Universidade ESTADUAL DA PARAÍBA

CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA - CCT

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Flávia Shirley Tavares Vieira

Sequências de Cauchy em Espaços Métricos e os Espaços de Banach

Campina Grande - PB

2014

FLÁVIA SHIRLEY TAVARES VIEIRA

Sequências de Cauchy em Espaços Métricos e os Espaços de Banach

Trabalho de Conclusão do Curso apresentado ao Departamento de Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia - CCT da Universidade Estadual da Paraíba - UEPB , em cumprimento às exigências legais para a obtenção do título de Graduada no Curso de Licenciatura em Matemática .

Orientação da Professora Me. Joselma Soares dos Santos.

Campina Grande - PB
2014

V658s Vieira, Flávia Shirley Tavares.
Sequências de Cauchy em espaços métricos e os espaços de Banach [manuscrito] / Flavia Shirley Tavares Vieira. - 2014.
43 p.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2014.
"Orientação: Profa. Ma. Joselma Soares dos Santos, Departamento de Matemática".

1. Espaço métrico. 2. Sequência de Cauchy. 3. Espaço de Banach I. Título.

21. ed. CDD 516

Flávia Shirley Tavares Vieira

Sequências de Cauchy em Espaços Métricos e os Espaços de Banach

Trabalho de Conclusão do Curso apresentado ao Departamento de Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia - CCT da Universidade Estadual da Paraíba - UEPB , em cumprimento às exigências legais para a obtenção do título de Graduada no Curso de Licenciatura em Matemática .

Aprovado pela banca examinadora em 01 de Agosto de 2014.

Banca Examinadora

Joselma S. Santos

Prof[a]. Me. Joselma Soares dos Santos
Departamento de Matemática - Campus I/UEPB
Orientadora

Thiciany Matsudo Iwano

Prof[a]. Me Thiciany Matsudo Iwano
Departamento de Matemática - Campus I/UEPB
Examinadora

Luciana R. Freitas

Prof[a]. Dra. Luciana Roze de Freitas
Departamento de Matemática - Campus I/UEPB
Examinadora

Aos meus pais: Eleane e Francisco. Ao meu esposo Cláudio Teodista.

Agradecimentos

A Deus que é responsável por todas as bênçãos em minha vida, dentre elas o amor a saúde e a força para vencer os obstáculos da vida.

A meu pai Francisco e em especial a minha mãe Eleane que sempre me apoiou nos estudos e é um exemplo de mulher, que com muito amor, dedicação e paciência me educou e me orientou a fazer as escolhas importantes em minha vida.

A meu esposo Cláudio Teodista por seu carinho, dedicação, por ter me dado suporte nos momentos em todos os momentos e por seus conselhos que contribuíram bastante para o meu crescimento profissional e pessoal.

A meus irmãos, Clebesson e Cléssia, que sempre torceram por mim.

A professora orientadora Joselma, por sua dedicação, e por ser uma professora admirável que me ensinou bastante e sem ela este trabalho não seria possível.

A minha amiga Adelma por sua amizade, incentivo e conselhos.

A meus colegas do curso, Reniltom, Júnior, Tayrone e em especial o meu amigo Janailson que foi com quem mais convivi durante a graduação, nossas conversas e trocas de conhecimentos contribuíram bastante para minha vida e formação.

A meus colegas e professores do ensino fundamental e médio, em especial a Corrimar, e Janaína, que me incentivaram a fazer o vestibular.

Aos professores da UEPB em especial a Thiciany Matsudo, Luciana Freitas, Ernesto Trajano e Kátia Suzana, por suas competências e por estarem sempre acessíveis e por terem sido muito importantes na minha formação.

A todos que fazem o PIBID (Programa Institucional de Bolsas de Iniciação a Docência), em especial a Supervisora Rosemary e os bolsistas Adriana, Aylla, Hernandes e Naelson.

Por fim, a todos que contribuíram de forma direta ou indireta para minha formação.

"Pelo contrário, em primeiro lugar busquem o reino de Deus e a sua justiça, e Deus dará a vocês, em acréscimo, todas essas coisas.".
Mateus 6:33

Resumo

Neste trabalho iremos estudar as sequências de Cauchy em Espaços Métricos, a fim de definir os Espaços de Banach, que são espaços vetoriais normados completos, ou seja, um Espaço de Banach é um Espaço Vetorial E, no qual está definida uma norma, a qual denotamos por $\| \cdot \|$. Além disso, E é um Espaço Métrico Completo, isto é, toda sequência de Cauchy (x_n) em E converge para um ponto $a \in E$, simbolicamente:

"dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Longrightarrow d(x_n, a) = \| x_n - a \| < \varepsilon$"

Palavras-Chave: Espaço Métrico, Sequência de Cauchy, Espaço de Banach.

Abstract

In this paper we study the Cauchy Sequences in Spaces Metric, in order to define the Banach Spaces, which are complete normed vectorial space, that is, a Banach Space is a Vector Space E, which a rule is defined , that we denote by $\| \cdot \|$ and moreover, E is a Complete Metric Space, that is, every Cauchy sequence (x_n) in E converges to a point a $a \in E$, in symbols,

$$\text{"data } \varepsilon > 0, \text{ exist } n_0 \in \mathbb{N} \text{ such that } n > n_0 \Longrightarrow d(x_n, a) = \| x_n - a \| < \varepsilon\text{"}$$

Keywords: Metric Space, Cauchy Sequence, Banach Spaces.

SUMÁRIO

Introdução

Alguns matemáticos italianos como Ascoli e Pincherle fizeram uso das ideias de Cantor para o estudo de "espaços"não convencionais, onde nesses espaços um ponto poderia ser uma curva ou uma função. Uma importante e decisiva contribuição ocorreu em 1906 por Frechet em sua tese de doutorado.
Neste trabalho, que marca o início do Cálculo Funcional, Frechet formulou alguns conceitos como o de limite, derivada e continuidade para espaços de funções e, ao estudar estes conjuntos nos diversos espaços, sugeriu uma definição geral e abstrata do conceito de distância e pesquisando várias maneiras de conseguir tal objetivo, sendo este o ponto de partida da teoria dos espaços métricos. Este assunto foi posteriormente desenvolvido por Hausdorff em 1914, ganhando seu contexto praticamente atual em 1924 com Urysohn.

Um tipo especial de espaço métrico é o Espaço de Banach que deve seu nome ao matemático polaco Stefan Banach que estudou no Instituto Politécnico de Lviv, onde se doutorou em 1922. Banach é considerado um dos maiores matemáticos do século XX e também introduziu o espaço B, que o matemático francês Maurice Fréchet denominaria em 1928, Espaços de Banach.

Neste trabalho, utilizando como principal fonte de pesquisa o livro "Espaços Métricos", do autor Elon Lages, estudamos os Espaços Métricos e as sequências de Cauchy em Espaços Métricos, com o principal objetivo de definir os Espaços de Banach, que são espaços vetoriais normados completos, ou seja, um Espaço de Banach é um Espaço Vetorial E, no qual está definida uma norma, a qual denotamos por $\| \cdot \|$ e além disso, E é um Espaço Métrico Completo, isto é, toda Sequência de Cauchy (x_n) em E converge para um ponto $a \in E$, em símbolos,

"dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Longrightarrow d(x_n, a) = \| x_n - a \| < \varepsilon$".

O texto é dividido em quatro capítulos e um apêndice. No Capítulo 1, definimos o que é um Espaço Métrico, Espaço Vetorial Normado e conjuntos limitados, no Capítulo 2

Funções Contínuas, Aplicação Lipschitziana e Transformações Lineares com o objetivo de apresentar alguns resultados envolvendo continuidade, no Capítulo 3 Limites de Sequências, Sequência Monótona, com o objetivo de estudarmos Sequência de Cauchy e no Capítulo 4 Espaços Métricos Completos para finalmente definirmos os Espaços de Banach. Para finalizar o trabalho, temos o Apêndice A, do qual contém algumas definições e resultados que foram utilizados neste trabalho.

1 Espaços métricos

Neste capítulo será abordado a definição de Métrica e de Espaços Métricos; bem como algumas definições, resultados e exemplos. Em particular estudaremos os Espaços Vetoriais Normados, necessários para definirmos os espaços de Banach.

1.1. Espaços Métricos

Nesta seção iremos definir o que é uma métrica e um Espaço Métrico, além de expor alguns exemplos.

Definição 1.1 *Uma métrica num conjunto não-vazio M é uma função $d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada par ordenado de elementos $x, y \in M$ um número real $d(x,y)$ chamado de distância de x até y, de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições para quaisquer $x,y,z \in M$:*

d1) $d(x,x) = 0$;

d2) *Se $x \neq y$ então $d(x,y) > 0$;*

d3) $d(x,y) = d(y,x)$;

d4) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$;

Definição 1.2 *Um espaço métrico é um par (M,d), onde M é um conjunto e d é uma métrica em M.*

Exemplo 1.1 *A reta, ou seja, o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais é um exemplo importante de espaço métrico. A distância entre dois pontos $x,y \in \mathbb{R}$ é dada por $d(x,y) = \mid x - y \mid$, esta métrica é conhecida como "métrica usual"de $\mathbb{R}$.*

Solução: Para mostrar que $(\mathbb{R}, d)$ é um espaço métrico, basta mostrar que a função

$$\begin{array}{rccc} d : & \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & d(x,y) = \mid x - y \mid \end{array}$$

satisfaz as condições (i)-(iv) da Definição 1.1

Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}$, segue das propriedades de valor absoluto de números reais (ver Anexo A.1), que

d1) $d(x,x) = |x - x| = 0$;

d2) $d(x,y) = |x - y| > 0$;

d3) $d(x,y) = |x - y| = |y - x| = d(y,x)$;

d4) $d(x,z) = |x - z| = |x - y + y - z| \leq |x - y| + |y - z| = d(x,y) + d(y,z)$.

Logo, d é uma métrica em $\mathbb{R}$.

Exemplo 1.2 *O espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, é um espaço métrico. Este exemplo generaliza o anterior. Os pontos de $\mathbb{R}^n$ são as listas $x = (x_1, ..., x_n)$ onde cada uma das n coordenadas x_i é um número real. Há três maneiras naturais de se definir a distância entre dois pontos em $\mathbb{R}^n$. Dados $x = (x_1, ..., x_n)$ e $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ escremos:*

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2} = [\textstyle\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2]^{1\backslash 2};$$
$$d'(x,y) = |x_1 - y_1| + \ldots + |x_n - y_n| = \textstyle\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|; \text{ e}$$
$$d''(x,y) = \max |x_1 - y_1| + \ldots + |x_n - y_n| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$$

Solução: Mostremos que d é uma métrica em $\mathbb{R}$. De fato, sejam $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ e $z = (z_1, \ldots, z_n)$ vetores quaisquer em $\mathbb{R}^n$, temos

d1) $d(x,x) = \sqrt{(x_1 - x_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2} = 0$

d2) Se $x \neq y$ então $d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2} > 0$. De fato, $x \neq y$, então $x_i \neq y_i$ para algum $1 \leq i \leq n$, de onde segue que $(x_i - y_i)^2 > 0$ para algum $1 \leq i \leq n$, consequentemente,
$d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2} > 0$.

d3) $d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2} = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \ldots + (y_n - x_n)^2} = d(y,x)$

d4) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Mostraremos que a desigualdade dada no item (iv) é verdadeira, após definirmos norma e usarmos a Desigualdade de Cauchy-Schwarz (em Anexo A4).

1.1.1. Espaços de Funções

Nesta subseção iremos definir um caso particular de espaço métrico, chamado espaço de funções.

Definição 1.3 *Seja X um conjunto arbitrário. Uma função real $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ chama-se limitada quando existe uma constante $k = k_f > 0$ tal que $| f(x) | \leq k$ para todo $x \in X$.*

Indicaremos com $\mathfrak{B}(X; \mathbb{R})$ o conjunto das funções limitadas $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$.

Observação 1.1 *A soma, a diferença e o produto de funções limitadas são ainda funções limitadas.*

Definiremos agora uma métrica em $\mathfrak{B}(X;\mathbb{R})$ pondo para $f,g \in \mathfrak{B}(X;\mathbb{R})$ arbitrárias,

$$d(f,g) = \sup_{x \in X} \mid f(x) - g(x) \mid.$$

Mostremos que, a função definida acima é uma métrica. De fato, sejam $f,g,h \in \mathfrak{B}(X;\mathbb{R})$, segue das propriedades de supremo (ver Anexo A2), que

d1) $d(f,f) = \sup_{x \in X} \mid f(x) - f(x) \mid = \sup_{x \in X} 0 = 0.$

d2) Se $f \neq g$, temos $f(x) \neq g(x)$ para algum $x \in X$, daí $\mid f(x) - g(x) \mid > 0$ para algum $x \in X$.Consequentemente,
$d(f,g) = \sup_{x \in X} \mid f(x) - g(x) \mid > 0$, se $f \neq g$.

d3) $d(f,g) = \sup_{x \in X} \mid f(x) - g(x) \mid = \sup_{x \in X} \mid g(x) - f(x) \mid = d(g,f).$

d4) $d(f,g) = \sup_{x \in X} \mid f(x) - g(x) \mid$
Mas, pelas propriedades de valor absoluto de números reais,
$\mid f(x) - g(x) \mid = \mid f(x) - h(x) + h(x) - g(x) \mid \leq \mid f(x) - h(x) \mid + \mid h(x) - g(x) \mid$, para todo $x \in X$, temos, pelas propriedades de supremo
$\sup_{x \in X} \mid f(x) - g(x) \mid \leq \sup_{x \in X} \mid f(x) - h(x) \mid + \sup_{x \in X} \mid h(x) - g(x) \mid$,
ou seja,
$d(f,g) \leq \sup_{x \in X} \mid f(x) - h(x) \mid + \sup_{x \in X} \mid h(x) - g(x) \mid = d(f,h) + d(h,g).$
Logo, d é uma métrica.

Exemplo 1.3 *O conjunto $\mathfrak{B}(X;\mathbb{R})$, com a métrica definida acima é um espaço métrico.*

1.2. Espaços Vetoriais Normados

Nesta seção iremos definir o que é uma norma, a fim de definirmos os Espaços Vetoriais Normados.

Definição 1.4 *Seja E um espaço vetorial real. Uma norma em E é uma função real $\| \cdot \| \colon E \longrightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada vetor $x \in E$ o número real $\| x \|$, chamado a norma de x, de modo a serem cumpridas as condições abaixo para quaisquer $x,y \in E$ e λ escalar:*

N1) *Se $x \neq 0$ então $\| x \| \neq 0$;*

N2) $\| \lambda x \| = |\lambda| \cdot \| x \|$;

N3) $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$.

Observação 1.2 *Em N2), $\mid \lambda \mid$ indica o valor absoluto de $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Definição 1.5 *Seja E um espaço vetorial real. Um espaço vetorial normado é um par* $(E, \| \cdot \|)$*, onde E é o espaço vetorial real e* $\| \cdot \|$ *é uma norma em E. Frequentemente se designa o espaço vetorial normado com E, deixando a norma subtendida.*

Observação 1.3 *Num espaço vetorial normado, se tem*

$$\| x - y \| = d(x,y).$$

Além disso,

$$\| x \| = d(x,0),$$

isto é, a norma de um vetor x é a distância de x até a origem.

Exemplo 1.4 $\mathbb{R}$ *é um espaço vetorial normado.*

Solução: Sendo $\mathbb{R}$ um espaço vetorial, basta considerar a norma definida pelo valor absoluto, isto é, dado $x \in \mathbb{R}$, $\| x \| = | x |$. E o valor absoluto, conforme proposição (em Anexo A1), satisfaz as condições da definição, isto é, define uma norma em $\mathbb{R}$.

Exemplo 1.5 *Os pares* $(\mathbb{R}^n, \| \cdot \|), (\mathbb{R}^n, \| \cdot \|') e (\mathbb{R}^n, \| \cdot \|'')$*, são espaços vetoriais normados, cujas normas* $\| \cdot \|, \| \cdot \|'$ *e* $\| \cdot \|''$ *são dadas, respectivamente, por*

I. $\| x \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2}$*;*
II. $\| x \|' = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$*;*
III. $\| x \|'' = \max |x_i|$*, com* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Solução: Como $\mathbb{R}^n$ é um espaço vetorial (Ver [1]).
Mostremos apenas que a função dada por I, define uma norma.
I. De fato sejam $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$
N1) Se $x \neq 0$ então $x_i \neq 0$ para algum $1 \leq i \leq n$. E, como $(x_i)^2 \geq 0$, para todo $1 \leq i \leq n$, temos,

$$\| x \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2} = \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2 + \ldots + (x_n)^2} \neq 0$$

N2) $\| \lambda x \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \lambda^2 x_i^2} = \sqrt{\lambda^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{\lambda^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = | \lambda | \| x \|$
N3) $\| x + y \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2} \Longrightarrow \| x + y \|^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2$,
onde
$\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 + 2x_i y_i + y_i^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} 2x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} y_i^2$.
Usando a definição de produto interno e a desigualdade de Cauchy (ver Anexo A4), temos
$2 \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 2 < x, y > \leq 2 \, |< x, y >| \leq 2 \, \| x \| \cdot \| y \|$.

Daí,
$\| x+y \|^2 \leq \| x \|^2 + 2 \| x \| \cdot \| y \| + \| y \|^2 = (\| x \| + \| y \|)^2.$

Aplicando a raiz quadrada em ambos os membros da última desigualdade,obtemos

$$\| x+y \| \leq \| x \| + \| y \| .$$

Logo,$\| \cdot \|$ é uma norma em $\mathbb{R}^n$. Portanto,$(\mathbb{R}^n, \| \cdot \|)$ é um espaço vetorial normado.

Observação 1.4 *De modo análogo ao que foi feito no item $N3$ do exemplo anterior, provamos o item d4 do Exemplo 1.2.*

Exemplo 1.6 *Um outro exemplo de espaço vetorial normado é $\mathfrak{B}(X,\mathbb{R})$ definido na seção anterior, onde definimos*

$$\| f \| = \sup_{x \in X} | f(x) | .$$

Usamos $\| f \|$ para designar a norma da função f.

Solução: Como $\mathfrak{B}(X,\mathbb{R})$ é um espaço vetorial. Mostremos apenas, que esta função define uma norma em $\mathfrak{B}(X;\mathbb{R})$.

N1) Se $f \neq 0$, isto é, $f(x) \neq 0$ para algum $x \in X$, o que implica, $| f(x) | \neq 0$ para algum $x \in X$.Assim , pelas propriedades de supremo:

$$\| f \| = \sup_{x \in X} | f(x) | \neq 0.$$

N2) $\| \lambda f \| = \sup_{x \in X} | \lambda f(x) |$, onde $| \lambda f(x) | = | \lambda | \cdot | f(x) |$.
Daí aplicando a propriedade de supremo:
$\| f \| = \sup_{x \in X} | \lambda f(x) | = \sup_{x \in X} | \lambda | \cdot | f(x) | = | \lambda | \cdot \sup_{x \in X} | f(x) | = | \lambda | \cdot \| f \|$

N3) $\| f+g \| = \sup_{x \in X} | (f+g)(x) |$, onde, $| (f+g)(x) | = | f(x)+g(x) | \leq | f(x) | + | g(x) |$ e pelas propriedades de supremo:
$\| f+g \| = \sup_{x \in X} | f(x)+g(x) | \leq \sup_{x \in X} | f(x) | + | g(x) | = \sup_{x \in X} | f(x) | + \sup_{x \in X} | g(x) | = \| f \| + \| g \|$.
Portanto, $\| \cdot \|$ é uma norma em $\mathfrak{B}(X;\mathbb{R})$.

1.3. Conjuntos Limitados

Nesta seção iremos definir conjuntos limitados.

Definição 1.6 *Um subconjunto X de um espaço métrico M é limitado quando existe uma constante $c > 0$, tal que $d(x,y) \leq c$, para quaisquer $x,y \in X$. A menor dessas constantes c será chamada o diâmetro de X.*

Exemplo 1.7 *Considere M um espaço métrico e $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. A bola aberta de centro em a e raio r, $B(a;r) = \{x \in M; d(x,a) < r\}$ é um conjunto limitado.*

Solução: Dados $x, y \in B(a;r)$, temos

$$d(x,a) < r \text{ e } d(y,a) < r,$$

assim,

$$d(x,y) \leq d(x,a) + d(a,y) < r + r = 2r.$$

Observação 1.5 *De modo análogo, justifica-se que a bola fechada $B[a;r] = \{x \in M; d(x,a) \leq r\}$ e a esfera $S[a;r] = \{x \in M; d(x,a) = r\}$ são conjuntos limitados.*

Observação 1.6 *Dizer que dados $x, y \in X$, $d(x,y) \leq c$ significa afirmar que c é uma cota superior para o conjunto das distâncias $d(x,y)$ entre os pontos de X. A menor das cotas superiores de um conjunto de números reais chama-se o supremo desse conjunto. Assim, podemos definir o diâmetro de um conjunto limitado $X \subset M$ como sendo o número real*

$$diam(X) = \sup\{d(x,y) : x, y \in X\}$$

Observação 1.7 *Todo conjunto finito é limitado.*

Proposição 1.1 *Se X e Y são conjuntos limitados, então $X \cup Y$ é limitado.*

Demonstração: (Ver [7]) ■

Definição 1.7 *Uma aplicação $f : X \longrightarrow M$, definida num conjunto arbitrário X e tomando valores num espaço métrico M, chama-se limitada quando sua imagem $f(X)$ é um subconjunto limitado de M.*

Podemos agora, generalizar a definição de métrica vista para o conjunto $\mathfrak{B}(X,\mathbb{R})$. Seja X um conjunto arbitrário e M um espaço métrico. Usaremos a notação $\mathfrak{B}(X,M)$ para indicar o conjunto das funções limitadas $f : X \longrightarrow M$, no qual podemos definir a distância entre duas funções limitadas $f, g : X \longrightarrow M$ pondo

$$d(f,g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x)),$$

chamada métrica da convergência uniforme ou métrica do *sup*.

Quando E é um espaço vetorial normado, a métrica do sup em $\mathfrak{B}(X,E)$ provém da seguinte norma

$$\| f \| = \sup_{x \in X} | f(x) |, f(x) \in E$$

e podemos escrever $\| f - g \|$ em vez de $d(f,g)$. Assim, $\mathfrak{B}(X,E)$ é um espaço vetorial normado.

2 Funções Contínuas

Neste capítulo será apresentado a definição e exemplos de funções contínuas, assim como as definições das aplicações Lipschitziana e Contração Fraca, e de Transformações Lineares, a fim de apresentarmos resultados envolvendo a continuidade de tais aplicações.

2.1. Definição de Funções Contínuas

Nesta seção iremos definir e dar um exemplo de função contínua.

Definição 2.1 *Sejam M, N espaços métricos. Diz-se que a aplicação $f : M \longrightarrow N$ é contínua no ponto $a \in M$ quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, é possível obter $\delta > 0$ tal que*

$$d(x,a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \varepsilon, \textit{ para todo } x \in M.$$

Diz-se que $f : M \to N$ é contínua quando ela é contínua em todos os pontos $a \in M$.

Exemplo 2.1 *Se $\|\cdot\| : V \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma norma no espaço vetorial V então $\|\cdot\|$ é uma função contínua.*

Solução: Sejam $x, a \in V$, dado $\varepsilon > 0$, tomando $\delta = \varepsilon$, temos

$$d(x,a) < \delta \Longrightarrow d(\| x \|, \| a \|) < \varepsilon.$$

De fato, por definição,

$$d(\| x \|, \| a \|) = |\| x \| - \| a \||,$$

e pelas propriedades de norma

$$|\| x \| - \| a \|| \leq \| x - a \|,$$

consequentemente

$$d(\| x \|, \| a \|) \leq \| x - a \| = d(x,a) < \delta = \varepsilon.$$

Portanto, $\|\cdot\|$ é uma função contínua.

Proposição 2.1 *Sejam M um espaço métrico, E um espaço vetorial normado e $f,g : M \longrightarrow E$, α, $\beta : M \longrightarrow \mathbb{R}$ aplicações contínuas, com $\beta(x) \neq 0$ para todo $x \in M$. Então são contínuas as aplicações $f+g : M \longrightarrow E$, $\alpha \cdot f : M \longrightarrow E$ e $\dfrac{\alpha}{\beta} : M \longrightarrow \mathbb{R}$, definidas por*

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x),\ (\alpha \cdot f)(x) = \alpha(x) \cdot f(x),$$

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)(x) = \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}.$$

Demonstração: *Ver referência [5]* ■

2.2. Aplicação Lipschitziana e Contração Fraca

Nesta seção iremos definir quando uma aplicação é dita Lipschitziana e quando é dita contração fraca.

Definição 2.2 *Dada $f : M \to N$, suponhamos que exista uma constante $c > 0$ (chamada de constante de Lipschitz) tal que $d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x,y)$ quaisquer que sejam $x,y \in M$. Dizemos então que f é uma aplicação lipschitziana.*

Proposição 2.2 *Seja $f : M \longrightarrow N$ uma aplicação Lipschitziana então f é contínua.*

Demonstração: Com efeito como f é Lipschitziana, dado $\varepsilon > 0$, tomando $\delta = \dfrac{\varepsilon}{c} > 0$, temos

$$d_M(x,y) < \delta \Longrightarrow d_N(f(x), f(y)) \leq c \cdot d_M(x,y) < c \cdot \delta = c \cdot \frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon.$$

Logo f é contínua. ■

Proposição 2.3 *Se $f,g : M \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções Lipschitzianas o mesmo ocorre com $f+g$ e Kf com $K \in \mathbb{R}$.*

Demonstração: (Ver [7])

■

Observação 2.1 *Dado $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$, onde $M \subset \mathbb{R}$. Sendo f Lipschitziana, a inclinação de qualquer secante ao gráfico de f é, um valor absoluto, $\leq c$.*

De fato, sendo f Lipschitziana, existe $c > 0$ tal que

$$| f(x) - f(y) | \leq c \cdot | x - y |, \text{ para todo } x,y \in M,$$

de onde segue que,

$$\frac{| f(x) - f(y) |}{| x - y |} \leq c, \text{ para todo } x,y \in M.$$

Mas, por definição,

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|,$$

é a inclinação (coeficiente angular) da reta secante ao gráfico de f, que passa pelos pontos $(x, f(x))$ e $(y, f(y))$, ou seja, a inclinação de qualquer secante ao gráfico de f é, um valor absoluto, $\leq c$.

Observação 2.2 *Seja $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, definida num intervalo I, derivável em I, tal que $\mid f'(x) \mid \leq c$, para todo $x \in I$. Então pelo Teorema do valor Médio (Ver Anexo A6). Dados $x, y \in I$ existe um número z no intervalo (x, y) tal que*

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(z),$$

o que implica

$$\mid f(x)-f(y) \mid = \mid f'(z) \mid \cdot \mid x-y \mid,$$

e sendo $\mid f'(x) \mid \leq c$, para todo $x \in I$, como $z \in (x, y) \subset I$ temos

$$\mid f(x)-f(y) \mid \leq c \cdot \mid x-y \mid .$$

Assim toda função com derivada limitada num intervalo (o qual pode ser limitado) é Lipschitziana.

Definição 2.3 *Se $f : M \longrightarrow N$ é tal que $d(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$ para quaisquer $x, y \in M$, dizemos que f é uma contração fraca.*

Observação 2.3 *Se f é uma contração, f é lipschitziana (com $c = 1$) e portanto pela Proposição 2.2 é contínua.*

Observação 2.4 *A aplicação dada no Exemplo 2.2, abaixo, também é um exemplo de uma contração fraca.*

Exemplo 2.2 *Se $\| \cdot \| : V \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma norma no espaço vetorial V, então $\| \cdot \|$ é uma aplicação Lipschitziana.*

Solução: Conforme vimos no Exemplo 2.1,

$$d(\| x \|, \| y \|) \leq \| x-y \| = d(x, y), \text{ para todo } x, y \in V,$$

ou seja, $d(\| x \|, \| y \|) \leq c \cdot d(x, y)$, para todo $x, y \in V$ com constante de Lipschitz $c = 1$.

2.3. Transformações Lineares

Nesta seção iremos definir uma Transformação Linear, a fim de mostrarmos um resultado que envolve a continuidade de tais funções e que será utilizado mais adiante.

Definição 2.4 *Sejam E,F espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$. Uma aplicação $f : E \to F$ chama-se uma tranformação linear quando, para quaisquer $x,y \in E$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, têm-se $f(x+y) = f(x)+f(y)$ e $f(\lambda \cdot x) = \lambda f(x)$.*

Observação 2.5 *Segue da definição de transformação linear que $f(0) = 0$, pois $f(0) = 0 \cdot f(0) = 0$. Também temos que se $F = \mathbb{R}$, diremos que $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ é um funcional linear.*

Definição 2.5 *Sejam E e F espaços vetoriais normados e $f : E \to F$ uma transformação linear. Dizemos que f é limitada se existe uma constante c, tal que para todo $x \in E$, temos*

$$\| f(x) \| \leq c \| x \| .$$

Proposição 2.4 *Sejam E,F espaços vetoriais normados. As seguintes afirmações a respeito de uma transformação linear $f : E \to F$ são equivalentes:*
(1) *f é contínua;*
(2) *f é contínua no ponto $0 \in E$;*
(3) *Existe $c > 0$ tal que $\| f(x) \| \leq c \| x \|$ para todo $x \in E$;*
(4) *Existe $c > 0$ tal que $\| f(x) - f(y) \| \leq c \| x - y \|$ para quaisquer $x,y \in E$.*

Demonstração:

$(1) \Longrightarrow (2)$ Por hipótese temos que f é contínua, assim f é contínua em todos os pontos $a \in E$, em paticular, como $0 \in E$ (pois E é um Espaço Vetorial), segue que f é contínua no ponto $0 \in E$.

$(2) \Longrightarrow (3)$ Como por hipótese f é contínua no ponto $0 \in E$, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x,0) < \delta \Longrightarrow d(f(x), f(0)) < \varepsilon,$$

e sendo f linear temos $f(0) = 0$, daí temos,

$$\| x \| < \delta \Longrightarrow \| f(x) \| < \varepsilon.$$

Tomando $\varepsilon = 1$, temos

$$\| x \| < \delta \Longrightarrow \| f(x) \| < 1. \tag{2.1}$$

Agora, considerando $c \in \mathbb{R}$, tal que $0 < \dfrac{1}{c} < \delta$, dado $x \in E$, temos que:

• Se $x = 0$, $f(0) = 0$ e $\| f(0) \| = \| 0 \|$, ou seja,

$$\| f(x) \| \leq c \cdot \| x \| .$$

• Se $x \neq 0$, temos $\dfrac{x}{c \| x \|} \in E$, pois $x \in E$ e $\dfrac{1}{c \| x \|} \in \mathbb{R}$, e sendo E um espaço vetorial,

$$\frac{1}{c \| x \|} \cdot x = \frac{x}{c \| x \|} \in E \text{ e } \left\| \frac{x}{c \| x \|} \right\| = \frac{\| x \|}{c \| x \|} = \frac{1}{c} < \delta,$$

consequentemente por 2.1

$$\left\| f\left(\frac{x}{c \| x \|} \right) \right\| < 1.$$

Agora, sendo f linear, temos

$$f\left(\frac{x}{c \| x \|} \right) = \frac{1}{c \| x \|} \cdot f(x) \Rightarrow \frac{1}{c \cdot \| x \|} \cdot \| f(x) \| < 1,$$

ou seja,

$$\| f(x) \| < c \cdot \| x \|, para todo x \in E, x \neq 0. \tag{2.2}$$

Portanto de 2.1 e 2.2, concluimos que

$$\| f(x) \| < c \cdot \| x \|, \text{ para todo } x \in E.$$

(3) $\Longrightarrow$ (4) Por hipótese existe $c > 0$ tal que $\| f(x) \| < c \cdot \| x \|$. Desse modo, usando a linearidade de f, temos

$$\| f(x) - f(y) \| = \| f(x - y) \| \leq c \cdot \| x - y \|,$$

pois, $x, y \in E$ e sendo E um espaço vetorial $(x - y) \in E$.
Portanto, $\| f(x) - f(y) \| \leq c \cdot \| x - y \|$, para todo $x, y \in E$.

(4) $\Longrightarrow$ (1) Por hipótese existe $c > 0$ tal que

$$\| f(x) - f(y) \| \leq c \cdot \| x - y \|, \text{ para todo } x, y \in E,$$

o que implica

$$d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y) \text{ para algum } c > 0.$$

Logo obtemos que a aplicação é Lipschitziana, e portanto, pela Proposição (2.2), concluimos que f é contínua. ∎

3 Sequências de Cauchy em Espaços Métricos

Neste capítulo iremos definir inicialmente sequência, limite de sequência e sequência limitada, apresentando alguns resultados e exemplos. Em seguida, definiremos sequência de Cauchy em Espaços Métricos, e provaremos alguns resultados sobre tais sequências, necessários para que finalmente possamos no próximo capítulo definir os Espaços de Banach.

3.1. Sequência

Nesta seção definiremos sequência e subsequência.

Definição 3.1 *Uma sequência num conjunto M é uma aplicação $x : \mathbb{N} \longrightarrow M$, definida no conjunto $\mathbb{N} = \{1,2,\ldots,n,\ldots\}$, dada por $x(n) = x_n$.*

Notações:$(x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots),(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou (x_n)

Exemplo 3.1 *Seja $x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, com $x_n = \dfrac{1}{2^n}$. Neste caso obtemos a sequência, $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{8},\ldots\right)$.*

Definição 3.2 *Uma subsequência de (x_n) é uma restrição da aplicação $x : \mathbb{N} \longrightarrow M$ a um subconjunto infinito de $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots\}$ de $\mathbb{N}$.*

Exemplo 3.2 *Considere a sequência $x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ com $x_n = (-1)^n \cdot \dfrac{1}{2^n}$.*
Tomando $\mathbb{N}' = \{1,3,5,\ldots\} \subset \mathbb{N}$, obtemos a subsequência $\left(\dfrac{-1}{2},\dfrac{-1}{8},\dfrac{-1}{32},\ldots\right)$.

Definição 3.3 *Uma sequência (x_n) no espaço métrico M chama-se limitada quando o conjunto de seus termos é limitado, isto é, quando existe $c > 0$ tal que $d(x_m,x_n) \leq c$, para todo $m,n \in \mathbb{N}$, ou equivalentemente, existe $c > 0$ tal que,*

$$\text{Se } M \text{ for normado} \longrightarrow \| x_n \| \leq c, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Exemplo 3.3 *A sequência dada no Exemplo 3.1, é limitada pois*

$$| x_n | \leq 1, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Exemplo 3.4 *Seja $a \in \mathbb{R}$. A sequência constante $x_n = a$ é limitada. Com relação a sequência $x_n = a^n$, temos que esta sequência é limitada se $\mid a \mid \leq 1$, caso contrário ela não é limitada.*

Solução: Note que, dada a sequência (x_n) com $x_n = a$, temos que a sequência

$$(a, a, a, \ldots, a, \ldots)$$

é limitada, pois sendo $a \in \mathbb{R}$, existe $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$ tal que

$$\mid x_n \mid \leq c, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Com relação a sequência (x_n) com $x_n = a^n$, isto é,

$$x_n = (a^1, a^2, a^3, \ldots, a^n, \ldots).$$

Se $\mid a \mid > 1$, então $x_n = a^n$ não é limitada, pois não existe $c > 0$ tal que $\mid x_n \mid = \mid a^n \mid \leq c$, para todo $n \in \mathbb{N}$. De fato, pela Desigualdade de Bernoulli, dado $b > -1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$(1 + b)^n > 1 + nb.$$

Tomando $b = \mid a \mid -1$, como $\mid a \mid \geq 0$, temos $b > -1$, e como a desigualdade acima é válida para todo $n \in \mathbb{N}$, tomando $n > \frac{c-1}{b}$, segue que

$$(1 + \mid a \mid -1)^n > 1 + \frac{c-1}{b} b,$$

ou seja, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mid x_n \mid = \mid a^n \mid = (\mid a \mid)^n > c.$$

Mas, se $\mid a \mid \leq 1$, então a sequência é limitada, pois

$$\mid a \mid \leq 1 \Longrightarrow \mid a \mid^n \leq 1^n = 1,$$

ou seja,

$$\mid x_n \mid \leq 1, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

3.2. Limite de uma Sequência

Nesta seção iremos definir o limite de uma sequência, isto é, quando uma sequência é dita convergente. Além disso, apresentaremos alguns resultados e exemplos evolvendo a sequência convergente.

Definição 3.4 *Seja (x_n) uma sequência num espaço métrico M. Diz-se que o ponto $a \in M$ é limite da sequência (x_n) quando, para todo número $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, pode-se obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$n > n_0 \Longrightarrow d(x_n, a) < \varepsilon.$$

Notações: Para indicar que a é limite de uma sequência (x_n), usa-se:

$$a = \lim x_n;\ a = \lim_n x_n;\ a = \lim_{n\in\mathbb{N}} x_n \text{ ou } x_n \to a \text{ (lê-se } x_n \text{ tende para } a).$$

E, para exprimir este fato, dizemos que (x_n) é uma sequência convergente ou que (x_n) converge para a.

Proposição 3.1 *Toda sequência convergente é limitada.*

Demonstração: Seja x_n uma sequência convergente, digamos $\lim x_n = a$, ou seja, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Longrightarrow d(x_n, a) < \varepsilon.$$

Assim,

$$n > n_0 \Longrightarrow x_n \in B(a, \varepsilon).$$

Logo , os termos da sequência pertencem ao conjunto

$$\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n_0}\} \cup B(a, \varepsilon),$$

que é limitado, pois $\{x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}\}$ é finito e portanto limitado e $B(a, \varepsilon)$ é limitado, e a união de conjuntos limitados é limitado, conforme vimos no Capítulo 1, portanto (x_n) é uma sequência limitada. ■

Proposição 3.2 *(Unicidade do limite). Uma sequência não pode convergir para dois limites diferentes.*

Demonstração: Seja (x_n) uma sequência no espaço métrico M, e sejam $a, b \in M$ tais que $a = \lim x_n$ e $b = \lim x_n$. Pela definição de limite dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Longrightarrow d(x_n, a) < \varepsilon.$$

Existe também $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_1 \Longrightarrow d(x_n, b) < \varepsilon.$$

Tomemos agora $n \in \mathbb{N}$, $n = \max\{n_0, n_1\}$. Então,

$$d(a, b) \leq d(a, x_n) + d(x_n, b) < 2\varepsilon,$$

de onde segue que,

$$0 \leq d(a,b) < 2\varepsilon, \text{ para todo } \varepsilon > 0.$$

Consequentemente, $d(a,b) = 0$, e portanto $a = b$. ■

Proposição 3.3 *Se* $\lim x_n = a$, *então toda subsequência de* x_n *converge para a.*

Demonstração: Seja $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_k < \ldots\}$ um subconjunto infinito dos naturais. Por hipótese dado qualquer $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Longrightarrow d(x_n, a) < \varepsilon.$$

Queremos provar que $\lim x_{n_k} = a$, ou seja, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que,

$$n_k > n_0 \Longrightarrow d(x_{n_k}, a) < \varepsilon$$

Como $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ é um conjunto infinito existe $k_0 \in \mathbb{N}$, tal que $n_{k_0} > n_0$. Logo

$$k > k_0 \Longrightarrow n_k > n_{k_0} > n_0 \Longrightarrow n_k > n_0 \Longrightarrow d(x_{n_k}, a) < \varepsilon,$$

ou seja,

$$\lim_{k \in \mathbb{N}} x_{n_k} = a = \lim_{n \in \mathbb{N}} x_n.$$

■

Observação 3.1 *A recíproca da proposição dada acima, não é verdadeira. Pois, se considerarmos a sequência* $(1, -1, 1, -1, 1, \cdots)\cdot$, *podemos observar que as subsequências* $(1, 1, 1, \cdots)$ *e* $(-1, -1, -1, -1, \cdots)$ *são convergentes, porém a sequência não é convergente.*

3.3. Sequência Monótona

Nesta seção iremos definir um caso particular de sequências definidas no conjunto $M = \mathbb{R}$, chamadas sequências monótonas.

Definição 3.5 *Uma sequência* (x_n) *de números reais diz-se crescente quando se tem* $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n < \ldots$, *isto é,* $x_n < x_{n+1}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Quando vale* $x_n \leq x_{n+1}$, *a sequência diz-se não -decrescente.Uma sequência de números reais é dita decrescentes quando tem-se* $x_1 > x_2 > x_3 > \ldots > x_n > \ldots$, *ou seja,* $x_n > x_{n+1}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Quando vale apenas* $x_n \geq x_{n+1}$, *a sequência diz-se não-crescentes. Uma sequência de um desses quatro tipos é chamada monótona.*

Proposição 3.4 *Toda sequência Monótona limitada de números reais é convergente.*

Demonstração: Ver referência [5]. ■

Corolário 3.1 *Uma sequência monótona de números reais é convergente se, e somente se, possui uma subsequência limitada.*

Demonstração: Ver referência [5]. ■

Exemplo 3.5 *A sequência (x_n) com $x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ é monótona (não-crescente), pois,*

$$x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \ldots \geq x_n \geq \ldots,$$

isto é,

$$x_n \geq x_{n+1}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Além disso , (x_n) é limitada, pois $| x_n | \leq 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
Portanto, pela Proposição 3.4, podemos concluir que (x_n) é convergente.

3.4. Sequência de Cauchy

Nesta seção iremos definir as sequências de Cauchy e apresentar alguns resultados.

Definição 3.6 *Uma sequência (x_n) num espaço métrico M chama-se uma sequência de Cauchy quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$m, n > n_0 \Longrightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Exemplo 3.6 *A sequência (x_n) definida em $\mathbb{R}$, com $x_n = \frac{1}{n}$ é de Cauchy.*

Solução: Dado $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 \frac{\varepsilon}{2} > 1$, isto é, $\frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$, cuja existência é garantida pela Propriedade Arquimediana (ver Anexo A5) de $\mathbb{R}$. Então,

$$m, n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon,$$

pois,

$$d(x_m, x_n) = | x_m - x_n | = | \frac{1}{m} - \frac{1}{n} | \leq \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$$

e como $m, n > n_0 \Rightarrow \frac{1}{m} < \frac{1}{n_0}$ e $\frac{1}{n} < \frac{1}{n_0}$, temos

$$d(x_m, x_n) < \frac{1}{n_0} + \frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ou seja,

$$m,n > n_0 \Rightarrow d(x_m,x_n) < \varepsilon.$$

Portanto, (x_n) é uma sequência de Cauchy.

Proposição 3.5 *Toda sequência convergente é de Cauchy.*

Demonstração: Seja (x_n) uma sequência convergente, isto é, uma sequência tal que $\lim x_n = a$, por definição, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$n > n_0 \Longrightarrow d(x_n,a) < \varepsilon.$$

Daí,

$$m,n > n_0 \Longrightarrow d(x_n,a) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ e } d(x_m,a) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mas, pela definição de métrica, temos

$$d(x_m,x_n) \leq d(x_n,a) + d(x_m,a).$$

Então,

$$m,n > n_0 \Longrightarrow d(x_m,x_n) \leq d(x_n,a) + d(x_m,a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{2\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Portanto, (x_n) é uma sequência de Cauchy. ∎

Proposição 3.6 *Toda sequência de Cauchy é limitada.*

Demonstração: Seja (x_n) uma sequência de Cauchy no espaço métrico M, por definição, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$m,n > n_0 \Longrightarrow d(x_m,x_n) < \varepsilon.$$

Desse modo, usando a definição de conjunto limitado, estudada na Seção 1.3, podemos concluir que o conjunto $\{x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, \ldots\}$ é limitado.
Alem disso, temos

$$\{x_1,x_2,x_3,\ldots,x_{n_0},x_{n_0+1},x_{n_0+2},\ldots\} = \{x_1,x_2,x_3,x_{n_0}\} \cup \{x_{n_0+1},x_{n_0+2},\ldots\},$$

onde $\{x_1,x_2,x_3,x_{n_0}\}$ é um conjunto finito, e portanto é limitado, e conforme acabamos de ver o conjunto $\{x_{n_0+1},x_{n_0+2},\ldots\}$ também é limitado. Assim, segue da Proposição 1.1, que o conjunto

$$\{x_1,x_2,x_3,\ldots,x_{n_0},x_{n_0+1},x_{n_0+2},\ldots\}$$

também é limitado, ou seja, (x_n) é limitada. ∎

Proposição 3.7 *Uma sequência de Cauchy que possui uma subsequência convergente é convergente (e tem o mesmo limite que a subsequência).*

Demonstração: Seja (x_n) uma sequência de cauchy no espaço métrico M e (x_{n_k}) uma subsequência que converge para o ponto $a \in M$. Mostremos que $\lim x_n = a$.
Com efeito,como (x_{n_k}) converge para a, por definição, dado $\varepsilon > 0$, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$n_k > p \Longrightarrow d(x_{n_k}, a) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

E, sendo (x_n) de Cauchy, por definição, existe também $q \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n > q \Longrightarrow d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Seja $n_0 = \max\{p, q\}$. Para todo $n > n_0$ existe $n_k > n_0$, o que implica,

$$d(x_n, a) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ou seja,

$$n > n_0 \Longrightarrow d(x_n, a) \leq \varepsilon.$$

Portanto, por definição, concluimos que $\lim x_n = a$. ■

4 Espaços de Banach

Neste capítulo, usaremos as definições e resultados estudados nos capítulos anteriores, para finalmente definir os espaços de Banach.

4.1. Espaço Métrico Completo

Nesta seção iremos definir os Espaços Métricos Completos, exemplificando e apresentando alguns resultados sobre estes espaços.

Definição 4.1 *Diz-se que o espaço métrico M é completo quando toda sequência se Cauchy em M é convergente, isto é, se (x_n) é uma sequência de Cauchy em M, existe $a \in M$, tal que,* $\lim x_n = a$.

Exemplo 4.1 $\mathbb{R}$ *é um Espaço Métrico Completo.*

Solução: Já mostramos no Capítulo 1, que $\mathbb{R}$ é um espaço métrico, cuja métrica usual é dada por $d(x,y) = \mid x - y \mid, \;\; x,y \in \mathbb{R}$. Resta mostrarmos que $\mathbb{R}$ é completo.
Seja (x_n) uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ defina a sequência de conjuntos (X_n),com

$$X_n = \{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\}.$$

Note que

$$X_1 \supset X_2 \supset X_3 \supset \ldots \supset X_n \supset \ldots.$$

Além disso estes conjuntos são limitados, pois sendo (x_n) é de Cauchy, segue da proposição 4.2 que (x_n) é limitada. Consequentemente para cada $n, n = 1,2,3,\ldots$, está bem definido o ínfimo de X_n, digamos

$$a_n = \inf X_n.$$

Como

$$X_1 \supset X_2 \supset X_3 \supset \ldots \supset X_n \supset \ldots,$$

segue das propriedades de ínfimo que

$$\inf X_1 \leq \inf X_2 \leq \inf X_3 \leq \ldots \leq \inf X_n \leq \ldots$$

isto é,

$$a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq b = \sup X_1,$$

de onde segue que a sequência (a_n) é monótona. Mas, pela Proposição 3.4 como (a_n) é uma sequência de números reais monótona e limitada, (a_n) converge, isto é, existe $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim a_n = a.$$

Mostremos que $\lim x_n = a$. Sendo (x_n) uma sequência de Cauchy, pela Proposição 4.3, basta mostrar que existe uma subsequência de (x_n) que converge para a, isto é,

dado $\varepsilon > 0$ e $n_1 \in \mathbb{N}$, podemos obter $n > n_1$ tal que $d(x_n, a) < \varepsilon$.

Temos que $a = \lim a_n$, assim, dado $\varepsilon > 0$ existe $m > n_1$ tal que $d(a_m, a) < \varepsilon$, ou seja, $\mid a_m - a \mid < \varepsilon$, de onde segue que

$$-\varepsilon + a < a_m < a + \varepsilon \tag{4.1}$$

Além disso, como $a_m = \inf X_m$, pela definição de ínfimo, existe $n \geq m$ tal que

$$a_m \leq x_m \leq x_n \Rightarrow a_m \leq x_n. \tag{4.2}$$

De 4.1 e 4.2, segue que

$$-\varepsilon + a < x_n < a + \varepsilon,$$

ou seja, $d(x_n, a) < \varepsilon$ o que implica $x_n \in B(a, \varepsilon)$, ou seja, a subsequência x_n converge para a. Portanto, $\lim x_n = a$, de onde podemos concluir que $\mathbb{R}$ é um espaço métrico completo.

Proposição 4.1 *Um subespaço fechado de um espaço métrico completo é completo. Reciprocamente, um subespaço completo de qualquer espaço métrico é fechado.*

Demonstração: (Ver [7]) ■

Proposição 4.2 *O produto cartesiano $M \times N$ é completo se, e somente se, M e N são completos.*

Demonstração: Suponha que $M \times N$ é completo. Mostraremos que M e N são completos. Fixado $b \in N$, vemos que a aplicação

$$f : M \longrightarrow M \times N$$

$$x \longmapsto (x, b)$$

é uma isometria de M sobre o subespaço fechado $M \times b \subset M \times N$, pois preserva as distâncias, ou seja, dados $x, y \in M$, temos $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ .Sendo por hipótese $M \times N$ completo e $M \times b$ um subespaço fechado, segue da proposição anterior que $M \times b$ é completo, o que implica que M é completo.
Agora, fixado $a \in M$, de modo análogo, vemos que a aplicação

$$f : N \longrightarrow M \times N$$

$$x \longmapsto (a, x)$$

é uma isometria de N sobre o subespaço fechado $a \times N \subset M \times N$, sendo por hipótese $M \times N$ completo e $a \times N$ um subespaço fechado, segue novamente da proposição anterior que $a \times N$ é completo, o que implica que N é completo.
Reciprocamente suponha que M e N são completos. Mostraremos que $M \times N$ é completo, ou seja, dada a sequência de Cauchy (z_n) em $M \times N$, existe $c \in M \times N$ tal que $z_n \longrightarrow c$.
Seja $z_n = (x_n, y_n) \in M \times N$ para cada $n \in \mathbb{N}$, como (z_n) é de Cauchy em $M \times N$, temos,(x_n) é de Cauchy em M e (y_n) é de Cauchy em N, e por hipótese M e N são completos, assim existem $a \in M$ e $b \in N$, tais que

$$x_n \longrightarrow a \in M \text{ e } y_n \longrightarrow b \in N.$$

Considere $c = (a, b) \in M \times N$, temos

$$(x_n, y_n) \longrightarrow (a, b) \in M \times N$$

Logo $M \times N$ é completo. ■

Corolário 4.1 *$M_1 \times \ldots \times M_n$ é completo se, e somente se,$M_1, \ldots, M_n$ são completos.*

Demonstração: Ver referência [5] ■

Corolário 4.2 *O espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ é completo.*

Demonstração: Como vimos no Exemplo 4.1, $\mathbb{R}$ é completo e pelo Colorário 4.1 podemos afirmar que $\mathbb{R}^n$ é completo. ■

4.2. Espaço de Banach

Nesta seção, finalmente iremos definir os espaços de Banach, e apresentar alguns exemplos.

Definição 4.2 *Um espaço vetorial normado completo chama-se um espaço de Banach.*

Exemplo 4.2 $\mathbb{R}$ *é um Espaço de Banach.*

Solução: Temos que $\mathbb{R}$ é um espaço vetorial normado, cuja norma é definida pelo valor absoluto. Além disso, pelo exemplo 3.7, mostramos que ele é completo. Portanto, $\mathbb{R}$ é um Espaço de Banach.

Exemplo 4.3 $\mathbb{R}^n$ *é um Espaço de Banach.*

Solução: De fato, temos que $\mathbb{R}^n$ é um Espaço Vetorial Normado cuja norma é

$$\| x \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2},$$

conforme vimos no Exemplo 1.3.
Mostraremos agora que $\mathbb{R}^n$ é completo. De fato,sendo $\mathbb{R}$, conforme vimos no Exemplo 4.1, segue do Corolário 4.1 que $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$ é completo, ou seja, $\mathbb{R}^n$ é completo.
Portanto $\mathbb{R}^n$ é Espaço de Banach.

Exemplo 4.4 *O conjunto das funções limitadas de* X *em* F*, denotado por* $\mathfrak{B}(X;F)$*, onde* X *é um conjunto qualquer e* F *é um Espaço de Banach, é um Espaço de Banach.*

Solução: Temos que $\mathfrak{B}(X;F)$ é um espaço vetorial normado, cuja norma é definida por

$$\| f \| = \sup_{x \in X} | f(x) | .$$

Mostraremos agora que, $\mathfrak{B}(X;F)$ é completo, isto é, se $(f_n) \subset \mathfrak{B}(X;F)$ é de Cauchy na norma do supremo então (f_n) converge, na norma do supremo, e que o ponto limite está em $\mathfrak{B}(X;F)$. Se (f_n) é de Cauchy na norma do supremo, dado $\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n > N \Longrightarrow \| f_n - f_m \| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mas, por definição $\| f_n - f_m \| = \sup_{x \in X} \| f_n(x) - f_m(x) \| < \frac{\varepsilon}{2}$. Consequentemente,

$$\| f_n(x) - f_m(x) \| < \frac{\varepsilon}{2}, para todo x \in X e para todo m, n > N. \tag{4.3}$$

Portanto, para cada $x \in X$ fixado, $(f_n(x))$ é uma sequência de Cauchy no Espaço de Banach F e, sendo F completo, temos que para cada $x \in X$, $(f_n(x))$ é convergente. Note que o limite define uma função de X em F que denotaremos por f, ou seja,

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x).$$

Mostraremos agora que $f \in \mathfrak{B}(X;F)$ e $f_n \to f$. Tomando o limite quando $m \to \infty$ e usando a continuidade da norma (vide Exemplo 2.1), teremos

$$\lim_{m\to\infty} \| f_m(x) - f_n(x) \| = \| \lim_{m\to\infty} (f_m(x) - f_n(x)) \| = \| f(x) - f_n(x) \| .$$

Assim passando o limite com $m \to \infty$ em 4.3, temos

$$\lim_{m\to\infty} \| f_m(x) - f_n(x) \| < \lim_{n\to\infty} \frac{\varepsilon}{2},$$

ou seja,

$$\| f(x) - f_n(x) \| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ para todo } x \in X \text{ e } n > N.$$

Consequentemente,

$$\| f_n - f \| = \sup_{x\in X} \| f_n(x) - f(x) \| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ para todo } n > N,$$

o que implica,

$$\| f - f_n \| < \varepsilon \text{ para todo } n > N, \text{ ou seja, } f_n \to f.$$

Além disso, observe que, da última desigualdade acima segue que $f - f_n \in \mathfrak{B}(X;F)$ para todo $n > N$. Como $f = f - f_n + f_n$, onde $f - f_n \in \mathfrak{B}(X;F)$, para todo $n > N$ e $f_n \in \mathfrak{B}(X;F)$, segue que f é limitada, isto é, $f \in \mathfrak{B}(X;F)$.

Exemplo 4.5 *O conjunto das funções contínuas e limitadas denotado por $C_0(X;F) = \{f : X \longrightarrow F;\ f$ é contínua e limitada $\}$, onde onde X é um espaço métrico e F é um Espaço de Banach, é um Espaço de Banach.*

Temos que $C_0(X;F)$ é um espaço vetorial normado, cuja norma é

$$\| f \| = \sup_{x\in X} \| f(x) \|,$$

conforme mostramos no Capítulo 1. Além disso $C_0(X;F) \subset \mathfrak{B}(X;F)$, pois se $f \in C_0(X;F)$, f é limitada, daí $f \in \mathfrak{B}(X;F)$. Mostraremos que $C_0(X;F)$ é completo. Seja (f_n) uma sequência de Cauchy em $C_0(X;F)$, mostraremos que (f_n) converge em $C_0(X;F)$. Como (f_n) é de Cauchy em $C_0(M;F)$ segue que (f_n) é de Cauchy em $\mathfrak{B}(X;F)$, pois $C_0(X;F) \subset \mathfrak{B}(X;F)$. Assim como $\mathfrak{B}(X;F)$ é de Banach (f_n) converge em $\mathfrak{B}(X;F)$, isto é, existe uma função $f : X \longrightarrow F$ limitada tal que

$$f_n \longrightarrow f,$$

ou seja,

$$\text{dado } \varepsilon > 0, \text{ existe } N \in \mathbb{N} \text{ tal que } \| f_n - f \| < \frac{\varepsilon}{3}, \text{ se } n > N .$$

Afirmação: f é contínua.
Temos,

$$\| f_n - f \| = \sup_{x \in X} \| f_n(x) - f(x) \| \Longrightarrow \| f_n(x) - f(x) \| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{4.4}$$

para todo $x \in X$, para todo $n > N$.
como $f_n \in C_0(X;F)$, f_n é contínua, isto é, dado $\varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que

$$\| x - a \| < \delta \Longrightarrow \| f_n(x) - f_n(a) \| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{4.5}$$

Além disso, como

$$\| f(x) - f(a) \| = \| f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(a) + f_n(a) - f(a) \|,$$

aplicando a Desigualdade Triângular,

$$\| f(x) - f(a) \| \leq \| f(x) - f_n(x) \| + \| f_n(x) - f_n(a) \| + \| f_n(a) - f(a) \| . \tag{4.6}$$

De 4.4, 4.5 e 4.6 temos que dado $\varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que

$$\| f(x) - f(a) \| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \text{ sempre que } \| x - a \| < \delta,$$

ou seja f é contínua. Portanto $f_n \to f$ e $f \in C_0(X;F)$, ou seja, $C_0(X;F)$ é completo.

Exemplo 4.6 *Sejam E e F espaços vetoriais normados. O conjunto das aplicações lineares contínuas de E e F, denotado por $\mathfrak{L}(E;F)$ é um espaço vetorial no qual consideramos a norma*

$$\| f \| = \sup\{| f(x) |; x \in E; \| x \| = 1\}.$$

Se F é completo $\mathfrak{L}(E;F)$ é um Espaço de Banach.

Solução:

Mostremos que $\| f \| = \sup_{x \in E, \|x\|=1} \| f(x) \|$ é norma.
De fato $\| f \|$ é norma, pois para quaisquer $f, g \in \mathfrak{L}(E;F)$ e λ escalar:

N1) Se $f \neq 0, \| f \|_{\mathfrak{L}(E;F)} = \sup_{x \in E, \|x\|=1} \| f(x) \|_F \neq 0$, pois como $f \neq 0$, segue que $f(x) \neq 0$ para algum $x \in E$ daí, $\| f(x) \| \neq 0$ e $\| f(x) \| \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R} \Longrightarrow \sup \| f(x) \| \neq 0$.

N2) $\| \lambda \cdot f \|_{\mathfrak{L}(E;F)} = \sup_{x \in E, \|x\|=1} \| (\lambda f)(x) \|_F$
Usando a propriedade de Supremo, e sabendo que $\| \cdot \|_F$ é uma norma,
$\| \lambda f \|_{\mathfrak{L}(E;F)} = \sup_{x \in E, \|x\|=1} \| \lambda f(x) \|_F = \sup_{x \in E, \|x\|=1} | \lambda | \| f(x) \|_F = | \lambda | \cdot \sup_{x \in E, \|x\|=1} \| f(x) \|_F = | \lambda | \cdot \| f \|_{\mathfrak{L}(E;F)}$.

N3) $\| f + g \| = \sup_{x \in E, \|x\|=1} \| f(x) + g(x) \|_F \leq \| f \| + \| g \|$.
Como $\| \cdot \|_F$ é uma Norma, pela desigualdade triângular temos

$\| (f+g)(x) \| = \| f(x)+g(x) \| \leq \| f(x) \| + \| g(x) \|$.

Usando a propriedade de supremo,

$\| f+g \|_{\mathfrak{L}(E;F)} = \sup_{x\in E, \|x\|=1} \| f(x)+g(x) \|_F \leq \sup_{x\in E, \|x\|=1} \| f(x) \|_F + \sup_{x\in E, \|x\|=1} \| g(x) \|_F = \| f \| + \| g \|$.

Logo, $\| f \|$ é norma.

Mostremos agora que $\mathfrak{L}(E;F)$ é Completo. Dada uma sequência de Cauchy (f_n) em $\mathfrak{L}(E;F)$. Mostremos que (f_n) converge em $\mathfrak{L}(E;F)$. Para isto mostremos inicialmente que

i Para todo $f \in \mathfrak{L}(E;F)$, e para todo $x \in E$ temos $\| f(x) \| \leq \| f \| \cdot \| x \|$. Como temos,

$$\| f \| = \sup_{x\in E, \|x\|=1} \| f(x) \| .$$

Pela definição de Supremo

$$\| f \| \geq \| f(x) \|, \text{ para todo } x \in X \text{ com } \| x \| = 1.$$

Agora dado $y \in X$ qualquer, considere $x = \dfrac{y}{\| y \|}$, note que $\| x \| = 1$

Logo,

$\| f(x) \| \leq \| f \| \| x \| \Longrightarrow$

$\left\| f\left(\dfrac{y}{\| y \|}\right) \right\| \leq \| f \| \left\| \dfrac{y}{\| y \|} \right\| \Longrightarrow$

$\dfrac{\| f(y) \|}{\| y \|} \leq \| f \| \Longrightarrow$

$\| f(y) \| \leq \| f \| \| y \|$.

ii Seja $S = \{u \in E; \| x \| = 1\}$, uma aplicação linear $f : E \longrightarrow F$ é contínua $\Longleftrightarrow f |_S$ *limitada*.

De fato, pela Proposição 2.1, como f é linear e contínua, então existe $c > 0$ tal que

$$\| f(x) \| \leq c \| x \|, \text{ para todo } x \in E.$$

Em particular, como $S \subset E$, segue que $f |_S$ é limitada.

Por outro lado, seja f uma aplicação linear, tal que $f |_S$ é limitada. Mostremos que f é contínua, para isto, pela Proposição 2.1 basta mostrarmos que f é contínua no ponto $0 \in E$, ou seja, dado $\varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon)$, tal que, para todo $x \in E$

$$\| x - 0 \| < \delta \Longrightarrow \| f(x) - f(0) \| < \varepsilon.$$

Como $f |_S$ é limitada, existe $c > 0$ tal que

$\| f(x) \| \leq c \cdot \| x \|$, para todo $x \in S$.

Consequentemente

$$\| x \| < \delta \Longrightarrow \| f(x) \| < c \cdot \delta.$$

Considerando $\delta = \dfrac{\varepsilon}{c}$, temos

$$\| x \| < \delta \Longrightarrow \| f(x) \| < c \cdot \frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon.$$

Portanto f é contínua no ponto $0 \in E$, consequentemente f é contínua.

Agora, mostraremos que (f_n) converge em $\mathfrak{L}(E;F)$. Seja (f_n) uma sequência se Cauchy em $\mathfrak{L}(E;F)$, então as restrições $f_n \mid_S$ são sequências de Cauchy em $\mathfrak{B}(S;F)$, pois, pelo item (ii), $f_n \mid_S$ são limitadas.
Como F é completo, segue do Exemplo (4.4) que $\mathfrak{B}(S;F)$ é completo, logo existe $f_0 : S \longrightarrow F$ limitada tal que

$$f_n(x) \longrightarrow f_0(x) uniformeemS. \tag{4.7}$$

Indiquemos com $f : E \longrightarrow F$ a extensão da aplicação definida por

$$f(\lambda u) = \lambda f_0(u), \lambda \in \mathbb{R} eu \in S, \tag{4.8}$$

Mostremos que $f_n \longrightarrow f$ simplesmente em E e que $f \in \mathfrak{L}(E,F)$.
Vejamos, dado $x \in E$ sendo f_n linear;
Se $x = 0$, temos

$$\lim f_n(0) = 0$$

e pela definição de f, temos $f(0) = f(0 \cdot 0) = 0 \cdot f_0(0) = 0$, assim

$$\lim f_n(0) = f(0).$$

Se $x \neq 0$, temos

$$Sex \neq 0, \lim f_n(x) = \lim f_n\left(\frac{x}{\| x \|} \cdot \| x \|\right) = \lim \| x \| \cdot f_n\left(\frac{x}{\| x \|}\right) = \| x \| \cdot \lim f_n\left(\frac{x}{\| x \|}\right) \tag{4.9}$$

Como $\dfrac{x}{\| x \|} \in S$, pois $\left\| \dfrac{x}{\| x \|} \right\| = 1$, vimos por 4.7

$$\lim f_n\left(\frac{x}{\| x \|}\right) = f_0\left(\frac{x}{\| x \|}\right) \tag{4.10}$$

Substituindo 4.10 em 4.9

$$\lim f_n(x) = \| x \| \cdot f_0\left(\frac{x}{\| x \|}\right),$$

e por 4.8 temos

$$\lim f_n(x) = f\left(\| x \| \cdot \frac{x}{\| x \|}\right) = f(x), \text{ para todo } x \neq 0.$$

Logo, $\lim f_n(x) = f(x)$, para todo $x \in E$
Além disso, f é linear. Pois, temos

$$f(x+y) = \lim f_n(x+y),$$

onde f_n é linear, assim, dados $x, y \in E$ e $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\lim f_n(x+\lambda y) = \lim(f_n(x) + \lambda f_n(y)) = \lim f_n(x) + \lambda \lim f_n(y) = f(x) + \lambda f(y),$$

o que implica $f \in \mathfrak{L}(E;F)$. Daí, temos (f_n) converge para f em $\mathfrak{L}(E;F)$, ou seja, $\mathfrak{L}(E;F)$ é completo.
Portanto dos itens (1) e (2) segue que $\mathfrak{L}(E,F)$ é um espaço de Banach.

Exemplo 4.7 *O conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$, não é completo.*

Solução: Basta considerarmos (x_n) uma sequência de $\mathbb{Q}$, com

$$x_1 = 1, x_2 = 1,4, x_3 = 1,41, x_4 = 1,414... \text{ com } \lim x_n = \sqrt{2}.$$

Como x_n é convergente, pela Proposição 3.5, temos que x_n é de Cauchy em $\mathbb{Q}$, mas não converge em $\mathbb{Q}$, pois $\lim x_n = \sqrt{2}$ e $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Logo, $\mathbb{Q}$ não é completo, e portanto, não é um espaço de Banach.

A Alguns Resultados Utilizados

Apresentaremos agora, alguns dos principais resultados e definições que foram utilizados durante o trabalho.

A.1. Propriedades de valor absoluto

Nesta seção apresentamos a definição e propriedades do valor absoluto de um número real.

Definição A.1 *Seja $x \in \mathbb{R}$, o valor absoluto de x é dado por:*

$$|x| = \begin{cases} -x, & se \quad x \leq 0 \\ x, & se \quad x > 0 \end{cases}$$

Proposição A.1 *Sejam x e $y \in \mathbb{R}, ento:$*

(1) $\mid x \mid = \sqrt{x^2}$

(2) $\mid x \mid \geq 0$

(3) $\mid x \mid = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

(4) $\mid x \cdot y \mid = \mid x \mid \cdot \mid y \mid$

(5) $\mid x + y \mid \leq \mid x \mid + \mid y \mid$

(6) $\mid -x \mid = \mid x \mid$

(7) $\mid x - y \mid = 0 \Longleftrightarrow x = y$

(8) $\mid x - y \mid \leq \mid x - z \mid + \mid z - y \mid$

(9) $\mid \frac{x}{y} \mid = \frac{\mid x \mid}{\mid y \mid}$ *(se $y \neq 0$)*

(10) $\mid x - y \mid \geq \mid \mid x \mid - \mid y \mid \mid$

(11) $\mid x \mid \leq y \Longleftrightarrow -y \leq x \leq y$

(12) $\mid x \mid \geq y \Longleftrightarrow x \leq -y$ *ou* $y \leq x$

A.2. Propriedades de Supremo e Ínfimo

Nesta seção apresentaremos a definição e algumas propriedades do supremo e ínfimo.

Definição A.2 *Seja $S \subset \mathbb{R}$ Um elemento $t \in S$ é dito cota superior de S se:*
$x \leq t$, para todo $x \in S$.

Definição A.3 *Um elemento $m \in S$ é dito cota inferior de S se:*
$x \geq m$, para todo $x \in S$.

Definição A.4 *Um número u denomina-se Supremo de S, se:*
i. *u é cota superior para S e*
ii. *se t é qualquer cota superior para S então $u \leq t$.*
Notação: $\sup S = u$

Definição A.5 *Um número u denomina-se Ínfimo de S, se:*

i. u é cota inferior para S e

ii. se t é qualquer cota inferior para S então $u \geq t$.
Notação: $\inf S = u$

Proposição A.2 *Considere $A, B \subset \mathbb{R}$ conjuntos limitados e $c \in \mathbb{R}$, onde $A + B = \{x + y; x \in A, y \in B\}$ e $c.A = \{c \cdot x; x \in A\}$, temos*
(1) $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$
(2) $\inf(A+B) = \inf A + \inf B$
(3) $\sup(c \cdot A) = c \cdot \sup A$, *caso* $c \geq 0$
(4) $\inf(c \cdot A) = c \cdot \inf A$, *caso* $c \geq 0$
(5) $\sup(c \cdot A) = c \cdot \inf A$, *caso* $c < 0$
(6) $\inf(c \cdot A) = c \cdot \sup A$, *caso* $c < 0$

Proposição A.3 *Seja $f, g : X \to \mathbb{R}$ funções limitadas. As funções $f + g$, $cf : X \to \mathbb{R}$, satisfazem as seguintes propriedades*
(1) $\sup(f+g) \leq \sup f + \sup g$
(2) $\inf(f+g) \geq \inf f + \inf g$
(3) $\sup(c \cdot f) = c \cdot \sup f$, *caso* $c \geq 0$
(4) $\inf(c \cdot f) = c \cdot \inf f$, *caso* $c \geq 0$
(5) $\sup(c \cdot f) = c \cdot \inf f$, *caso* $c < 0$
(6) $\inf(c \cdot f) = c \cdot \sup f$, *caso* $c < 0$

Demonstração: (Ver [6]) ■

A.3. Espaço Vetorial Real

Nesta seção apresentaremos a definição de espaço vetorial real.

Definição A.6 *Um espaço vetorial real é um conjunto V, não vazio, com duas operações: soma, $V \times V \xrightarrow{+} V$, e multiplicação por escalar, $\mathbb{R} \times V \xrightarrow{\cdot} V$, tais que, para quaisquer $u, v, w \in V$ e $a, b \in \mathbb{R}$, $u + v \in V$ e $au \in V$, e as propriedades abaixo sejam satisfeitas:*

i $(u+v)+w = u+(v+w)$

ii $u+v = v+u$

iii *Existe $0 \in V$ tal que $u+0 = u$. (0 é chamado de vetor nulo.)*

iv *Existe $-u \in V$ tal que $u+(-u) = 0$.*

v $a(u+v) = au+av$

vi $(a+b)v = av+bv$

vii $(ab)v = a(bv)$

viii $1u = u$

A.4. Produto Interno

Nesta seção apresentaremos a definição e algumas propriedades de produto interno.

Definição A.7 *Seja E um espaço vetorial. Um produto interno sobre E é uma função $\langle , \rangle : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$, que associa cada par ordenado de vetores $x, y \in E$ um número real $\langle x, y \rangle$, chamado o produto interno de x por y, de modo a serem cumpridas as condições abaixo, para $x, x', y \in E$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ arbitrários:*

P1) $\langle x+x', y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle$;

P2) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$;

P3) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$;

P4) $x \neq 0 \Longrightarrow \langle x, x \rangle > 0$.

Proposição A.4 *(Desigualdade de Cauchy-Schwarz) Dados u, v vetores quaisquer em um espaço vetorial E, é válido que*

$$|< u, v >| \leq \| u \| \cdot \| v \| .$$

A.5. Propriedade Arquimediana

Nesta seção apresentaremos a propriedade Arquimediana de $\mathbb{R}$.

Proposição A.5 *Dados $a, b \in \mathbb{R}$ com $a > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $na > b$.*

A.6. Teorema do Valor Médio

Seja f uma função contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b). Então existe um número c no intervalo (a,b) tal que

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Referências

[1] BOLDRINI, José Luiz.et al. **Algebra Linear**. 3^o ed. São Paulo. Editora HARBRA Itda,1980.

[2] BRAGA, Gastão de Almeida. **Notas de Aula - Departamento de Matemática da UFMG**. Disponível em: http://www.mat.ufmg.br/ gbraga/ensino/analiseiii/livro.pdf. Acesso em: 10 de junho de 2014.

[3] DOMINGUES, Hygino Hugueros. **Espaços Métricos e Introdução à Topologia**.São Paulo. Editora Atual, 1982.

[4] ENCICLOPÉDIA **Stefan Banach**. Biografia UOL. Cracóvia,1892. Disponível em http://educacao.uol.com.br/biografias/stefan-banach.jhtm. Acesso em: 22 de junho de 2014.

[5] FLEMMING, Diva Marília; GONÇALVES, Mírian Buss. **Cálculo A: Funções Limite Derivação Integração**. 5^o ed. São Paulo. Editora Makron,1992.

[6] LIMA, Elon Lages. **Análise Real:Funções de Uma Variável**. 11^o ed. Rio de Janeiro. Editora IMPA, 2011.

[7] LIMA, Elon Lages. **Espaços Métricos**.Rio de Janeiro. Editora Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2003.

[8] MACIEL, Aldo Bezerra; LIMA,Osmundo Alves. **Introdução a Análise Real** . 22^o ed. Campina Grande. Editora EDUEP,2005.

[9] STEWART, James. **Função Modular**. Australia. Editora Brooks/Cole, 2001. Disponível em http://pt.wikipedia.org/wiki/Funde abril de 2014.