] . \cos\left(\lim_{\Delta x \to 0} x\right)} . \lim_{\Delta x \to 0} \frac{sen \Delta x}{\Delta x} = \frac{1}{\cos x \,.\, \cos x} . \lim_{\Delta x \to 0} \frac{sen\ \Delta x}{\Delta x}$$

Do teorema 4.1,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{sen\ \Delta x}{\Delta x} = 1$$

Portanto,

$$f'(x) = \frac{1}{\cos x \,.\, \cos x} . 1 = \frac{1^2}{(\cos x)^2} = \left(\frac{1}{\cos x}\right)^2$$

E usando o teorema 3.4:

$$f'(x) = (\sec x)^2 \Rightarrow \boxed{f'(x) = sec^2 x}$$

A partir destas da derivada das funções trigonométricas vistas acima e aplicando as relações trigonométricas e as regras de derivação, obtemos as derivadas das demais funções trigonométricas.

4.2.3.4 Derivada da função cotangente

Teorema 4.6: Se $f(x) = cotg\ x$, então $f'(x) = -cossec^2 x$.

Demonstração 4.6: Seja $f(x) = cotg\ x$. Do teorema 3.3,

$$f(x) = cotg\ x \Rightarrow f(x) = \frac{\cos x}{sen\ x}$$

Das regras de derivação,

$$f'(x) = \frac{sen\,x.(-sen\,x) - \cos x \,.\cos x}{(sen\,x)^2} = \frac{-sen^2x - cos^2x}{(sen\,x)^2} = \frac{-(sen^2x + cos^2x)}{(sen\,x)^2}$$

Aplicando o teorema 3.1, temos:

$$f'(x) = -\frac{1}{(sen\,x)^2} = -\frac{1^2}{(sen\,x)^2} = -\left(\frac{1}{sen\,x}\right)^2$$

Portanto, aplicando o teorema 3.5,

$$f'(x) = -(cossec\,x)^2 \Rightarrow \boxed{f'(x) = -cossec^2x}$$

4.2.3.5 Derivada da função secante

Teorema 4.7: Se $f(x) = \sec x$, então $f'(x) = \sec x \,.\, tg\,x$.

Demonstração 4.7: Seja $f(x) = \sec x$. Do teorema 3.4, temos:

$$f(x) = \sec x \Rightarrow f(x) = \frac{1}{\cos x}$$

Das regras de derivação,

$$f'(x) = \frac{\cos x \,.\, 0 - 1.(-sen\,x)}{(\cos x)^2} = \frac{sen\,x}{\cos x \,.\cos x} = \frac{1}{\cos x}.\frac{sen\,x}{\cos x}$$

Do teorema 3.4,

$$\frac{1}{\cos x} = \sec x$$

Do teorema 3.2,

$$\frac{sen\,x}{\cos x} = tg\,x$$

Portanto,

$$\boxed{f'(x) = \sec x \,.\, tg\ x}$$

4.2.3.6 Derivada da função cossecante

Teorema 4.8: Se $f(x) = cossec\ x$, então $f'(x) = -cossec\ x. cotg\ x$.

Demonstração 4.8: Seja $f(x) = cossec\ x$. Do teorema 3.5, temos:

$$f(x) = cossec\ x \Rightarrow f(x) = \frac{1}{sen\ x}$$

Das regras de derivação,

$$f'(x) = \frac{sen\ x. 0 - 1. \cos x}{(sen\ x)^2} = -\frac{\cos x}{sen\ x\ .\ sen\ x} = -\frac{1}{sen\ x}.\frac{\cos x}{sen\ x}$$

Do teorema 3.5,

$$-\frac{1}{sen\ x} = -cossec\ x$$

Do teorema 3.3,

$$\frac{\cos x}{sen\ x} = cotg\ x$$

Portanto,

$$\boxed{f'(x) = -cossec\ x\ .\ tg\ x}$$

Exemplo 4.4: Determine a derivada da função:

$$f(x) = \frac{sen\ x}{1 - 2. \cos x}$$

Solução:

Aplicando as regras de derivação, temos:

$$f'(x) = \frac{(1 - 2.\cos x).cos - sen\ x\ .[0 - 2.(-sen\ x)]}{(1 - 2.\cos x)^2} =$$

$$= \frac{\cos x - 2cos^2x - sen\ x\ .2.sen\ x}{(1 - 2.\cos x)^2} = \frac{\cos x - 2(cos^2x + sen^2x)}{(1 - 2.\cos x)^2}$$

Do teorema 3.1,

$$cos^2x + sen^2x = 1$$

Portanto,

$$f'(x) = \frac{\cos x - 2.1}{(1 - 2.\cos x)^2} \Rightarrow \boxed{f'(x) = \frac{\cos x - 2}{(1 - 2.\cos x)^2}}$$

Exemplo 4.5: Determine a derivada da função:

$$f(x) = tg\ x\ .\sec x$$

Solução:

Aplicando as regras de derivação, temos:

$$f'(x) = tg\ x\ .\sec x\ .tg\ x + sec^2x.\sec x = \sec x\ .(tg^2x + sec^2x)$$

Aplicando as relações trigonométricas 3.4 e 3.2, chegamos a:

$$f'(x) = \frac{1}{\cos x}.\left[\left(\frac{sen\ x}{\cos x}\right)^2 + \left(\frac{1}{\cos x}\right)^2\right] = \frac{1}{\cos x}.\left(\frac{sen^2x}{cos^2x} + \frac{1}{cos^2x}\right) = \frac{1}{\cos x}.\left(\frac{sen^2x + 1}{cos^2x}\right)$$

Por fim, aplicando o teorema 3.1, temos:

$$f'(x) = \frac{1}{\cos x}.\left(\frac{1 - cos^2x + 1}{cos^2x}\right) = \frac{1}{\cos x}.\left(\frac{2 - cos^2x}{cos^2x}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(x) = \frac{2 - cos^2x}{cos^3x}}$$

4.2.4 Derivadas das funções trigonométricas inversas

4.2.4.1 Derivada da função arco seno

Seja $f: [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ definida por $f(x) = arc\ sen\ x$. Então $f(x)$ é derivável em $(-1,1)$ e sua derivada é:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

4.2.4.2 Derivada da função arco cosseno

Seja $f: [-1,1] \to [0, \pi]$ definida por $f(x) = arc \cos x$. Então $f(x)$ é derivável em $(-1,1)$ e sua derivada é:

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

4.2.4.3 Derivada da função arco tangente

Seja $f: \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ definida por $f(x) = arc\ tg\ x$.Então $f(x)$ é derivável e sua derivada é:

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

4.2.4.4 Derivadas das demais funções trigonométricas inversas

Apresentaremos agora uma tabela contendo as derivadas das demais funções trigonométricas inversas.

Função $[\boldsymbol{f(x)}]$	**Derivada** $[\boldsymbol{f'(x)}]$
$arc\ cotg\ x$	$-\dfrac{1}{1+x^2}$
$arc \sec x\,, \lvert x\rvert \geq 1$	$\dfrac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}, \lvert x\rvert > 1$
$arc\ cossec\ x, \lvert x\rvert \geq 1$	$-\dfrac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}\ , \lvert x\rvert > 1$

4.3 Integrais

4.3.1 Integral indefinida

Definição 4.3: Uma função $F(x)$ é chamada uma primitiva da função $f(x)$ em um intervalo I, se para todo $x \in I$, temos $F'(x) = f(x)$.

Definição 4.4: Se $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$, a expressão $F(x) + c$ é chamada *integral indefinida* da função $f(x)$ e é denotada por:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

As integrais indefinidas apresentam as seguintes propriedades:

- ✓ $\int Kf(x)\,dx = K\int f(x)\,dx$
- ✓ $\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

4.3.2 Integral definida

Definição 4.5: Seja f uma função definida no intervalo $[a, b]$ e seja P uma partição qualquer de $[a, b]$. A *integral definida* de f de a até b, denotada por $\int_a^b f(x)\, dx$, é dada por:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{máx\ \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

Desde que o limite do segundo membro exista.

As integrais definidas apresentam as seguintes propriedades:

- ✓ Se f é integrável em $[a, b]$ e k é um número real arbitrário, então kf é integrável em $[a, b]$ e:

$$\int_a^b kf(x)\, dx = k \int_a^b f(x) dx$$

- ✓ Se f e g são funções integráveis em $[a, b]$, então $f + g$ é integrável em $[a, b]$ e:

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

- ✓ Se $a < c < b$ e f é integrável em $[a, c]$ e em $[c, b]$, então f é integrável em $[a, b]$ e:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

- ✓ Se f é integrável e se $f(x) \geq 0$ para todo x em $[a, b]$, então:

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0$$

- ✓ Se f e g são integráveis em $[a, b]$ e $f(x) \geq g(x)$ para todo x em $[a, b]$, então:

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$$

- ✓ Se f é uma função contínua em $[a, b]$, então:

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$$

- ✓ Se f é uma função contínua em $[a, b]$, existe um ponto c entre a e b tal que:

$$\int_a^b f(x)\, dx = (b - a)f(c)$$

4.3.3 Integrais das funções trigonométricas

Apresentaremos na tabela abaixo as integrais indefinidas das funções trigonométricas.

$\boldsymbol{f(x)}$	$\int \boldsymbol{f(x)dx}$
$sen\ x$	$-\cos x + c$
$\cos x$	$sen\ x + c$
$tg\ x$	$\ln\lvert\sec x\rvert + c$
$cotg\ x$	$\ln\lvert sen\ x\rvert + c$
$\sec x$	$\ln\lvert\sec x + tg\ x\rvert + c$
$cossec\ x$	$\ln\lvert cossec\ x - cotg\ x\rvert + c$

4.3.4 Método de integração por partes

Sejam u e v funções deriváveis de x. A fórmula,

$$\int u\, dv = u.v - \int v\, du$$

É denominada fórmula de *integração por partes* e é usada para simplificarmos integrais que aparecem em forma de produto.

4.3.4.1 Fórmulas de redução ou recorrência

A partir do método de integração por partes obtemos fórmulas que nos ajudaram a reduzir uma integral em outra mais simples do mesmo tipo. Com essas fórmulas iremos reduzindo o expoente da função que desejamos integrar de dois em dois e o uso repetido dessas fórmulas nos levarão ao cálculo da integral pedida. Essas fórmulas recebem o nome de *fórmulas de redução* ou *fórmulas de recorrência*.

Iremos agora apresentar e provar as principais fórmulas de recorrência.

$$\mathbf{1^{a}}\ \boldsymbol{f\text{ó}rmula\ de\ recorr\text{ê}ncia}:$$

$$\boxed{\int sen^n\, x\, dx = -\frac{1}{n}.sen^{n-1}x.\cos x + \frac{n-1}{n}.\int sen^{n-2}\, x\, dx}$$

Prova:

Devemos inicialmente pensar em:

$$sen^n\, x = sen^{n-1}\, x\, .sen\, x$$

Com isso podemos escrever,

$$\int sen^n\, x\, dx = \int sen^{n-1}\, x\, .sen\, x\, dx$$

Agora consideramos,

$$u = sen^{n-1}x$$

$$dv = sen\, x\, dx$$

De modo que:

$$du = (n-1).sen^{n-2}x.\cos x\, dx$$

$$v = -\cos x$$

Portanto, utilizando o método de integração por partes, temos:

$$\int sen^{n-1}\,x\,.\,sen\,x\,dx = sen^{n-1}x\,.\,(-\cos x) - \int -\cos x\,.\,(n-1).\,sen^{n-2}x.\cos x\,dx =$$

$$= -sen^{n-1}x.\cos x + (n-1).\int cos^2x\,.\,sen^{n-2}x\,dx$$

Do teorema 3.1,

$$sen^2x + cos^2x = 1 \Rightarrow cos^2x = 1 - sen^2x$$

Daí,

$$\int sen^{n-1}x\,.\,sen\,x\,dx = -sen^{n-1}x.\cos x + (n-1)\,.\int (1 - sen^2x)\,.\,sen^{n-2}\,x\,dx =$$

$$= -sen^{n-1}x.\cos x + (n-1).\int sen^{n-2}\,x - sen^n\,x\,dx =$$

$$= -sen^{n-1}x.\cos x + (n-1).\left(\int sen^{n-2}x\,dx - \int sen^nx\,dx\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int sen^{n-1}.\,sen\,x\,dx = -sen^{n-1}x.\cos x + (n-1).\int sen^{n-2}x\,dx - (n-1).\int sen^nx\,dx$$

Logo,

$$\int sen^nx\,dx = -sen^{n-1}x.\cos x + (n-1).\int sen^{n-2}x\,dx - (n-1).\int sen^nx\,dx$$

Somando $(n-1).\int sen^nx\,dx$, a ambos os lados da equação, temos:

$$\int sen^nx\,dx + (n-1).\int sen^n\,x\,dx = -sen^{n-1}x\,.\cos x + (n-1).\int sen^{n-2}x\,dx -$$

$$-(n-1).\int sen^nx\,dx + (n-1).\int sen^nx\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n.\int sen^nx\,dx = -sen^{n-1}x\,.\cos x + (n-1).\int sen^{n-2}x\,dx$$

Por fim, dividindo ambos os membros da equação por n, temos:

$$\int sen^nx\,dx = -\frac{1}{n}.\,sen^{n-1}x\,.\cos x + \frac{n-1}{n}.\int sen^{n-2}x\,dx$$

$$\mathbf{2^{a}}\ \boldsymbol{f}\text{ó}\boldsymbol{rmula\ de\ recorr}\text{ê}\boldsymbol{ncia}:$$

$$\boxed{\int cos^n x\, dx = \frac{1}{n}.cos^{\,n-1}x\,.sen\,x + \frac{n-1}{n}\int cos^{n-2}x\, dx}$$

Prova:

Devemos inicialmente pensar em:

$$cos^n = cos^{n-1}x\,.\cos x$$

Com isso podemos escrever,

$$\int cos^n x\, dx = \int cos^{n-1}x\,.\cos x\ \ dx$$

Agora consideramos,

$$u = cos^{n-1}x$$

$$dv = \cos x\ \ dx$$

De modo que:

$$du = (n-1).cos^{n-2}x\,.(-sen\,x)\,dx$$

$$v = sen\,x$$

Portanto, utilizando o método de integração por partes, temos:

$$\int cos^{n-1}x\,.\cos x\ \ dx = cos^{n-1}x\,.sen\,x - \int sen\,x\,.(n-1).cos^{n-2}x\,.(-sen\,x)\,dx =$$

$$= cos^{n-1}x\,.sen\,x + (n-1).\int sen^2 x\ \ .cos^{n-2}x\,dx$$

Do teorema 3.1,

$$sen^2x + cos^2x = 1 \Rightarrow sen^2x = 1 - cos^2x$$

Daí,

$$\int cos^{n-1}x\,.\cos x\ \ dx = cos^{n-1}x\,.sen\,x + (n-1).\int (1 - cos^2x).cos^{n-2}x\,dx =$$

$$= cos^{n-1}x\,.sen\,x + (n-1).\int (cos^{n-2}x - cos^n x)\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int cos^{n-1}x.\cos x\ dx = cos^{n-1}x\,.sen\,x + (n-1).\int cos^{n-2}\,x\,dx - (n-1).\int cos^n x\,dx$$

Logo,

$$\int cos^n x\,dx = cos^{n-1}x\,.sen\,x + (n-1).\int cos^{n-2}x\,dx - (n-1).\int cos^n x\,dx$$

Somando $(n-1).\int cos^n x\,dx$, a ambos os lados da equação, temos:

$$\int cos^n x\,dx + (n-1).\int cos^n x\,dx = cos^{n-1}x\,.sen\,x + (n-1).\int cos^{n-2}x\,dx -$$

$$-(n-1).\int cos^n x\,dx + (n-1).\int cos^n x\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n.\int cos^n x\,dx = cos^{n-1}x\,.sen\,x + (n-1).\int cos^{n-2}x\,dx$$

Por fim, dividindo ambos os membros da equação por n, temos:

$$\int cos^n x\ dx = \frac{1}{n}.cos^{n-1}x\,.sen\,x + \frac{n-1}{n}.\int cos^{n-2}x\,dx$$

$$\mathbf{3^{\underline{o}}\ \boldsymbol{f}ó\boldsymbol{rmula\ de\ recorr}ê\boldsymbol{ncia}}:$$

$$\boxed{\int sec^2 x\,dx = \frac{1}{n-1}.sec^{n-2}x\,.tg\,x + \frac{n-2}{n-1}.\int sec^{n-2}x\,dx}$$

Prova:

Devemos inicialmente pensar em:

$$sec^n x\,dx = sec^{n-2}x\,.sec^2 x$$

Com isso podemos escrever,

$$\int sec^n x\,dx = \int sec^{n-2}x\,dx\,.sec^2 x\,dx$$

Agora consideramos,

$$u = sec^{n-2}x$$

$$dv = sec^2x\, dx$$

De modo que:

$$du = (n-2).sec^{n-2}x\,.tg\;x\,dx$$

$$v = tg\;x$$

Portanto, utilizando o método de integração por partes, temos:

$$\int sec^{n-2}x\,.sec^2x\,dx = sec^{n-2}x\,.tg\;x - \int tg\;x\,.(n-2).sec^{n-2}x\,.tg\;x\,dx =$$

$$= sec^{n-2}x\,.tg\;x - (n-2).\int tg^2x\,.sec^{n-2}x\,dx$$

Das relações trigonométricas fundamentais,

$$tg^2x + 1 = sec^2x \Rightarrow tg^2x = sec^2x - 1$$

Daí,

$$\int sec^{n-2}x\,.sec^2x\,dx = sec^{n-2}x\,.tg\;x - (n-2).\int (sec^2x - 1).sec^{n-2}x\,dx =$$

$$= sec^{n-2}x\,.tg\;x - (n-2).\int sec^nx - sec^{n-2}x\,dx =$$

$$= sec^{n-2}x\,.tg\;x - (n-2).\left(\int sec^nx\,dx - \int sec^{n-2}x\,dx\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int sec^{n-2}x\,.sec^2x\,dx = sec^{n-2}x\,.tg\;x - (n-2).\int sec^nx\,dx + (n-2).\int sec^{n-2}x\,dx$$

Logo,

$$\int sec^nx\,dx = sec^{n-2}x\,.tg\;x - (n-2).\int sec^nx\,dx + (n-2).\int sec^{n-2}x\,dx$$

Somando $(n-2).\int sec^nx\,dx$, a ambos os lados da equação, temos:

$$\int sec^n x\, dx + (n-2).\int sec^n x\, dx = sec^{n-2}x\,.tg\,x - (n-2).\int sec^n x\, dx +$$

$$+(n-2).\int sec^{n-2}x\, dx + (n-2).sec^n x\, dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (n-1).\int sec^n x\, dx = sec^{n-2}x\,.tg\,x + (n-2).\int sec^{n-2}x\, dx$$

Por fim, dividindo ambos os membros da equação por n-1, temos:

$$\int sec^n x\, dx = \frac{1}{n-1}.sec^{n-2}x\,.tg\,x + \frac{n-2}{n-1}.\int sec^{n-2}x\, dx$$

$$\boldsymbol{4^{a}\ f\text{ó}rmula\ de\ recorr\text{ê}ncia}:$$

$$\boxed{\int cosssec^n x\, dx = -\frac{1}{n-1}.cossec^{n-2}x.cotg\,x + \frac{n-2}{n-1}.\int cossec^{n-2}x\, dx}$$

Prova:

Devemos incialmente pensar em:

$$cossec^n x = cossec^{n-2}x\,.cossec^2 x$$

Com isso podemos escrever,

$$\int cossec^n x\, dx = \int cossec^{n-2}x\,.cossec^2 x\, dx$$

Agora consideramos,

$$u = cossec^{n-2}x$$

$$dv = cossec^2 x\, dx$$

De modo que:

$$du = -(n-2).cossec^{n-2}x\,.cotg\,x\, dx$$

$$v = -cotg\,x$$

Portanto, usando o método de integração por partes, temos:

$$\int cossec^{n-2}x.cossec^2x\ dx = cossec^{n-2}x.(-cotg\ x) -$$

$$-\int (-cotg\ x)\,.\,(-cossec^{n-2}x).\,cotg\ x\,.\,(n-2)dx =$$

$$= -cossec^{n-2}x.\,cotg\ x - (n-2).\int cotg^2x\,.\,cossec^{n-2}\,x\ dx$$

Das relações trigonométricas fundamentais,

$$1 + cotg^2x = cossec^2x \Rightarrow cotg^2x = cossec^2x - 1$$

Daí,

$$\int cossec^{n-2}x\,.\,cossec^2x\ dx = -cossec^{n-2}x\,.\,cotg\ x -$$

$$-(n-2).\int (cossec^2x - 1).\,cossec^{n-2}\,x\ dx =$$

$$= -cossec^{n-2}x\,.\,cotg\ x - (n-2).\int cossec^nx - cossec^{n-2}x\ dx =$$

$$= -cossec^{n-2}x\,.\,cotg\ x - (n-2).\left(\int cossec^nx\ dx - \int cossec^{n-2}x\ dx\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int cossec^{n-2}x\ \ .\,cossec^2x\ dx = -cossec^{n-2}x\,.\,cotg\ x - (n-2).\int cossec^nx\ dx +$$

$$+(n+2).\int cossec^{n-2}x\ dx$$

Logo,

$$\int cossec^nx\ dx = -cossec^{n-2}x\,.\,cotg\ x - (n-2).\int cossec^nx\ dx +$$

$$+(n-2).\int cossec^{n-2}x\ dx$$

Somando $(n-2).\int cossec^nx\ dx$ em ambos os lados da equação, temos:

$$\int cossec^nx\ dx + (n-2).\int cossec^nx\ dx =$$

$$= -cossec^{n-2}x \,.\, cotg\, x - (n-2). \int cossec^{n}x\, dx + (n-2). \int cossec^{n-2}x\, dx +$$

$$+(n-2). \int cossec^{n}x\, dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (n-1). \int cossec^{n}x\, dx = -cossec^{n-2}x \,.\, cotg\, x + (n-2). \int cossec^{n-2}x\, dx$$

Por fim, dividindo ambos os membros da equação por $n - 1$, temos:

$$\int cossec^{n}x\, dx = -\frac{1}{n-1}. cossec^{n-2}x \,.\, cotg\, x + \frac{n-2}{n-1}. \int cossec^{n-2}\, x\, dx$$

Exemplo 4.6: Calcule a integral,

$$\int sen^{5}2x\, dx$$

Solução:

Fazendo $u = 2x$, temos $du = 2\, dx$. Então:

$$\int sen^{5}2x\, dx = \int \frac{1}{2}. sen^{5}2x \,.\, 2\, dx = \frac{1}{2}. \int sen^{5}u\, du$$

Aplicando a fórmula de recorrência pra a função seno, sucessivas vezes até chegarmos a uma integral do tipo $\int sen\, u\, du$, temos:

$$\frac{1}{2}. \int sen^{5}u\, du = \frac{1}{2}. \left(-\frac{1}{5}. sen^{4}u \,.\cos u + \frac{4}{5}. \int sen^{3}u\, du\right) =$$

$$= -\frac{1}{10}. sen^{4}u. \cos u + \frac{2}{5}. \left(-\frac{1}{3}. sen^{2}u \,.\cos u + \frac{2}{3}. \int sen\, u\, du\right) =$$

$$= -\frac{1}{10}. sen^{4}u \,.\cos u - \frac{2}{15}. sen^{2}u + \frac{4}{15}. (-\cos u) + c$$

Portanto,

$$\int sen^{5}2x\, dx = -\frac{1}{10}. sen^{4}2x \,.\cos 2x - \frac{2}{15}. sen^{2}2x - \frac{4}{15}. \cos 2x + c$$

4.3.4.2 Integração de funções envolvendo seno e cosseno de arcos diferentes.

As fórmulas de Werner nos auxiliam na resolução de integrais que envolvem seno e cosseno de arcos diferentes, transformando um produto em soma e chegando a integrais já conhecidas. Como podemos ver no exemplo abaixo.

Exemplo 4.7: Calcule a integral,

$$\int sen\ 4x\ .\cos 2x\ \ dx$$

Solução:

Das fórmulas de Werner, temos:

$$sen(a+b)+sen(a-b)=2.sen\ a\ .\cos b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2.sen\ a\ .\cos b = sen(a+b)+sen(a-b) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow sen\ a\ .\cos b = \frac{1}{2}.[sen(a+b)+sen(a-b)]$$

Logo,

$$\int sen\ 4x\ .\cos 2x\, dx = \frac{1}{2}.\int [sen(4x+2x)+sen(4x-2x)]\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}.\left[\int sen\ 6x\ dx + \int sen\ 2x\ dx\right]$$

Fazendo,

$$u = 6x \Rightarrow du = 6\, dx$$

$$v = 2\ x \Rightarrow dv = 2\, dx$$

Temos:

$$\frac{1}{2}.\left[\int sen\ 6x\ \ dx + \int sen\ 2x\ dx\right] = \frac{1}{2}.\left[\int \frac{1}{6}.sen\ 6x\ .6\ dx + \int \frac{1}{2}.sen\ 2x\ .2\ dx\right] =$$

$$= \frac{1}{2} . \left[\frac{1}{6} . \int sen\, u\, du + \frac{1}{2} . \int sen\, v\ \ dv \right] = \frac{1}{2} . \left[\frac{1}{6} . (-\cos u) + \frac{1}{2} . (-\cos v) \right] + c$$

Portanto,

$$\int sen\ 4x\ . \cos 2x\, dx = -\frac{1}{4} . \left[\frac{1}{3} . \cos 6x + \cos 2x \right] + c$$

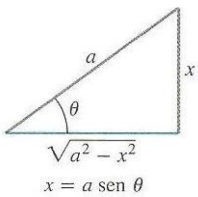
4.3.4.3 Integração por substituição trigonométrica

Quando o integrando contiver expressões do tipo $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$ ou $\sqrt{x^2 - a^2}$, onde $a > 0$, poderemos, em geral, resolver a integral através de substituições trigonométricas que nos levem a integrais que podemos calcular diretamente. As substituições usadas devem ser reversíveis para que posteriormente possamos voltar para a variável original.

São três os casos aplicados.

1º Caso: O integrando contém uma expressão da forma $\sqrt{a^2 - x^2}$, onde $a > 0$.

Considere o triângulo retângulo abaixo:



Das razões trigonométricas no triângulo retângulo, segue que:

$$sen\ \theta = \frac{x}{a} \Rightarrow x = a. sen\ \theta$$

Agora introduziremos a nova variável θ, tomando $x = a. sen\ \theta$. Onde, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ se $x \geq 0$ e $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq 0$ se $x < 0$. Então $dx = a. \cos \theta\ \mathrm{d}\theta$ e:

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - (a. sen\ \theta)^2} = \sqrt{a^2 - a^2. sen^2\theta} = \sqrt{a^2. (1 - sen^2\theta)} = a. \sqrt{1 - sen^2\theta}$$

Aplicando o teorema 3.1, temos:

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a.\sqrt{cos^2\theta}$$

Como $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $\cos\theta \geq 0$. Então $\sqrt{cos^2\theta} = \cos\theta$ e, portanto,

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a.\cos\theta$$

Como $sen\ \theta = \frac{x}{a}$ e $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$,

$$\theta = arc\ sen\ \frac{x}{a}$$

Exemplo 4.8: Calcule,

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{9 - x^2}}\ dx$$

Solução:

Seja $x = 3.sen\ \theta, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$. Então $dx = 3.\cos\theta\ d\theta$ e:

$$\sqrt{9 - x^2} = \sqrt{9 - (3.sen\ \theta)^2} = \sqrt{9 - 9.sen^2\theta} = \sqrt{9.(1 - sen^2\theta)} = 3.\sqrt{1 - sen^2\theta}$$

Aplicando o teorema 3.1, temos:

$$\sqrt{9 - x^2} = 3.\sqrt{cos^2\theta} = 3.\cos\theta, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

Logo,

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{9 - x^2}}\ dx = \int \frac{(3.sen\ \theta)}{3.\cos\theta}.3.\cos\theta\ d\theta = \int 9.sen^2\theta\ d\theta = 9.\int sen^2\theta\ d\theta$$

Se usarmos a fórmula do cosseno da soma e o teorema 3.1, teremos:

$$\cos(\theta + \theta) = \cos\theta.\cos\theta - sen\ \theta.sen\ \theta \Rightarrow \cos 2\theta = cos^2\theta - sen^2\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos 2\theta = 1 - sen^2\theta - sen^2\theta \Rightarrow \cos 2\theta = 1 - 2.sen^2\theta \Rightarrow 2.sen^2\theta = 1 - \cos 2\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow sen^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

Com isso,

$$9.\int sen^2\theta\ d\theta = 9.\int \frac{1-\cos 2\theta}{2}\ d\theta = \frac{9}{2}.\int 1-\cos 2\theta\ \ d\theta = \frac{9}{2}.\left(\int d\theta - \int \cos 2\theta\ \ d\theta\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9.\int sen^2\theta\ d\theta = \frac{9}{2}.\left(\theta - \frac{sen\ 2\theta}{2}\right) + c$$

Se usarmos a fórmula do seno da soma, teremos:

$$sen(\theta+\theta) = sen\ \theta.\cos\theta + sen\ \theta.\cos\theta \Rightarrow sen\ 2\theta = 2.sen\ \theta.\cos\theta \Rightarrow$$

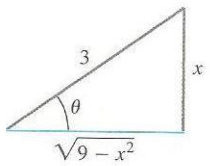
$$\Rightarrow sen\ \theta.\cos\theta = \frac{sen\ 2\theta}{2}$$

Com isso,

$$\frac{9}{2}.\left(\theta - \frac{sen\ 2\theta}{2}\right) + c = \frac{9}{2}.(\theta - sen\ \theta.\cos\theta) + c$$

Como $sen\ \theta = \frac{x}{3}$ e $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, segue que $\theta = arc\ sen\ \frac{x}{3}$.

Observe a figura abaixo.



Das razões trigonométricas no triângulo retângulo segue que:

$$sen\ \theta = \frac{x}{3}$$

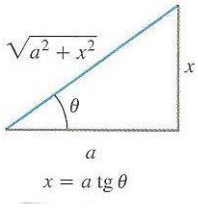
$$\cos\theta = \frac{\sqrt{9-x^2}}{3}$$

Portanto,

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\ dx = \frac{9}{2}.\left(arc\ sen\ \frac{x}{3} - \frac{x}{3}.\frac{\sqrt{9-x^2}}{3}\right) + c = \frac{9}{2}.arc\ sen\ \frac{x}{3} - \frac{x.\sqrt{9-x^2}}{2} + c$$

2º Caso: O integrando contém um a expressão da forma $\sqrt{a^2 + x^2}$, onde $a > 0$.

Considere o triângulo retângulo abaixo:



Das razões trigonométricas no triângulo retângulo segue que:

$$tg\ \theta = \frac{x}{a} \Rightarrow x = a. tg\ \theta$$

Agora introduziremos a nova variável θ, tomando $x = a. tg\ \theta$. Onde, $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ se $x \geq 0$ e $-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$ se $x > 0$. Então $dx = a. sec^2\theta\ d\theta$ e:

$$\sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{a^2 + (a. tg\ \theta)^2} = \sqrt{a^2 + a^2. tg\ \theta} = \sqrt{a^2. (1 + tg^2\theta)} = a. \sqrt{1 + tg^2\theta}$$

Aplicando o corolário 3.1, temos:

$$\sqrt{a^2 + x^2} = a. \sqrt{sec^2\theta}$$

Como $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, $\sec\theta \geq 1$. Então $\sqrt{sec^2\theta} = \sec\theta$ e, portanto,

$$\sqrt{a^2 + x^2} = a. \sec\theta$$

Como $tg\ \theta = \frac{x}{a}$ e $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$,

$$\theta = arc\ tg\ \frac{x}{a}$$

Exemplo 4.9: Calcule,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4 + x^2}}$$

Solução:

Seja $x = 2. tg\ \theta$, $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$. Então $dx = 2. sec^2\theta\ d\theta$ e:

$$\sqrt{4+x^2} = \sqrt{4+(2.tg\ \theta)^2} = \sqrt{4+4.tg^2\theta} = \sqrt{4.(1+tg^2\theta)} = 2.\sqrt{1+tg^2\theta}$$

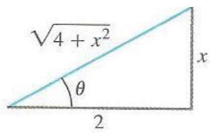
Aplicando o corolário 3.1, temos:

$$\sqrt{4+x^2} = 2.\sqrt{sec^2\theta} = 2.\sec\theta\,, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

Logo,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}} = \int \frac{2.sec^2\theta}{2.\sec\theta}\ d\theta = \int \sec\theta\ d\theta \Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}} = ln|\sec\theta + tg\ \theta| + c$$

Observe a figura abaixo.



Das razões trigonométricas no triângulo retângulo e do teorema 3.4 segue que:

$$tg\ \theta = \frac{x}{2}$$

$$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{4+x^2}}$$

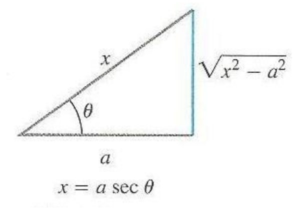
$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{4+x^2}}} = \frac{1.\sqrt{4+x^2}}{2} \Rightarrow \sec\theta = \frac{\sqrt{4+x^2}}{2}$$

Portanto,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}} = ln\left|\frac{\sqrt{4+x^2}+x}{2} + \frac{x}{2}\right| + c = ln\left|\frac{\sqrt{4+x^2}+x}{2}\right| + c$$

3º Caso: O integrando contém uma expressão da forma $\sqrt{x^2-a^2}$, onde $a > 0$.

Considere o triângulo retângulo abaixo:



Das razões trigonométricas no triângulo retângulo e do teorema 3.4 segue que:

$$\cos\theta = \frac{a}{x}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{\frac{a}{x}} = \frac{1.x}{a} \Rightarrow x = a.\sec\theta$$

Agora introduziremos a nova variável θ, tomando $x = a.\sec\theta$. Onde $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ se $x \geq a$ e $\pi \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$ se $x \leq -a$. Então $dx = a.\sec\theta\,.\,tg\ \theta\, d\theta$ e:

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{(a.\sec\theta)^2 - a^2} = \sqrt{a^2.sec^2\theta - a^2} = \sqrt{a^2.(sec^2 - 1)} = a.\sqrt{sec^2\theta - 1}$$

Aplicando o corolário 3.1, temos:

$$\sqrt{x^2 - a^2} = a.\sqrt{tg^2\theta}$$

Como $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ou $\pi \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$, $tg\ \theta \geq 0$. Então $\sqrt{tg^2\theta} = tg\ \theta$ e, portanto,

$$\sqrt{x^2 - a^2} = a.tg\ \theta$$

Como $\sec\theta = \frac{x}{a}$ e θ está em $[0, \frac{\pi}{2}) \cup [\pi, \frac{3\pi}{2})$,

$$\theta = arc\sec\frac{x}{a}$$

Exemplo 4.10: Calcule,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{25x^2 - 4}} \qquad\qquad x > \frac{2}{5}$$

Solução:

Vamos reescrever a integral como,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{25x^2-4}} = \int \frac{dx}{\sqrt{25.\left(x^2-\frac{4}{25}\right)}} = \int \frac{dx}{5.\sqrt{x^2-\frac{4}{25}}}$$

Seja $x = \frac{2}{5}.\sec\theta,\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Então $dx = \frac{2}{5}.\sec\theta\,.\,tg\ \theta\ d\theta$ e:

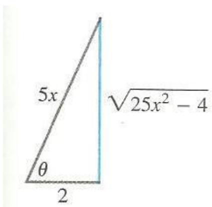
$$\sqrt{x^2-\frac{4}{25}} = \frac{2}{5}.\sqrt{tg^2\theta} = \frac{2}{5}.tg\ \theta, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

Logo,

$$\int \frac{dx}{5.\sqrt{x^2-\frac{4}{25}}} = \int \frac{\frac{2}{5}.\sec\theta\,.\,tg\ \theta}{5.\frac{2}{5}.tg\ \theta} d\theta = \int \frac{\sec\theta}{5} d\theta = \frac{1}{5}.\int \sec\theta\ d\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{5.\sqrt{x^2-\frac{4}{25}}} = \frac{1}{5}.ln|\sec\theta + tg\ \theta| + c$$

Observe a figura abaixo.



Das razões trigonométricas no triângulo retângulo e do teorema 3.4 segue que:

$$tg\ \theta = \frac{\sqrt{25x^2-4}}{2}$$

$$\cos\theta = \frac{2}{5x}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{\frac{2}{5x}} = 1.\frac{5x}{2} \Rightarrow \sec\theta = \frac{5x}{2}$$

Portanto,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{25x^2-4}} = \frac{1}{5}.ln\left|\frac{5x+\sqrt{25x^2-4}}{2}\right| + c$$

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os conteúdos matemáticos apresentam aplicações em diversos ramos e conhecer essas aplicações ajudam no entendimento destes conteúdos. Particularmente, alguns conteúdos têm aplicações dentro da própria matemática e servem como uma base para estudos futuros é como se ao estudarmos estivéssemos preparando o alicerce para construirmos o conhecimento em conteúdos mais avançados. Esse é o caso da trigonometria que assume um papel importantíssimo no entendimento de conteúdos de cálculo diferencial e integral.

No decorrer deste estudo, podemos constatar as muitas aplicações dos conceitos e fórmulas trigonométricas em assuntos essenciais do cálculo diferencial e integral como limites ao demonstrarmos o limite trigonométrico fundamental e usarmos desse limite e de algumas relações trigonométricas para encontrarmos diversos outros limites, derivadas na obtenção de derivadas trigonométricas e integrais na construção das fórmulas de recorrência, nas integrais por substituições trigonométricas entre outros tópicos apresentados nesse trabalho que para que possamos compreendê-los bem é de suma importância que tenhamos um bom conhecimento de trigonometria.

O cálculo diferencial e integral em si é um dos componentes curriculares com maior índice de reprovação e por isto é um dos mais temidos pelos estudantes do curso de Matemática. Como ficou evidenciado neste trabalho, um bom conhecimento sobre trigonometria é o diferencial para um entendimento das demonstrações de teoremas e resoluções de diversas questões de cálculo diferencial e integral, enfim, a trigonometria é um importante aliado na aprendizagem de limites, derivadas e integrais.

REFERENCIAL BIBLIOGRÁFICO

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. 2. Ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

COSTA, Nielce M. Loboda. **A História da Trigonometria**. Disponível em <http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/geotri/modulo3/mod3_pdf/historia_triogono.pdf>. Acesso em 15 de Março de 2014.

CREPALDI, Maria Aparecida da Silva. **A História da Matemática na Apropriação dos Conteúdos da 6ª Série do Ensino Fundamental**. 2005. 61 f. Monografia (Especialização) – Universidade do Extremo Sul Catarinense, Curso de Pós-Graduação Especialização em Educação, Criciúma.

FLEMMING, Diva Marília; GONÇALVES, Mirian Buss. **Cálculo A: Funções, Limite, Derivação, Integração**, 5. Ed. São Paulo: Makron, 1992.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar: Trigonometria**, Vol. 6. 2. Ed. São Paulo: Atual, 1977.

LEITHOLD, Louis. **O Cálculo com Geometria Analítica**, Vol. 1. 3. Ed. São Paulo: Harbra Ltda,1994.

O'CONNOR, J.J. & ROBERTSON, E. F. **Biografia de Bartholomeo Pitiscus.** Disponível em <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Pitiscus.html> Acesso 09 de Abril de 2014.

SANTOS, Carlos Alberto M. dos; Gentil, Nelson; GRECO, Sérgio Emílio. **Matemática Novo Ensino Médio**, 6. Ed. São Paulo: Ática, 2002.

SOUZA, Carlos Antonio de; VICTER, Eline das Flores; LOPES, Jurema Rosa. **Uma Breve História da Trigonometria e seus Conceitos Fundamentais.** Mesquita: Entorno, 2011.

SOUZA, Joamir Roberto de. **Novo Olhar Matemática**, Vol. 2. 1. Ed. São Paulo: FTD, 2010.

STEWART, James. **Cálculo**. trad. de Antonio Carlos Moretti; Antonio Carlos Gilli Martins, Vol. 1. 6. Ed. São Paulo: Cengage Learning, 2011.

THOMAS, George B. **Cálculo**, Vol. 1. 11. Ed. São Paulo: Addison Wesley, 2009.

TIBÚRCIO, Carlos Eduardo. **Biografia de Leonard Euler.** Disponível em <http://www.ime.unicamp.br/~calculo/ambientedeensino/modulos/history/euler/euler.html>. Acesso em 09 de Abril de 2014.