UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

ALANE GOMES DE ALBUQUERQUE NASCIMENTO

CAMPINA GRANDE - PB

2012

ALANE GOMES DE ALBUQUERQUE NASCIMENTO

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO ENSINO DO CONCEITO DE FUNÇÕES NO 1º ANO DO ENSINO MÉDIO.

Monografia apresentada à Banca Examinadora como requisito para a obtenção do título de Especialista em Educação Matemática, pelo Departamento de Matemática.

Área de Concentração: Educação Matemática

Orientador: Prof. Dr. Silvanio de Andrade

CAMPINA GRANDE - PB

2012

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL-UEPB

N244r Nascimento, Alane Gomes de Albuquerque.
A resolução de problemas no ensino do conceito de funções no 1° ano do Ensino Médio. [manuscrito] / Alane Gomes de Albuquerque Nascimento. – 2012.
57 f. il. color.

Monografia (Especialização em Educação Matemática para Professores do Ensino Médio) – Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2012.

"Orientação: Prof. Dr. Silvanio de Andrade, Departamento de Matemática".

1. Aprendizagem. 2. Resolução de problemas. 3. Ensino da matemática. I. Título.

21. ed. CDD 510.7

ALANE GOMES DE ALBUQUERQUE NASCIMENTO

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO ENSINO DO CONCEITO DE FUNÇÕES NO 1º ANO DO ENSINO MÉDIO

Monografia apresentada ao curso de Especialização em Educação Matemática, do Departamento de Matemática, do Centro de Ciências e Tecnologia, da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito para a obtenção do título de Especialista em Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Silvanio de Andrade

Aprovada em 21/12/2012

Banca Examinadora:

Silvanio de Andrade

Prof. Dr. Silvanio de Andrade – UEPB
(Orientador)

Prof. Dr. José Lamartine da Costa Barbosa - UEPB

Maria da Conceição Vieira Fernandes

Profa. Ms. Maria da Conceição V. Fernandes – UEPB

Campina Grande – PB, 2012

Dedico a todos que acreditaram e me ajudaram para a realização deste sonho, em especial aos meus pais que devido ao amor, carinho, atenção e dedicação a mim, contribuíram para minha formação. Além de, em todos os momentos estarem ao meu lado me dando força para não fracassar.

AGRADECIMENTOS

À Deus, pelo dom da vida, por todos os benefícios que existe nela e por ter me concedido a oportunidade de alcançar mais uma vitória e me abençoado todos esses anos.

Aos professores, em especial a meu orientador, Prof. Dr. Silvanio de Andrade pelo tempo dedicado e pela colaboração deste trabalho, e aos professores da banca por aceitarem a participar da mesma.

Aos meus pais, que me educaram com amor, e sempre me ensinando o melhor caminho a seguir e me incentivaram e apoiaram a nunca desistir de estudar.

Enfim, a todos que direta ou indiretamente contribuíram para finalização de mais uma etapa importante da minha vida.

Por vezes sentimos que aquilo que fazemos não é senão uma gota de água no mar.

Mas o mar seria menor se lhe faltasse uma gota.

Madre Teresa de Calcutá

RESUMO

Muitas evidências vêm sendo acumuladas no que diz respeito a processos eficazes para a aprendizagem matemática e um desses processos, segundo Walle (2009), que têm sido um veículo poderoso é a Resolução de Problemas. Pelo fato de muitos alunos apresentarem dificuldades quanto à aprendizagem de Funções, investigamos nesta pesquisa a contribuição da Resolução de Problemas no ensino deste conteúdo no 1º ano do ensino médio. Classificamos nossa pesquisa como pesquisa qualitativa, o caminho utilizado para a elaboração deste trabalho foi à revisão bibliográfica sobre as concepções dos trabalhos de alguns pesquisadores da área da Resolução de Problemas como, Lourdes Onuchic, Van de Walle, George Polya, em livros, internet, artigos, teses, dissertações e uma pesquisa junto aos 13 alunos de uma turma do 1º ano do ensino médio do Colégio Central de Ensino localizado na cidade de Aroeiras-PB. A aprendizagem é um resultado do processo de Resolução de Problemas, pois suas tarefas são centradas mais no aluno do que no professor, já que o ensino começa e se constrói com as ideias que os alunos possuem, ou seja, seus conhecimentos prévios. Esta pesquisa permitiu concluir que o ensino de Funções, assim como outro conteúdo qualquer, via Resolução de problemas não é tarefa fácil, mas há boas razões para prosseguir neste esforço, pois a Resolução de problemas concentra a atenção dos alunos sobre ideias e em dar sentido às mesmas, desenvolve a convicção de que eles são capazes de fazer matemática e de que a Matemática faz sentido.

Palavras – chave: Ensino aprendizagem. Funções. Resolução de problemas.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Sobre minha jornada

Licenciada em Matemática pela Universidade Estadual da Paraíba em 2010, a minha primeira experiência em sala de aula se deu quando ainda cursava o terceiro ano do Ensino Médio no ano de 2004 ao atuar no Programa Alfabetização Solidária do Governo Federal, baseado na Pedagogia Libertadora de Paulo Freire. No ano seguinte ingressei na Universidade Estadual da Paraíba para cursar Licenciatura Plena em Matemática. No ano de 2008 voltei a atuar em sala de aula, agora como professora de Matemática dos níveis fundamental II e médio, no Colégio Central de Ensino no Município de Aroeiras, onde permaneço até hoje. No ano de 2009 consegui um contrato pela Prefeitura Municipal de Aroeiras e atuei também como professora de Matemática, na E.M.E.F. Jardirene Oliveira de Souza no nível fundamental II. Como trabalhava na escola pública apenas com o ensino fundamental no meu TCC, foi abordado as dificuldades de aprendizagem dos alunos nas operações aritméticas básicas no 7º ano do ensino fundamental: números inteiros relativos, sob a orientação da Professora Maria da Conceição Vieira Fernandes.

Na busca da melhoria de minha prática pedagógica, em 2011 prestei seleção na UEPB para cursar a Especialização em Educação Matemática para professores do Ensino Médio, fui selecionada, e, no início do curso com uma palestra com a professora Lourdes Onuchic e em aulas e outras experiências no decorrer do curso sobre Resolução de Problemas com o professor Silvanio de Andrade, decidi pesquisar mais sobre essa metodologia com o intuito de contribuir para o ensino - aprendizagem de Matemática de uma forma investigativa e interessante aos alunos, fato este que me levou a escolha do tema da pesquisa em questão. Pesquisa esta realizada no Colégio Central de Ensino, situado no município de Aroeiras-PB.

Sobre a pesquisa

Lecionando Matemática no ensino médio já há cinco anos, e ao parar para refletir sobre a prática e o ensino - aprendizagem do conceito de funções surgiu à necessidade de elaborar um projeto de pesquisa que fosse a busca de uma metodologia, adotamos a Resolução de Problemas (RP), que leve a prática educativa a se tornar mais dinâmica e desafiadora contribuindo para despertar o interesse dos alunos na construção do seu próprio conhecimento, minimizando a aversão que os mesmos sentem pela disciplina de Matemática.

Ao pesquisar sobre um referencial teórico que pudesse nos apoiar e ajudar no tipo de estudo ao qual se determinou a fazer, se percebeu nitidamente que se tratava de um vasto campo a ser investigado, como é o caso de Walle (2009), Onuchic (2004), Polya (1995), Andrade (2004) entre outros.

Nessa perspectiva, foi elaborado um projeto à busca de algumas respostas que possam nos dar suporte para realização de um estudo a fim de verificar, através de uma abordagem qualitativa e quantitativa, até que ponto a metodologia da Resolução de Problemas (RP) pode auxiliar no processo de ensino e aprendizagem do conceito de *funções ou funções polinomiais*, trataremos aqui apenas por funções.

Apesar dos PCNs (1997) recomendarem que o estudo de Funções possa ser iniciado com uma exploração qualitativa das relações entre duas grandezas em diferentes situações percebe-se que a abordagem dada ao ensino de funções ainda, na maioria das vezes, não é atrativa para os alunos, pois se restringe à mera transmissão de um grande número de fórmulas que são memorizadas e permanecem desprovidas de significados, gerando a falta de interesse e, consequentemente, a dificuldade da aprendizagem.

Além deste, o modo como o conceito de funções, geralmente, é tratado em sala de aula e também nos livros didáticos, gerando resultados insatisfatórios, foi também motivação a nos levar a uma abordagem através resolução de problemas.

Onuchic (2004) cita algumas razões para a utilização da metodologia de Resolução de Problemas: coloca o foco da atenção dos alunos; desenvolve o poder matemático; desenvolve a crença de que os alunos são capazes de fazer Matemática e que Matemática faz sentido; provê dados de avaliação contínua; é gostoso e a formalização faz mais sentido para o aluno.

Consideramos que a metodologia utilizada no ensino - aprendizagem do conceito de Função é de extrema importância, pois a formalização deste conceito vai repercutir e desencadear para estudos posteriores, por exemplo, nos casos particulares de função (afim, quadrática, modular, exponencial, logarítmica, trigonométrica), e também vai ajudar o aluno a construir, entender e ser capaz de usar o conhecimento adquirido na sua própria formação como cidadão.

Dessa forma consideramos ideal trabalhar este conceito através da metodologia da Resolução de Problemas, não devendo ser confundida com a mera introdução de problemas de aplicação, geralmente encontrados nos finais dos capítulos dos livros-textos de Matemática, mas apresentar aos alunos, *já no início do tratamento* do conteúdo, uma ou mais situações-problemas que possam levá-los a raciocinar sobre a necessidade de construir novos conceitos e processos, bem como a de associar outros periféricos, que venham a se conectar numa rede de significados.

Nossa pesquisa tem o objetivo de fazer com que os alunos compreendam o conceito de Função num ambiente de RP, para isso planejamos e selecionamos algumas atividades de trabalhos já realizados nessa área e que acreditamos serem importantes para começarmos a trabalhar com a RP.

Este trabalho cujo título **"A Resolução de Problemas no ensino do conceito de funções no 1º ano do ensino médio"**, está estruturado em quatro capítulos.

No capítulo 1, exploramos o desenvolvimento do conceito de função fazendo um breve histórico com vestígios da evolução deste conceito e consequentemente quais foram os estudiosos que contribuíram para tal, levando em consideração as principais etapas: Antiguidade, Idade Média e Período Moderno. Neste capítulo, observamos também como alguns livros didáticos usuais estão trazendo este conceito.

A abordagem feita no capítulo 2 diz respeito ao ensino aprendizagem do conceito de Funções, desde quando foi integrado no currículo da maioria das escolas, como o documento dos Parâmetros Curriculares Nacionais tratam desse conteúdo, quais os conhecimentos prévios que são necessários para desenvolver a aprendizagem de funções e quais as principais dificuldades dos alunos ao se depararem com o conteúdo de Funções no 1º ano do ensino médio.

No capítulo 3, apresentamos a Resolução de Problemas, suas concepções e suas possíveis contribuições no ensino, seja ela no ensino de Matemática ou em outra disciplina qualquer. Abordamos a RP como uma possível metodologia para o Ensino da Matemática, em particular, no caso da pesquisa, no ensino do conceito de Funções.

No capítulo 4, mostramos e descrevemos a experiência realizada na turma do 1º ano do ensino médio do Colégio Central de Ensino, Aroeiras – PB com o uso da metodologia da RP durante 14 aulas do ano letivo 2012 com o conteúdo do conceito de Função.

1. DESENVOLVIMENTO DO CONCEITO DE FUNÇÃO.

A idéia de Função que temos hoje em dia foi sendo construída ao longo do tempo por vários matemáticos. Segundo Zuffi (2001, p.11) apud (CHAVES, 2004),

> não parece existir consenso entre os autores, a respeito da origem do conceito de função [talvez pelo seu próprio aspecto intuitivo]. Alguns deles consideram que os Babilônios (2000 a.C.) já possuíam um instinto de funcionalidade [grifos do autor] (...) em seus cálculos com tabelas sexagesimais de quadrados e de raízes quadradas (...) que eram destinadas a um fim prático. As tabelas, entre os gregos, que faziam a conexão entre a Matemática e a Astronomia, mostravam evidência de que estes percebiam a idéia de dependência funcional, pelo emprego de interpolação linear.

No entanto, entendendo que todas as relações criadas pelas civilizações antigas para a invenção do número, necessidade primeira da matematização, já constituía o "instinto de funcionalidade". Quando associavam os dedos às quantidades, e quando viram que estes já não eram mais suficientes e buscaram outros elementos para contar, enumerar estavam vivenciando a interdependência de variáveis que fluíam para a formação de sistemas de numeração cada vez mais adequados e práticos.

Vejamos então como aconteceu o desenvolvimento do conceito de Função desde o seu surgimento.

1.1. Um breve histórico.

Segundo Silva (2011), foi a necessidade de estudar os fenômenos naturais que fez com que surgisse o conceito de função. Inicialmente entendido como uma expressão analítica evoluiu até tornar-se um especial conjunto de pares ordenados.

Faremos neste tópico um breve estudo ao que diz respeito à evolução do conceito de função, detendo-nos nas principais etapas do desenvolvimento deste conceito. Fazendo uma revisão literária percebemos que o mesmo divide-se em três etapas: A Antiguidade (4000 a.C. até 476 d.C.); A Idade Média (476 até 1453) e o período Moderno (1453 até 1789). (OLIVEIRA, 1997)

Na **Antiguidade**, época do primeiro estágio da concepção de função, verifica-se o estudo de alguns casos de dependência entre duas quantidades, sem destacar a noção de variável e de função. Percebe-se também o uso de tabelas sexagesimais de quadrados e de raízes quadradas, de cubos e raízes cúbicas, pelos babilônios e gregos – chamadas posteriormente de "funções tabuladas".

Entre os pitagóricos, a ideia de função aparece no estudo da interdependência quantitativa de diferentes quantidades físicas. Assim como os babilônios, os egípcios construíram geralmente em papiros, tabelas para apresentar correspondências. Apesar de tantos exemplos que indicam a presença das dependências funcionais, o pensamento matemático da Antiguidade não criou nenhuma noção geral nem de quantidade variável nem de função.

No período da **Idade Média**, cada caso concreto de dependência entre duas quantidades era traduzido por uma descrição verbal ou por um gráfico, mais que por uma fórmula. Até então cada problema era tratado de maneira isolada, mas nas escolas de filosofia natural de **Oxford e Paris** a noção de função aparece pela primeira vez no século XII de uma forma mais genérica.

Nas duas escolas, alguns matemáticos fazem estudos sobre fenômenos como: calor, densidade, luz, distância, velocidade, etc. Dessa forma a ideia que as leis quantitativas da natureza eram leis do tipo funcional, amadurecia pouco a pouco na filosofia natural.

Nicole Oresme (1323-1382) foi o primeiro que utilizou as coordenadas para representar a velocidade em função do tempo, seu objetivo era representar a intensidade de uma característica de um assunto por meio de uma figura geométrica.

Para traçar o gráfico da velocidade em função do tempo de um corpo que se move com aceleração constante, ele marcou pontos representando instantes de tempo (longitudes), para cada instante traçou, perpendicularmente à reta das longitudes, um segmento de reta (latitudes), cujo comprimento representava a velocidade. Suas representações marcam um passo à frente do conceito de função ou de variável dependente, entretanto não se pode dizer que ele se utilizasse do conceito de função.

No **período Moderno**, conhecido pelo Período de formação da matemática das grandezas variáveis, ocorreram profundas mudanças qualitativas no conteúdo matemático: o estudo dos números, das grandezas constantes e das figuras era complementado com o estudo dos movimentos e transformações das dependências funcionais.

O início desse período está representado pela introdução das grandezas variáveis na geometria analítica de Descartes e a criação do cálculo diferencial e integral nos trabalhos de Newton e Leibniz, e o término marcado pela formação de quase todas as disciplinas científicas conhecidas hoje como os fundamentos clássicos da matemática contemporânea.

Mesmo no século XVI as funções só eram abordadas através dos antigos métodos: por uma descrição verbal, por uma tabela ou por um gráfico. O método analítico para introduzir as funções por meio de fórmulas e equações começa a se destacar através dos trabalhos de Pierre Fermat (1601-1665) e René Descartes (1596-1650).

Galileu Galilei (1564-1642) contribui bastante com a evolução da noção de função neste período, nunca utilizou o termo "função" (SILVA, 2011), mas foi ele quem introduziu o quantitativo nas representações gráficas, e insistiu em encontrar os resultados e as relações que proviessem mais da experiência do que apenas do pensamento, seu diferencial em relação a Oresme para o qual a teoria pura isenta da experiência já era suficiente.

O principal campo de estudo de Galileu foi o movimento, em especial o movimento dos planetas e, consequentemente, a velocidade, a aceleração a distância percorrida. Através de seus estudos por intermédio da experimentação, contribuiu grandemente para a evolução da noção de função, pois lidou de forma funcional com as causas e efeitos, e esta necessidade é essencial à concepção de variável dependente.

No início do século XVI, ainda não tinha surgido a ideia de se estudar uma equação geral que representasse uma classe inteira de equações, e esta ideia básica, de se fazer uma distinção clara entre parâmetros (valores conhecidos) e variáveis (valores desconhecidos) surgiu com François Viète (1540-1603).

François Viète usou vogais para representar variáveis e consoantes para representar parâmetros (EVES, 2004). No fim do século XVI, com a extensão do conceito de número, o advento da álgebra simbólica e literal, surgem as preliminares para a introdução da Noção de Função como relação entre dois conjuntos de números.

Segundo Oliveira (1997), **Pierri Fermat** (1601-1665) afirma "*tão logo duas quantidades desconhecidas aparecem em uma igualdade, há um lugar geométrico e o ponto terminal de uma das duas quantidades descreve uma reta ou curva".*

A ideia de introduzir analiticamente uma função é desenvolvida mais detalhada por **René Descartes** (1596-1650) em sua obra *"La Géométrei"*. Em sua obra Descartes enfatiza que para os gregos uma variável correspondia ao comprimento de um segmento, o produto de duas variáveis à área de algum retângulo e o produto de três variáveis ao volume de algum paralelepípedo retângulo, já para ele x.x era o quarto termo da proporção 1: x = x : x.x, que poderia ser representado por um segmento de reta.

Pela primeira vez e de uma forma completamente clara é sustentada a ideia de que uma equação em x e y é um meio para introduzir uma dependência entre duas quantidades variáveis possibilitando o cálculo de valores de uma variável a partir dos valores da outra. A introdução das funções sob a forma de equações produziu um efeito de uma revolução no desenvolvimento da Matemática, sendo fundamental para trabalhos posteriores neste ramo.

A palavra "função" foi utilizada pela primeira vez por **Wilhelm Leibniz** em 1694, "*inicialmente para expressar qualquer quantidade associada a uma curva, por exemplo, as coordenadas de um ponto da curva, a inclinação de uma curva e o raio da curvatura de uma curva"* (EVES, 2004, p. 660).

Por todo o século XVIII, o conceito de função permaneceu quase só restrito à idéia de uma variável-dependente-expressa por uma fórmula em termos de outras variáveis-independentes, o cálculo de variações e a maioria dos cálculos que se vê hoje na universidade já fora estabelecida.

A primeira definição explícita de uma função como uma expressão analítica aparece com **Johann Bernoulli** (1667-1748), ele considera uma função "*como uma expressão qualquer formada de uma variável e algumas constantes"*. Propõe a letra grega φ (fi) para caracterizar uma função, e na sua definição não dá indicação sobre o modo de constituir função a partir da variável dependente.

Pouco tempo depois, **Leonard Euler** (1707-1783) no século XVIII foi figura essencial para o conceito de função, na sua definição segue seu mestre Johann Bernoulli, considerando uma função "*como uma equação ou uma fórmula qualquer envolvendo variáveis e constantes",* faz apenas a mudança da palavra "expressão" para "equação". A notação *f(x)* para indicar a lei de uma função que usamos até hoje foi introduzida por Euler (IEZZI, 2010).

No século XIX iniciou-se um processo de fundamentação rigorosa da Análise, ficando conhecido por "aritmetização da Análise", inspirados nos estudos de Euler, **Condorcet (1778), Cauchy (1789), Lacroix (1797), Fourrier (1821) e Lobatchevski (1837),** estudaram e aprofundaram a concepção de função além de corrigirem algumas noções limitadas por ele.

Numa tentativa de dar uma definição de função ampla o suficiente a ponto de englobar essa forma de relação, Lejeune Dirichlet (1805-1859) chegou à formulação do conceito de variável assim: "*uma variável é um símbolo que representa um qualquer dos elementos de um conjunto de números"*. (EVES, 2004, p. 661)

Dirichlet define funções sobre conjuntos numéricos:

> "se duas variáveis x e y estão relacionadas de maneira que, sempre que se atribui um valor a x, corresponde automaticamente, por alguma lei ou regra, um valor a y, então se diz que y é uma função (unívoca) de x. A variável x, à qual se atribuem valores à vontade, é chamada de *variável independente* e a variável y, cujos valores dependem dos valores de x, é chamada de *variável dependente*. Os valores possíveis que x pode assumir constituem o *campo de definição* da função e os valores assumidos por y constituem o campo de valores da função." (EVES, 2004)

A definição de Dirichlet foi amplamente aceita até meados do século XX, e é considerada a mais próxima da que se usa hoje em dia. A teoria dos conjuntos criada por Georg Cantor (1845-1956) propiciou ampliar o conceito de função.

Em 1939, o grupo Boubarki com a influência da Teoria dos conjuntos também ampliam o conceito de função abrangendo relações entre dois conjuntos de elementos quaisquer, não só de números. Assim na teoria dos conjuntos, uma função f, é por definição, "*uma terna ordenada (X, Y, f), onde X e Y são conjuntos e f é um subconjunto de X x Y, tal que se (x,y) pertence a f e (x, y') pertence a f, então y=y'".*

Com os matemáticos algebristas a definição de função se afastou dos aspectos de variação e dependência, como nas seguintes definições encontradas em alguns livros didáticos.

Em Iezzi (2010): "*Dados dois conjuntos não vazios A e B, uma relação (ou correspondência) que associa a cada elemento x ∈ A um único elemento y ∈ B recebe o nome de função de A em B".*

Em Dante (2008): "*Dados dois conjuntos não vazios A e B, uma função de A em B é uma regra que indica como associar cada elemento x ∈ A a um único elemento y ∈ B*".

Essas últimas definições são as utilizadas, nas escolas atualmente pela maioria dos professores de Matemática. Mas segundo Sophie Cotret apud Oliveira (1997) é necessário deixar claro na função as suas componentes de *variação, dependência e correspondência*. Como consequência da evolução do estudo das funções surgem numerosas aplicações da matemática a outras ciências. A função é, então, o modelo matemático que explica a relação entre as variáveis.

2. ENSINO APRENDIZAGEM DE FUNÇÕES.

O conceito de função é um dos mais importantes e úteis na Matemática e fora dela, mas, só começou a integrar a maior parte dos currículos nas escolas com o advento da Matemática Moderna no século XX. A Função, em geral pode expressar uma relação da interdependência, uma relação de causa e efeito ou uma correspondência bem definida.

Ao acompanhar de forma cronológica o desenvolvimento do conceito de função, entendemos que o mesmo processo construtivo do saber, pode também se desenvolver na aprendizagem na sala de aula onde, desta feita, cabe ao professor, a partir dos conhecimentos já adquiridos por seus alunos, provocar questionamentos que os levem, de forma gradativa, à elaboração de novos conceitos.

De acordo com Coxford (1995) "*define-se uma função por dois conjuntos, o domínio, e por uma regra que associa a cada elemento do domínio exatamente um único elemento do contradomínio*". A maioria das funções nos currículos tem várias representações: gráfica, algébrica, tabular e por meio de um diagrama de flechas.

No mundo real é muito comum termos uma grandeza variando de forma interdependente à variação de outra grandeza. Uma representação matemática desse tipo de relação são as funções definidas como relação entre duas grandezas. Sendo assim o conhecimento sobre funções ultrapassam os livros didáticos, pois até na linguagem natural costumamos atribuir a essa palavra um significado parecido com o qual é usado no contexto da Matemática.

Quando por exemplo, dizemos que alguém "exerce uma função" ou, mais precisamente, "aquele rapaz exerce a função de porteiro do cinema", isso significa, por exemplo, que "se você mostrar o ingresso, ele deixará você entrar; se você não mostrá-lo, não entrará". Um porteiro que deixa entrar todo mundo, com ou sem ingresso, não está "exercendo sua função".

Sendo o conceito de Função um dos conceitos mais importantes, é de extrema importância que seu ensino e aprendizagem aconteçam de forma criteriosa e cuidadosa, de modo a auxiliar o aluno na apropriação do conhecimento de forma investigativa descartando as exigências de memorização, e apresentação de regras prontas desprovidas de explicações.

Baseando-se no ensino e na aprendizagem é que os PCNs delineiam o trabalho em matemática no ensino médio. De acordo com este documento

> O estudo de Funções pode ser iniciado com uma exploração qualitativa das relações entre duas grandezas em diferentes situações: idade e altura; área do círculo e raio; tempo e distância percorrida; tempo e crescimento populacional; tempo e amplitude de movimento de um pêndulo, entre outras. Também é interessante provocar os alunos para que apresentem outras tantas relações funcionais e que, de início, esbocem qualitativamente os gráficos que representam essas relações, registrando os tipos de crescimento e decrescimento (mais ou menos rápido). (PCNEM, p.72)

É de extrema importância também que no ensino de Funções seja explorado a leitura de funções escrita na forma algébrica e expressada em palavras ou vice versa.

Ainda segundo Caraça (1957) apud Silva (2008), quanto aos elementos importantes para a formação do conceito de função no aluno temos,

> As ideias fundamentais que estão na base da definição de função são a de variável e a de correspondência entre duas variáveis, isto é, entre dois conjuntos. [...] Toda ideia de correspondência, mesmo na sua forma mais abstracta, implica a ideia de dependência , e o conceito de função tem, precisamente, por objetivo a tradução, em termos de rigor matemático, desse conceito de dependência, de lei, que domina o esforço construtivo das ciências da natureza. (CARAÇA, 1957, p. 56)

Algumas situações em que podemos destacar a relação ou não entre grandezas são principalmente as que estão presentes no nosso dia a dia. Em atos simples, por exemplo, como o de comprar pães ou balas em um estabelecimento, na compra de combustível e o valor a pagar, a idade e a altura de uma pessoa, área de um círculo e raio, o tempo e a distância percorrida por uma pessoa. Na mídia impressa encontramos muitos gráficos e tabelas, muitas vezes mostrando a interdependência entre duas variáveis.

Quando nossos alunos percebem as relações práticas deste conteúdo passam a ter um grande interesse em estudá-lo. A importância do professor nessa mediação entre conteúdo e sua prática se dará na medida em que antes de qualquer definição chame a atenção para a dependência ou não de uma grandeza em relação à outra.

Fazendo uma revisão da literatura, observamos que alguns dos temas que estão ligados e que são importantes para entender a Noção de Função no 1º ano do Ensino Médio, são trabalhados em anos escolares anteriores.

No 7º e/ou 8º ano, por exemplo, são vistos: "***As equações e inequações do 1º grau com uma incógnita***" e "***Sistemas de duas equações com duas incógnitas***" quando deve ser trabalhada a representação no plano cartesiano. Ainda no 7º ano outro tema de fundamental importância para entender tanto a noção de Função como em várias outras áreas do conhecimento é a "***Proporcionalidade***".

No 9º ano, é proposto o ensino sobre "***Noções de Estatística***", este tema também é muito importante para o ensino de Funções já que sugere a interpretação e a construção de gráficos cartesianos, entre outros tipos de gráficos. Ainda no 9º ano, propõe-se o ensino de "***Equações do 2º grau com uma incógnita***", momento no qual se pode fazer uma resolução gráfica das equações do 2º grau.

Mesmo muitos dos temas fundamentais no ensino de Funções já serem trabalhados antes do 1º ano do ensino médio muitos alunos ao se depararem com esse conteúdo sentem muitas dificuldades, e segundo Chaves (2004) "*O conceito de função e as idéias de variável, domínio, imagem e contradomínio têm sido apontado por diversos pesquisadores como de difícil assimilação tanto para alunos de Ensino Médio como para alunos universitários*".

Na maioria dos livros didáticos o capítulo de Funções está organizado da seguinte forma:

- Noção intuitiva de função
- A noção de função via conjuntos
- Domínio, contradomínio e conjunto imagem
- Gráfico de uma função
- Função par e Função ímpar
- Função crescente e decrescente
- Função injetiva, sobrejetiva e bijetiva
- Função composta
- Função inversa

2.1. Algumas dificuldades dos alunos no conteúdo de Funções.

A dificuldade apresentada geralmente pelos alunos na assimilação do conteúdo de Funções pode está sendo causada pela metodologia utilizada, pois segundo Ávila(1985) apud Chaves (2004) a *"preocupação excessiva com apresentações formais é uma falha grave no ensino, pois atrapalha o desenvolvimento do aluno já que obscurece o que há de mais importante na Matemática: as idéias. Exemplo típico desse erro é o esforço que se faz no 2° grau para apresentar o conceito de função como um caso particular de relação"*.

E, no entanto, essa é a prática mais comum entre os professores de Matemática, em especial do Ensino Médio, que, apoiados em livros didáticos e em sua própria formação, transmitem um saber desconectado do contexto do aluno enquanto indivíduo dotado de saberes, níveis de cognição e imaginação.

De acordo com os resultados de uma pesquisa realizada por Markovits, Eylon e Bruckheimer descrita em Coxford (1995) alguns componentes são considerados importantes na compreensão do conceito de função, esses componentes são:

- Capacidade de classificar relações em funções e não funções;
- Capacidade de dar um exemplo de uma relação que é função e de uma que não é;
- Para uma dada função, capacidade de identificar pré-imagens, imagens e pares (pré-imagem, imagem);
- Para uma dada função, capacidade de achar a imagem para uma dada pré-imagem e vice-versa;
- Capacidade de identificar funções iguais. (Duas funções f e g se dizem iguais quando têm mesmo domínio e mesmo contradomínio e quando, para todo x do domínio, $f(x) = g(x)$.);
- Capacidade de passar de uma forma de representação para outra;
- Capacidade de identificar funções satisfazendo certas condições dadas;
- Capacidade de dar exemplos de funções satisfazendo certas condições dadas.

Tais componentes são apenas alguns exemplos de uma ampla variedade de itens que envolvem funções, tomando como referência esses componentes percebe-se que as dificuldades que os alunos possuem com os *termos pré-imagem, imagem, par (pré-imagem, imagem), domínio, contradomínio e conjunto imagem* leva a outras dificuldades.

Dificuldades essas como: localizar pré-imagens e imagens nos eixos em representações gráficas, identificar imagens e pares (pré-imagem, imagem) para funções dadas na forma algébrica, distinguir entre conjunto imagem e contradomínio e ignorar o domínio e o contradomínio da função.

A complexidade do conceito de função também é parcialmente responsável pelas dificuldades dos alunos, pois notemos que a definição de função, tal como é ensinada atualmente, envolve muitos conceitos – domínio, contradomínio, conjunto imagem, regra de correspondência. Dessa forma, ou teremos que ter a certeza de que esses conceitos foram compreendidos em todas as representações, antes de continuarmos a ensinar mais coisas sobre funções, ou teremos de optar por deixar de lado alguns aspectos.

Outras dificuldades apontadas na pesquisa descrita em Coxford (1995) foram com relação a certos tipos de funções, como no caso da função constante, em funções definidas por secções, e em funções representadas por gráficos desconexos.

Dificuldades causadas por manipulações técnicas, por exemplo, os alunos tinham mais dificuldades para resolver tarefas em que a regra de correspondência continha frações, do que uma tarefa semelhante envolvendo apenas inteiros. Outro exemplo desse tipo de dificuldade ocorre na passagem de uma forma de representação de uma função para outra.

Pelo fato das dificuldades causadas pela complexidade das manipulações técnicas se manifestarem muito mais acentuadamente do que outros tipos de dificuldades que já discutimos, não podemos permitir que essa área seja negligenciada, pois não há como resolver problemas sem habilidades manipulatórias técnicas. Todavia, devemos encontrar meios de fazer com que a aquisição dessas habilidades se tornem interessante.

3. A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Diariamente, o ser humano mantém contato com a resolução de problemas, dos mais simples aos mais complexos. É errôneo pensar que resolução de problemas é uma questão exclusiva da Matemática.

Segundo Andrade (1998) "**Problemas de Matemática** e **Resolução de Problemas** têm assumido vários significados e desempenhado diversas funções no currículo escolar de Matemática".

> Um problema é definido como qualquer tarefa ou atividade para a qual os estudantes não têm métodos ou regras prescritas ou memorizadas, nem a percepção de que haja um método específico para chegar à solução correta. (Walle, 2001)

A resolução de problemas, já há alguns anos, tem sido uma das linhas de investigação na didática da Matemática. Este fato se deve tanto à importância que se dá a resolução de problemas na aprendizagem das ciências em geral como na constatação do fracasso generalizado dos estudantes nesta tarefa. (ITACARAMBI, 2010)

De acordo com Andrade (1998),

> "Nesses períodos, de modo geral, os estudos de resolução de problemas preocuparam-se **inicialmente (período anterior a 60)** com o **desempenho bem sucedido na obtenção da solução** de problemas. Não há preocupação com o processo. Para desenvolver sua capacidade de resolução de problemas, a criança deveria exercitar-se exaustivamente na solução de uma grande quantidade de problemas do mesmo tipo.O ensino de resolução de problemas limitava-se ao ensino de solução de problemas, tipo treino, num esquema cognitivo estímulo-resposta. **Posteriormente (período 60-80), a preocupação era com o processo** envolvido na resolução de problemas. Nessa ocasião, o ensino de resolução de problemas centra-se no ensino e no uso de estratégias. Nos fins dos anos 70, a Resolução de Problemas ganha espaço no mundo inteiro. Começa o movimento a favor do ensino da resolução de problemas. A década de 80 é marcada por vários acontecimentos".

A resolução de problemas é o cerne das recomendações do currículo do NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) para a década de 80. Quando foram publicados os Parâmetros Curriculares Americanos (Standards), dizendo que a resolução de problemas deveria ser o principal objetivo do ensino de matemática, desencadeou-se um grande movimento em torno da Resolução de Problemas. (KRULIK, 1997). No Brasil, os Parâmetros Curriculares Nacionais foram criados apoiados nas ideias dos Standards.

Houve várias interpretações diferentes em torno de como se incorporaria a resolução de problemas em sala de aula, dentro e fora dos Estados Unidos, surgindo basicamente três formas diferentes de se entender a resolução de problemas e seu papel no ensino de matemática:

- Ensinar **para** a resolução de problemas, no qual a meta final é que os alunos sejam capazes de resolver certos problemas, então o conteúdo matemático é ensinado para este fim.
- Ensinar **sobre** resolução de problemas, no qual a forma como se procurou alcançar a meta de resolver problemas foi comentando com os alunos o processo de resolução de problemas: suas fases, estratégias comumente utilizadas, posturas que se deve ter para conseguir resolver problemas. Os professores que utilizam esta estratégia basearam-se muito no livro "A arte de resolver problemas", de George Pòlya (1945/1973). E
- Ensinar **via** resolução de problemas, o que significa considerar o problema como um elemento *disparador de um processo de construção do conhecimento matemático*.

Segundo Dias (GESTAR, 2008), quando ensinamos matemática **via** resolução de problemas visamos contribuir na formação dos conceitos antes mesmo de sua apresentação em linguagem matemática. É a necessidade de resolver o problema que leva o aluno a se apropriar, sozinho ou coletivamente, dos instrumentos intelectuais necessários à construção de uma solução.

Isto não significa que o problema seja utilizado apenas como um ponto de partida motivador que gera a exposição dos conceitos necessários à sua solução.

A resolução do problema, nesta abordagem, é o próprio caminho ao longo do qual os conceitos vão sendo construídos. É na ação de resolver um problema particular que conhecimentos e procedimentos são elaborados. A institucionalização destes conhecimentos (reconhecimento pelo grupo, generalização) é que ocorre após a resolução do problema.

Para alguns professores a realização de exercícios onde os alunos aplicam um conceito que acabaram de estudar se encaixa dentro da proposta pedagógica de resolução de problemas, mas isto não é verdade. Isso ocorre pelo fato de acreditarem que "problemas" são sinônimos de "exercícios" e propõem a realização de exercícios após suas exposições teóricas, para os alunos treinarem ou praticarem procedimentos anteriormente mostrados. Mas, as únicas ações exercidas pelos alunos neste tipo de atividade são a imitação, a repetição e, às vezes, a memorização.

Dessa forma, segundo Dias (GESTAR, 2008), para que haja autêntica atividade de resolução de problemas, é necessário que haja:

- Um “verdadeiro” problema, que satisfaça os pontos levantados;
- Elaboração de estratégias de solução (e não a imitação de um exemplo);
- Uma indefinição inicial, da parte de quem resolve o problema, quanto aos conhecimentos matemáticos que ele deverá mobilizar no processo de resolução;
- A validação da solução.

Pode envolver também:

- A idealização e realização de experiências;
- A construção de novos conhecimentos matemáticos;
- A atividade de socialização, com argumentação quanto a estratégias a serem tomadas e a justificativa de ações escolhidas.

3.1. A metodologia da resolução de problemas.

Ensinar Matemática através da RP não significa apresentar um problema, sentar-se e esperar que uma mágica aconteça, sendo três fases consideradas importantes: Antes, durante e depois. (Walle, 2001)

Vejamos cada uma delas:

- **ANTES:** O professor deve garantir que os alunos estejam mentalmente prontos para receber a tarefa e assegurar-se de que todas as expectativas estejam claras.
- **DURANTE:** Os alunos trabalham e o professor observa e avalia.
- **DEPOIS:** O professor aceita a solução dos alunos sem avaliá-las e conduz a discussão enquanto os alunos justificam e avaliam seus resultados e métodos.

Outra etapa a ser considerada ao concebermos a Resolução de Problemas como uma possível metodologia de ensino, é a escolha adequada do problema.

Para Polya (1995) o problema “*deve ser bem escolhido, nem muito difícil, nem muito fácil, natural e interessante, pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver por seus próprios meios, experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta*”.

Acrescentamos, ainda, que ele deve proporcionar diferentes possibilidades de solução, com o intuito de ser resolvido a partir de várias estratégias. Além disso, seu enunciado deve ser claro e precisa ser compreendido antes de se pensar em alguma estratégia para resolvê-lo.

Para Onuchic (2004) o professor na concepção da RP deve ser:

- Gostar da disciplina;
- Ter habilidade em planejar e selecionar tarefas;
- Fazer com que os alunos aprendam Matemática num ambiente de RP;
- Integrar diariamente a avaliação com o processo de ensino a fim de melhorar e aumentar a aprendizagem.

Muitas pesquisas veem sendo feitas sobre experiências de ensino da resolução de problemas e alguns resultados parecem claros: *para melhorar as suas capacidades de resolução os alunos devem resolver muitos problemas; as capacidades de resolução de problemas demandam tempo para se desenvolverem; a maioria dos alunos beneficia-se significativamente de um ensino planejado sistematicamente com base em resolução de problemas.*

Santos (1997) apud Silva (2011) apresenta algumas estratégias de resolução e afirma ser importante que o professor as explore em sala de aula mostrando a face interessante da (re)descoberta da matemática. Dessa forma o aluno poderá:

- Utilizar-se de tentativa e erro;
- Buscar um padrão de regularidade;
- Deduzir ou induzir;
- Trabalhar de trás pra frente;
- Resolver um problema semelhante mais simples;
- Generalizar;
- Correlacionar e fazer analogia;
- Procurar palavras-chave;
- Escrever informações relevantes;
- Fazer lista, quadro ou tabela;
- Desenhar ou plotar gráficos.

Essas estratégias permitem a ampliação e a discussão de uma determinada tarefa ou podem ser expandidas para outras situações-problema.

Algumas ações podem ser adotadas pelos professores no desenvolvimento das aulas com a resolução de problemas, visando minimizar as dificuldades dos alunos:

leitura cuidadosa dos enunciados dos problemas; incentivar diferentes formas de registros dos procedimentos em busca da solução e de linguagens entre elas a dramatização; avaliação dos erros dos alunos e a partir deles prepara novas perguntas para ajudar o aluno a buscar a solução do problema, aproveitando, sempre que possível, o raciocínio apresentado pelo aluno. (ITACARAMBI, 2010)

Observamos na prática que aprendemos com os erros. Na escola o professor não pode eliminar o risco de errar, mas tentar utilizar os erros para ampliar as possibilidades de aprendizagem dos alunos. Para que isso ocorra, são decisivos a intervenção do professor, os questionamentos que faz e a forma como interage com os alunos.

3.2. A resolução de problemas como uma metodologia de ensino – aprendizagem de funções.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática citam a Resolução de Problemas como eixo organizador do processo de ensino e aprendizagem de Matemática.

Os estudos sobre aprendizagem têm mostrado que quanto maior a relação entre a situação apresentada e os conhecimentos de Matemática, maiores são as possibilidades de que o aluno faça uso desse conhecimento que está sendo trabalhado em outras situações do cotidiano. Assim, se queremos que os alunos usem seus conhecimentos para resolver problemas, partimos do pressuposto de que é necessário ensinar-lhes Matemática, no nosso caso, Funções, resolvendo problemas.

Ainda de acordo com os PCNs (1997) não podemos considerar como resolução de problemas os exercícios de aplicação e de repetição de procedimentos, nem devemos ver essa proposta como aplicação de conceitos ou forma de avaliar se os alunos aprenderam ou não um conceito ensinado.

Ao invés disso, o documento defende a resolução de problemas como meio de desenvolver habilidades e atitudes (por exemplo, a capacidade de mobilizar conhecimentos, de gerenciar informações, de fazer analogias, de argumentar, de justificar) e de elaborar novos conceitos matemáticos.

Ou seja, os conhecimentos e habilidades englobam conteúdo matemático e as atividades cognitivas próprias da resolução de problemas. O objetivo desloca-se da resposta do problema para o processo de resolução.

Ao planejarmos as aulas para ministrar o conteúdo de Funções no 1º ano do ensino médio devemos levar em conta as *competências, habilidades e atitudes* que o aluno deve possuir ao término do capítulo. Vejamos quais são cada uma delas, segundo Dante (2009):

- Competências:
  - Ler e interpretar diferentes linguagens e representações: sentenças, gráficos, equações, esquemas.
  - Analisar e argumentar, posicionando-se criticamente em relação a temas de ciência e tecnologia.
  - Estabelecer relações e identificar regularidades, invariantes e transformações.
- Habilidades:
  - Identificar informações apresentadas através de sentenças matemáticas.
  - Capacitar-se a interpretar o comportamento dos elementos envolvidos numa situação científica.
  - Identificar regularidades em situações semelhantes para estabelecer regras, algoritmos e propriedades.
- Atitudes:
  - Reconhecimento da qualidade de previsibilidade da Matemática, por seu caráter generalizador.
  - Envolvimento com problemas de ordem analítica, que abrangem pesquisa de comportamento.
  - Predisposição à investigação científica.

Sendo assim, traçando um paralelo entre as competências, as habilidades e as atitudes que devem ser exploradas e desenvolvidas no conteúdo de Funções com os conhecimentos, as habilidades e as atitudes trabalhadas e desenvolvidas na Resolução de problemas percebemos que esta pode minimizar as dificuldades dos alunos quanto a tal conteúdo como em outros posteriores, assim como usar a Matemática para resolver problemas práticos do cotidiano.

Vejamos no próximo capítulo como foram realizadas as atividades de Resolução de problemas na turma do 1º ano do ensino médio abordando o capítulo de Funções.

4. A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO ENSINO APRENDIZAGEM DE FUNÇÕES: DESCRIÇÃO E ANÁLISE DA EXPERIÊNCIA REALIZADA

4.1. Considerações iniciais.

Para introduzir o conceito de Funções na turma do 1º ano, optamos por explorar a variação de grandezas, a proporcionalidade e a generalização de padrões. Nossa intenção foi a de fazer com que os alunos se apropriassem dos conceitos citados, por meio de uma metodologia que acreditamos ser compatível com nossa concepção de aprendizagem, a Resolução de Problemas.

Nossa concepção é baseada na crença de que o aluno aprende refletindo e agindo sobre situações e objetos que lhe são oferecidos, fazendo analogias com outras situações e objetos de conhecimento já apreendido por ele, estabelecendo uma rede de conexões entre o que conhece (e o que não conhece), entre as hipóteses que levanta sobre a situação em pauta.

4.2. O desenvolvimento do projeto.

As descrições a seguir referem-se às aulas ministradas na disciplina de Matemática, na turma do 1º ano do turno da tarde do Colégio Central de Ensino, escola particular de Aroeiras - PB. Foram feitas observações por escrito durante e ao final das aulas, parte das aulas foram registradas fotograficamente e tiramos cópias de algumas atividades produzidas pelos 13 alunos.

Acreditamos que resolver problemas é o principal motivo para a aprendizagem da matemática, e como os PCN´s defendem, quanto a aplicação da metodologia de resolução de problemas, que, um problema, e não a definição de um conceito, seja o ponto de partida da atividade matemática, optamos por realizar nossa experiência sobre o ensino de Funções via Resolução de Problemas.

No levantamento de dados, fez-se uso da observação dos alunos, em que no caso o professor atuou como pesquisador, registrando e analisando suas próprias aulas, arquivando ainda as atividades dos alunos. As observações se concentraram nas atividades em que fora explorada a Resolução de Problemas como metodologia na construção dos conceitos matemáticos trabalhados no ensino de Funções.

Na descrição feita mostraremos parte das aulas ministradas como recorte para construir esta pesquisa, em que traremos algumas observações das atividades desenvolvidas nas aulas e em consequência os fatos ocorridos. Ao produzir uma atividade que permitisse ao aluno refletir sobre os conceitos matemáticos que estava estudando com os que já possuíam, buscamos atuar através de uma abordagem metodológica em que o professor assumiu a função de mediar o processo entre o objeto de aprendizagem e o aluno.

Segundo Gestar II (2008): "Ensinar **via** resolução de problemas significa considerar o problema como um elemento *disparador de um processo de construção do conhecimento matemático*". Com base nessa forma de abordagem buscou-se construir atividades de ensino aprendizagem explorando a construção dos conceitos matemáticos envolvidos.

4.3. Descrição das aulas.

As aulas ministradas durante a pesquisa obedeceram ao planejamento escolar do ano letivo para a disciplina de Matemática e do conteúdo de Funções, considerando-se a sequência dos conceitos necessários para o entendimento do conceito de Função, segundo a maioria dos livros didáticos, e se deu no sentido de se perceber a contribuição da Resolução de Problemas durante o desenvolvimento da sequência de conteúdos trabalhados.

Nossa intenção ao fazer uso dessa metodologia é incentivar nos alunos o hábito da pesquisa, fazendo com que os mesmos procurem encontrar situações-problemas que se enquadrem dentro da sua realidade e que possam ser resolvidos com o conteúdo de Funções.

Foram registrados alguns momentos em que a Resolução de Problemas foi explorada como proposta pedagógica no ensino de Funções, buscando analisar seu papel no desenvolvimento das aulas, das habilidades e atitudes, suas limitações e possibilidades em torno das atividades, as dificuldades apresentadas pelos alunos e o seu envolvimento, evidenciando a forma como estes se posicionavam em torno das aulas durante as situações apresentadas.

A elaboração dos problemas colocou-nos, no papel de incentivador, facilitador, interventor das ideias apresentadas pelos alunos, de modo que estas fossem produtivas, levando os alunos a pensarem e a gerarem ideias de resolução, para que em seguida pudéssemos trazer essas ideias para os conteúdos que desejávamos introduzir no momento.

As intervenções didáticas foram desenvolvidas no período de maio a setembro de 2012, numa turma de 1º ano do ensino médio, com 13 alunos com faixa etária de aproximadamente 15 anos de idade, durante 14 aulas, com duração de 45 minutos cada uma.

Ao enfocar o conceito de Função, optamos por trabalhar com atividades que propõem a contextualização com o cotidiano, procuramos também enfocar não só atividades que abordem tal conceito como objeto de ensino, mas também, aquelas que, mesmo abordando outro conceito, tragam-no em seu desenvolvimento, de forma subjacente. Procuramos fazer uso de uma linguagem de fácil compreensão e sem uso excessivo da linguagem algébrica.

Buscamos também por atividades em que figure o conceito de função em seu “estado” mais simples, como relação entre grandezas ou valores em que sua dependência está traduzida numa situação em que não se possa dissociá-los; uma situação em que o aluno perceba essa dependência e consiga compreender os limites dos valores envolvidos, do que seriam Domínio e a Imagem de uma função; atividades em que a generalização ou formalização algébrica de um padrão esteja presente, apontando ao aluno o caminho de representação de uma função por uma expressão algébrica, mas também, em que o conceito de função figure como instrumento para resolver um problema, sem a formalização excessiva e definições vazias de significado para o aluno.

As atividades devem ser aquelas em que esteja presente a ideia de dependência, variação e correspondência, que, segundo Caraça (1957) estão na base da definição de função.

Sendo assim, as atividades selecionadas possibilitam trabalhar conteúdos importantes para a formação do conceito de função no aluno. Encontramos nas atividades propostas, o trabalho com grandezas, proporcionalidade, razão, variação, correspondência e representação algébrica. Todos, elementos importantes para se desenvolver o conceito de função.

Em todos os momentos de realização das atividades, os alunos eram incentivados no sentido de aceitação da proposta por nós adotada, para tanto, por meio de um problema sugerido, deixamos que eles montassem suas próprias estratégias resolução, procurando compreender os caminhos que pretendíamos construir a partir daí.

A seguir descreveremos **parte** das aulas realizadas durante a pesquisa, explicitando dentro do conteúdo trabalhado os objetivos, as atividades propostas, e suas observações, descrições e análise de algumas atividades em relação ao tema desta pesquisa.

4. 3. 1. Aulas 01, 02 e 03 (07/ 05/ 2012)

Conteúdo trabalhado:

1. Noção intuitiva de função;
2. Relação entre grandezas variáveis;
3. Proporcionalidade direta.

Objetivos:

1. Trabalhar a familiarização com a variação de grandezas, por meio da análise de seu comportamento.
2. Expressar a dependência de uma variável em relação à outra por meio da linguagem informal.
3. Identificar o nível de compreensão de tabelas apresentado pelos alunos.
4. Identificar a necessidade da matemática em situações do dia- a- dia.
5. Identificar informalmente o domínio de uma função.

Atividade Proposta:

01- Jogo: “Você fala e eu repondo” (Apêndice 1).

Conjunto de ações a serem efetivadas pelos alunos de acordo com as instruções seguintes:

i. Digam um número e o professor diz outro.
ii. Faça o registro numa tabela, repita o comando anterior até completar a tabela.
iii. Tente descobrir o que o professor pensou para modificar cada número dito por vocês, faça a anotação.
iv. Comparem os números da primeira linha com os da segunda, anote suas conclusões.
v. Discuta com os colegas sobre as relações de dependência ou independência dos números da primeira e segunda linha, e as

dificuldades encontradas para descobrir a modificação feita pelo professor.

O jogo será repetido, considerando outras transformações e depois será invertido os papeis e um dos alunos irá propor a transformação dos números que o professor irá sugerir e os demais alunos irão descobrir qual será.

02- Atividade número 2 da lista "*Promoção: Eu só quero chocolate*". (Apendice 01)

i. Analise a tabela e responda as questões sugeridas.
ii. Discuta com os colegas as relações de dependência, e as grandezas envolvidas.
iii. Compare a situação da atividade com outras situações comercias de vendas do nosso dia-a-dia.
iv. Verifique se os valores envolvidos na primeira coluna da tabela (domínio) irão ser sempre os mesmos numa situação comercial de vendas.

<u>Observação, descrição e análise.</u>

No início da aula, pedimos aos alunos que se acomodassem, explicamos o objetivo da aula: Introduzir intuitivamente a noção de Função. Entregamos a folha de atividades para os alunos e informamos que eventuais dúvidas poderiam ser resolvidas com o professor ou coletivamente.

Na primeira etapa da atividade os alunos teriam que dizer um número e o professor dizia outro, os alunos faziam o registro e teriam que "descobrir" qual foi a transformação realizada pelo professor (figura 01 e 02).

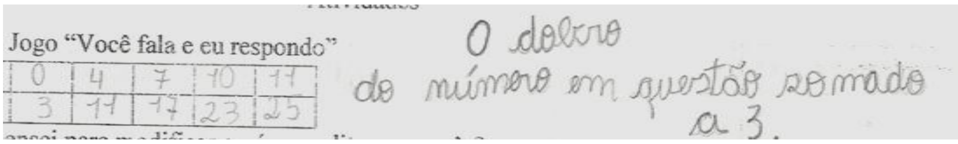


Figura 01- Exemplo de resposta obtida pelo aluno A09 da turma investigada

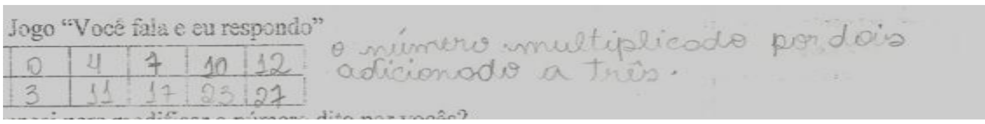


Figura 02- Exemplo de resposta obtida pelo aluno A06 da turma investigada

No desenvolvimento desta etapa, percebemos que a maioria da turma compreendeu o que tinha sido sugerido, perceberam a questão de dependência em relação aos valores da primeira linha da tabela com os da segunda, sendo a maioria dos alunos fazendo a descrição da transformação por meio de palavras e outros algebricamente.

Entretanto, alguns alunos sentiram um pouco de dificuldade no início para identificar a transformação realizada (lei da função, informalmente) com os números dito por eles, mas como o jogo foi repetido várias vezes considerando outras transformações uns foram ajudando os outros a perceberam que quando o número "zero" estava na primeira linha ficava mais fácil de descobrir a transformação realizada.

Percebemos ainda que os alunos no início da atividade só sugeriam números inteiros, neste momento fizemos a seguinte pergunta: "*Se eu tivesse respondido -2, o que o aluno deveria ter dito?*". Com essa pergunta, os alunos questionaram sobre o conjunto dos números sugeridos por eles, o que revela uma preocupação informal com o *domínio* da função com que estávamos trabalhando e também com a ideia de imagem inversa, possível. A seguir sugiram muitos números decimais e inteiros relativos, entretanto outros números custaram a aparecer.

Vocês	0	1	2	9	10	11
Eu	2	2,5	3	6,5	7	7,5

A metade do número adicionado a dois

O que eu pensei para modificar o número dito por vocês?

Figura 03- Exemplo de resposta obtida pelo aluno A09 da turma investigada

A figura 04 mostra outro exemplo de transformação, dessa vez, realizada por um aluno enquanto que os outros diziam o número da primeira linha, depois da tabela preenchida um dos alunos descobriu a transformação e outro acrescentou que na segunda linha iríamos sempre escrever números positivos, momento em que novamente intuitivamente trabalhamos com domínio de uma função.

Vocês	-2	0	2	5	13	20
Eu	9	5	9	30	174	405

$n^2 + 5$

O que eu pensei para modificar o número dito por vocês?

Figura 04- Exemplo de resposta obtida pelo aluno A03 da turma investigada

Nessa primeira atividade, trabalhamos com os números e integradamente com o conceito de função, revelou que os números que de fato tinham algum sentido para eles eram os naturais, dessa forma ampliamos um pouco os nossos objetivos recordando o conjunto dos números reais, já estudado anteriormente.

Na segunda atividade, com uma situação diferente, trabalhamos a relação entre duas grandezas, tanto quanto sua variação, nesse caso as grandezas são diretamente proporcionais.

a) O que acontece com o preço a pagar quando aumenta a quantidade de bombons?
Quando o número de bombons aumenta em 4 seu preço aumenta 6 R$.

b) Durante essa promoção, qual é o preço de 24 bombons? E de 36?
24= 36 R$ 36= 54 R$

Figura 05- Exemplo de resposta obtida pelo aluno A04 da turma investigada

Para responder a valores quanto ao valor a pagar por uma quantidade de bombons que não tinha na tabela alguns alunos usaram de conhecimentos que já possuíam para descobrir, como por exemplo, a regra de três simples (figura 06), mostrando assim um domínio razoável de incógnita e de equação. Outros preferiram continuar preenchendo a tabela para chegar ao valor desejado da pergunta (figura 07).

$$\begin{cases} 4 \rightarrow 6 \\ x \rightarrow 60 \\ 6x = 240 \\ x = \frac{240}{6} = \boxed{40} \end{cases}$$

Figura 06- Exemplo de resposta obtida pelo aluno A02 da turma investigada

Número de bombons	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
Preço a pagar em R$	6,00	12,00	18,00	24,00	30,00	36	42	48	54	60

Figura 07- Exemplo de resposta obtida pelo aluno A07 da turma investigada

Um aspecto importante da atividade que deixa o aluno a vontade para responder o problema da forma que achar mais conveniente usando seus conhecimentos prévios. A interação entre os alunos e o professor, permitiu o trabalho de colaboração entre os membros do grupo no desenvolvimento da aula, fato que fortalece a importância da socialização durante as discussões entre seus colegas, sobretudo nos momentos em que uma intervenção contribui para sanar uma dúvida na realização da atividade.

> **A02**: Professora, eu posso responder essa atividade utilizando regra de três?
> **A07**: Eu respondi completando a tabela, também da certo?
> **Professora**: Ambas as formas de resolução chegam ao mesmo resultado, mas vamos pensar em outro valor. Se a pergunta fosse "quantos bombons poderíamos comprar com R$ 205,00?". Como vocês iriam responder? Qual a melhor maneira encontrar a resposta?

A03: Eu acho que será mais rápido fazer pela regra de três, porque preenchendo a tabela vai demorar muito.
A06: Ou então podemos fazer a divisão de R$ 205,00 por R$ 1,50, que é o valor de cada bombom, encontrei como resultado 136,66667. Então poderemos comprar 136 bombons.
Professora: Tanto pela regra de três simples como pela forma que A06 respondeu chegará ao mesmo resultado. Agora me respondam: porque neste caso só consideramos o número inteiro?
A07: Ah! Acho que entendi, só iremos considerar o 136 porque não se vende 136,66667 bombons. Então quer dizer que vai sobrar dinheiro!
A01: E pra saber quanto vai sobrar em reais, basta multiplicarmos 136 por R$ 1,50 que dá R$ 204,00, então sobrou R$ 1,00. Que legal.

No decorrer da aula ainda fizemos outras perguntas com relação a segunda atividade, por exemplo: *"Existe um único valor a pagar para diferentes quantidades de bombons?"* e *"Para uma única quantidade de bombons é possível pagar dois ou mais valores diferentes? "* levando o aluno a observar que a relação entre as duas grandezas em que, a todo valor de uma, há apenas um valor correspondente na outra, o que caracteriza a função.

4.3.2. Aulas 04, 05 e 06 (14/ 05/ 2012)

Conteúdo trabalhado:

1. Variável;
2. A noção de função via conjuntos;
3. Proporcionalidade inversa e grandezas não proporcionais;
4. Intervalos.

Objetivos:

1. Desenvolver no aluno o conceito de grandezas proporcionais.
2. Identificar e escrever matematicamente a dependência de variáveis.
3. Observar a regularidade na relação entre os valores.
4. Relacionar os conhecimentos adquiridos e desenvolvidos nas aulas 01, 02 e 03 anteriores com os desenvolvidos nesta aula.
5. Definir o conceito de função.

Atividades propostas:

1. Problema 01: “*Testando um motor de automóvel*”, contida na lista de atividades (Apêndice 02).
2. Problema 02: “U*ma compra vantajosa*”. (Apêndice 02)
3. Problema 03: Tabela de tarifas postais dos Correios. (Apêndice 02)

<u>Observação, descrição e análise.</u>

Percebemos que no desenvolvimento das atividades, alguns alunos sentiram mais dificuldades no problema 01 e na construção do gráfico do problema 3. No problema 1 não compreenderam a proporcionalidade inversa, e para completar a tabela se prenderam numa ideia de regularidade que não atendia as necessidades do problema, sem se dar conta que se tratava de um problema cujas variáveis eram velocidade e tempo e que esta segunda não poderia assumir valores negativos.

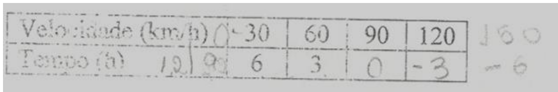


Figura 08- Exemplo de resposta obtida pelo aluno A05 da turma investigada

Após a visualização do erro cometido levantamos questionamentos na turma e os próprios alunos também questionaram o pensamento do aluno A05: “*não existe tempo negativo*”, evidenciando outras formas de resolução o que fez com que o aluno A05 entendesse a situação e resolvesse de outra forma.

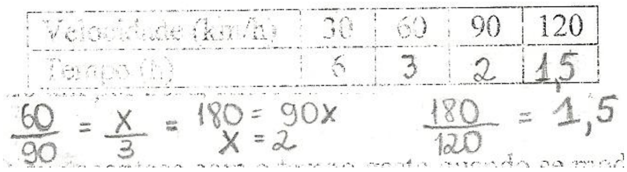


Figura 09- Exemplo de resposta obtida pelo aluno A08 da turma investigada.

No problema 3, sentiram dificuldades na construção do gráfico, mas após intervenções do professor com questionamentos que fizessem eles perceberem a forma do gráfico e os intervalos abertos e fechados o problema foi solucionado.

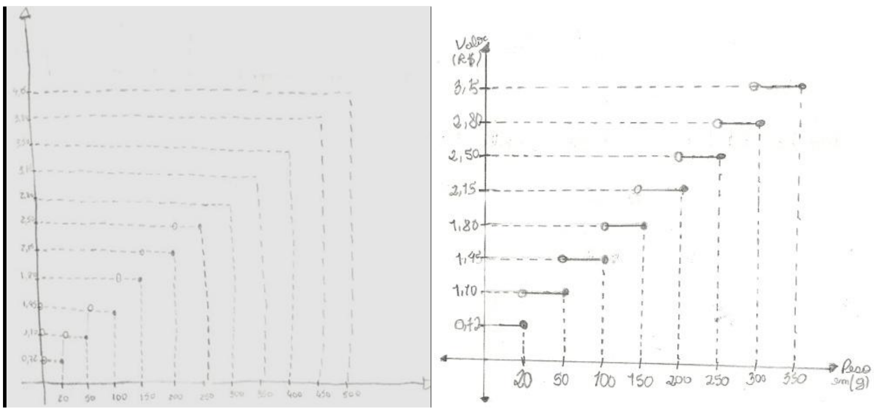


Figura 10- Dois exemplos de resposta obtida pelos alunos (A02 e A05), usados para confrontar e provocar questionamentos e tirar dúvidas.

4.3.3. Aulas 07, 08 e 09 (18/ 05/ 2012)

Conteúdo trabalhado:

1. Noção de função via conjuntos;
2. Domínio, contradomínio e imagem;
3. Lei de uma função;
4. Gráfico de uma função linear;
5. Função inversa.

Objetivos:

1. Identificar funções através de diagramas;
2. Identificar domínio, contradomínio e imagem de uma função;
3. Construir gráficos de uma função;
4. Observar regularidades e generalizar;
5. Construir uma linguagem adequada para descrever uma função.
6. Encontrar a função inversa de uma dada função.

Atividades propostas:

1. Problema 01 (Apêndice 03);
2. Problema 06, 10 e 12 do livro didático usado (Apêndice 03).

Fotos registradas durante a realização das atividades.

4.3.4. Aulas 10 e 11 (28/ 05/ 12)

Conteúdo trabalhado:

1. Sequência numérica;
2. Soma de termos de uma P.A.;

3. Padronização de números pares e ímpares;
4. Proporcionalidade;
5. Medidas de comprimento;
6. Sistema monetário;
7. Tomada de decisão.

<u>Objetivos:</u>

1. Explorar estratégias de regularidade e padrão;
2. Conhecer diferentes tipos de combustíveis, seus benefícios e prejuízos ao ambiente;
3. Discutir questões que envolvam o alto preço dos combustíveis, reconhecer o interesse de cada setor da sociedade à adição de álcool a gasolina;

<u>Atividades propostas:</u>

1. Problemas 01 e 02 (Apêndice 04).

<u>Observação, descrição e análise.</u>

Os alunos compreenderam o que exigia o problema 01, após sugestões heurísticas e questionamentos realizados, os alunos começaram a traçar planos para resolvê-lo, houve divergências entre os alunos quanto às estratégias de resolução. Pelo fato de já terem visto o conteúdo de Sequências com o outro professor de Matemática, alguns usaram a fórmula da soma de uma Progressão aritmética, mas foram instigados a experimentar de outros modos. Outros optaram por calcular a soma dos números pares e depois dos números ímpares, encontraram a generalização de cada caso e chegaram a fórmula da soma de uma Progressão aritmética.

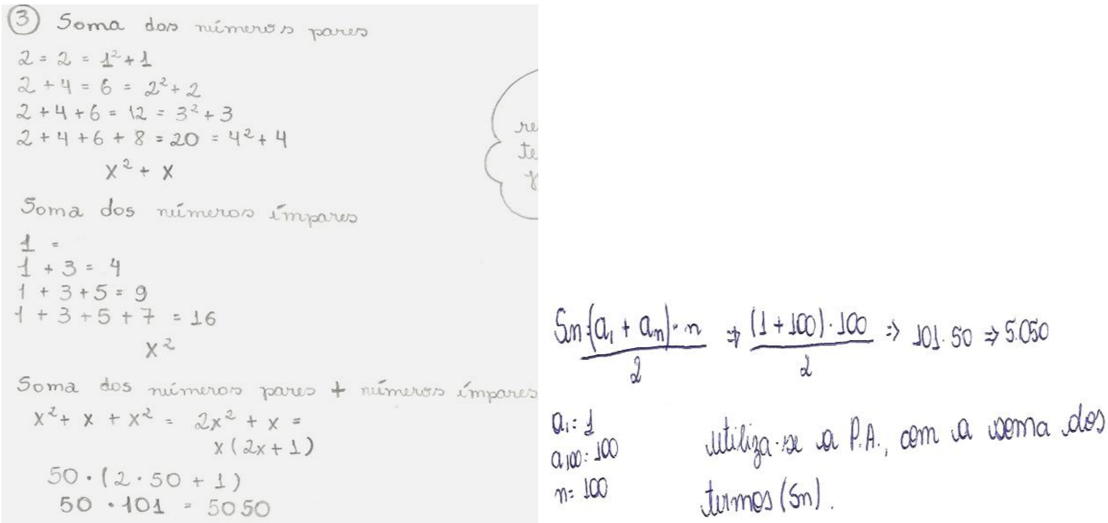


Figura 11- Dois exemplos de caminhos diferentes de resolução para o problema obtidos pelos alunos A10 e A12.

Quanto ao problema 02, alguns alunos não compreenderam o que exigia o problema, como mostra a figura 12, a aluna não assimilou que com 1 litro de álcool o carro percorria 7 km e com 1 litro de gasolina percorria 10 km, e fez o cálculo considerando cada quilômetro à um litro de combustível.

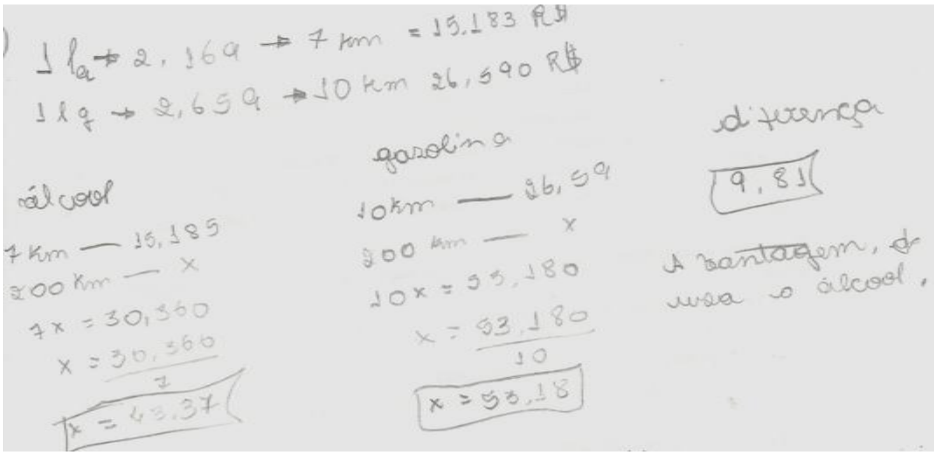


Figura 12- Exemplo de resposta obtido pelo aluno A13

Um dos alunos calculou usando regra de três, percebendo a proporção, mas só encontrou a quantidade de litros de cada combustível que o carro gastaria, e já deu a resposta definitiva de qual combustível seria mais econômico. O fato do aluno não ter calculado o valor gasto em reais dos dois combustíveis foi colocado em questionamento. Sempre que possível usamos as próprias estratégias consideradas como erradas para chamar a atenção dos alunos e corrigi-las procurando outros meios de resolução.

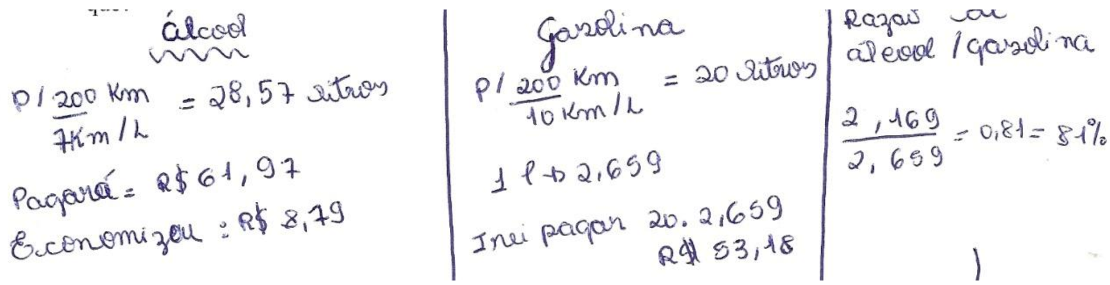


Figura 13- Exemplo de resposta obtido pelo aluno A03, usado para chamar a atenção dos alunos quanto a outras estratégias.

Após responderem a questão do problema, ampliamos a discussão acerca do mesmo com as seguintes questões: *“Qual a razão entre o preço do álcool e da gasolina?”; “Qual deverá ser a relação entre o preço do álcool e da gasolina para que o álcool seja mais vantajoso? Como descobrir isso?”.*

4.3.5. Aulas 12, 13 e 14 (04/ 06/ 12)

<u>Conteúdo trabalhado:</u>

1. Construção de tabelas;
2. Lei de uma função;
3. Intervalos;
4. Construção e análise de gráficos;
5. Domínio, contradomínio e imagem;
6. Função crescente, decrescente e constante;
7. Função par e função ímpar;
8. Função injetiva e função sobrejetiva.

Objetivos:

1. Aprofundar o conceito de função;
2. Observar regularidades e generalizar
3. Construir tabelas e trabalhar com a representação gráfica de uma função quadrática;
4. Identificar domínio, contradomínio e imagem;
5. Perceber continuidade de gráficos.

Atividades propostas:

1. Problema 01. (Apêndice 04)
2. Problema 02. (Apêndice 04)

Observação, descrição e análise:

No desenvolvimento do problema 01, a maioria dos alunos conseguiram compreendê-lo fizeram a leitura do gráfico, perceberam a dependência do preço a pagar e o número de CDs vendidos, participaram respondendo questionamentos em que não foram usados algumas heurísticas, sem ser as mesmas usadas em situações anteriores.

Alguns alunos se confundiram nas alternativas C, não perceberam o intervalo aberto e que o número 10 não pertencia ao intervalo dado e também na alternativa D, não entenderam que a razão procurada era quanto a queda de vendas pelo fato do aumento do preço de cd´s, mas após intervenções feitas pelo professor e por alguns alunos, tudo foi esclarecido.

Através do gráfico também fizemos estudo dos seus intervalos de decrescimento e quando era constante, pelo fato de no gráfico não possuir intervalos de crescimento foi explorado exemplos dado pelo professor, outras suposições e alguns gráficos pesquisados pelos alunos contidos no livro didático utilizado.

No problema 02, após compreender o que o problema exigia, os alunos começaram a fazer analogias com outro problema que já havia sido explorado em sala de aula em aulas anteriores e fizeram observações semelhantes.

Com sugestões heurísticas e suposições, desenvolvemos os conceitos de lei da função (neste caso, função quadrática), função par (ao analisar a expressão matemática para o número de ordem e quadradinhos azuis) e função ímpar (ao analisar a expressão matemática para número de ordem e quadradinho vermelhos).

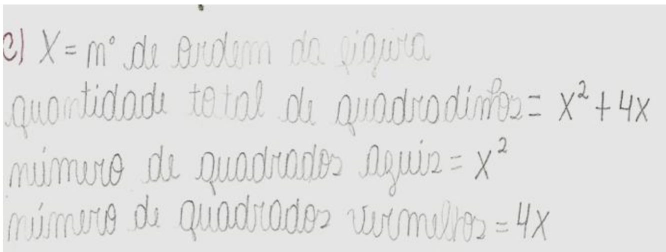


Figura 14- Exemplo de resposta obtido pelo aluno A04.

Considerando domínios diferentes nos itens **e** e **f** do problema 2, exploramos os conceitos de função injetiva e sobrejetiva, assim como na análise do gráfico do problema 1 .

4.4. Contribuições do trabalho.

Em relação ao uso da Resolução de Problemas para introduzir o conceito de Função, o desenvolvimento das atividades foi possível em virtude de pesquisas em trabalhos já realizados ou propostos sobre atividades e problemas que exploravam tal conteúdo ou outro conhecimento necessário para o aprendizado de Funções e que ao mesmo tempo pudesse ser desenvolvido por meio da Resolução de Problemas.

O nosso objetivo além de introduzir o conceito de Função era tentar fazer com que o aluno fosse incentivado e tivesse desejo pela aprendizagem matemática, e não em todas, mas na maioria das aulas realizamos esse objetivo.

Identificamos no ensino através da RP, quando bem conduzido aos objetivos da sala, algumas possibilidades:

- O trabalho em grupo - A argumentação do colega ou do professor sugere ao aluno envolvido com a atividade, um repensar sobre os conteúdos matemáticos envolvidos, observando aspectos da atividade que não foram observados num primeiro momento.
- Um ensino aprendizagem- reflexivo - No movimento de tentar justificar o desenvolvimento da atividade e no processo de exploração dos conteúdos identificou-se um movimento de justificativa sobre o **como** ou **de que forma** as atividades se relacionam com a aprendizagem dos conceitos estudados.
- A aproximação entre a teoria e a prática- O distanciamento entre muitos conteúdos do Ensino médio de Matemática e suas aplicações no cotidiano das pessoas demanda a necessidade de encontrarmos estratégias de ensino que explorem a criatividade e a participação dos alunos no processo de construção de conceitos.
- Diversificar e desenvolver estratégias de resolução - possibilitando aos alunos vivenciarem situações que lhes permitam abordar os conteúdos de forma investigativa.
- O desenvolvimento de processos criativos de raciocínio.
- Retomada a conteúdos importantes da matemática.

No desenvolvimento da proposta com o ensino de Funções através da RP, identificamos que ao trabalhar com essa metodologia mostramos um meio de dar aos alunos uma experiência valiosa em matemática, pois os mesmos estão acostumados a encontrar a matemática na forma acabada, e com a experiência que tivemos percebemos que Resolução de problemas é matemática em elaboração.

Apesar do processo da RP ser tomar um pouco mais de tempo, a experiência foi gratificante, pois percebemos uma melhora na participação dos alunos nas aulas ministradas, fazendo com que eles se sentissem transformados, percebendo que foram eles que ajudaram e fizeram parte da construção do conhecimento e não apenas espectadores das aulas de matemática.

Através da experiência realizada acreditamos que ajudamos os alunos a identificar e selecionar informações relevantes, buscar padrões, relações e generalizações, formular planos e procedimentos, integrar e empregar conceitos e habilidades aprendidos previamente e estender seu conhecimento a novas situações.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Durante nossos estudos, ao relarmos alguns fatos históricos importantes sobre o desenvolvimento e a evolução do conceito de Função, e sua significativa importância na Matemática, percebemos que é relevante o registro histórico para a compressão da construção dos conceitos matemáticos.

Observamos em outros trabalhos abordados nessa área, que as principais dificuldades relacionadas ao conteúdo de Funções podem ser explicadas pelo fato de os alunos não terem compreendido adequadamente o conceito de Funções, pois muitos professores de Matemática, em especial do Ensino Médio, ainda, apoiados em livros didáticos e em sua própria formação, transmitem um saber desconectado do contexto do aluno enquanto indivíduo dotado de saberes, níveis de cognição e imaginação.

Acreditamos que se os professores abordassem esse conceito utilizando a metodologia da Resolução de Problemas essas dificuldades diminuiriam ou até poderiam não existir.

Percebemos que alguns livros didáticos já estão se preocupando em trazer situações problemas no capítulo de Noções de Funções, conteúdo explorado neste trabalho, mas vai depender da forma de utilização dada pelo professor no dado problema, pois ele pode simplesmente utilizar o problema como um mero exercício de aplicação do conteúdo e utilização de fórmulas ou explorá-lo significativamente de acordo com a metodologia da Resolução de Problemas.

As dificuldades mais comuns são: localizar pré-imagens e imagens nos eixos em representações gráficas, identificar imagens e pares (pré-imagem, imagem) para funções dadas na forma algébrica, distinguir entre conjunto imagem e contradomínio e ignorar o domínio e o contradomínio da função. Outras dificuldades são quando a regra de correspondência contem frações, na passagem de uma forma de representação de uma função para outra, ou seja, está relacionada à complexidade das manipulações técnicas.

Muitas dificuldades também dizem respeito à complexidade do conceito de função, pois notemos que a definição de função, tal como é ensinada atualmente, envolve muitos conceitos – domínio, contradomínio, conjunto imagem, regra de correspondência.

Levando em conta as principais dificuldades dos alunos na aprendizagem de Funções e a experiência realizada através da Resolução de Problemas no conceito de Função, acreditamos ter superado muitas delas, pois observamos mais entusiasmo nos alunos pelas aulas, mais participação dos mesmos já que perceberam que foram eles que ajudaram e fizeram parte da construção do conhecimento e não apenas espectadores das aulas de matemática.

Em suma ficamos muito gratificados com a realização desse trabalho, pois através dele houve um crescimento no sentido de construção e vivência das possibilidades de aprendizagem com a metodologia da Resolução de Problemas, enriquecendo nossos estudos e como consequência contribuindo para a dinamização das nossas aulas e o aprendizado dos nossos alunos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANDRADE, Silvanio de. **Ensino-aprendizagem de matemática via resolução, exploração, codificação e descodificação de problemas e a multicontextualidade da sala de aula**. Rio Claro: IGCE, UNESP, 1998. (Dissertação de Mestrado em Educação Matemática)

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC, 1997.

CÂNDIDO, Suzana Laino. **Uma experiência sobre o ensino e a aprendizagem de Funções.** Educação Matemática em Revista, número 8, ano 7. p. 47-56.

CHAVES, Maria Isaura de Albuquerque. **Formalização do conceito de Função no Ensino médio: uma sequência de ensino-aprendizagem**. Recife: UFPE, 2004.

COXFORD, Arthur F.; SHULTE, Albert P.. **As ideias da álgebra**. Tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo: Editora atual, 1995.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: Contexto e Aplicações**, 1º ano. 4ª edição/ São Paulo: Ática, 2008.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: Contexto e Aplicações**, Manual do Professor. 1ª edição/ São Paulo: Ática, 2009.

DIAS, Ana Lúcia Braz. **A resolução de Problemas**. Em: Programa Gestão da Aprendizagem Escolar - Gestar II. Matemática: Caderno de Teoria e Prática 1 - TP1: matemática na alimentação e nos impostos. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2008. p. 45-54.

EVES, Howard. **Introdução à história da Matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. 4ª edição/ Campinas, São Paulo: Editora Unicamp, 2004.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David; PÉRIGO, Roberto; ALMEIDA, Nilze de. **Matemática: ciência e aplicações,** volume 1- ensino médio. São Paulo: Editora Saraiva, 2010.

ITACARAMBI, Ruth Ribas. Resolução de Problemas nos anos iniciais do ensino fundamental. 1ª edição/ São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010.

KRULIK, Stephen; REIS, Robert E.. **A Resolução de Problemas na Matemática escolar.** Tradução: Hygino H. Domingues e Olga Corbo. São Paulo: Atual, 1997.

OLIVEIRA, Nanci de. **Conceito de Função: Uma abordagem do processo ensino-apendizagem**. São Paulo, PUC, 1997. (Dissertação de Mestrado em Educação Matemática).

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. **Novas reflexões sobre o Ensino da Matemática através da Resolução de Problemas**. São Paulo: Cortez, 2004. p. 213-231.

POLYA, George. **A arte de Resolver Problemas**. Tradução e adaptação: Heitor Lisboa de Araújo. 2ª reimpressão. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

SILVA, Alexandre de Paula. **Conceito de Função: atividades introdutórias propostas no material de Matemática do ensino fundamental da rede pública estadual de São Paulo.** São Paulo, PUC, 2008. (Mestrado Profissional em Educação Matemática).

SILVA, Circe Mary Silva da; FILHO, Moysés Gonçalves Siqueira. **Matemática: Resolução de Problemas.** Brasília: Liber Livro, 2011.

WALLE, John A. Van de. **Matemática no ensino fundamental** (Formação de professores em sala de aula), 6ª edição. São Paulo: Artmed, 2009.

APÊNDICE 01

- Atividade 01

Jogo "Você fala e eu respondo"

Vocês						
Eu						

O que eu pensei para modificar o número dito por vocês?
Observações:

Vocês						
Eu						

O que eu pensei para modificar o número dito por vocês?
Observações:

Vocês						
Eu						

O que eu pensei para modificar o número dito por vocês?
Observações:

Eu						
Aluno						

O que o colega pensou para modificar o número dito por mim?
Observações:

- Atividade 02

Promoção: Eu só quero chocolate

Analise as tabelas e resolva as questões:
A loja de doces *Eu só quero chocolate* fez uma promoção de preços de bombons por tempo limitado. O folheto de propaganda da promoção apresentava uma tabela indicando alguns preços de diferentes quantidades de bombons.

Promoção: Eu só quero chocolate
Válida durante o carnaval

Número de bombons	4	8	12	16	20
Preço a	6,00	12,00	18,00	24,00	30,00

pagar em R$					

a) O que acontece com o preço a pagar quando aumenta a quantidade de bombons?

b) Durante essa promoção, qual é o preço de 24 bombons? E de 36?

c) E com R$ 60,00, quantos bombons é possivel comprar durante a promoção?

d) Quais as grandezas envolvidas? E qual é a razão entre essas grandezas?

APÊNDICE 02

- Atividade 01

Testando um motor de automóvel

Uma fábrica testou o motor de um novo tipo de automóvel analisando a velocidade e o tempo gasto durante o mesmo percurso. Os resultados estão na tabela abaixo.

Velocidade (km/h)	30	60	90	120
Tempo (h)	6	3		

a) Descubra o tempo gasto pelo automóvel com a velocidade de 90 km por hora e com 120 km por hora, anote na tabela acima. Justifique sua resposta.

b) O que acontece com o tempo gasto quando se modifica a velocidade?

c) Qual o tempo gasto, se o automóvel corresse a velocidade de 150 km/h ?

d) E se o automóvel levasse 12 horas nesse percurso, qual seria sua velocidade?

e) Quais são as grandezas envolvidas nesse problema?

- Atividade 02

Uma compra vantajosa

Um pendrive de 2Gb custa R$ 25,00, e outro de 4Gb custa R$ 35,00.

a) As grandezas memória em Gb e o preço a pagar são diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais? Explique.

b) Qual seria o preço de um pendrive de 8Gb, se fosse proporcional ao de 2Gb?

- Atividade 03

A tabela abaixo foi extraída do site dos Correios em 2010. Ela estabelece as tarifas postais de acordo com o peso da carta a ser postada.

IMPRESSO NORMAL	
Em gramas	Valor em reais
Até 20	0,72
Mais de 20 até 50	1,10
Mais de 50 até 100	1,45

Mais de 100 até 150	1,80
Mais de 150 até 200	2,15
Mais de 200 até 250	2,50
Mais de 250 até 300	2,80
Mais de 300 até 350	3,15
Mais de 350 até 400	3,50
Mais de 400 até 450	3,80
Mais de 450 até 500	4,15

Com base nesta tabela responda:

a) Quais as grandezas variam nessa tabela? Qual delas tem uma variação dependente? Essa variação depende de quê?

b) Quanto você pagará por uma carta que pesa 50,01 gramas? E por uma que pesa 199,99 gramas?

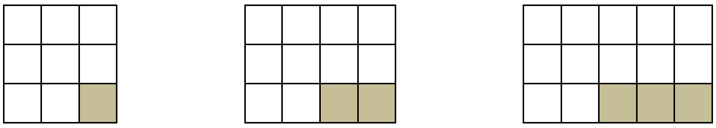
c) Essa tabela fornece a tarifa postal de cartas com qualquer peso entre 0 e 500 gramas? Para um dado peso essa tarifa é única?

d) É possível estabelecer o preço por 1 grama de correspondência a ser postada? Por quê? Construa um gráfico para essa situação.

APÊNDICE 03

- **Problema 01**

Observando as figuras da sucessão seguinte:



a) Desenhe a 4ª a 5ª figuras.

b) Quantos quadradinhos escuros têm a 10ª figura, sem construí-la; Qual é a ordem da figura que possui 28 quadradinhos escuros? E a ordem da figura que tem 69 quadradinhos brancos?

c) Complete a tabela referente a sequência dada

Nº de ordem da figura	Nº de □	Nº de ■	Total de quadradinhos
1ª			
2ª			
3ª			
4ª			
10ª			
15ª			

d) Existe alguma relação de dependência entre as quantidades que aparecem na tabela? O que depende do quê?

e) Você percebe que essa sequência de figuras pode ficar muito longa, uma vez que muitas figuras podem ser desenhadas e mais figuras ainda podem ser imaginadas. É possível escrever sentenças que lhe dê condição de encontrar a quantidade total de quadrados, a de quadrados pintados e a de quadrados não pintados numa figura sabendo a sua ordem na sequência? Você sabe qual é o número **n** de quadrados pintados e de quadrados não pintados na figura de ordem **n**?

f) Como são os números que representam a posição ou a ordem da figura na sequência? Os números que representam a quantidade de quadrados pintados em cada figura pertencem a um conjunto; que conjunto é esse?

g) Esboce o gráfico que representa a variação do número de quadrados brancos com o número de ordem da figura. Depois esboce outro gráfico com a mesma função, mas abranja o domínio para o conjunto dos números reais, e faça comparações.

APÊNDICE 04

- Problema 1

A primeira façanha matemática de Gauss (1777-1855), que ele próprio costumava contar com prazer, tornou-se muito conhecida: seu professor havia pedido aos alunos que obtivessem a soma 1 + 2 + 3 + ...+ 98 + 99 + 100, certo de que os manteria ocupados por um longo tempo. Mas passados três minutos, Gauss, então, com oito anos de idade, levanta-se e apresenta o resultado. Calcule a soma por ele encontrada.

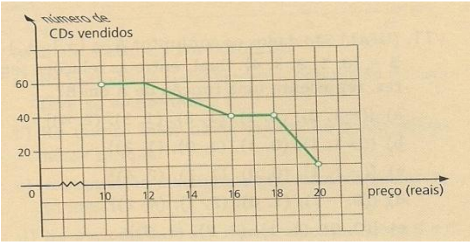
- Problema 2

Um motorista de táxi percorre diariamente 200 km. O preço do litro de álcool, em um posto de São Paulo em 04/02/2010, era de R$ 2,169 e o de gasolina R$ 2,659. Um carro movido a álcool faz 7 km por litro e um carro movido a gasolina faz 10 km por litro. Se o carro é flex, é vantagem, nessas condições, o motorista usar gasolina ou álcool? Por quê?

APÊNDICE 05

- **Problema 1**

O CD da Avenida Brasil é vendido em várias lojas de São Paulo e o preço varia de uma para outra. O gráfico abaixo mostra a relação entre o preço e o número de CDs vendidos:

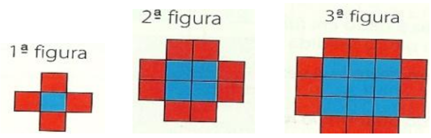


Julgue os itens abaixo, colocando (V) ou (F), conforme sejam verdadeiros ou falsos:

a) Aumentando o preço, aumentam as vendas.
b) No intervalo [10, 12], o número de CDs vendidos é o máximo.
c) Ao preço de 20 reais, o numero de CDs vendidos é 10.
d) Quando o preço sobe de 12 para 16 reais, o número de CDs vendidos cai na razão de $\frac{3}{2}$.

- **Problema 2**

Uma sequência de figuras começa como no quadro abaixo.



e assim por diante...

a) Construa uma tabela contendo o número de ordem da figura, o número de quadradinhos azuis, quadradinhos vermelhos e do total de quadradinhos. (contendo dados de até a 7ª figura, da 10ª figura e da 15ª figura).
b) Existe alguma relação de dependência entre as quantidades que aparecem na tabela? O que depende do quê?
c) Você percebe que essa sequência de figuras pode ficar muito longa, uma vez que muitas figuras podem ser desenhadas e mais figuras ainda podem ser imaginadas. Escreva sentenças matemáticas que lhe dê condição de encontrar a quantidade total de quadrados, a de quadrados azuis e a de quadrados vermelhos numa figura sabendo a sua ordem na sequência.
d) Existe mais de uma figura em que o número de quadradinhos azuis são iguais? E de quadradinhos vermelhos?
e) Esboce o gráfico que representa a variação do número de quadrados azuis com o número de ordem da figura.
f) Esboce o gráfico da função do item **e** considerando o domínio como sendo o conjunto dos números reais e faça comparações.