UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

O Teorema de Cayley-Hamilton e Aplicações

Ikyara Farias Sousa

CAMPINA GRANDE - PB
Março de 2014

Ikyara Farias Sousa

O Teorema de Cayley-Hamilton e Aplicações

Trabalho Acadêmico Orientado apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática do Departamento de Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba em cumprimento às exigências legais para obtenção do título de licenciado em Matemática.

Orientador: Dr. Aldo Trajano Lourêdo

CAMPINA GRANDE-PB
Março de 2014

S725t Sousa, Ikyara Farias.
O teorema de Cayley-Hamilton e aplicações [manuscrito] / Ikyara Farias Sousa. - 2014.
31 p. : il.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2014.
"Orientação: Prof. Dr. Aldo Trajano Louredo, Departamento de Matemática".

1. Álgebra linear. 2. Teorema de Cayley-Hamilton. 3. Polinômio característico. I. Título.

21. ed. CDD 512.5

Ikyara Farias Sousa

O Teorema de Cayley-Hamilton e Aplicações

Trabalho Acadêmico Orientado apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática do Departamento de Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba em cumprimento às exigências legais para obtenção do título de licenciado em Matemática.

Aprovado em: / /

COMISSÃO EXAMINADORA

Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo
Centro de Ciências e Tecnologia - Campus I/UEPB
Orientador

Prof. Dra. Maria Isabelle Silva
Centro Centro de Ciências e Tecnologia - Campus I/UEPB
Examinadora

Prof. Me. Luiz Lima de Oliveira Junior
Centro de Ciências Humanas e Exatas - Campus VI/UEPB
Examinador

Dedico este trabalho a toda minha família e em especial ao meu filho Guilherme. Que em momento algum deixaram de me apoiar ou de me incentivar para que eu chegasse até aqui.

Agradecimentos

Neste momento tão especial para mim, não poderia deixar de agradecer aos meus familiares que colaboraram de forma direta e indiretamente, especialmente aos meus pais, meus sinceros agradecimentos e a todos que contribuíram para a realização deste trabalho;

Ao meu DEUS por ter me dado saúde, coragem e sabedoria;

Ao meu orientador, Aldo Trajano por ter me dado a oportunidade de estudar um tema tão importante e de várias aplicações em diversas áreas das ciências exatas e pela força dada durante o curso;

A todos os meus ex-professores por ter, cada um, dado a sua contribuição para minha formação;

A minha turma por toda amizade.

"Acredito que a Matemática tem a vantagem de ensinar às pessoas o costume de pensar sem paixão. Isto me parece o grande mérito da Matemática, uma vez que se aprende a usar a mente, primordialmente, em um material onde não entra a paixão, e tendo-se adquirido este hábito, podemos passar a empregá-la desapaixonadamente nos assuntos que encaramos apaixonadamente"

(Bertrand Russell)

Resumo

Neste trabalho abordamos o Teorema de Cayley-Hamilton, que é um importante resultado para a Álgebra Linear. São muitas as aplicações desse Teorema. Entretanto, por se tratar de um trabalho de conclusão de curso, o texto foi basicamente elaborado para servir de suporte à alunos da graduação. Por isso, focalizamos os resultados básicos os quais, em geral, são vistos em um Curso de Licenciatura em Matemática. Assim, após uma breve introdução, apresentaremos inicialmente a definição de autovalores e autovetores e, em seguida, consideremos a definição de polinômio característico. Destacamos os resultados necessários relacionados a essa definição com o objetivo de apresentar e demostrar o Teorema de Cayley-Hamilton, para matriz e para operadores lineares.

Palavras chave: Autovalores e autovetores, polinômio característico, teorema de Cayley-Hamilton

Abstract

In this work we discuss the Cayley-Hamilton theorem, which is an important result for Linear algebra. There are many applications of this theorem. However, because it is a work of conclusion of course, the text was basically designed to serve as a support to graduate students. Therefore, we focus on the basic results which, in General, are seen in a course degree in mathematics. So, after a brief introduction, we initially the definition of eigenvalues and eigenvectors, and then consider the definition of characteristic polynomial. We highlight the required results related to this setting with the goal to present and demonstrate the Cayley-Hamilton theorem for matrix and linear operators.

Key words: *Eigenvalues and eigenvectors, characteristic polynomial, Cayley-Hamilton theorem.*

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

Neste trabalho de Conclusão de Curso, faremos uma revisão bibliográfica, a qual tem por objetivo tornar o trabalho auto suficiente. O objetivo principal deste trabalho é apresentar, demonstrar e aplicar o importante teorema de Cayley-Hamilton. Tal teorema será apresentado e demonstrado em sua formulação matricial e para operadores lineares. O teorema de Cayle-Hamilton pode ser aplicado em diversos áreas do conhecimento, mas devido ao carácter introdutório deste trabalho, faremos aplicações na própria matemática, no cálculo da inversa de matrizes e no cálculo da potência de matrizes. A título de informação faremos uma breve introdução a teoria do controle para fenômenos modelos por equações diferencias parciais lineares e enunciaremos o importante teorema de Kalman, o qual na para ser demonstrado necessita-se do teorema de Cayley-Hamilton, como feito em [9].

Capítulo 1

Parte histórica

Figura 1.1: Matemático William Rowan Hamilton

William Rowan Hamilton (1805 - 1865) Astrônomo e matemático algebrista irlandês nascido em Dublin, criador da teoria dos quaterniões, fundamental nos cálculos algébricos modernos, e o estudo da refração cônica. Órfão de um advogado e criado por um tio que era lingüista, mostrou-se extremamente precoce, pois aos cinco anos já lia grego, latim e hebraico, aos onze era proficiente em aramaico e aos catorze escrevia persa. Aos 15 tornou-se interessado em matemática e astronomia após ler trabalhos de Newton. Aos 18 entrou para o Trinity College de Dublin, graduando-se com muitas honras e, aos viste e dois anos, tornou-se professor de astronomia e astrônomo real da Irlanda e nomeado diretor do Observatório de Dunsink (1827) e lá trabalhou pelo resto da vida. Apresentou à Academia Irlandesa um artigo, Theory of Systems of Rays (1827), em que expôs descobertas brilhantes sobre óptica, em particular o fenômeno de refração ou absorção parcial da luz pela matéria, afirmando que o tempo e o espaço estavam indissoluvelmente ligados. Introduziu a álgebra formal de pares de números complexos (1833), desenvolvendo importantes análises sobre a natureza dos números complexos, que resultam da obtenção da raiz quadrada de -1. Transformou definitivamente ótica em uma nova ciência matemática quando publicou On a General Metod in Dynamics (1835), um artigo em que conseguia unificar as equações e conceitos da óptica e da dinâmica, ciência que estuda as causas do movimento dos corpos. Formulou as equações dinâmicas da mecânica, as equações de Hamilton, e estabeleceu o princípio da menor ação (1843). Publicou Lectures on quaternions (1853), descrevendo sua impressionante descoberta na área da álgebra, a famosa multiplicação quaternioniana, base do cálculo vetorial, de extrema importância na física teórica posterior. The Elements of Quaternions (1866), uma complementação de sua descoberta, só foi publicada um ano após sua morte em Dublin, por um dos seus filhos. Também descobriu o fenômeno da refração cônica, lembrado como sua mais brilhante descoberta. Foi o primeiro sócio estrangeiro da National Academy of Sciences norte-americana.

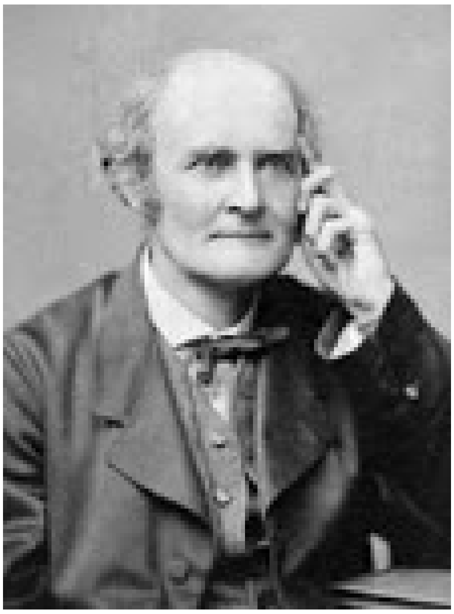

Figura 1.2: Matemático Arthur Cayley

Hamilton era brilhante em matemática e em línguas desde pequeno. Leu Euclides, Clairaut, Laplace e Newton. Estudou matemática e literatura no Trinity College, em Dublin. Ainda era aluno de graduação quando foi escolhido professor de astronomia em Trinity. Foi o responsável pela criação de um novo sistema de álgebra para números complexos, além de contribuir com diversos resultados básicos para a análise vetorial. Devemos a palavra vetor a ele, que também estudou a refração e a reflexão da luz e óptica. Hamilton buscou ampliar seu trabalho com números complexos e acabou desenvolvendo uma estrutura matemática de quatro dimensões denominada quatérnion, estrutura que acreditava que se tornaria tão importante quanto o cálculo, mas isso não aconteceu. Entretanto, seu trabalho realmente contribuiu para o desenvolvimento da álgebra matricial, da análise vetorial e até para a teoria dos grafos. Seus colegas o consideravam um homem genial, de inteligência excepcional e com amplos interesses.

Arthur Cayley (1821 - 1895) Advogado, professor e um dos nomes mais relevantes da matemática inglesa no século XIX nascido em Richmond, Surrey, cujas teorias matemáticas proporcionaram a formulação das teoria da relatividade de Einstein e da mecânica quântica de Max Planck. Estudou no King's College de Londres e no Trinity College de Cambridge, onde se destacou como um brilhante estudante e no qual foi professor por três anos. Desde cedo começou a publicar trabalhos no recém-fundado Cambridge Mathematical Journal e ganhou a maioria dos prêmios de sua época. Apesar de seu interesse pela matemática, decidiu estudar direito. Sem abandonar suas pesquisas e a publicação de ensaios científicos, exerceu a advocacia durante 14 anos (1849-1863). Foi nomeado catedrático de matemática pura em Cambridge (1863) e encerrou a carreira de jurista, dedicando-se exclusivamente a matemática iniciando pelo algebrismo, sendo considerado um dos fundadores da álgebra moderna, pois formulou de modo rigoroso, a definição de grupo e desenvolveu trabalhos importantes sobre a teoria dos invariantes, juntamente com seu amigo J. J. Sylveste, e logo depois na geometria dos hiperespaços. Trabalhou nos Estados Unidos e publicou numerosos trabalhos sobre, principalmente, geometria e álgebra. Também contribuiu para a análise quando publicou seu único livro, Treatise on elliptic functions (1876). Escreveu cerca de mil trabalhos breves, contendo seus artigos publicados nas várias revistas especializadas da Europa e dos Estados Unidos, reunidos nos 13 volumes de The Collected Mathematical Papers of Arthur Cayley (1889-1897). Foram destaques no conjunto da obra o desenvolvimento da teoria da invariância algébrica e a idéia da unidade das geometrias euclidiana e não-euclidiana. Sua geometria, aplicável a espaços com qualquer número de dimensões, foi fundamental para o estabelecimento da relação espaço-tempo na teoria da relatividade. Deve-se a matemático a formulação das regras do cálculo matricial, usado posteriormente por Werner Heisenberg em seus trabalhos sobre mecânica quântica. Também realizou estudos nos campos da física astronômica e da dinâmica teórica e morreu em Cambridge, em 26 de janeiro (1895).

Capítulo 2

Fundamentação Teórica

2.1 Resultados preliminares

O objetivo desta seção é enunciar e demonstrar o importante Teorema de Cayley-Hamilton. Além de apresentar a definição de Autovalores e Autovetores, como mostrar o conceito de polinômio característico.

No que segue vamos considerar $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Definição 2.1. *Seja $T : V \to V$ um operador linear. Um autovalor de T é um elemento $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que existe um vetor não nulo $v \in V$ com $T(v) = \lambda v$. Se λ é autovalor de T, então todo vetor não nulo $v \in V$ tal que $T(v) = \lambda v$ é chamado de autovetor de T associado a λ.*

Exemplo 2.1. *Considere a transformação linear*

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & T(x,y) = (y,x). \end{array}$$

Temos que $v_1 = (1,1)$ e $v_2 = (1,-1)$ são autovetores associados aos autovalores $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$ temos:

$$T(v_1) = T(1,1) = (1,1) = 1(1,1) = 1v_1$$

e

$$T(v_2) = T(1,-1) = (-1,1) = -1(1,-1) = -1_{v_2}$$

Exemplo 2.2. *Consideremos a transformação linear*

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & T(x,y) = (4x+5y, 2x+y). \end{array}$$

Temos que $v_1 = (x, \frac{2x}{5})$, $x \in \mathbb{R}$ *e* $x \neq 0$ *são autovetores associados a autovalor* $\lambda_1 = 6$, *pois*

$$T(v_1) = T\left(x, \frac{2x}{5}\right) = 6\left(x, \frac{2x}{5}\right) = 6_v1$$

Assim, temos que $v_2 = (x, -x), x \in \mathbb{R}$ *e* $x \neq 0$ *são autovetores associados a autovalor* $\lambda_2 = -1$, *pois*

$$T(v_2) = T(x, -x) = (-x, x) = -1v_2.$$

2.2 Polinômio característico de uma matriz

Nesta seção apresentaremos o Teorema de Cayley-Hamilton para matrizes $N \in M_n(\mathbb{R})$ e operadores lineares $T : V \to V$, onde V é um espaço vetorial real de dimensão finita.

No que segue $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, porém os resultados apresentados valem para qualquer corpo $\mathbb{K}$.

Definição 2.2. *Seja* $N \in M_n(\mathbb{R})$. *O polinômio característico de* N *é o polinômio mônico de grau* n *definido por*

$$p_N(t) = det(tI - N).$$

[1]

Observação 1. *Seja* $N \in M_n(\mathbb{R})$. *Segue do Teorema Fundamental da Álgebra, que o polinômio característico de* N *será da forma*

$$p_N(t) = (t - \lambda_1)^{r_1} \ldots (t - \lambda_s)^{r_s}$$

com $\lambda_1, \ldots, \lambda_s \in \mathbb{C}$ *e* $r_i \geq 1$. *Portanto, existirão autovalores para* N.

Definição 2.3. *Uma* **matriz polinomial** *é uma matriz do tipo*

$$N(t) = [a_{ij}(t)] \text{ onde } a_{ij}(t) \in \mathbb{R}[t].$$

Isso significa que as entradas da matriz polinomial $N(t)$ *são polinômios e podem ser reescritas na forma*

$$N(t) = N_r t^r + \ldots + N_1 t + N_0,$$

onde N_i *são matrizes com entrada em* $\mathbb{R}$.

O **grau de uma matriz polinomial** *é o maior grau dentre todos os graus das entradas.*

[1]Um polinômio $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ é dito **mônico** quando $a_n = 1$.

Proposição 1. *Seja $N_0 \in M_n(\mathbb{R})$. Dado um polinômio $q(t) \in \mathbb{R}[t]$ existe uma matriz polinomial*

$$Q(t) = [q_{ij}(t)]$$

, com $[q_{ij}(t)] \in \mathbb{K}[t]$, satisfazendo a identidade matricial

$$q(t)I - q_{N_0} = (tI - N_0)Q(t).$$

Prova: *Se $q(t) = a_r{}^t r + ... + a_1 t + a_0$, então vale as igualdades*

$$q(t) = a_r t^r I + \ldots + a_1 tI + a_0 I,$$

$$q(N_0) = a_r N_0 r + ... + a_1 N_0 + a_0 I,$$

Por subtração obtemos,

$$q(t)I - q(N_0) = a_r(t^r I - N_0^r) + \ldots + a_1(tI - N_0). \tag{2.1}$$

Desde que as matrizes I e (N_0)comutam a matriz polinomial $(tI - N_0)$ fatora cada $t\mathrm{I} - (N_0)$, com $1 \leq i \leq r$, do seguinte modo,

$$\begin{aligned} q(t)I - q(N_0) &= a_r\{(tI - N_0)(t^{r-1}I + t^{r-2}N_0 + \cdots + tN_0^{r-2} + N_0^{r-1})\} + \ldots + a_1(tI - N_0) = \\ &= (tI - N_0)\underbrace{\{a_r(t^{r-1}I + t^{r-2}N_0 + \cdots + tN^{r-2} + N_0^{r-1}) + a_1 I\}}_{Q(t)} = (tI - N_0)Q(t). \end{aligned}$$

Portanto, existe uma matriz $Q(t)$ com entradas polinômiais, tais que

$$q(t)I - q(N_0) = (tI - N_0)Q(t). \tag{2.2}$$

∎

A seguir daremos uma prova do Teorema de Cayley-Hamilton para matrizes $N \in M_n(\mathbb{R})$.

2.3 Teorema de Cayley-Hamilton para matriz

Teorema 2.1 (Cayley-Hamilton)**.** *Seja $N_0 \in M_n(\mathbb{R})$. Então, N_0 é zero de seu polinômio característico, isto é, $pN_0(N_0) = [0]$.*

Prova: Seja $p_{N_0}(t)$ o polinômio característico de N_0. Pela Proposição 1 existe uma matriz polinomial

$$Q(t) = [q_{ij}(t)]$$

tal que

$$P_{N_0}(t)I = (tI - N_0)adj(tI - N_0).$$

Por outro lado, considerando a adjunta clássica de $(tI - N_0)$ temos a igualdade

$$p_{N_0}(t)I = (tI - N_0)adj(tI - N_0).$$

Dessas duas equações concluímos, que

$$p_{N_0}(N_0) = (tI - N_0)(adj(tI - N_0) - Q(t)).$$

Utilizaremos o fato que a matriz $p_{N_0}(N_0)$ é uma matriz numérica para provar que

$$adj(tI - N_0) - Q(t)$$

é uma matriz não nula, digamos

$$adj(tI - N_0) - Q(t) = P_r t^r + \ldots + P_1 t + P_0,$$

onde $P_i \in M_n(\mathbb{R}$, $r \geq 0$ e P_r não é identicamente nula. Sendo assim,

$$(tI - N_0)[adj(tI - N_0) - Q(t)] = P_r t^{r+1} + \sum(\text{termo com grau } \leq r),$$

implicando que $p_{N_0}(N_0)$ é uma matriz polinomial com grau ≥ 1, o que é uma contradição. Portanto, $p_{N_0}(N_0) = [0]$.

■

Exemplo 2.3. *Seja*

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Então,

$$p_N(\lambda) = det(\lambda I - N) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ 0 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 4).$$

2.4 Polinômio característico de um operador

Para definir o conceito de polinômio característico de um operador, necessitamos do conceito de matrizes semelhantes.

Definição 2.4. *Sejam $P, Q \in M_n(\mathbb{R})$. Dizemos que as matrizes P e Q são* **semelhantes** *se existir uma matriz invertível R tal que*

$$P = RQR^{-1}.$$

Proposição 2. *Matrizes semelhantes têm o mesmo polinômio característico.*

Prova: Sejam N e Q matrizes semelhantes. Então, existe uma matriz invertível $N \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $Q = RNR^{-1}$. Logo,

$$p_Q(t) = det(tI - Q) = det(tI - RNR^{-1}) = det(R(tI - N)R^{-1}) =$$
$$= detR.det(tI - N).detR^{-1} = det(tI - N) = P_N(t).$$

Portanto,

$$P_Q(t) = P_N(t)$$

■

No que segue, recordaremos do seguinte resultado como uma observação.

Observação 2. *Sejam $T : V \to V$ um operador linear no espaço vetorial V de dimensão finita e β e γ duas bases ordenadas de V. Então, as representações matriciais $[T]\beta$ e $[T]\gamma$ são semelhantes.*

$$[T]_\gamma = [Id_V]^\beta_\gamma [T]_\beta [Id_V]^\gamma_\beta$$

Observação 3. *A proposição acima nos permite estender o conceito de polinômio característico para um operador linear $T : V \to V$, onde V é um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$.*

De fato, sejam γ e β bases quaisquer de V. Então, pela Observação 2, obtemos

$$p_{[T]\gamma}(t) = p_{[T]_\beta}(t).$$

Definição 2.5. *Definimos o polinômio característico de um operador linear $T : V \to V$, como sendo*

$$p_T(t) = p_{[T]_\beta}(t),$$

onde $[T]_\beta$ é a representação matricial de T numa base β de V.

Observação 4. *Como uma outra representação T difere desse por uma matriz semelhante, o polinômio característico está bem definido.*

2.5 Caracterização dos autovalores

No que segue caracterizaremos os autovalores de um operador linear. Antes, enuciaremos o seguinte lema.

Lema 2.1. *Sejam $T : V \to W$ uma transformação linear entre os espaços vetoriais de dimensão finita e β e γ bases ordenadas de V e W, respectivamente. Então, T é um isomorfismo se, e somente se, a representação $[T]_{\gamma}^{\beta}$ é uma matriz invertível.*

Proposição 3. *As seguintes afirmações são equivalentes:*
(i) $\lambda \in K$ é um autovalor de T;
(ii) $\lambda Id - T : V \to V$ é um operador linear não invertível;
(iii) $\lambda \in K$ é uma raíz do polinômio característico $p_T(t)$.

Prova: $(i)(\Rightarrow)(ii)$ Se λ é um autovalor de T, por definição existe um vetor não nulo tal que $T(v) = \lambda v$. Logo, $v \in Ker(\lambda Id - T)$, significando que esse operador é não invertível, pois $\lambda Id - T$ não é injetivo.

$(i)(\Rightarrow)(iii)$ Se $\lambda Id - T$ não é invertível, pelo Teorema do Núcleo da Imagem concluímos que $Ker(\lambda Id - T)$ é não trivial. Logo, existe um vetor v com $0 \neq v \in Ker(\lambda Id - T)$. Dai, $(\lambda Id - T)(v) = 0$, o que implica $T(v) = \lambda v$. Portanto, λ é autovalor e v é autovetor associado.

$(iii)(\Rightarrow)(i)$ Usaremos um fato já demonstrado que um operador linear é invertível se, e somente se, o determinante da sua matriz é invertível.

■

Observação 5. *O operador $\lambda Id - T : V \to V$ não é invertível se, e somente se,*

$$0 = det(\lambda Id - T)_{\alpha} = det(\lambda I - [T]_{\alpha}) = p_{T_{\alpha}}(t) = p_T(\lambda).$$

Definição 2.6. *Seja $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ um polinômio.*
(i) Se $T : V \to V$ é uma transformação linear, define-se

$$f(T) = a_n T^n + a_{n-1}T^{n-1} + a_1 T + a_0 I$$

onde T_n denota a n-ésima composição de T com ela própria, (i.e.,$T^2(v) = T(T(v))$, $T^3(v) = T(T(T(v)))$, para todo $v \in V$, etc.) e I denota a transformação identidade, (i.e, $I(v) = v$ para todo $v \in V$).
(ii) Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ define-se

$$f(A) = a_n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + a_1 T + a_0 I,$$

onde A^n denota a n-potência da matriz A e I denota a matriz identidade.

Observação 6. *Seja V um espaço vetorial de dimensão $n \geq 1$ sobre $\mathbb{C}$ e seja $T \in L(V, V)$. Como $\mathbb{C}$ é um corpo algebricamente fechado, pelo Teorema Fundamental da Álgebra, o polinômmio característico de T será da forma*

$$p_T(t) = (t - \lambda_1)^{r_1} \ldots (t - \lambda_k)^{r_k}$$

com $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ e $r_i \geq 1$. Portanto, existirão autovalores para T.

No que segue enunciaremos e provaremos o Toerema de Cayley-Hamilton, para operadores lineares.

2.6 Teorema de Cayley-Hamilton para operadores

Teorema 2.2 (Cayley-Hamilton). *Um operador linear $T \in L(V, V)$ é um zero de seu polinômio característico $p_T(t)$, isto é, $p_T(T) = 0$.*

Prova: Seja β uma base de V e escreva $A = [T]_\beta$. Considere também $B = tI_n - A$ e portanto $p_T(t) = detB$. Por fim, seja $C = adj(B) = (c_{ij})$ a matriz adjunta a A. Recorde que os elementos c_{ij} são os cofatores da matriz $tI_n - A$, portanto, representam polinômios em t de grau máximo $n - 1$. Escreva para cada par i, j, tal polinômio como

$$c_{ij} = c_{ij}^{(0)} + c_{ij}^{(1)} t + \ldots + c_{ij}^{(n-1)} t^{n-1}$$

Se denotamos, para $k = 0, 1, \ldots, n - 1$,

$$C^{(k)} = \begin{pmatrix} c_{11}^{(k)} & c_{12}^{(k)} & \ldots & c_{1n}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1}^{(k)} & c_{n2}^{(k)} & \ldots & c_{nn}^{(k)} \end{pmatrix}$$

teremos que

$$C = C^{(0)} + C^{(1)} t + \ldots + C^{(n-1)} t^{(n-1)}.$$

Agora, escrevendo

$$p_T(t) = a_o + a_1 t + \ldots + t^n$$

e usando o fato que

$$C \cdot B = adj(B) \cdot B = (detB) I_n = p_T(t) I_n,$$

segue que

$$(C^{(0)} + C^{(1)}t + \ldots + C^{(n-1)}t^{(n-1)})(tI_n - A) = (a_0 + a_1 t + \ldots + t^n)I_n$$

Logo, comparando-se os coeficientes destes polinômios, temos que

$$\begin{cases} a_0 I_n & = & -C^{(0)}A \\ a_1 I_n & = & C^{(0)} - C^{(1)}A \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1}I_n & = & C^{(n-2)} - C^{(n-1)}A \\ I_n & = & C^{(n-1)} \end{cases}$$

Multiplicando-se estas equações por $I_n, A, A^2, \ldots, A^n$, respectivamente, e somando-as obtemos

$$p_T(T) = a_0 I_n + a_1 A + \ldots + A^n = 0,$$

o que prova o teorema. ∎

A seguir daremos outras demonstrações para o Teorema de Cayley-Hamilton para operadores lineares $T : V \to V$.

Prova: Veremos outra demonstração do Teorema de Cayley-Hamilton.

Seja $T : V \to V$ um operador linear. A demonstração será por indução sobre $n = dimV$. Se $n = 1$, o resultado é óbvio. Suponha o resultado válido para qualquer operador linear definido sobre qualquer espaço vetorial de dimensão $n - 1$. Seja $T : V \to V$ um operador linear definido sobre um espaço vetorial de dimensão n. Seja $T : V \to V$ um operador linear e $B = \{x_1, \ldots, x_n\}$ uma base para V. Seja $A = [T]_\beta$, ou seja,

$$\mathrm{T}x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i \ \text{ para } j = 1, \ldots, n.$$

Estas equações podem ser reescritas na forma equivalente

$$\sum_{i=1}^{n} (\delta_{ij}\mathrm{T} - a_{ij}\mathrm{I})x_i = 0 \ \text{ para } 1, \ldots, n.$$

Considere matrizes sobre a álgebra comutativa com identidade A dos polinômios em T. Em outras palavras, matrizes sobre A possuem polinômios em T em suas entradas. Considere em particular a matriz **B** definida por

$$b_{ij} = \delta_{ij}\mathrm{T} - a_{ji}\mathrm{I}.$$

Afirmamos que

$$det\mathbf{B} = p_T(\mathrm{T}),$$

onde p_T é o polinômio característico de T. Por exemplo, quando $n = 2$, temos

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathrm{T} - a_{11}\mathrm{I} & -a_{21}\mathrm{I} \\ -a_{12}\mathrm{I} & \mathrm{T} - a_{22}\mathrm{I} \end{pmatrix}$$

e

$$det\mathbf{B} = (\mathrm{T} - a_{11}\mathrm{I})(\mathrm{T} - a_{22}\mathrm{I}) - a_{12}a_{21}\mathrm{I} = \mathrm{T}^2 - (a_{11} + a_{22})\mathrm{T} + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\mathrm{I} = p_T(\mathrm{T})$$

onde $p_T(x) = x^2 - (a_{11} + a_{22})x + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$ é o polinômio característico de T. No caso geral isso também é claro, porque o polinômio característico de T é o determinante da matriz $x\mathrm{I} - \mathrm{A}$, cujas entradas são polinômios da forma

$$(x\mathrm{I} - \mathrm{A})_{ij} = \delta_{ij}x - a_{ij}\mathrm{I},$$

e o determinante não se altera se considerarmos a transposta desta matriz.

Logo, para mostrar que $p_T(\mathrm{T}) = 0$, basta mostrar que

$$(det\mathbf{B})x_k = 0 \ \text{ para } k = 1, \ldots, n.$$

Por definição de $\mathbf{B}$, os vetores $x_1, \ldots, x_n$ satisfazem as equações

$$\sum_{i=1}^{n} b_{ji}x_i = 0 \ \text{ para } j = 1, \ldots, n.$$

Seja $\widetilde{B} = adj\mathbf{B}$ a adjunta clássica de $\mathbf{B}$, isto é, $\widetilde{B}\mathbf{B} = (det\mathbf{B})\mathrm{I}$. Da equação acima, para cada par k, j temos

$$\sum_{i=1}^{n} \widetilde{b}_{kj}b_{ji}x_i = \widetilde{b}_{kj}\sum_{i=1}^{n} b_{ji}x_i = 0.$$

Logo , somando em j, temos

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \widetilde{b}_{kj}b_{ji}x_i = 0.$$

Daí,

$$0 = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \widetilde{b}_{kj}b_{ji}x_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} \widetilde{b}_{kj}b_{ji}\right)x_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(\widetilde{B}\mathbf{B})_{ki}x_i = \sum_{i=1}^{n}\delta_{ki}(det\mathbf{B})x_i = (det\mathbf{B})x_k.$$

■

A seguir daremos uma prova do Teorema de Cayley para operadores lineares $T : V \to V$, usando Espaços Quocientes.

2.7 Teorema de Cayley-Hamilton usando espaços quocientes

2.7.1 Espaços quocientes

Antes de provarmos o Teorema de Cayley-Hamilton, faremos uma breve revisão.

Definição 1. *Seja U um subespaço de V. Se $v_1, v_2 \in V$, dizemos que v_1 é* **congruente** *a v_2 módulo U, a qual é denotada por*

$$v_1 \equiv v_2 \ mod \ U, \ \ se \ v_1 - v_2 \in U.$$

Denotamos a classe do vetor v por $[v]$, isto é,

$$[v] = \{u \in V : u - v \in U\}$$

Observação 7. *Também, denotamos a classe do vetor $v \in V$, por $v + U$ ou $\overline{v}$.*

Consideremos o conjunto de todas as classes de equivalência módulo U, o qual é denotado por $\frac{V}{U}$, isto é,

$$\frac{V}{U} = \{[v] : v \in V\}$$

Sejam $[v]$ e $[w]$ classes de equivalências módulo U e $\lambda \in \mathbb{R}$. Definimos as operações:
(i) $\lambda[v] = [\lambda v]$;
(ii) $[v] + [w] = [v + w]$.

Observação 8. (i) *Mostra-se que estas operações estão bem definidas, isto é, não dependem dos representantes de cada classe de equivalência.*
(ii) *Mostra-se que $\frac{V}{U}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ com as operações acima, onde o vetor nulo de $\frac{V}{U}$ é $[0] = U$.*
(iii) *$[v] = [0]$ se, e somente se, $v \in U$.*

Teorema 2.3. *Dado $T \in \mathcal{L}(V, V)$ então o polinômio característico de T anula T, isto e:*

$$P_T(T) = 0.$$

Prova: Vamos prová-lo apenas para o caso de um corpo algebricamente fechado $\mathbb{K}$ embora também seja verdadeiro sem esta restrição. Faremos a demonstração por indução sobre $dimV$.

Se $dimV = 1$ então $T(v) = av$ é uma multiplicação por um escalar a, nesse caso $p_T(x) = x - a$ e claramente $p_T(a) = 0$. Suponha $dimV = n \geq 2$ e suponhamos que o teorema está demonstrado para espaços com dimensão $n-1$. Selecionamos um autovalor a do operador T e $W \subset V$ um subespaço unidimensional invariante associado a a, isto é, o subespaço gerado pelo autovetor e_1 associado a a. Estendemos para a base

$$\beta = \{e_1, e_2 \ldots, e_n\} \text{ de } V.$$

A matriz da transformação nesta base tem a forma

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} a & * & \ldots & * \\ 0 & & A & \end{pmatrix}$$

Portanto $p_T(x) = (a - x)det(A - xI)$. O operador T determina o operador:

$$\begin{array}{rccc} \overline{T}: & V/W & \to & V/W \\ & v + W & \mapsto & \overline{T}(v + W) = T(v) + W \end{array}$$

Os vetores $\overline{e}_i = e_i + W \in V/W$, com $i > 2$ formam uma base para V/W, e a matriz de T nesta base é igual a A. Portanto,

$$p_{\overline{T}}(x) = det(A - xI)$$

é o polinômio característico da $\overline{T}$ e, de acordo com a hipótese indutiva $p_{\overline{T}}(\overline{T}) = 0$. Assim, $p_{\overline{T}}(T)v \in W$ para qualquer vetor de $v \in V$. Portanto,

$$p_T(T)(v) = (aI - T)p_{\overline{T}}(T)v = 0,$$

pois $aI - T$ anula todos os vetores em W e $p_{\overline{T}}(T)v \in W$. Portanto, o teorema esta provado. $\blacksquare$

Capítulo 3

Aplicações

Neste capítulo faremos algumas aplicações do Teorema de Cayley-Hamilton em potências e inversas de matrizes.

3.1 Potência e inversa de matrizes

No que segue, usaremos o Teorema de Cayley-Hamilton, para calcular potência e a inversa de uma matriz dois por dois.

3.1.1 Potência da matriz A

Seja

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

No que segue, vamos denotar

$$trA = a_{11} + a_{22} = a \text{ e } detA = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = b.$$

Então, calculando o polinômio característico da matriz A, obtemos:

$$p_A(t) = t^2 - tr(A)t + detA = t^2 - at + b$$

Logo, pelo Teorema de Cayley-Hamilton, obtemos

$$p_A(A) = 0 \Rightarrow A^2 + aA - bI = 0 \Rightarrow A^2 = -aA - bI$$

Portanto,

$$A^2 = aA - bI$$

Para o cálculo de A^3, temos

$$\begin{aligned} &A^2 = aA - bI \Rightarrow A^3 = AA^2 = A(aA - bI) \Rightarrow \\ &\Rightarrow aA^2 - bA = a(aA - bI) - bA = (a^2 - b)A - abI. \end{aligned}$$

Portanto,

$$A^3 = (a^2 - b)A - abI$$

3.1.2 Cálculo da inversa da matriz A

Vamos agora calcular a inversa da matriz A. Suponhamos que $b \neq 0$. Temos

$$\begin{aligned} &p_A(A) = 0 \Rightarrow A^2 - aA + bI = 0 \Rightarrow A(A - aI) = -bI \Rightarrow \\ &\Rightarrow A(\frac{-1}{b}A + \frac{a}{b}I) = I \Rightarrow A^{-1} = -\frac{-1}{b}A + \frac{a}{b}I \end{aligned}$$

Portanto,

$$A^{-1} = \frac{1}{b}A + \frac{a}{b}I.$$

3.1.3 Generalização do cálculo da inversa da matriz A

No que segue vamos generalizar esta situação:

Suponhamos que a matriz A é invertível. Pelo Teorema de Cayley-Hamilton, obtemos

$$P_A(A) = 0 \Rightarrow A^n + c_{n-1}A^{n-1} + \cdots + c_1A + c_0I = 0.$$

Multipliquemos a igualdade por A^{-1}, resulta então

$$A^{n-1} + c_{n-1}A^{n-2} + \cdots + c_1I + c_0A^{-1} = 0. \tag{3.1}$$

Como $p_A(t) = det(tI - A)$ temos que $c_0 = p_A(0) = det(-A) = (-1)^n detA$. Note que $detA \neq 0$, pois A é invertível. Logo, $c_0 \neq 0$ e de (3.1) resulta que

$$A^{-1} = -\frac{1}{c_0}\left[A^{n-1} + c_{n-1}A^{n-2} + \cdots + c_1I\right]$$

3.1.4 Generalização do cálculo da potência de uma matriz A

Pelo Teorema de Cayley-Hamilton, obtemos

$$P_A(A) = 0 \Rightarrow A^n + c_{n-1}A^{n-1} + \cdots + c_1 A + c_0 I = 0.$$

Logo,

$$A^n = -[c_{n-1}A^{n-1} + \cdots + c_1 A + c_0 I], \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

3.2 Controlabilidade de Sistemas Lineares no $\mathbb{R}^n$

A seguir faremos uma breve introdução dos sistema de equações diferenciais ordinárias que são exatamente controlável.

Para estudar a controlabilidade de sistemas lineares no $\mathbb{R}^n$ iremos considerar o espaço de Hilbert, $L^2(0, T; \mathbb{R}^n)$ e ilustraremos com exemplos.

Definição 2. *Dados* $n, m \in \mathbb{N}$ *e* $T > 0$ *define-se*

$$L^2(0, T; \mathbb{R}^n) = \left\{ u : [0, T] \to \mathbb{R}^n; \int_0^T \|u(t)\|^2 \, dt < \infty \right\}$$

e

$$H^1(0, T; \mathbb{R}^n) = \left\{ u; u, u' \in L^2(0, T; \mathbb{R}^n) \right\}$$

Exemplo 3.1. *Considere* $u : [0, T] \to \mathbb{R}^2$ *definida por*

$$u(t) = (-sen(t), cos(t)), \ t \in [0, T].$$

Tem-se, $\|u(t)\|^2 = (-sen(t))^2 + (cost)^2 = 1$, o que implica

$$\int_0^T \|u(t)\|^2 dt = T < \infty.$$

Portanto, a função $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^2)$. Do mesmo modo, mostra-se que $u'(t) = (-cos(t), -sent)$ pertence ao espaço $L^2(0, T; \mathbb{R}^2)$ e portanto, $u \in H^1(0, T; \mathbb{R}^2)$.

Em nosso estudo iremos considerar o seguinte sistema linear no $\mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + Bu(t), \, t \in (0, T) \\ x(0) = x^0 \end{cases} \tag{3.2}$$

No sistema (3.2), A é uma matriz real $n \times n$, B é uma matriz real $n \times m$ e x^0 um vetor no $\mathbb{R}^n$. A função $x : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ representa o **estado** e $u : [0,T] \to \mathbb{R}^m$ o **controle**. Em geral $m \leq n$, e nosso interesse é controlar o sistema com o menor número m de controles. Dado um vetor inicial $x^0 \in \mathbb{R}^n$ e um vetor $u \in L^2(0,T;\mathbb{R}^m)$, o sistema (3.2) possui solução única $x \in H^1(0,T;\mathbb{R}^n)$ caracterizada pela fórmula de variação de parâmetros:

$$x(t) = e^{At}x^0 + \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds, \, \forall \, t \in (0,T), \tag{3.3}$$

onde

$$e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}.$$

Definição 3. *O sistema (3.2) é* **exatamente controlável no tempo** $T > 0$**,** *se dados quaisquer vetores inicial* x^0 *e* x^1 *em* $\mathbb{R}^n$*, existir um controle* $u \in L^2(0,T;\mathbb{R}^m)$ *tal que a solução de (3.2) satisfaz* $x(T) = x^1$*.*

Em outras palavras, na controlabilidade exata o objetivo é transferir o estado inicial x^0 para o estado final x^1 no tempo finito T, sob atuação do controle u.

O seguinte resultado clássico devido a Kalman, R.E, para a prova ver [9] dar uma resposta completa ao problema da controlabilidade exata para sistemas linear de dimensão finita. Ele mostra, em particular que o tempo de controle é irrelevante. Na demonstração do Teorema de Kalman, utiliza-se o Teorema de Cayley-Hamilton, e devido o carater introdutório deste trabalho omitiremos a demonstração deste teorema.

Teorema 3.1 (Kalman)**.** *O Sistema (3.2) é de controlabilidade exata em algum tempo* T *se, e somente se,*

$$posto[B, AB, \ldots, A^{n-1}B] = n. \tag{3.4}$$

Consequentemente, se o sistema (3.2) é controlável em algum tempo $T > 0$ *ele é controlável em qualquer tempo.*

Observação 9. *A partir de agora, dizemos que* (A, B) *é controlável - para indicar que o sistema (3.2) é controlável - se a condição (3.4) está assegurada. A matriz* $[B, AB, \ldots, A^{n-1}B]$ *é chamada* **matriz de controlabilidade***.*

Referências Bibliográficas

[1] Andrade, P. **Elementos de Álgebra Linear**, UFC, 2005.

[2] Coelho, F.U e Lourenço, M.L., **Um Curso de Álgebra Linear.** São Paulo, 2^a Edição, Edusp, 2007.

[3] Lima, E, L. , **Álgebra Linear.** Rio de Janeiro, 2^a Edição, IMPA, Coleção Matemática Universitária, 2004.

[4] Miranda, D., **Estrutura dos Operadores Lineares.** UFABC, 2012.

[5] Poole, D., **Álgebra Linear.**, Thomson, São Paulo, 2004.

[6] Steven, J. L, **Álgebra Linear com Aplicações**, Editora LTC, 8^a Edição, Rio de Janeiro, 2011.

[7] Boyer, C. B. **História da matemática**, 2^a edição, editora Edgard Blucher, São Paulo 1996.

[8] Eves, H. **Introdução à história da matemática**, editora da Unicamp, 2004.

[9] Fernández-Cara, E and Zuazua, E. **Control Theory: History, Mathematical Achievements and Perspectives**, Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. n^o0 (0000), 1-62

Sites consultados

- *http://cwx.prenhall.com/bookbind/pubbooks/thomas_br/chapter1/medialib/custom3/bios/hamilton.htm*
- *http://www.dec.ufcg.edu.br/biografias/ArthuCay.html*
- *http://www.dec.ufcg.edu.br/biografias/WilliRow.html*