UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
GRADUAÇÃO EM LICENCIATURA PLENA EM FÍSICA

IZABEL CRISTINA DA SILVA

UMA SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE EINSTEIN-MAXWELL EM (2+1) DIMENSÕES

CAMPINA GRANDE - PB
2014

IZABEL CRISTINA DA SILVA

UMA SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE EINSTEIN-MAXWELL EM (2+1) DIMENSÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação Licenciatura Plena em Física da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento à exigência para obtenção do grau de Licenciado em Física.

Orientador: Prof. Dr. Jean Paulo Spinelly da Silva

CAMPINA GRANDE - PB
2014

S586s Silva, Izabel Cristina da.
Uma solução das equações de Einstein-Maxwell em (2+1) dimensões [manuscrito] / Izabel Cristina da Silva. - 2014.
25 p.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Física) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2014.
"Orientação: Prof. Dr. Jean Paulo Spinelly da Silva, Departamento de Física".

1. Teoria da relatividade. 2. Equações de Einstein. 3. Relatividade. 4. Gravidade. I. Título.

21. ed. CDD 531.11

IZABEL CRISTINA DA SILVA

UMA SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE EINSTEIN-MAXWELL
EM (2+1) DIMENSÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura Plena em Física da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento à exigência para obtenção do grau de Licenciado em Física.

Aprovado em 06/08/2014.

Jean Paulo Spinelly da Silva

Prof. Dr. Jean Paulo Spinelly da Silva / UEPB
Orientador

Jardel Lucena da Silva

Prof. Msc. Jardel Lucena da Silva / UEPB
Examinador

José Carlos Justino da Silva

Prof. Msc. José Carlos Justino da Silva / UEPB
Examinador

RESUMO

Para a teoria newtoniana, o espaço e o tempo são grandezas independentes. No entanto, do ponto de vista da relatividade especial essas grandezas estão relacionadas de forma que os fenômenos ocorrem num espaço-tempo constituído por (3+1) dimensões, sendo três espaciais e uma temporal, tal espaço é também denominado quadrimensional ou de Minkowski. Ainda de acordo com a teoria newtoniana, a gravidade é uma força gerada pela massa dos corpos. Por outro lado, na relatividade geral, a gravidade é resultado de uma deformação do espaço-tempo, devido às massas dos corpos contidos neste. Assim, a gravidade passa a ser um fator geométrico cuja informação está contida em um objeto matemático chamado tensor métrico. Embora saibamos que o espaço-tempo de Minkowski possui (3+1) dimensões alguns autores têm investigado fenômenos físicos em (2+1) dimensões. Nesse contexto, com o estudo das equações combinadas de Einstein-Maxwell em (2+1) dimensões para uma partícula carregada eletricamente verifica-se que o resultado obtido difere completamente do análogo em (3+1) dimensões, mostrando que a dimensão afeta os resultados físicos.

PALAVRAS-CHAVE: Relatividade, Espaço-tempo, Equações de Einstein

1 Introdução

A teoria da Relatividade Restrita ou Especial, postulada por Einstein em 1905, aplica o princípio da relatividade a referenciais inerciais. Em 1916, Einstein ampliou sua teoria para incluir referenciais não inerciais. Essa generalização é a chamada teoria da Relatividade Geral (BERGMANN, 1975). Um postulado da teoria geral da relatividade é o princípio da equivalência, que diz que nenhum experimento realizado localmente pode distinguir entre um referencial com aceleração constante e um referencial sob a ação de um campo gravitacional também constante (LANDAU e LIFCHITZ, 1974). Então um observador colocado no interior de uma caixa fechada, não poderá saber se essa está em queda livre ou sendo acelerada com a mesma aceleração da gravidade em uma região com potencial gravitacional nulo (embora a força gravitacional exercida por um corpo nunca se anule, caindo com o inverso do quadrado da distância, podemos admitir que a força seja nula distante do corpo pois, neste caso, ela tende a zero). Nos dois casos, um corpo abandonado pelo observador a uma altura do solo terá o mesmo movimento. O princípio da equivalência está relacionado com a equivalência entre as massas gravitacionais e inerciais de um corpo. A massa inercial determina a resposta do corpo quando este está em um referencial inercial (velocidade constante) e a massa gravitacional determina a resposta do corpo quando em um campo gravitacional. Como o movimento descrito nos dois casos é igual, os dois tipos de massa são equivalentes (EINSTEIN, 2000; KOGUT, 2001).

Para a teoria newtoniana, o espaço e o tempo são grandezas independentes. Entretanto, do ponto de vista da relatividade especial estas grandezas estão relacionadas de forma que os fenômenos ocorrem num espaço quadrimensional, chamado de espaço-tempo de Minkowski. Este espaço-tempo tem (3+1) dimensões, sendo três dimensões espaciais e uma temporal. Do ponto de vista da teoria newtoniana, a gravidade é uma força gerada pela massa dos corpos. Para a relatividade geral a gravidade é resultado de uma deformação no espaço-tempo, devido as massas dos corpos contidos neste. Então a gravidade passa a ser um fator geométrico. De fato, a gravitação é considerada como uma curvatura no espaço-tempo quadrimensional. De modo a formular isto matematicamente, Einstein dotou o espaço-tempo de uma estrutura métrica. Na teoria da relatividade geral, toda informação geométrica do espaço-tempo está contida em um objeto matemático chamado de tensor métrico, $g_{\mu\nu}$ (LANDAU e LIFCHITZ, 1974; CARMELI, 1981).

Um outro postulado importante é o da covariância geral das leis físicas, o qual exige que as equações que expressam as leis devam ter a mesma forma em todos os sistemas de referência. Isto, naturalmente, nos conduz a uma formulação tensorial das equações de campo da relatividade geral (LANDAU e LIFCHITZ, 1974).

Embora saibamos que o espaço-tempo da relatividade geral tem (3+1) dimensões, alguns autores têm investigado fenômenos físicos em (2+1) dimensões (SOURADEEP e SAHNI, 1992; DESER et al, 1984; GIDDINGS e KUCHAR, 1984; GOTT e ALPERT, 1984). Além de servir como uma arena, na qual os cálculos das quantidades físicas são simplificados, a relatividade geral em um espaço-tempo tridimensional nos mostra como a dimensão afeta os resultados físicos.

Com o intuito de compreender o efeito da dimensão sobre um sistema físico, estudaremos, neste trabalho, as equações combinadas de Einstein-Maxwell, em (2+1) dimensões, para uma partícula carregada eletricamente. A solução dessas equações foi obtida por Gott *et al* (1986).

2 Fundamentação Teórica

2.1 A Física do Espaço Curvo

Todas as interações físicas são descritas através de sistemas de referência, que se entende como sendo um sistema de coordenadas, que indica a posição de um corpo, juntamente à um relógio, para indicar o tempo. Os sistemas, nos quais as leis de Newton são válidas, são chamados inerciais ou de galileu. Experiências mostram que em referenciais inerciais as leis físicas são as mesmas, ou seja, invariantes quanto às transformações de coordenadas espacial e temporal de um referencial para outro. Tal princípio é conhecido como relatividade (LANDAU e LIFCHITZ, 1974).

As duas teorias propostas por Albert Einstein - Relatividade Restrita (TRR) e Relatividade Geral (TRG) - foram apresentadas em momentos distintos, mas ambas sustentam a noção de que não há movimento absoluto no universo, apenas relativo.

A TRR, assim denominada por ser um caso particular da TRG, foi proposta em 1905, trata basicamente de movimentos em referenciais inerciais e tem como base dois postulados: o princípio da relatividade de Einstein afirma que "*as leis físicas são as mesmas para todos os observadores inerciais*", em outras palavras, as conseqüências e resultados físicos não devem depender de um sistema particular de coordenadas, apenas quantidades invariantes sob a escolha do sistema deverão ter significado físico; prontamente, o segundo postulado assegura que "*a velocidade da luz no vácuo tem o mesmo valor,* $c = 2,99792 \times 10^8 m/s$*, qualquer que seja o movimento da fonte*"(TIPPLER, 2001). Devido a essa invariância, verifica-se que quando um dado observador situado num referencial k' move-se com uma velocidade da ordem de c aproximando-se de outro observador situado num referencial k, o espaço medido por k' contrai-se na razão $\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Por outro lado, quando k' compara seu relógio com outro localizado próximo, previamente sincronizado e em repouso com relação à k, k' verifica que seu relógio atrasa-se, sendo o seu tempo denominado tempo próprio e menor que o verificado em k. Com base em tais constatações, Einstein conclui que as grandezas espaço e tempo são relativas, pois dependem do estado de movimento em que o observador se encontra. Agora, como grandezas intimamente relacionadas, os acontecimentos são representados por um espaço-tempo quadrimensional (t, x, y, z), onde t é a coordenada temporal e as demais coordenadas espaciais. Neste ponto, cabe salientar que o espaço-tempo da relatividade restrita é plano, assim como o espaço euclidiano. Porém, Einstein foi levado a abandonar tal ideia, pois observadores que vivem em espaços com geometria esférica (ou hiperbólica) mas que tenham acesso apenas a pequenas regiões desse espaço quando realizam medidas tendem a pensar que estão inseridos num espaço plano (euclidiano). Então, ao contrário do que se verifica na relatividade restrita, dois corpos em queda livre, próximos à superfície da Terra, não descrevem trajetórias perfeitamente paralelas, mas convergem para seu centro de massa. Com o intuito de justificar essa discrepância, Einstein, de maneira puramente dedutiva, conclui que a gravidade é resultado de uma curvatura do espaço-tempo quadrimensional e, portanto, uma propriedade geométrica do espaço (CRAWFORD, 1994).

Assim, em 1915, ele propôs a teoria da relatividade geral que amplia os conceitos para referenciais não-inerciais, e passa a considerar as interações gravitacionais entre a matéria. Essa teoria é, do ponto de vista matemático, bem mais complexa que a teoria restrita e bastante empregada na cosmologia. Ela baseia-se em dois princípios: *covariância geral* e *equivalência* . O primeiro deles consiste em uma generalização do primeiro postulado da TRR. Para entendermos o segundo princípio consideremos um elevador, longe da ação de qualquer campo gravitacional, que se move com aceleração constante e uniforme $\vec{g}$ (caracterizando um referencial não-inercial); se um astronauta que se encontra no interior desse elevador soltar um objeto, esse cairá com uma aceleração $\vec{g} = -\vec{a}$. Por outro lado, consideremos o mesmo elevador em repouso ou se movendo com velocidade constante (caracterizando um referencial inercial) na presença de um campo gravitacional; verifica-se que se o mesmo astronauta soltar um objeto este cairá com uma aceleração $\vec{g} = -\vec{a}$. Assim, nenhum experimento mecânico realizado no interior do elevador é capaz de distinguir se o mesmo está sendo acelerado na ausência de campo gravitacional ou se encontra em repouso sob a ação de um campo gravitacional. Em outras palavras, as peculiaridades do movimento de uma partícula num referencial não-inercial são as mesmas de um corpo que se movimenta num referencial inercial sob a ação de um campo gravitacional. Assim, um sistema de referência não-inercial *equivale* a um campo gravitacional. É o que chamamos de *princípio da equivalência*.

Mas cabe também ressaltar que esta equivalência só é valida para pequenas regiões do espaço e que os campos "produzidos"pelos sistemas não-inerciais diferem dos gravitacionais reais; pois, a uma distância muito grande dos corpos que produzem o campo, o campo gravitacional real tende a zero; contrariamente, o campo que é equivalente tende a infinito ou permanece finito. Outro fator que os diferencia diz respeito às mudanças de referenciais, quando passamos de um sistema não-inercial para outro inercial, o campo produzido pelo primeiro se anula, porém é impossível anular o campo gravitacional real pela simples mudança de referencial (LANDAU e LIFCHITZ, 1974; CARMELI, 1982).

Do ponto de vista desta teoria revolucionária, os planetas não mais se movem segundo uma trajetória elíptica, como acreditava Isaac Newton, com o sol exercendo uma força sobre eles; contrariamente, a deformação que a massa do sol provoca no espaço-tempo da sua vizinhança produz a gravidade que limita os planetas a seguirem uma trajetória que minimizam suas ações mecânicas neste espaço quadrimensional. Em mecânica relativística, qualquer campo que considerarmos será determinado pelas quantidades $g_{\mu\nu}$. Assim, um campo gravitacional real nada mais é do que uma alteração na métrica do espaço-tempo.

Porém, como já mencionado o espaço-tempo é tal que as quantidades $g_{\mu\nu}$ não podem ser levadas à forma de Galileu no espaço como um todo. Se isso ocorre, o espaço-tempo é denominado *não-euclidiano* ou *curvo*.

2.2 Equações de Einstein

Tais equações descrevem o espaço-tempo na presença de um campo gravitacional. Elas são uma generalização da equação newtoniana para o campo gravitacional e reduzem-se a esta última quando as aplicamos num campo gravitacional fraco.

Enquanto a equação de Newton assume a existência de apenas um potencial, Φ, que descreve o campo gravitacional; as equações da relatividade geral assumem 10 potenciais para descrever o campo. Esses potenciais são representados pelas 10 componentes do tensor $g_{\mu\nu}$ do espaço riemanniano. Dessa forma, teremos 10 equações diferenciais, que dentro de certo limite, nos fornece a equação de Poisson:

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi\rho(x) \ , \tag{2-1}$$

onde G é a constante gravitacional de Newton e $\rho(x)$ densidade de massa da matéria que produz o campo gravitacional.

De acordo com a teoria da gravitação de Einstein, uma distribuição de massa e energia deforma a geometria do espaço-tempo. Dessa forma, a equação relativística do campo deve ter, de um lado, a distribuição de massa e energia e, do outro, a geometria que descreve esse espaço deformado.

Como a componente 00 do tensor energia-momento, $T_{\mu\nu}$ é proporcional a densidade de massa, $\rho(x)$, podemos concluir que um dos lados das equações de campo deve depender linearmente do tensor $T_{\mu\nu}$. Por outro lado, a equação que descreve o campo gravitacional na teoria newtoniana é uma equação diferencial de segunda ordem. Isso implica dizer que as equações da relatividade geral devem conter derivadas de segunda ordem do tensor métrico. Diante disto, concluímos que o outro lado das equações deve ser construído a partir do tensor de Ricci, visto que este é um tensor do mesmo tipo que $T_{\mu\nu}$ e que contém derivadas de segunda ordem do tensor métrico.

Baseado nesses argumentos, Einstein propôs que as equações da relatividade geral são:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \kappa T_{\mu\nu} \tag{2-2}$$

ou

$$R^{\nu}_{\mu} - \frac{1}{2} R = \kappa T^{\nu}_{\mu} \ , \tag{2-3}$$

onde $R_{\mu\nu}$ e R são, respectivamente, o tensor de Ricci e o escalar de Ricci (CARMELI, 1982), sendo κ uma constante.

Utilizando, ainda, a identidade de Bianchi (CARMELI, 1982), a equação acima assume a forma:

$$\nabla_{\nu} \left(R^{\nu}_{\mu} - \frac{1}{2} \delta^{\nu}_{\mu} R \right) \equiv 0 \ . \tag{2-4}$$

Assim, o tensor energia-momento satisfaz:

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0 \ , \tag{2-5}$$

que representa a conservação de energia e momento.

As equações (2-2) e (2-3), também conhecidas como as equações de Einstein, são as equações de campo gravitacional e; portanto, a base da relatividade geral.

Contraindo os índices μ e ν, a equação (2-3) nos fornece:

$$R = -\kappa T \ . \tag{2-6}$$

Assim, a equação de Einstein pode ser escrita como sendo:

$$R_{\mu\nu} = \kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right) \ . \tag{2-7}$$

No espaço vazio, o tensor energia-momento desaparece e, a equação acima se torna:

$$R_{\mu\nu} = 0 \ . \tag{2-8}$$

2.3 Equações de Maxwell

Durante algum tempo, estudiosos acreditaram que os fenômenos elétricos independiam dos magnéticos e que a única ligação entre tais fenômenos era uma quantidade conservada denominada carga. Por outro lado, com os estudos de Faraday sobre indução constatou-se que um campo magnético variando com o tempo gerava um campo elétrico. No entanto, essa forte relação entre campo elétrico e magnético só ficou mais clara com a relatividade especial, através de um conjunto de equações, que mais tarde recebeu o nome de Equações de Maxwell (JACKSON, 1983).

A eletricidade e o magnetismo são regidos por um sistema de quatro equações diferenciais. Microscopicamente, são elas:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \ , \tag{2-9}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \ , \tag{2-10}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \ , \tag{2-11}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \ . \tag{2-12}$$

Tais equações são uma generalização de observações experimentais, mas ainda não constituem as equações de Maxwell propriamente ditas. A primeira desse conjunto de equações, lei de Gauss, estabelece que o fluxo do campo elétrico ocorre devido a cargas elétricas; em outras palavras, tais cargas (os monopolos elétricos) podem ser encontrados na natureza isoladamente; ao contrário do que estabelece a *lei de Gauss magnética* que implica a inexistência de monopolos magnéticos. (MACHADO, 2005). Conforme a lei de Faraday, a variação do fluxo do campo magnético em relação ao tempo resulta na geração de um campo elétrico induzido. E, a *lei de Ampère* estabelece que campos magnéticos sejam gerados por correntes elétricas.

Em termos macroscópicos, em que os meios podem ser polarizáveis e magnetizáveis, as equações acima podem ser apresentadas em termos das densidades de carga e corrente:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \ , \tag{2-13}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} \ , \tag{2-14}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \ , \tag{2-15}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \ . \tag{2-16}$$

Baseado nas observações de Faraday, o cientista J.C. Maxwell verificou que uma das equações que descrevia o eletromagnetismo apresentava certa inconsistência. O problema estava na equação de Ampère.

Assim, aplicando o divergente em ambos os lados dessa equação, obteremos:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{J} \ . \tag{2-17}$$

Por outro lado, a lei de conservação da carga elétrica é dada pela *Equação da Continuidade*:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t}\rho \ = 0. \tag{2-18}$$

Sabendo que o divergente do rotacional é nulo, a equação (2-17) será:

$$0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{J}\ . \tag{2-19}$$

O que é inconsistente com relação à conservação da carga elétrica. Dessa forma, algo deve ser modificado; e tal modificação se dará pela relação da densidade de carga (ρ) com o deslocamento elétrico (Lei de Coulomb):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho\ . \tag{2-20}$$

Dessa forma, se substituirmos (2-20) em (2-18), encontraremos:

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = 0\ . \tag{2-21}$$

Isto nos mostra que, para satisfazer a equação da continuidade, devemos adicionar o termo $\partial\vec{D}/\partial t$ à equação (2-14). Fazendo isto, obteremos a Lei de Ampère generalizada, dada por:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\ . \tag{2-22}$$

Após tal modificação, o conjunto de equações do eletromagnetismo ficou conhecido como *Equações de Maxwell*:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\ , \tag{2-23}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\ , \tag{2-24}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho\ , \tag{2-25}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0\ . \tag{2-26}$$

Essas equações que representam resultados experimentais não podem ser provadas; porém, sua aplicabilidade é verificada em várias situações macroscópicas (REITZ,1982).

2.4 Equações de Maxwell no Espaço-tempo Curvo

O princípio da covariância geral afirma que os resultados físicos não podem depender de um sistema particular de coordenadas; em outras palavras, as equações que regem os fenômenos físicos devem ser invariantes quanto às transformações de coordenadas. Para verificarmos se uma determinada equação é invariante por uma transformação de coordenadas, devemos escrevê-la na forma tensorial.

Nesta seção escreveremos as equações de Maxwell na forma covariante. Por simplicidade, consideraremos as equações de Maxwell microscópicas, isto é, sem $\vec{D}$ e $\vec{H}$. Então, sendo ρ e $\vec{J}$ as densidades de carga e corrente, respectivamente, podemos escrever as equações de Maxwell como (JACKSON, 1983)

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 4\pi J^\nu \tag{2-27}$$

e

$$\partial_\alpha F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\alpha} + \partial_\nu F_{\alpha\mu} = 0 \ , \tag{2-28}$$

onde $J^\nu = (\rho, j_x, j_y, j_z)$ e $F_{\mu\nu}$ é um tensor do campo eletromagnético no espaço-tempo plano (Minkowski) definido como:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \ . \tag{2-29}$$

Tais equações [Eqs. (2-27) e (2-28)] são válidas em qualquer referencial inercial e, portanto, são covariantes por transformação de Lorentz, mas não por transformação geral de coordenadas.

Estas também são as equações de Maxwell para o espaço-tempo plano. No entanto, elas podem ser generalizadas para um espaço-tempo curvo, através da densidade lagrangiana (L) do sistema quando se tem ausência de campo gravitacional:

$$L = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + J^\alpha A_\alpha + L_e \ . \tag{2-30}$$

Pelo princípio da covariância, inserindo o termo $\sqrt{-g}$ na equação acima, sendo g o determinante da métrica, obtemos a densidade lagrangiana para um sistema imerso num campo gravitacional:

$$L = -\frac{1}{16\pi}\sqrt{-g}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \sqrt{-g}J^{\alpha}A_{\alpha} + L_e \ . \tag{2-31}$$

Substituindo a expressão anterior nas equações de Euler-Lagrange, encontramos:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}(\sqrt{-g}F^{\beta\alpha}) = 4\pi J^{\alpha} \ . \tag{2-32}$$

E, usando o fato de que $\nabla_{\beta}F^{\beta\alpha} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}(\sqrt{-g}F^{\beta\alpha})$, teremos:

$$\nabla_{\beta}F^{\beta\alpha} = 4\pi J^{\alpha} \ . \tag{2-33}$$

Essas são as equações de Maxwell com fonte, na presença de campo gravitacional e, representa uma generalização das mesmas para o espaço-tempo curvo.

Como vimos, para generalizarmos as equações com fonte para um espaço-tempo curvo, devemos trocar a derivada usual pela derivada covariante. Levando isto em conta, podemos concluir que as equações sem fonte generalizadas são:

$$\nabla_{\alpha}F_{\mu\nu} + \nabla_{\mu}F_{\nu\alpha} + \nabla_{\nu}F_{\alpha\mu} = 0 \ . \tag{2-34}$$

3 Metodologia

Com a finalidade de atingir os objetivos desta pesquisa, inicialmente realizamos revisões bibliográficas em livros e artigos científicos que abordam as teorias da relatividade de Einstein, assim como as equações de Maxwell e suas generalizações. De posse de tais conhecimentos, fizemos um estudo aprofundado sobre conceitos matemáticos, tais como álgebra tensorial e princípio variacional, que são de extrema importância para a formulação da teoria da relatividade geral. Por fim, resolvemos a equação de Einstein-Maxwell para uma partícula eletricamente carregada no espaço-tempo de (2+1) dimensões.

4 Equações de Einstein-Maxwell em (2+1) Dimensões

Neste ponto, apresentaremos a solução das equações combinadas de Einstein e Maxwell para uma partícula eletricamente carregada em um espaço-tempo de (2+1) dimensões. Antes, porém, discutiremos como tratar a teoria da relatividade geral e o eletromagnetismo nesta dimensão.

4.1 Relatividade Geral num espaço-tempo de (2+1) dimensões

Em (2+1) dimensões a métrica g_{mn}, os coeficientes de conexão Γ^m_{ab} e o tensor de curvatura R_{abcd} são definidos da maneira usual. Por sua vez, as equações de Einstein permanecem:

$$R_{mn} - \frac{1}{2} g_{mn} R = \kappa T_{mn} \ . \tag{4-35}$$

No espaço-tempo de (3+1) dimensões, a constante κ é determinada a pela necessidade de que as equações de Einstein se reduzam as equações de Newton no limite não relativístico (limite de campo fraco), e isto leva a $\kappa = 8\pi G$ $(c = 1)$. Contudo, em (2+1) dimensões não existe limite relativístico. Sendo assim, nesta dimensão, κ permanece uma constante arbitrária.

Em (2+1) dimensões o tensor de Riemann, R_{abcd} , pode ser dado em termos de R_{mn} , como segue (WEINBERG, 1972):

$$R_{abcd} = g_{ac}R_{bd} - g_{ad}R_{bc} - g_{bc}R_{ad} + g_{bd}R_{ac} - \frac{1}{2}(g_{ac}R_{bd} - g_{ad}R_{bc})g^{mn}R_{mn} \ . \tag{4-36}$$

Esta expressão torna-se importante na análise da situação em que não temos matéria, ou seja, $T_{mn} = 0$. Como sabemos, na ausência de matéria as equações de Einstein assumem a forma $R_{mn} = 0$. Neste caso, vemos da equação acima que $R_{abcd} = 0$. Isto significa que, na região em que $T_{mn} = 0$, o espaço-tempo é plano.

A "planicidade" do espaço-tempo nas regiões em que não tem fonte ($T_{mn} = 0$) parece tornar a gravitação em (2+1) quase trivial. No entanto, foi mostrado por Gott e Alpert

(1984) e, independentemente, por Deser et al (1984) e Giddings e Kuchar (1984) que, embora a presença de massa não induza curvatura à distância, ela afeta o espaço-tempo em torno da massa pontual. Eles mostraram que o espaço-tempo é localmente plano, mas tem forma cônica.

4.2 O Eletromagnetismo num espaço-tempo de (2+1) dimensões

O eletromagnetismo também torna-se bastante simplificado em (2+1) dimensões. Nessa dimensão, o tensor do campo eletromagnético é dado por:

$$F^{mn} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 \\ E_1 & 0 & -B \\ E_2 & B & 0 \end{pmatrix} \quad . \tag{4-37}$$

O campo elétrico $\vec{E} = (E_1, E_2)$ é um vetor e o campo magnético, B um escalar.

Como vimos, as equações de Maxwell em (3+1) dimensões são dadas pelas equações (2-33) e (2-34). Por outro lado, em (2+1) dimensões, tais equações tornam-se, respectivamente:

$$\nabla_c F_{ab} + \nabla_b F_{ac} + \nabla_a F_{bc} = 0 \tag{4-38}$$

e

$$\nabla_b F^{ba} = kJ^a \ , \tag{4-39}$$

onde k é uma constante a ser determinada.

No caso particular em que $a = 0$, (4-39) se reduz a Lei de Gauss:

$$\frac{\partial E_1}{\partial x} + \frac{\partial E_2}{\partial y} = \nabla \cdot \vec{E} = k\rho \ , \tag{4-40}$$

sendo ρ a densidade superficial de cargas.

Na forma integral, a equação (4-40) assume a forma:

$$\oint \vec{E} \cdot \hat{n} dl = kQ \ , \tag{4-41}$$

onde Q é a carga que produz o campo elétrico.

Em três dimensões espaciais a lei de Gauss dá uma dependência de $1/r^2$ para o campo elétrico de uma carga pontual, e, de acordo com a equação acima, em duas dimensões espaciais esta dependência é do tipo $1/r$. Para que o campo seja dado por $\vec{E} = Q\hat{r}/r$, devemos escolher $\kappa = 2\pi$. Fazendo isto, a equação (4-39) torna-se :

$$\nabla_b F^{ba} = 2\pi J^a \ . \tag{4-42}$$

Outro conjunto importante de equações envolvendo o tensor eletromagnético é a sua relação com o tensor energia-momento. Em (3+1) dimensões, temos que:

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}\left(g_{\alpha\beta}F^{\mu\alpha}F^{\nu\beta} - \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right) \tag{4-43}$$

Em (2+1) dimensões esta relação é dada por:

$$T^{mn} = \frac{1}{2\pi}\left(g_{ab}F^{ma}F^{nb} - \frac{1}{2}g^{mn}F_{ab}F^{ab}\right) \tag{4-44}$$

Em um espaço-tempo de (2+1) dimensões, as interações eletromagnéticas e gravitacionais serão governadas por essas equações.

4.3 Solução exata de uma carga estacionária em (2+1) Dimensões

Quando campos eletromagnéticos estão presentes, o tensor energia-momento é diferente de zero e, portanto, o espaço-tempo é curvo.

Nesta seção, investigaremos a curvatura induzida no espaço-tempo exterior a uma carga pontual estática, Q, centrada no ponto $r = 0$. Assim, consideraremos um campo elétrico radial e estático, $E_r = E(r)$, $E_\phi = 0$ e ainda $B = 0$. Em outras palavras, admitiremos que as únicas componentes não-nulas do tensor F^{mn} são $F^{01} = -E(r)$ e $F^{10} = E(r)$.

Neste caso, é fácil ver que a primeira equação de Maxwell para o espaço-tempo curvo é satisfeita. Por outro lado, como estamos interessados no espaço-tempo exterior à carga Q, devemos encontrar uma expressão para $E(r)$ que satisfaça a segunda equação de Maxwell, sem fonte:

$$\nabla_b F^{ba} = 0 \tag{4-45}$$

Fazendo $a = 0$ e $a = 1$, na equação acima, obteremos

$$\frac{dE}{dr} + E\left(\Gamma^0_{10} + \Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{12}\right) = 0 \tag{4-46}$$

e

$$E\left(\Gamma^0_{10} + \Gamma^0_{00} + \Gamma^2_{12}\right) = 0 \ , \tag{4-47}$$

respectivamente. Quando $a = 2$, a equação (4-39) é satisfeita trivialmente.

Como o campo elétrico $E(r)$ é axialmente simétrico e independe do tempo, a métrica também é axialmente simétrica e independente do tempo. Assim, adotaremos a forma de Schwarzschild:

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + r^2 d\phi^2 \tag{4-48}$$

ou ainda,

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j \ , \tag{4-49}$$

onde $g_{ij} = \mathrm{diag}\left(A(r), B(r), r^2\right)$ e $x^i = (t, r, \phi)$

Neste caso, as únicas conexões de Christoffel diferentes de zero são:

$$\Gamma^0_{01} = \Gamma^0_{10} = \frac{1}{2}\frac{A'}{A}, \quad \Gamma^0_{00} = \frac{1}{2}\frac{A'}{B}, \quad \Gamma^1_{11} = \frac{1}{2}\frac{B'}{B}, \quad \Gamma^1_{22} = -\frac{r}{B} \quad \text{e} \quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r} \ , \tag{4-50}$$

onde a linha representa derivada com respeito a variável r.

Substituindo (4-50) em (4-46), temos:

$$\frac{dE}{dr} + E\left[\frac{A'}{2A} + \frac{B'}{2B} + \frac{1}{r}\right] = 0 \ . \tag{4-51}$$

Dividindo a equação acima por $E(r)$ e integrando o resultado, encontramos:

$$E(r) = \frac{Q}{r\sqrt{A(r)B(r)}} \ , \tag{4-52}$$

sendo Q uma constante de integação.

Substituindo (4-52) em (4-44), e usando o fato que $T_{ij} = g_{im} g_{jn} T^{mn}$, obtemos:

$$T_{00} = \frac{Q^2 A(r)}{4\pi r^2}, \qquad T_{11} = \frac{Q^2 B(r)}{4\pi r^2} \qquad \text{e} \qquad T_{22} = \frac{Q^2}{4\pi} \ . \tag{4-53}$$

Sabemos que o tensor de Ricci é definido como sendo o traço do tensor de Riemann:

$$R_{mn} = g^{ij} R_{imjn} = g^{00} R_{0m0n} + g^{11} R_{1m1n} + g^{22} R_{2m2n} \ . \tag{4-54}$$

A partir da definição do tensor de Riemann, em termos das conexões de Christoffel, podemos escrever:

$$\begin{aligned} R_{0m0n} = g_{0b} R^b_{m0n} = g_{00} R^0_{m0n} &= g_{00} \left[\partial_0 \Gamma^0_{mn} - \partial_n \Gamma^0_{0m} + \Gamma^0_{0b} \Gamma^b_{mn} - \Gamma^0_{nb} \Gamma^b_{0m}\right] \\ R_{1m1n} = g_{11} R^1_{m1n} &= g_{11} \left[\partial_1 \Gamma^1_{mn} - \partial_n \Gamma^1_{1m} + \Gamma^1_{1b} \Gamma^b_{mn} - \Gamma^1_{nb} \Gamma^b_{1m}\right] \\ R_{2m2n} = g_{22} R^2_{m2n} &= g_{22} \left[\partial_2 \Gamma^2_{mn} - \partial_n \Gamma^2_{2m} + \Gamma^2_{2} \Gamma^b_{mn} - \Gamma^2_{nb} \Gamma^b_{2m}\right] \qquad . \end{aligned}$$

Então, substituindo as três últimas equações em (4-54), temos:

$$\begin{aligned} R_{mn} &= \partial_0 \Gamma^0_{nm} - \partial_n \Gamma^0_{0m} + \Gamma^0_{0b} \Gamma^b_{nm} - \Gamma^0_{nb} \Gamma^b_{0m} + \partial_1 \Gamma^1_{nm} - \partial_n \Gamma^1_{1m} \\ &\quad + \Gamma^1_{1b} \Gamma^b_{nm} - \Gamma^1_{nb} \Gamma^b_{1m} + \partial_2 \Gamma^2_{nm} - \partial_n \Gamma^2_{2m} + \Gamma^2_{2b} \Gamma^b_{nm} - \Gamma^2_{nb} \Gamma^b_{2m} \ . \end{aligned} \tag{4-55}$$

Logo

$$R_{00} = \frac{1}{4B^2 Ar} = \left\{ 2r \left(\frac{d^2 A}{dr^2}\right) AB - rA \left(\frac{dA}{dr}\right) + 2AB \left(\frac{dA}{dr}\right) - rB \left(\frac{dA}{dr}\right)^2 \right\} \ , \tag{4-56}$$

$$R_{11} = \frac{1}{4A^2 Br} = \left\{ -2ABr \left(\frac{d^2 A}{dr^2}\right) + Br \left(\frac{dA}{dr}\right)^2 + rA \left(\frac{dA}{dr}\right) \left(\frac{dB}{dr}\right) + 2A^2 \left(\frac{dB}{dr}\right) \right\} \tag{4-57}$$

e

$$R_{22} = \frac{r}{2AB^2} = \left\{ -B \left(\frac{dA}{dr}\right) + A \left(\frac{dB}{dr}\right) \right\} \ . \tag{4-58}$$

Da equação (4-55), também temos que:

$$R_{01} = R_{02} = R_{10} = R_{12} = R_{20} = R_{21} = 0 \ . \tag{4-59}$$

Por sua vez, o escalar de curvatura é dado por:

$$R = g^{mn}R_{mn} = g^{00}R_{00} + g^{11}R_{11} + g^{22}R_{22} \ . \tag{4-60}$$

Agora, substituindo as equações (4-56) - (4-58) em (4-60), obtemos:

$$R = \frac{1}{2A^2B^2r}\left\{-2ABr\left(\frac{d^2A}{dr^2}\right) + Br\left(\frac{dA}{dr}\right)^2 + rA\left(\frac{dA}{dr}\right)\left(\frac{dB}{dr}\right) + 2A^2\left(\frac{dB}{dr}\right)\right\} \tag{4-61}$$

Utilizando as equações (4-53), (4-56), (4-57) e (4-61), podemos mostrar que as componentes 00 e 11 das equações de Einstein, tomam a seguinte forma:

$$\frac{2\pi}{kQ^2}\frac{1}{B^2}\frac{dB}{dr} = \frac{1}{r} \tag{4-62}$$

e

$$-\frac{2\pi}{kQ^2}\frac{1}{AB}\frac{dA}{dr} = \frac{1}{r} \ . \tag{4-63}$$

Finalmente, integrando a equação (4-62), obtemos:

$$B(r) = -\frac{2\pi}{kQ^2}\left[ln\left(\frac{r}{r_c}\right)\right]^{-1} \ , \tag{4-64}$$

onde r_c é uma constante de integração.

Além disso, subtraindo as equações (4-62) e (4-63), temos:

$$\frac{1}{B}dB = -\frac{1}{A}dA \ . \tag{4-65}$$

Então, integrando a equação acima, e usando (4-64), encontramos:

$$A(r) = -\frac{k\alpha Q^2}{2\pi}ln\left(\frac{r}{r_c}\right) \ , \tag{4-66}$$

sendo α uma constante de integração.

Sem perda de generalidade podemos fazer $\alpha = 1$. Na verdade, embora pareça arbitrária, esta escolha é equivalente a uma redefinição no tempo. Fazendo esta escolha, podemos reescrever $A(r)$ como

$$A(r) = -\frac{kQ^2}{2\pi}ln\left(\frac{r}{r_c}\right) \ . \tag{4-67}$$

Dessa forma, substituindo os valores de A e B na métrica, chegamos ao seguinte resultado:

$$ds^2 = -\frac{kQ^2}{2\pi} ln\left(\frac{r_c}{r}\right) dt^2 + \frac{2\pi}{kQ^2}\left[ln\left(\frac{r_c}{r}\right)\right]^{-1} dr^2 + r^2 d\phi^2 \ . \tag{4-68}$$

O campo elétrico pode ser descrito de maneira indiferente por $E(r) = F^{10}$ e $E(r) = F_{01}$, no espaço-tempo plano; por outro lado, as componentes F^{10} e F^{01} nem sempre são iguais quando descritas no espaço-tempo curvo. Por essa razão, não é evidente a forma como o campo elétrico relaciona-se com o tensor do campo eletromagnético. Mas, devido a forma da métrica, as componentes F^{10} e F^{01} são iguais, podendo interpretar uma ou outra como sendo o campo elétrico. Assim, as considerações iniciais estão corretas e, usando (4-68), temos que o campo elétrico da partícula será dado por:

$$E(r) = \frac{Q}{r} \ , \tag{4-69}$$

onde a constante Q deve ser interpretada como sendo a carga elétrica da partícula. Tal interpretação surge naturalmente, quando comparamos a equação (4-69) com o resultado usual do campo elétrico de uma carga pontual no espaço-tempo plano. Cabe ressaltar que a solução descrita aqui foi obtida por Gott *et al* (1986).

5 Conclusões

Na relatividade geral, o espaço e o tempo são grandezas intimamente relacionadas, de modo que temos um espaço-tempo quadrimensional de (3+1) dimensões. Nesta teoria, a gravidade é resultado da deformação desse espaço-tempo devido a presença de matéria e energia; dessa forma, a gravidade é considerada um fator geométrico.

Embora o espaço-tempo da relatividade geral seja quadrimensional, alguns autores têm estudado alguns fenômenos físicos em três dimensões. Além de tornar os cálculos mais simplificados, a análise de sistemas em (2+1) dimensões mostra resultados surpreendentes. Por exemplo, ao resolver as equações de Einstein, Gott e Alpert (1984), Deser et al (1984) e Giddings e Kuchar (1984) mostraram, independentemente, que o espaço-tempo gerado por uma massa pontual é localmente plano, mas tem forma cônica. Este resultado difere do seu análogo em (3+1) dimensões, a saber, a solução de Schwarzschild.

Diante deste problema, decidimos resolver as equações de Einstein-Maxwell em (2+1) dimensões, tendo como fonte uma partícula pontual carregada. Como podemos ver, a partir das equações (4-68) e (4-69), a solução obtida é completamente diferente de sua análoga em (3+1) dimensões, denominada solução de Reisner-Nordströn. Esta discrepância nos mostra que a dimensão do espaço-tempo afeta os resultados físicos. As propriedades não usuais exibidas nestas dimensões são provenientes das propriedades das equações de campo de Einstein e do tensor de curvatura ($R_{\mu\nu\lambda\alpha}$ - tensor de Riemann)

A análise da relatividade geral num espaço de (2+1) dimensões, além de nos familiarizar com o formalismo matemático desta teoria, nos ajudou a perceber a complexidade e profundidade das equações de campo de Einstein.

Referências Bibliográficas

ARFKEN, G.B.; WEBER, H.J. **Física Matemática**. New York, Academic Press, 1995.

AYALA, A. **A construção de um perfil para o conceito de referencial em física e os obstáculos epistemológicos a aprendizagem da teoria da relatividade restrita**. Rio grande do Sul: investigações em ensino de ciências, 2010.

BERMAN, M. **O Ensino da Relatividade Geral na Graduação**. Revista de ensino de física, 1987. v. 9.

CRAWFORD, P. **O Significado da Relatividade no Final do Século**. Colóquio Ciência, v. 16, p. 3-26, 1994.

DALFOVO, M; LANA, R; SILVEIRA, A. **Métodos Quantitativos e Qualitativos: Um Resgate Teórico**. Revista interdisciplinar cientifica aplicada. 2008. v. 2

FLEMING, H.**Introdução aos Tensores**. Disponível em: ⟨http:www.hfleming.com/rosto2.php⟩. Acesso em: 26 de maio de 2006.

LANDAU, L.; LIFCHITZ, E. **Teoria de Campo**. São Paulo: HEMUS - Livraria Editora Ltda, 1974.

LEMOS, N. A. **Mecânica Analítica**. 1 ed. São Paulo: editora livraria da física, 2004.

OSTERMANN, F; RICCI, T. **Relatividade no ensino médio: contração de Lorentz-Fitzgerald e aparência visual de objetos relativísticos em livros didáticos de física**. Rio Grande do Sul: caderno brasileiro de ensino de física, 2002. v.19.

RESNICK, R. **Introduction to Special Relativity**. New York: John Wiley and Sons, 1968.

RINDLER, W. **Relativity Special, General and Cosmological**, 2ª ed. New York: Oxford University Press, 2006.

SANTOS, R. **Relatividade Restrita com Auxilio de Diagramas**. Rio Grande do Sul: caderno brasileiro de ensino de física, 2006. v. 23.

SPIEGEL, M. R. **Análise Vetorial**. Editora Mc Graw Hill. Rio de Janeiro, 1979.

SYMON, K, R. **Mecânica**. Rio de Janeiro: Ed. Campus Ltda, 1996.

TIPLER, P. A; LLEWELLIN, R. A. **Física Moderna**. 3 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

REITZ, John R., *et al.* **Fundamentos da Teoria Eletromagnética**. 7ed. Rio de Janeiro: Campus, 1982.

JACKSON, John David. **Eletrodinâmica Clássica**. 2ed. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1983.