UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA - UEPB

CAMPUS I – CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

JANAILSON SILVA MARINHO

FUNÇÕES DO 1° E DO 2° GRAU: INTERPRETAÇÃO GRÁFICA

Campina Grande – PB

2014.2

JANAILSON SILVA MARINHO

FUNÇÕES DO 1° E DO 2° GRAU: INTERPRETAÇÃO GRÁFICA

Monografia apresentada no Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito para a obtenção do título de Licenciatura em Matemática, sob a orientação da Profª. Ms. Kátia Suzana Medeiros Graciano.

Campina Grande – PB

2014.2

M338f Marinho, Janailson Silva.
Funções do 1° e do 2° grau [manuscrito] : interpretação gráfica / Janailson Silva Marinho. - 2014.
49 p. : il. color.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2014.
"Orientação: Profa. Ma. Kátia Suzana Medeiros Graciano, Departamento de Matemática".

1. Funções matemáticas. 2. Interpretação gráfica. 3. Ensino de matemática. I. Título.

21. ed. CDD 512

JANAILSON SILVA MARINHO

FUNÇÕES DO 1° E DO 2° GRAU: INTERPRETAÇÃO GRÁFICA

Monografia apresentada no Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito para a obtenção do título de Licenciatura em Matemática, sob a orientação da Profª. Ms. Kátia Suzana Medeiros Graciano.

Aprovada em 21 de outubro de 2014.

Kátia Suzana Medeiros Graciano

Profª Ms. Kátia Suzana Medeiros Graciano / UEPB
Orientadora

Castor da Paz Filho

Prof. Ms. Castor da Paz Filho / UEPB
Examinador

Luciana Roze de Freitas

Profª. Dra. Luciana Roze de Freitas / UEPB
Examinadora

Dedico a minha preciosa mãe que sempre me apoiou em minhas decisões e a todos que contribuíram para a realização deste trabalho.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente ao meu Deus, digno de toda honra, glória e louvor, a quem devo minha vida.

Aos meus pais, Eraldo e Maria José, que sempre acreditou na minha capacidade de poder chegar onde estou hoje, devo muito a eles.

A professora Kátia Suzana, orientadora deste trabalho, pela disposição e orientações que me ajudou na realização deste trabalho.

A todos os professores do curso, que contribuíram para minha formação.

Aos meus colegas do curso que, por tantas dificuldades que passamos juntos, sempre estiveram me apoiando.

A minha noiva Núbia, que sempre me apoiou, estando sempre ao meu lado, me incentivando na realização desse sonho.

“A melhor maneira que o homem dispõe para se aperfeiçoar, é aproximar-se de Deus”.

(Pitágoras)

RESUMO

Sabemos que não é fácil fazer interpretação gráfica de funções, pois o conteúdo requer uma certa maturidade do raciocínio lógico-matemático. Assim sendo, neste trabalho, temos como principal objetivo trazer um esclarecimento sobre os gráficos das funções do 1° e do 2° grau, com o intuito de fazer com que o alunado obtenha total segurança sobre tal conteúdo. De início, apresentaremos relatos sobre a história das funções, em que destacaremos alguns matemáticos, bem como algumas descobertas realizadas por eles. Posteriormente, faremos um aprofundamento no conceito de função, destacando seus principais elementos atrelados às suas demonstrações, uma vez que tais elementos serão essenciais para fazermos a interpretação gráfica. Destacaremos também, algumas funções específicas, faremos comparações entre elas e analisaremos a variação dos coeficientes e automaticamente a variação dos gráficos. Desse modo, veremos em detalhe cada caso especifico buscando assim alcançar o objetivo esperado.

Palavras-chave: Função do 1° Grau; Função do 2° Grau; Interpretação Gráfica.

ABSTRACT

We know it is not easy to interpret graphical functions because the content requires a certain maturity of logical and mathematical thinking. Therefore, in this work, our main is objective bringing a clarification on the graphs of functions of the 1st and 2nd grade, in order to make the pupils secure over such content. Initially, we present reports about the history of the functions, in which we will highlight some mathematicians as well as some discoveries made by them. Afterwards, we will deepen the concept of function, highlighting its main elements linked to their statements, since these elements are essential to do the graphical interpretation. Also we will highlight some specific functions, making comparisons between them and analyze the variation of the coefficients of variation and automatically graphs. Thus, we will see in detail each specific case thus seeking to achieve the expected goal.

Keywords: Function of the 1st Degree; Function of the 2nd Degree; Graphic Interpretation.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

O conceito de função é muito amplo e um dos mais importantes da Matemática, e se tratando dos conceitos básicos envolvidos nesse tema, sabemos que muitos alunos apresentam sérias dificuldades, principalmente em relação à compreensão e análise de gráficos. Muitas vezes, alunos chegam à universidade com dificuldade em interpretar gráficos de funções do 1° e 2° grau. Por exemplo, não entendem que o gráfico da função do 1° grau é uma reta, e que o gráfico da função do 2° grau é uma curva – a parábola. Portanto, nesse trabalho estarão inseridos os conceitos, definições e representações gráficas de funções do 1° e do 2° grau, com o objetivo de minimizar as grandes dificuldades encontradas em boa parte dos educandos.

O presente trabalho se organiza da seguinte forma: primeiramente, fazemos uma revisão de literatura, em que são abordados os aspetos históricos das funções e algumas contribuições de matemáticos, como René Descartes; logo após iniciamos o conceito de função, com uma breve revisão sobre produto cartesiano e relação, e posteriormente as definições de função, em especifico as funções do 1° e do 2° grau; por fim, as interpretações gráficas.

2. REVISÃO DE LITERATURA

2.1. ASPECTOS HISTÓRICOS DAS FUNÇÕES

Iezzi at al. (2004) afirma que o conceito de função não foi formulado de modo satisfatório antes do século XIX, mas aparece de forma implícita em várias situações na Matemática da Antiguidade. Desde o tempo dos gregos até a idade moderna a teoria dominante era a Geometria Euclidiana, que tinha como elementos base o ponto, a reta e o plano. Hoje em dia, parece ser simples esse conceito, mas, devemos analisar que para chegar até esse ponto houve grande colaboração de vários estudiosos, que com perspectivas diferentes convergiram para o mesmo conceito que é visto nos dias de hoje. Podemos destacar os babilônios que, falando de forma simplificada, relacionaram a definição de função como sendo uma tábua. É claro que uma tábua não é uma função por si só, mas essa ideia pode servir principalmente no plano educacional, para identificar uma função. Os babilônios foram excelentes em sua arte como produtores de tábuas matemáticas. No museu de Berlim, há uma plaqueta de argila com uma tábua com os valores de $n^3 + n^2$ para $n = 1, 2, 3, \dots, 20, 30, 40$ e 50, que associa a função f definida por $f(x) = x^3 + x^2$, cujo domínio é $\{1, 2, 3, \dots, 20, 30, 40, 50\}$. Essa tábua foi construída para permitir a resolução de equações do tipo $x^3 + x^2 = c$. Se, por exemplo, ao resolver a equação $x^3 + x^2 = 80$, o que se procura é o número n tal que $f(n) = 80$ esse número n pela função inversa de f seria a imagem de 80.

De acordo com Iezzi at al. (2004), o matemático alemão G.W Leibniz (1646-1716) na segunda metade do século XVII, usaria pela primeira vez a palavra função para indicar uma quantidade geométrica variável de um ponto a outro de uma curva. As palavras que hoje são corriqueiras na linguagem matemática - como variável, constante e parâmetro - deve-se também a Leibniz. Já a notação $f(x)$ que indica uma função só foi introduzida em 1734 pelo grande matemático suíço Leonhard Euler (1707–1783). Euler enfatizou menos a representação analítica e deixou antever como conceito de função toda variável que dependa de outra, ou seja, se a segunda variar, a primeira também varia.

Foram essenciais os estudos de Euler para o desenvolvimento do conceito de funções, trazendo grandes contribuições para as notações e a linguagem simbólica que utilizamos hoje. Para Boyer (1996), Euler foi o fundador da Análise, quando organizou e colocou uma base formal, isolada da Geometria. Euler foi o primeiro a tratar o cálculo como uma teoria formal de funções, mesmo não tendo sido o precursor no que se refere à noção de função.

Dirichlet (1805–1859) em 1837 sugeriu uma definição geral para função, considerada a definição "formal" de função moderna, onde função é um caso especial de uma relação. "*Se uma variável y está relacionada com uma variável x de modo que, sempre que um valor numérico é atribuído a x, existe um regra de acordo com a qual é determinado um único valor y, então se diz que y é função da variável independente x*". Isto está próximo do ponto de vista moderno de uma correspondência entre dois conjuntos de números, mas os conceitos de conjunto e de número real não tinham ainda sido estabelecidos (Boyer, 1996).

No século XVII, Descartes utilizou equações com x e y para introduzir uma relação de dependência entre quantidades variáveis, de modo a permitir o cálculo de valores de uma delas a partir dos valores da outra. Na mesma época, Newton usava o termo "fluente" para expressar sua noção de função, muito ligado com a noção de curva. No fim do século, Leibniz usa o termo "função" para referir segmentos de reta cujos comprimentos dependiam de retas e curvas. Logo depois o termo foi usado para referir quantidades dependentes entre si.

Em 1698, Jean Bernoulli (1667-1748), adota a terminologia de Leibniz para função de x. "*Uma função de um valor variável é uma expressão analítica, que é composta de valor variável e valores constantes".* Mais tarde, em 1718, Bernoulli faz a distinção entre função e o valor da função, mas não fala da unicidade, sendo esta a primeira definição de função. Ele considerou função como uma expressão formada de uma variável e algumas constantes. Bernoulli experimentou várias notações para uma função, das quais "fx" é a que mais se aproxima da atual (Boyer, 1996).

Os primeiros gráficos surgiram quando o francês Nicole Oresme (1325-1282) expôs seu método para representar geometricamente fenômenos de uma variável numa obra publicada em 1350. Sua ideia consistia em construir o que ele chamava de configuração, ou seja, uma figura geométrica formada de um eixo sobre a qual marcava os valores da variável, que ele chamava de longitudes, e uma sucessão de segmentos construídos verticalmente sobre o eixo, cujas medidas eram chamadas de latitudes, para marcar os valores correspondentes às longitudes. A figura era construída respeitando a proporcionalidade dos valores envolvidos. Como se nota, as coordenadas atuais, abscissas e ordenadas, tem como antecessores as latitudes e longitudes de Oresme (Iezzi, 2004).

Percebemos que ao longo do tempo vários estudiosos deram suas contribuições para o conceito de funções, sendo assim, queremos destacar um desses grandes nomes da época que por várias vezes foi chamado de pai da matemática moderna, o filósofo René Descartes.

2.2. HISTÓRIA E CONTRIBUIÇÕES DE RENÉ DESCARTES

René Descartes nasceu no dia 31 de março de 1596 em La Haye, antiga província de Touraine. Foi um filósofo, físico e matemático francês, considerado o criador do pensamento cartesiano, sistema filosófico que deu origem a Filosofia Moderna. Estudou no colégio Jesuíta Royal Henry – Le Grand - na época o colégio mais prestigiado da França, que tinha o objetivo de treinar as melhores mentes. Descartes estudou entre 1607 e 1615, formou-se em direito pela Universidade d Poitiers, dois anos depois ingressou no exército do príncipe Mauricio de Nassau, na Holanda, onde estabeleceu contato com as descobertas recentes da Matemática. Aos 22 anos, começou a formular sua "geometria analítica" e seu "método de raciocinar corretamente". Sua principal obra foi "O discurso sobre o método" (1637), na qual apresentou o seu método de raciocínio, "Penso, logo existo", base de toda a sua filosofia. Em 1649, foi trabalhar como instrutor da rainha Cristina na Suécia. Com uma saúde frágil, morre de pneumonia no dia 11 de fevereiro de 1650.

René Descartes (1596 – 1650)

René Descartes deve ser considerado um gênio da Matemática, pois relacionou a Álgebra com a Geometria, o resultado desse estudo foi a criação do

Plano Cartesiano. Essa fusão resultou na Geometria Analítica. Descartes obteve grande destaque nos ramos da Filosofia e da Física, sendo considerada peça fundamental na Revolução Científica. Ele defendia que a Matemática dispunha de conhecimentos técnicos para a evolução de qualquer área de conhecimento.

O Sistema de Coordenadas Cartesianas, mais conhecido como Plano Cartesiano consiste em dois eixos perpendiculares numerados, denominados abscissa e ordenada, que tem a característica de representar pontos no plano.

Descartes utilizou o Plano Cartesiano no intuito de representar planos, retas, curvas e círculos através de equações matemáticas. Os estudos iniciais da Geometria Analítica surgiram com as teorias de René Descartes, que representavam de forma numérica as propriedades geométricas. A criação da Geometria Analítica por Descartes foi fundamental para a criação do Cálculo Diferencial e Integral pelos cientistas Isaac Newton e Leibniz.

3. CONCEITO DE FUNÇÃO

Neste capitulo, abordaremos a definição de função de forma ampla, e mais adiante veremos duas definições mais específicas - as definições de funções do 1° e do 2° grau. Iniciaremos com uma revisão sobre produto cartesiano e relações, antes de irmos para a definição de função. Dessa forma, veremos com mais clareza a definição que para muitos se torna difícil.

3.1. PRODUTO CARTESIANO

Dados dois conjuntos, A e B, não vazios, chamamos de produto cartesiano de A por B ($A\,X\,B$, A cartesiano B) o conjunto de todos os pares ordenados (x, y) em que x pertence a A e y pertence a B:

$$A\,X\,B = \{(x, y) \mid x \in A \; e \; y \in B\}$$

Assim, para $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 5\}$, temos:

a) $A\,X\,B = \{(1, 2), (1, 5), (2, 2), (2, 5), (3, 2), (3, 5)\}$

b) $B\,X\,A = \{(2, 1), (2, 2), (2, 3), (5, 1), (5, 2), (5, 3)\}$

c) $B\,X\,B = \{(2, 2), (2, 5), (5, 2), (5, 5)\}$

d) $A\,X\,A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$

Se $A \neq B$, temos $A\,X\,B \neq B\,X\,A$. Se A tem m elementos e B, n elementos, $A\,X\,B$ tem $m\,.\,n$ elementos. Assim:

$$n(A\,X\,B) = n(A).n(B)$$

3.2. RELAÇÃO

Dados dois conjuntos, A e B, não vazios, definimos uma relação R de A em B como um subconjunto de $A\,X\,B$.

$$R \text{ é relação de } A \text{ em } B \Leftrightarrow R \subset A\,X\,B$$

Considere $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{1, 2\}$

$A\ X\ B = \{(-1,1), (-1,2), (0,1), (0,2), (1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$. Assim, duas relações de A em B poderiam ser:

- $R_1 = \{(-1,1), (0,1), (1,2)\}$
- $R_2 = \{(x, y) \in A\ X\ B \mid y = x\} = \{(1,1), (2,2)\}$

3.2.1. Notação

Podemos escrever uma relação de A em B das seguintes formas:

- nomeando seus pares ordenados;
  Exemplo:
  $$R_1 = \{(3,1), (5,2), (4,-1)\}$$
- através de uma sentença matemática;
  Exemplo:
  $$R_2 = \{(x, y) \in A\ X\ B \mid y = x + 1\}$$

3.2.2. Domínio e Imagem de uma relação

Seja R uma relação de A em B.

I. Chamamos de **domínio** de R o conjunto formado por todos os primeiros elementos dos pares ordenados (x, y) pertencentes a R e representamos por $D(R)$.

Assim, na relação $R = \{(-1,3), (0,4), (1,5), (2,6)\}$ o domínio é: $D(R) = \{-1, 0, 1, 2\}$.

II. Chamamos de **imagem** de R o conjunto formado por todos os segundos elementos dos pares ordenados (x, y) pertencentes a R e representamos por $Im(R)$.

Assim, no exemplo anterior, a imagem de R é: $Im(R) = \{3, 4, 5, 6\}$

3.2.3. Representação de uma relação

Podemos representar uma relação ou por um diagrama de setas ou no plano cartesiano. Vejamos um exemplo.

Dados os conjuntos $A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ e $B = \{0, 1, 4, 5\}$ e a relação $R = (x, y) \in A\ X\ B \mid y = x^2\}$.

Determinando R temos:

$\boldsymbol{x}$	-1	0	1	2	3
$\boldsymbol{y = x^2}$	$(-1)^2$	0^2	1^2	2^2	3^2
$\boldsymbol{y}$	1	0	1	4	9

Note que $9 \notin B$. Então,

$$R = \{(-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4)\}$$

Sua representação pode ser:

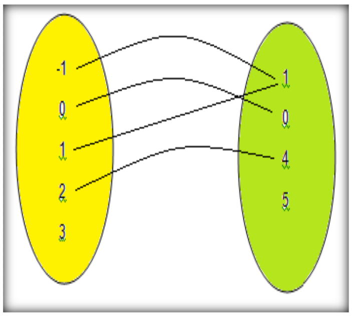


Figura 1 - Diagrama de Setas.

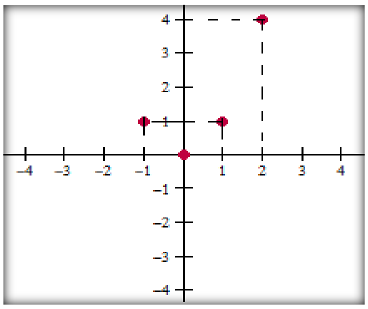


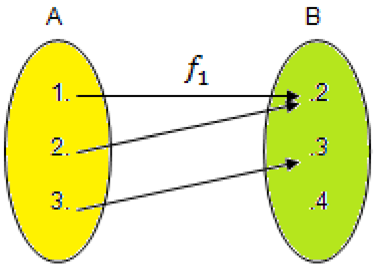
Figura 2 - Plano Cartesiano.

3.3. DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO

Dados dois conjuntos, A e B, não vazios, dizemos que a relação f de A em B é função se, e somente se, para qualquer x pertencente ao conjunto A existe, em correspondência, um único $(\exists!)$ y pertencente a B tal que o par ordenado (x, y) pertença a f:

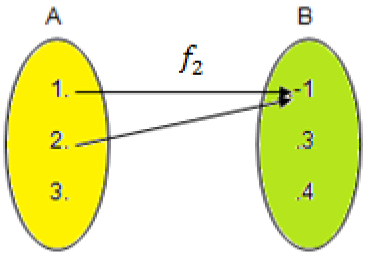
$$f \text{ é função de } A \text{ em } B \Leftrightarrow \forall\ x \in A, \exists!\ y \in B \mid (x, y) \in f$$

Exemplo:



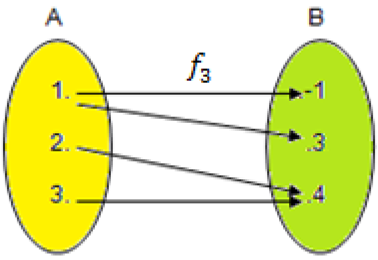
f_1 é função, pois todos os elementos de A tem um único correspondente em B.

Figura 3 - Exemplo de função.



f_2 não é função, pois o elemento 3 do conjunto A não tem correspondente em B.

Figura 4 - Contraexemplo de função.



f_3 não é função, pois o elementos 1 do conjunto A tem mais de um correspondente em B.

Figura 5 - Contraexemplo de função.

Desse modo, concluímos que toda função é uma relação, mas nem toda relação é uma função.

3.3.1. Notação

- $f: A \to B$ lê-se: f é função de A em B
- $y = f(x)$ lê-se: y é função de x, com $x \in A$ e $y \in B$

Podemos escrever uma função $f: A \to B$ através de suas variáveis $\boldsymbol{x}$ (independente) e $\boldsymbol{y}$ (dependente).

Exemplos:

- $y = 3x^2 + 4x$ ou $f(x) = 3x^2 + 4x$
- $y = 2x + 1$ ou $f(x) = 2x + 1$

3.3.2. Valor Numérico de uma função

Chamamos de **valor numérico de uma função** o valor que a variável $y = f(x)$ assume quando atribuímos a $\boldsymbol{x}$ um determinado valor.

Considere os conjuntos $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{-1, 1, 3, 5\}$ e a função $f: A \to B$ definida por $f(x) = 2x + 1$.

Vejamos os valores em que $y = f(x)$ assume:

- $x = -1 \Rightarrow f(-1) = 2(-1) + 1 = -1$
- $x = 0 \Rightarrow f(0) = 2(0) + 1 = 1$
- $x = 1 \Rightarrow f(1) = 2(1) + 1 = 3$
- $x = 2 \Rightarrow f(2) = 2(2) + 1 = 5$

Portanto, o valor numérico de $y = f(x)$ será -1 quando $x = -1$, 1 quando $x = 0$, 3 quando $x = 1$ e 5 quando $x = 2$.

3.3.3. Domínio, Imagem e Contradomínio de uma função

Seja a função $f: A \to B$.

I. Chamamos de **domínio** de f o conjunto formado pelos primeiros elementos dos pares ordenados (x, y) pertencentes a f e representamos por $D(f)$.

Assim, pela definição, $D(f) = A$.

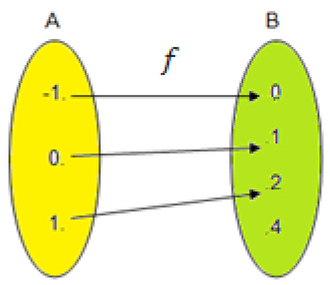
II. Chamamos de **imagem** de f o conjunto formado pelos segundos elementos dos pares ordenados (x, y) pertencentes a f e representamos por $Im(f)$.

III. Chamamos de **contradomínio** de f o conjunto B e representamos por $CD(f)$: $CD(f) = B$.

Pela definição temos que $Im(f) \subset CD(f)$ ou $Im(f) \subset B$.

Para melhor entendermos esses conceitos, vejamos um exemplo:

Dados os conjuntos $A = \{-1, 0, 1\}$ e $B = \{0, 1, 2, 4\}$ e a função $f: A \to B$ definida por $f(x) = x + 1$, temos:



$$f = (-1, 0), (0, 1), (1, 2)\}$$

$$D(f) = A = \{-1, 0, 1\}$$

$$Im(f) = \{0, 1, 2\}$$

$$CD(f) = \{0, 1, 2, 4\} = B$$

Figura 6 – função de A em B

A partir de agora iremos aprofundar mais o conceito de função. Especificando as funções do 1° e do 2° grau.

3.4. FUNÇÃO POLINOMIAL DO 1° GRAU

3.4.1. Definição

Uma função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ é uma função polinomial do 1° grau se a cada $x \in \mathbb{R}$ se associa o elemento $(ax + b) \in \mathbb{R}$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ definida por } f(x) = ax + b \text{ com } a, b \in \mathbb{R} \text{ e } a \neq 0.$$

Exemplos:

- $f(x) = 2x + 1$ onde $a = 2$ e $b = 1$
- $f(x) = -x + 3$ onde $a = -1$ e $b = 3$
- $f(x) = 2x$ onde $a = 2$ e $b = 0$

3.4.2 Gráfico da função do 1° grau

Há uma afirmação importante a respeito da função polinomial do 1° grau. Diz o seguinte:

"O gráfico cartesiano da função $f(x) = ax + b$ $(a \neq 0)$ é uma reta"

Demonstração:

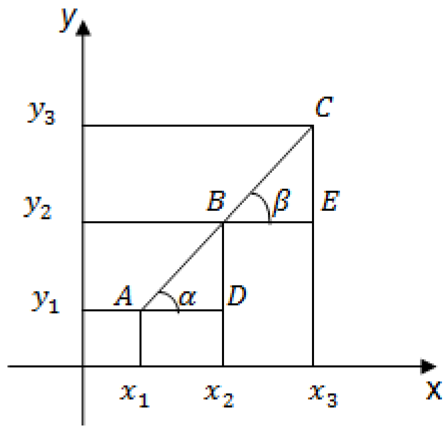


Figura 7 – Gráfico da função do 1° grau.

Sejam A, B e C três pontos quaisquer, distintos dois a dois, do gráfico cartesiano da função $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ e (x_1, y_1), (x_2, y_2) e (x_3, y_3), respectivamente, as coordenadas cartesianas desses pontos.

Para provarmos que os pontos A, B e C pertencem a mesma reta, devemos mostrar, que os triângulos retângulos ABD e BCE são semelhantes.

De fato:

$(x_1, y_1) \in f \Rightarrow y_1 = ax_1 + b$

$(x_2, y_2) \in f \Rightarrow y_2 = ax_2 + b$

$(x_3, y_3) \in f \Rightarrow y_3 = ax_3 + b$

Subtraindo membro a membro, temos:

$(y_3 - y_2) = (ax_3 + b) - (ax_2 + b) = a(x_3 - x_2) \Rightarrow a = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$

$(y_2 - y_1) = (ax_2 + b) - (ax_1 + b) = a(x_2 - x_1) \Rightarrow a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Desse modo, $\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a$.

Os triângulos ABD e BCE são retângulos e tem lados proporcionais, então são semelhantes e, portanto, $\alpha = \beta$. Donde segue que os pontos A, B, C estão alinhados.

3.4.3. Coeficiente da função do 1° grau

O coeficiente $\boldsymbol{a}$ da função $f(x) = ax + b$ é denominado coeficiente angular da reta, ele determina a inclinação da reta no plano cartesiano.

O coeficiente $\boldsymbol{b}$ da função $f(x) = ax + b$ é denominado coeficiente linear.

Exemplo:

Na função $y = 2x + 1$ o coeficiente angular é 2 e o coeficiente linear é 1. Observe que se $x = 0$ temos $y = 1$. Portanto, o coeficiente linear é a ordenada do ponto em que a reta intercepta o eixo Oy, e o coeficiente angular é responsável pela inclinação da reta.

3.4.4. Zero da função do 1° grau

Chamamos de zero ou raiz da função polinomial do 1° grau $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$, todo número real x cuja imagem é nula, ou seja, $f(x) = 0$.

$$x \text{ é zero de } f(x) \Leftrightarrow f(x) = 0.$$

Assim, para determinar o zero da função do 1° grau, basta resolver a equação

$$ax + b = 0$$

que apresenta uma única solução.

De fato, resolvendo $ax + b = 0$, $a \neq 0$, temos:

$$ax + b = 0 \Leftrightarrow ax = -b \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$$

Exemplo:

O zero da função $f(x) = 2x - 1$ é $x = \frac{1}{2}$ pois, fazendo $2x - 1 = 0$ temos $x = \frac{1}{2}$.

3.4.5. Função Crescente e Decrescente

3.4.5.1. Definição 1: função crescente

A função $f: A \to B$ definida por $y = f(x)$ é **crescente** no conjunto $A_1 \subset A$ se, para dois valores quaisquer x_1 e x_2 pertencentes a A_1, com $x_1 < x_2$, tivermos $f(x_1) < f(x_2)$.

$$f \text{ é crescente quando } (\forall\, x_1, x_2)\ (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))$$

também pode ser escrito assim:

$$(\forall\, x_1, x_2)\ (x_1 \neq x_2 \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0).$$

3.4.5.2. Definição 2: função decrescente

A função $f: A \to B$ definida por $y = f(x)$ é **decrescente** no conjunto $A_1 \subset A$ se, para dois valores quaisquer x_1 e x_2 pertencentes a A_1, com $x_1 < x_2$ tivermos $f(x_1) > f(x_2)$.

$$f \text{ é decrescente quando } (\forall\, x_1, x_2)\ (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2))$$

também pode ser escrito assim:

$$(\forall\, x_1, x_2)\ (x_1 \neq x_2 \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0).$$

3.4.5.3. Teorema: “A função polinomial do 1° grau é crescente (decrescente) se, e somente se, o coeficiente angular for positivo (negativo)”.

Demonstração:

$f(x) = ax + b$ é crescente $\Leftrightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0 \ (x_1 \neq x_2) \Leftrightarrow \frac{(ax_1 + b) - (ax_2 + b)}{x_1 - x_2} > 0 \ (x_1 \neq x_2)$

$$\Leftrightarrow \frac{a(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} > 0 \ (x_1 \neq x_2) \Leftrightarrow a > 0.$$

A demonstração de $f(x) = ax + b$ decrescente é análogo. Equivale a $a < 0$.

3.4.6. Sinal da função do 1° grau

Vamos agora estudar o sinal da função polinomial do 1° grau.

Considerando que $x = -\frac{b}{a}$, zero da função do 1° grau $f(x) = ax + b$, o valor de x para o qual $f(x) = 0$, vamos então, examinar para que valores de x ocorre $f(x) > 0$ ou $f(x) < 0$.

Para isso devemos considerar dois casos.

1° caso: $a > 0$ (função crescente)

$f(x) = ax + b > 0 \Leftrightarrow ax > -b \Leftrightarrow x > -\frac{b}{a}$

$f(x) = ax + b < 0 \Leftrightarrow ax < -b \Leftrightarrow x < -\frac{b}{a}$

Um processo para analisarmos a variação do sinal da função é construir o gráfico cartesiano. Assim, construindo o gráfico de $f(x) = ax + b$ com $a > 0$, temos:

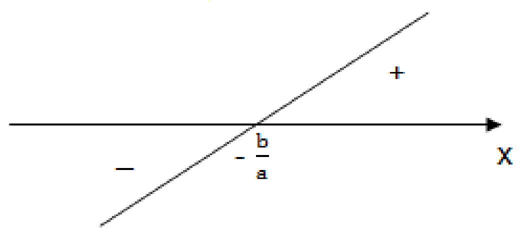


Figura 8 - Gráfico da função do 1° grau com $a > 0$.

Desse modo, $f(x)$ é positivo para valores de x maiores que o zero da função e negativo para valores de x menores que o zero da função.

2° caso: $a < 0$ (função decrescente)

$f(x) = ax + b > 0 \Leftrightarrow ax > -b \Leftrightarrow x < -\frac{b}{a}$

$f(x) = ax + b < 0 \Leftrightarrow ax < -b \Leftrightarrow x > -\frac{b}{a}$

Analisando a variação do sinal da função, temos:

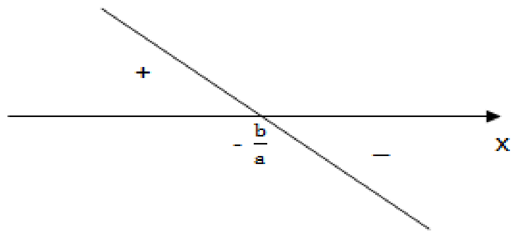


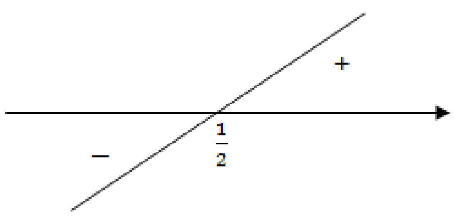
Figura 9 - Gráfico da função do 1° grau com $a < 0$.

Assim, $f(x)$ é positivo para valores de x menores que o zero da função e negativo para valores de x maiores que o zero da função.

Exemplos:

1°) Vamos estudar o sinal da função $f(x) = 2x - 1$.

Essa função polinomial do 1° grau apresenta $a = 2 > 0$ e zero da função $x = \frac{1}{2}$. Seu gráfico é crescente e corta o eixo das abscissas no ponto $\frac{1}{2}$.



Sinal

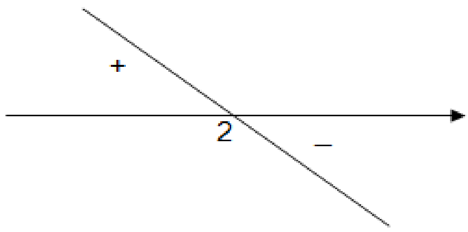
$f(x) > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{2}$

$f(x) < 0 \Rightarrow x < \frac{1}{2}$

Figura 10 – Gráfico da função $f(x) = 2x - 1$.

2°) Vamos estudar o sinal da função $f(x) = -2x + 4$.

Essa função do 1° grau apresenta $a = -2 < 0$ e zero da função $x = 2$. Seu gráfico é decrescente e corta o eixo das abscissas no ponto 2.



Sinal

$f(x) > 0 \Rightarrow x < 2$

$f(x) < 0 \Rightarrow x > 2$

Figura 11 – gráfico da função $f(x) = -2x + 4$.

3.5. FUNÇÃO POLINOMIAL DO 2° GRAU

3.5.1. Definição

Uma função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ é uma função polinomial do 2° grau se a cada $x \in \mathbb{R}$ se associa o elemento $(ax^2 + bx + c) \in \mathbb{R}$, com a, b, $c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$ com a, b, $c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Exemplos:

- $f(x) = x^2 - 3x + 2$ onde $a = 1,\ b = -3,\ c = 2$
- $f(x) = -2x^2 + 5x$ onde $a = -2,\ b = 5,\ c = 0$
- $f(x) = -3x^2$ onde $a = -3,\ b = 0,\ c = 0$

3.5.2. Gráfico da função do 2° grau

O gráfico da função do 2° grau é representado por uma curva, à qual damos o nome de parábola.

3.5.3. Concavidade

A concavidade de uma parábola que representa uma função polinomial do 2° grau $f(x) = ax^2 + bx + c$ depende do sinal do coeficiente a:

Se $a > 0$, a parábola tem concavidade voltada para cima;

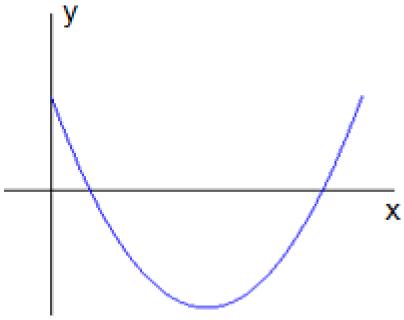


Figura 12 - Gráfico da função do 2° grau com $a > 0$.

Se $a < 0$, a parábola tem a concavidade voltada para baixo.

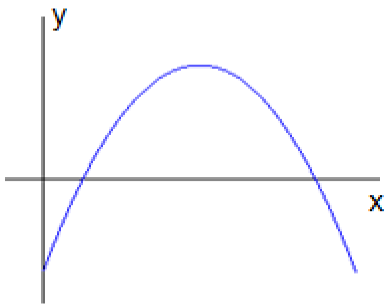


Figura 13 - Gráfico da função do 2° grau com $a < 0$.

3.5.4. Forma Canônica

Para iniciarmos um estudo mais detalhado da função polinomial do 2° grau, iremos inicialmente transforma-la em outra forma mais conveniente, chamada forma canônica. Assim,

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a[(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}) - (\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a})] = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{b^2 - 4ac}{4a^2})]$$

Podemos representar a expressão $b^2 - 4ac$ por Δ, também chamado de discriminante da função polinomial do 2° grau, assim, obtemos a forma canônica.

$$f(x) = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}]$$

3.5.5. Zeros da função do 2° grau

Chamamos de zeros ou raízes da função do 2° grau $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, os números reais x cuja imagem é nula, ou seja, $f(x) = 0$.

Utilizando a forma canônica temos:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Portanto, os zeros da função $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, são as soluções da equação do 2° grau $ax^2 + bx + c = 0$, as quais são dadas pela fórmula que acabamos de encontrar utilizando a forma canônica.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Também conhecida como fórmula de Bháskara.

Devemos observar que a existência de raízes reais para a equação do 2° grau $ax^2 + bx + c = 0$ fica condicionada ao fato de $\sqrt{\Delta} \in \mathbb{R}$. Desse modo, temos três casos a considerar:

1° caso: $\Delta > 0$, a equação terá duas raízes reais distintas que são

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

2° caso: $\Delta = 0$, a equação terá duas raízes reais iguais

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

3° caso: $\Delta < 0$, nesse caso $\sqrt{\Delta} \notin \mathbb{R}$, dessa forma, dizemos que a equação não tem raízes reais.

3.5.6. Máximo e Mínimo

Dizemos que o número $\boldsymbol{y_M} \in Im(f)$ ($\boldsymbol{y_m} \in Im(f)$) é o **valor máximo** (**mínimo**) da função $y = f(x)$ se, e somente se, $\boldsymbol{y_M} \geq y$ ($\boldsymbol{y_m} \leq y$) para qualquer $y \in Im(f)$ e o valor de $\boldsymbol{x_M} \in D(f)$ ($\boldsymbol{x_m} \in D(f)$) tal que $\boldsymbol{y_M} = f(\boldsymbol{x_M})$ ($\boldsymbol{y_m} = f(\boldsymbol{x_m})$) é chamado de **ponto de máximo** (**mínimo**) da função.

3.5.6.1. Teorema: “A função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ admite um valor máximo (mínimo) $y = \frac{-\Delta}{4a}$ em $x = \frac{-b}{2a}$ se, e somente se, $a < 0$ ($a > 0$)”.

Demonstração:

Dada à função quadrática na forma canônica

$$y = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}] \qquad \text{(i)}$$

Considerando que $(x + \frac{b}{2a})^2 \geq 0, \forall\, x \in \mathbb{R}$ e $\frac{-\Delta}{4a^2}$ para uma dada função tem valor constante, então y assumirá valor máximo (mínimo) quando $a < 0$ $(a > 0)$ e a diferença

$$(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}$$

for a menor possível, isto é

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-b}{2a}$$

Substituindo $x = \frac{-b}{2a}$ em (i) temos

$$y = a[(\frac{-b}{2a} + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}] = a[0^2 - \frac{\Delta}{4a^2}] = -\frac{\Delta}{4a}$$

3.5.7. Vértice da Parábola

O ponto $V(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a})$ é chamado de **vértice da parábola,** é representado pelo ponto de intersecção do eixo de simetria com a própria parábola. Que corresponde ao ponto máximo (quando $a < 0$) ou mínimo (quando $a > 0$).

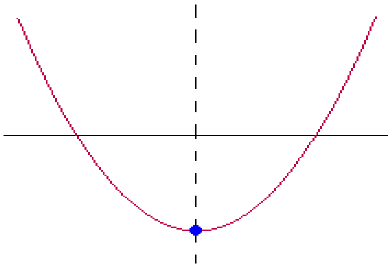


Figura 14 - Vértice da parábola com $a > 0$.

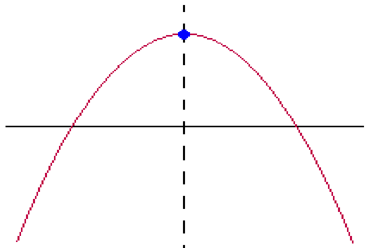


Figura 15 - Vértice da parábola com $a < 0$.

3.5.8. Sinal da função do 2° grau

Agora iremos analisar os sinais da função polinomial do 2° grau.

Consideremos a função quadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$$

Vamos determinar os valores de $x \in \mathbb{R}$ para os quais:

$f(x) > 0$; $\quad$ $f(x) = 0$; $\quad$ $f(x) < 0$.

Conforme o sinal do discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ podem ocorrer três casos:

$\Delta > 0$; $\quad$ $\Delta = 0$; $\quad$ $\Delta < 0$.

Vejamos cada caso:

1° caso: $\Delta > 0$

A função admite duas raízes (zeros) reais distintas ($x_1 \neq x_2$). A parábola intercepta o eixo das abscissas em dois pontos. Observe os gráficos abaixo:

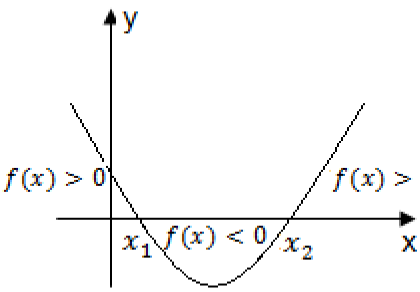


Figura 16 - Sinal da função quando $a > 0$ e $\Delta > 0$.

$f(x) > 0 \Leftrightarrow (x < x_1 \ ou \ x > x_2)$

$f(x) < 0 \Leftrightarrow (x_1 < x < x_2)$

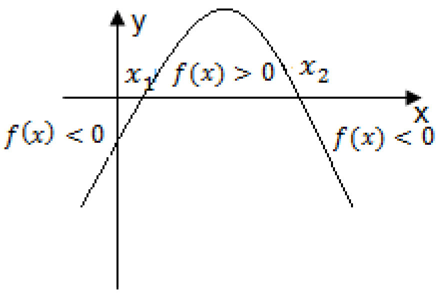


Figura 17 - Sinal da função quando $a < 0$ e $\Delta > 0$.

$f(x) > 0 \Leftrightarrow (x_1 < x < x_2)$

$f(x) < 0 \Leftrightarrow (x_1 < ou \ x > x_2)$

2° caso: $\Delta = 0$

A função admite duas raízes (zeros) reais iguais ($x_1 = x_2$). A parábola tangencia o eixo das abscissas. Observe os gráficos abaixo:

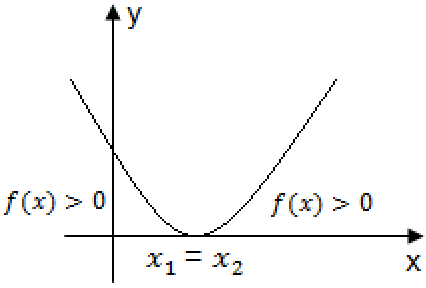


Figura 18 - Sinal da função quando $a > 0$ e $\Delta = 0$.

$f(x) > 0, \forall\, x \neq x_1$

$\nexists\, x$ tal que $f(x) < 0$

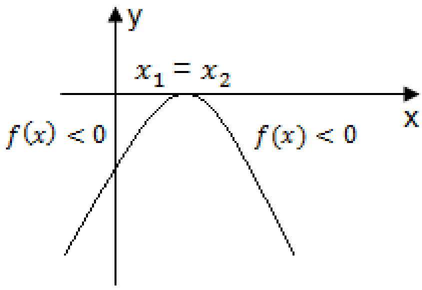


Figura 19 - Sinal da função quando $a < 0$ e $\Delta = 0$.

$f(x) < 0, \forall\, x \neq x_1$

$\nexists\, x$ tal que $f(x) > 0$

3° caso: $\Delta < 0$

Nesse caso a função não admite raízes (zeros) reais. A parábola não intercepta o eixo Ox. Observe os gráficos abaixo:

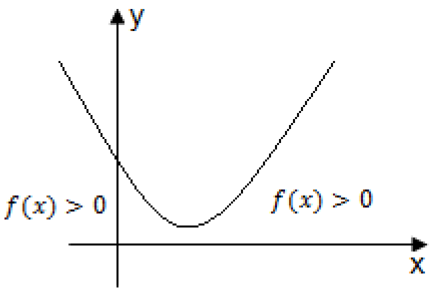


Figura 20 - Sinal da função quando $a > 0$ e $\Delta < 0$.

$f(x) > 0, \ \forall\, x$

$\nexists\, x$ tal que $f(x) < 0$

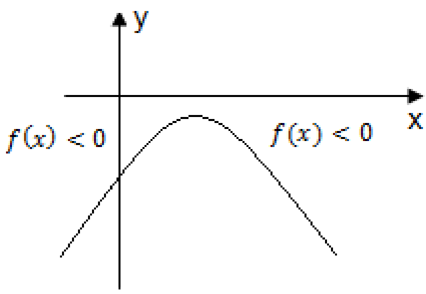


Figura 21 - Sinal da função quando $a < 0$ e $\Delta < 0$.

$f(x) < 0, \ \forall\, x$

$\nexists\, x$ tal que $f(x) > 0$

Exemplos:

1°) Vamos estudar o sinal da função $f(x) = x^2 - 5x + 6$.

Temos que

$a = 1 \rightarrow$ parábola com concavidade voltada para cima.

$\Delta = b^2 - 4ac = 25 - 24 = 1 \rightarrow$ duas raízes reais distintas

$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 \pm 1}{2} \Rightarrow x_1 = 3$ e $x_2 = 2$

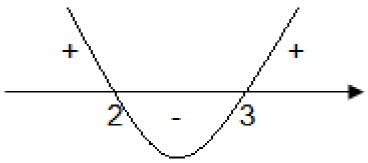


Figura 22 – Sinal da função $f(x) = x^2 - 5x + 6$.

$f(x) > 0 \Leftrightarrow (x < 2$ ou $x > 3)$

$f(x) < 0 \Leftrightarrow (2 < x < 3)$.

2°) Vamos estudar o sinal da função $f(x) = -x^2 + 6x - 9$.

Temos que

$a = -1 \rightarrow$ parábola com concavidade voltada para baixo.

$\Delta = b^2 - 4ac = 36 - 36 = 0 \rightarrow$ duas raízes reais iguais

$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 \pm 0}{-2} = \Rightarrow x_1 = x_2 = 3$

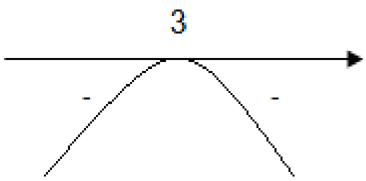


Figura 23 – Sinal da função $f(x) = -x^2 + 6x - 9$.

$f(x) < 0, \forall\, x \neq 3$

$\nexists\, x$ tal que $f(x) > 0$.

3°) Vamos estudar o sinal da função $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$.

Temos que

$a = 3 \rightarrow$ parábola com concavidade voltada para cima.

$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 60 = -56 \rightarrow$ não há raízes reais.

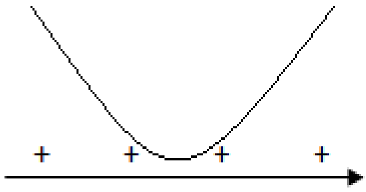


Figura 24 – Sinal da função $\boldsymbol{f(x) = 3x^2 - 2x + 5}$.

$f(x) > 0, \forall\, x$

$\nexists\, x$ tal que $f(x) < 0$.

4. INTERPRETAÇÃO GRÁFICA

Agora iremos fazer uma análise nos gráficos das funções do 1° e do 2° grau.

4.1. INTERPRETAÇÃO GRÁFICA DA FUNÇÃO DO 1° GRAU

A representação gráfica de uma função do 1° grau, $f(x) = ax + b\ \ (a \neq 0)$, é uma reta não paralela ao eixo Oy, sendo raiz ou zero da função a abscissa do ponto onde a reta intercepta o eixo Ox.

Observação: Com apenas dois pontos podemos construir o gráfico da função afim.

Exemplo: Vamos construir o gráfico da função $f(x) = 2x + 1$.

Considerando que o gráfico da função do 1° grau é uma reta, vamos atribuir a x dois valores distintos e calcular os correspondentes valores de y.

x	$f(x) = 2x + 1$
0	1
1	3

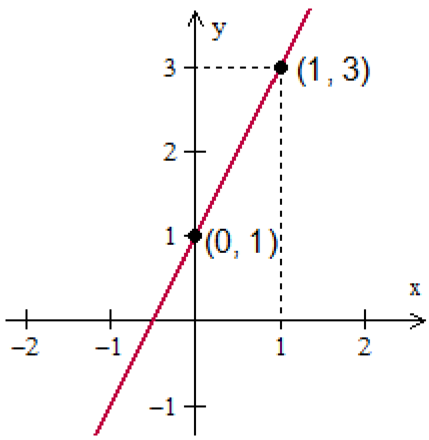


Gráfico 1 – função $f(x) = 2x + 1$.

Portanto o gráfico procurado é a reta que passa pelos pontos (0, 1) e (1, 3).

Vejamos agora como obter a função a partir de dois pontos.

Exemplo: Obter a função do 1° grau que passa pelos pontos (0, 1) e (1, -1).

Seja $f(x) = ax + b$ a função procurada. O objetivo é determinar os valores de a e b.

Considerando que o ponto (0, 1), pertença a reta da função $f(x) = ax + b$, ao substutuirmos $x = 1$ e $y = 0$ em $f(x) = ax + b$, temos a sentença verdadeira

$$1 = a.0 + b \text{ isto é: } b = 1$$

Analogamente, para o ponto (1, -1), obtemos:

$$-1 = a.1 + b \text{ isto é: } a + b = -1$$

Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} b = 1 \\ a + b = -1 \end{cases}$$

Encontramos $a = -2$ e $b = 1$. Assim, a função é $f(x) = -2x + 1$.

Agora vamos fazer uma análise nos gráficos da função do 1° grau.

Vejamos algumas particularidades.

4.1.1. Função Identidade

É a função f que a cada $x \in \mathbb{R}$, associa o próprio x.

Simbolicamente:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad D(f) = \mathbb{R}$$
$$x \to f(x) = x \qquad Im(f) = \mathbb{R}$$

O gráfico da função identidade é a bissetriz dos quadrantes ímpares.

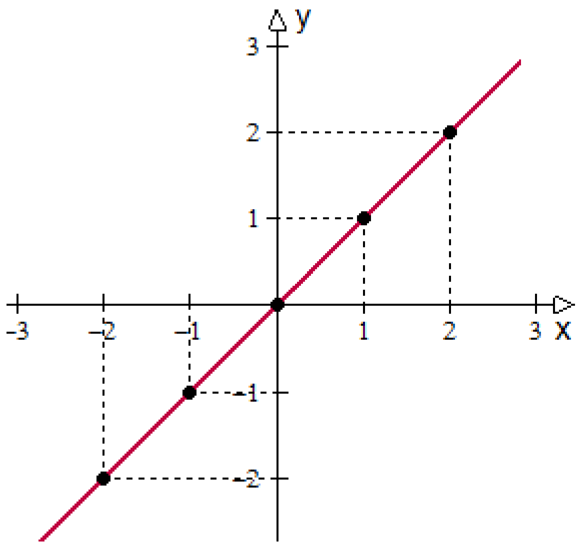


Gráfico 2 - função $f(x) = x$.

A função $f(x) = x$ é crescente, pois o coeficiente angular é maior que zero. O gráfico intercepta o eixo Ox e o eixo Oy no ponto $(0,0)$, em que a abscissa desse ponto é o zero da função, ou seja, $x = 0$, pois ao fazer $f(x) = 0$ resulta em $x = 0$.

4.1.2. Função Linear

É a função afim onde $a \neq 0$ e $b = 0$.

Simbolicamente:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad\qquad D(f) = \mathbb{R}$$
$$x \to f(x) = ax \qquad\qquad Im(f) = \mathbb{R}$$

O gráfico da função linear é a reta que passa pela origem. A função identidade é também uma função linear.

Veja o gráfico da função $f(x) = 2x$.

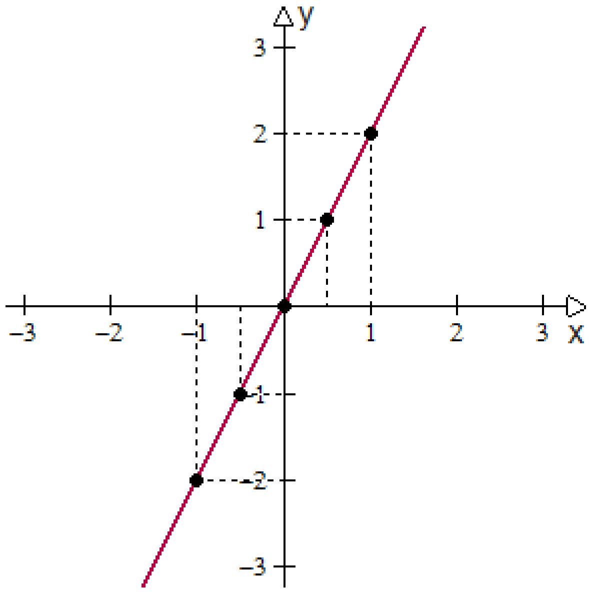


Gráfico 3 - função $f(x) = 2x$.

A função $f(x) = 2x$ também é crescente, pois o coeficiente angular é positivo. O gráfico intercepta os eixos Ox e Oy no ponto $(0, 0)$, sendo $x = 0$ o zero da função.

Note que o gráfico da função $f(x) = 2x$ está mais inclinado do que o gráfico da função $f(x) = x$. Isso ocorre porque o coeficiente angular de $f(x) = 2x$ é maior que o coeficiente angular da função $f(x) = x$, ou seja, quanto maior o coeficiente angular, maior será a inclinação do gráfico. Como vimos em 3.4.3. o coeficiente angular é responsável pela inclinação da reta. Vejamos outro caso:

Analisaremos o gráfico da função $f(x) = -2x$.

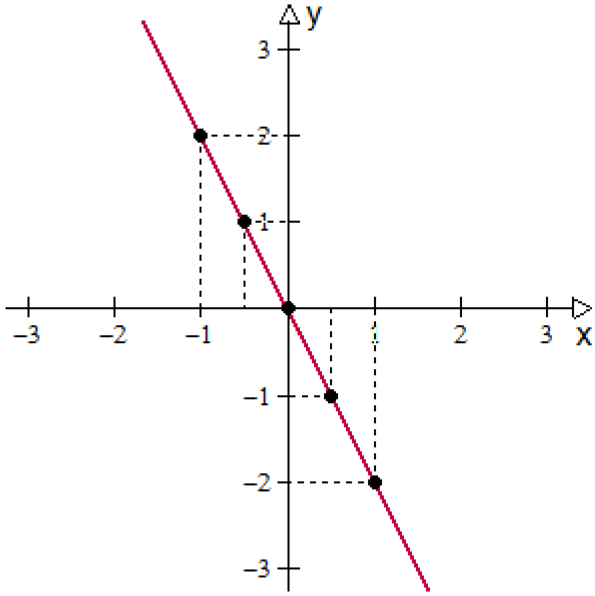


Gráfico 4 - função $f(x) = -2x$.

Essa função é decrescente, pois o coeficiente angular é menor que zero. O gráfico passa pela origem, pois é uma função linear, possuindo como zero da função $x = 0$.

Observe que o coeficiente angular da função $f(x) = -2x$ é o oposto do coeficiente angular da função $f(x) = 2x$. O que faz o gráfico mudar totalmente de sentido. Portanto, a inclinação do gráfico depende do coeficiente angular.

4.1.3. Função Translação

É a função afim onde $a = 1$ e $b \neq 0$.

Simbolicamente:

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $\quad D(f) = \mathbb{R}$

$x \rightarrow f(x) = x + b$ $\quad Im(f) = \mathbb{R}$

Vejamos o gráfico da função $f(x) = x + 1$.

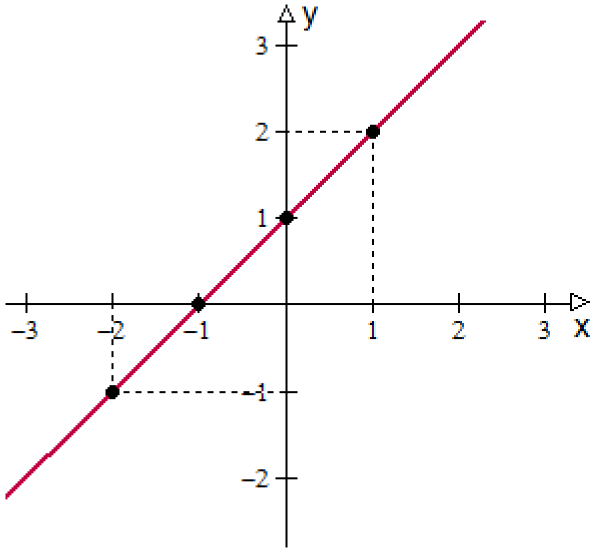


Gráfico 5 - função $f(x) = x + 1$.

É uma função crescente, pois o coeficiente angular é maior que zero. Seu gráfico intercepta o eixo Ox no ponto $(-1, 0)$ e o eixo Oy no ponto $(0, 1)$, onde o zero da função é $x = -1$, pois fazendo $f(x) = 0$, obteremos $x = -1$.

Comparando o gráfico da função $f(x) = x + 1$ com o gráfico da função $f(x) = x$, observamos que houve um deslocamento. O responssável por esse deslocamento é justamente o coeficiente linear da função. Como vimos em 3.4.3. o coeficiente linear é a ordenada do ponto em que a reta intercepta o eixo Oy. Nesse caso o coeficiente linear é $b = 1$. Vamos analisar o gráfico da função $f(x) = x + 2$.

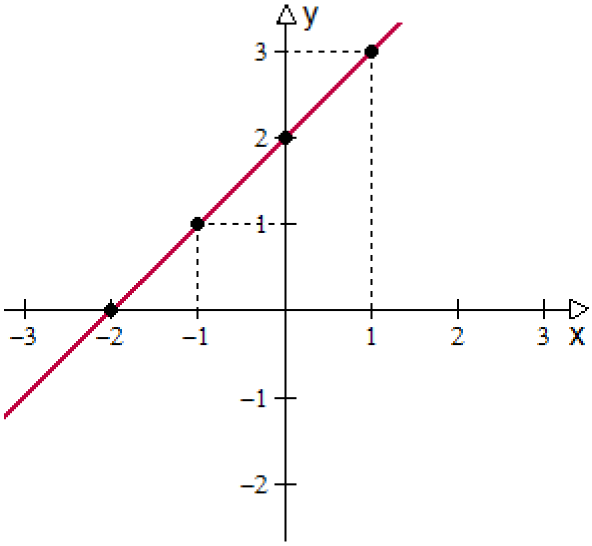


Gráfico 6 - função $f(x) = x + 2$.

A função $f(x) = x + 2$ é crescente, pois possui coeficiente angular maior que zero. O gráfico intercepta o eixo Ox no ponto $(-2, 0)$ em que a abscissa desse ponto é o zero da função, ou seja, $x = -2$, pois ao fazer $f(x) = 0$ resulta em $x = -2$, e intercepta o eixo Oy no ponto $(0, 2)$, em que a ordenada desse ponto é o coeficiente linear da função.

Note que da função $f(x) = x + 1$ para a função $f(x) = x + 2$ variamos o coeficiente linear, sendo assim o gráfico mudou de posição. Portanto a posição do gráfico depende do coeficiente linear, se o coeficiete varia a posição do gráfico também varia.

Agora vamos mudar o sinal do coeficiente angular e linear pra ver o que acontece com o gráfico. A função será $f(x) = -x - 2$. Observe o gráfico abaixo.

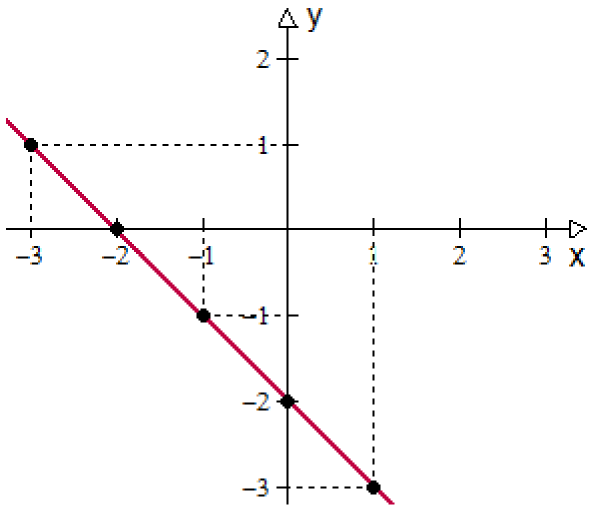


Gráfico 7 - função $f(x) = -x - 2$.

Essa função é decrescente, pois o coeficiente angular é menor que zero. O gráfico intercepta o eixo Ox no ponto $(-2, 0)$, em que o zero da função é $x = -2$, (abscissa do ponto), e intercepta o eixo Oy no ponto $(0, -2)$, sendo a ordenada desse ponto o coeficiente linear da função.

Observe que o gráfico mudou de sentido e posição, isso ocorreu pois variamos tanto o coeficiente angular como o linear. Portanto, concluimos que o gráfico da função do primeiro grau (função afim), varia de acordo com os coeficientes angular (a) e linear (b), em que a é responsável pela inclinação e b pela posição.

4.2. INTERPRETAÇÃO GRÁFICA DA FUNÇÃO DO 2° GRAU

A representação gráfica da função polinomial do 2° grau, $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$, é uma curva à qual damos o nome de parábola. Para fazermos a interpretação e entendermos melhor esse conceito, devemos considerar alguns casos:

1°) Quando $a > 0$ $(a < 0)$, a parábola tem a concavidade voltada para cima (baixo).

2°) Zeros da função

- Se $\Delta > 0$, a parábola intercepta o eixo das abscissas em dois pontos distintos
$$P_1\left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}, 0\right) \qquad \text{e} \qquad P_2\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, 0\right)$$
- Se $\Delta = 0$, a parábola tangencia o eixo das abscissas no ponto $P\left(\frac{-b}{2a}, 0\right)$.
- Se $\Delta < 0$, a parábola não tem pontos no eixo das abscissas.

3°) O vértice da parábola é o ponto $V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$ e possui valor máximo (y_M), se $a < 0$ ou mínimo (y_m), se $a > 0$.

Dessa forma veremos alguns exemplos e analisaremos cada caso.

Exemplo 1: Gráfico da função definida por $f(x) = x^2 - x - 2$.

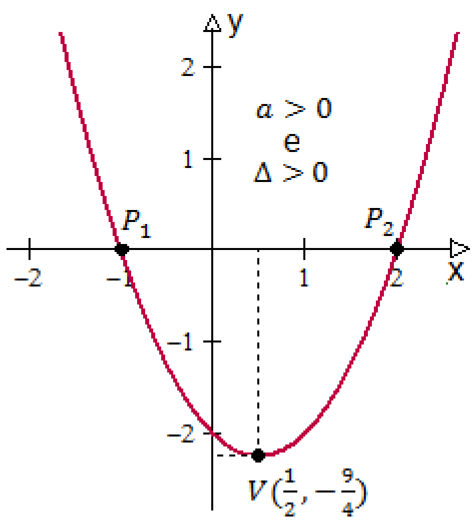


Gráfico 8 - Função $f(x) = x^2 - x - 2$.

Temos que $a > 0$, então a parábola tem concavidade voltada para cima, e possui valor minimo em $y_m = -\frac{9}{4}$, pois para qualquer $y \in Im(f)$ $y \geq -\frac{9}{4}$, e tem como vértice o ponto $V(\frac{1}{2}, -\frac{9}{4})$.

Como $\Delta > 0$, a parábola interseptou o eixo das abscissas em dois pontos distintos, $P_1 = (-1, 0)$ e $P_2 = (2, 0)$, em que as abscissas desses pontos são os zeros da função, ou seja, $x_1 = -1$ e $x_2 = 2$.

Exemplo 2: Gráfico da função definida por $f(x) = x^2 - 2x + 1$.

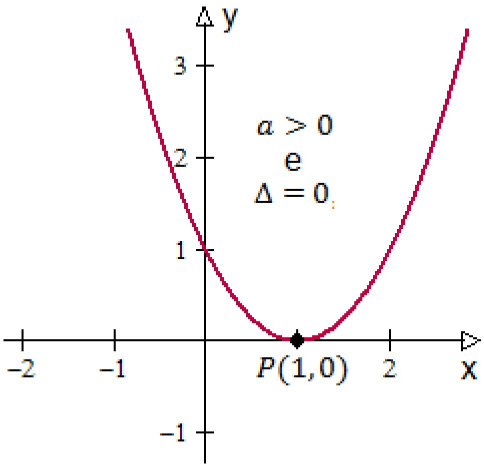


Gráfico 9 - função $f(x) = x^2 - 2x + 1$.

Da mesma forma, que o exemplo anterior, temos que $a > 0$, assim a parábola tem concavidade voltada para cima, e possui valor minimo em $y_m = 0$, pois para qualquer $y \in Im(f)$ $y \geq 0$, e tem como vértice o ponto $P(1, 0)$.

Como $\Delta = 0$, a função possui dois zeros reais iguais, que são eles: $x_1 = x_2 = 1$. E a parábola tangencia o eixo das abscissas no ponto $P(1, 0)$.

Exemplo 3: Gráfico da função definida por $f(x) = x^2 - 2x + 2$.

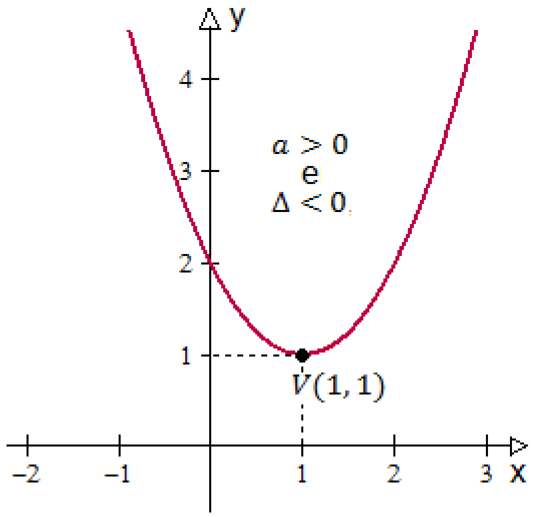


Gráfico 10 - função $f(x) = x^2 - 2x + 2$.

Como $a > 0$, a parábola tem concavidade voltada para cima, e possui valor minimo em $y_m = 1$, pois para qualquer $y \in Im(f)$ $y \geq 1$, e tem como vértice o ponto $V(1, 1)$.

Nesse caso $\Delta < 0$, o que implica dizer que a parábola não tem pontos no eixo das abscissas, ou seja, a função não possui zeros reais.

Exemplo 4: Gráfico da função definida por $f(x) = -x^2 + 3x - \frac{5}{4}$.

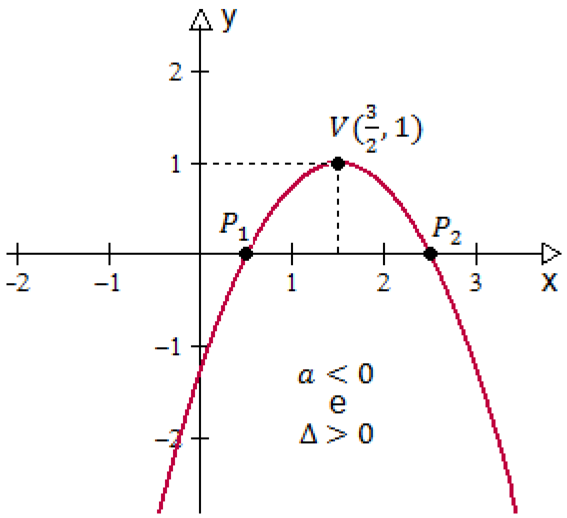


Gráfico 11 - função $f(x) = -x^2 + 3x - \frac{5}{4}$

Nessa função $a < 0$, desse modo, a parábola tem concavidade voltada para baixo, e possui valor máximo em $y_M = 1$, pois para qualquer $y \in Im(f)$ $y \leq 1$, e tem como vértice o ponto $V\left(\frac{3}{2}, 1\right)$.

Como $\Delta > 0$, a parábola interceptou o eixo das abscissas em dois pontos distintos, $P_1 = (\frac{1}{2}, 0)$ e $P_2 = (\frac{5}{2}, 0)$ em que as abscissas desses pontos são os zeros da função, ou seja, $x_1 = \frac{1}{2}$ e $x_2 = \frac{5}{2}$.

Exemplo 5: Gráfico da função definida por $f(x) = -x^2 + 2x - 1$.

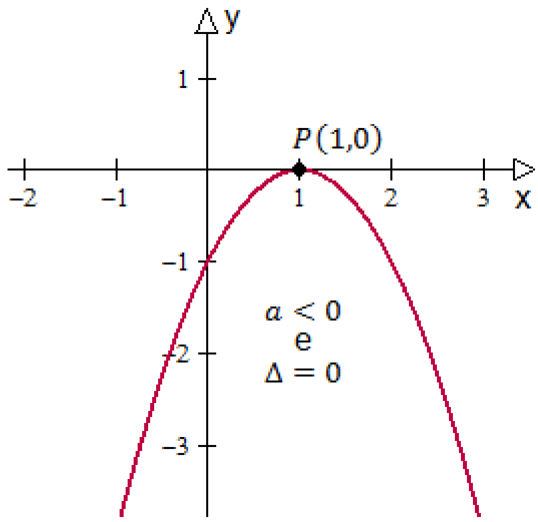


Gráfico 12 - função $f(x) = -x^2 + 2x - 1$.

Temos que $a < 0$, portanto a parábola tem concavidade voltada para baixo, e possui valor máximo em $y_M = 0$, pois para qualquer $y \in Im(f)$ $y \leq 0$, e tem como vértice o ponto $P(1, 0)$.

Como $\Delta = 0$, a função possui dois zeros reais iguais que são: $x_1 = x_2 = 1$. E a parábola tangencia o eixo das abscissas no ponto $P(1, 0)$.

Exemplo 6: Gráfico da função definida por $y = -x^2 + 2x - 2$

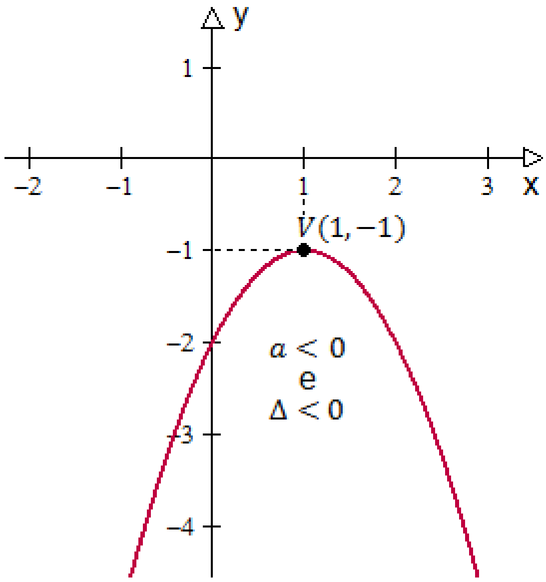


Gráfico 13 – função $f(x) = -x^2 + 2x - 2$.

Como $a < 0$, a parábola tem concavidade voltada para baixo, e possui valor máximo em $y_M = -1$, pois para qualquer $y \in Im(f)\; y \leq -1$, e tem como vértice o ponto $V(1, -1)$.

Note que $\Delta < 0$ o que implica dizer que a parábola não tem pontos no eixo das abscissas, desse modo, a função não possui zeros reais.

Através dessas análises pretendemos trazer uma reflexão melhor sobre como fazer uma interpretação gráfica.

5. CONCLUSÃO

Atuando como professor de Matemática em escola pública por 2 anos, foi possível identificar de perto as dificuldades que muitos alunos sentem em relação à interpretação dos gráficos, ao reconhecimento de uma função através de sua forma algébrica e em utilizar conhecimentos algébricos como recurso para a construção de gráficos.

Pelo exposto, pudemos notar que essa dificuldade está em diversos aspectos das funções, o que nos dá suporte para afirmar que este conteúdo deve ser trabalhado detalhadamente em sala de aula, haja vista que é um assunto base e que, portanto, o educando irá utilizá-lo durante toda a sua vida escolar e dependendo de sua escolha de curso, até mesmo em sua formação universitária.

Nas análises feitas, tivemos como objetivo mostrar a variação de cada gráfico, especificando os coeficientes da função, os quais são responsáveis pela variação do mesmo. É através dessas análises que pretendemos ter feito uma melhor reflexão de como ao fazer uma boa interpretação gráfica, podemos minimizar as numerosas deficiências encontradas nos estudantes. As contribuições serão explicitas após a utilização desse trabalho, quando esperamos que sejam válidas na melhoria das técnicas de ensino, bem como na facilitação do processo de ensino-aprendizagem da Matemática, oferecendo ao educador mais uma ferramenta para dinamizar suas aulas e ao educando uma visão mais simples de como trabalhar com gráficos.

REFERÊNCIAS

BOYER, Carl B. **A História da Matemática.** 2ª ed. Editora Edgard Blücher. São Paulo, 1996.

IEZZI, Gelson; Dolce, Osvaldo; Degenszajn, David; et al. **Matemática: Ciência e Aplicações**. Vol.1. Editora Atual. São Paulo, 2004.

ROSA, Leandro Viana da. **Funções do 2° grau: Interpretações gráficas e algébricas.** Trabalho de conclusão de curso da disciplina de licenciatura em matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2010.

FILHO, Benigno Barreto; Silva, Cláudio Xavier da. **Matemática Aula Por aula.** 1º ed. Editora FTD. São Paulo, 2013.

IEZZI, Gelson; Murakami, Carlos. **Fundamentos de Matemática Elementar**. 5ª ed. Editora Atual. São Paulo, 1977.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: Contexto e aplicações**. 1ª ed. Editora Ática. São Paulo, 2010.

SANTOS, Carlos Alberto Marcondes dos; Gentil, Nelson; et al. **Matemática: Novo Ensino Médio**. 6ª ed. Editora Ática. São Paulo, 2002.

SITES REFERIDOS

<http://www.pucpr.br/eventos/educere/educere2005/anaisEvento/documentos/com/TCCI021.pdf>.
Acesso em: 21 de julho de 2014 às 13: 32.

<http://www.uff.br/dalicenca/images/stories/caderno/volume6/UM_BREVE_HISTRICO_DO_CONCEITO_DE_FUNO.pdf>.
Acesso em: 21 de julho de 2014 às 14: 15.

<http://www.e-biografias.net/rene_descartes/>.
Acesso em: 22 de julho de 2014 às 9: 44.

<http://www.cienciamao.usp.br/dados/pru/_funcoesegraficos.apostila.pdf>.
Acesso em: 11 de agosto de 2014 às 8: 53.

<http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_22/carlos.pdf>. Acesso em: 18 de agosto de 2014 às 16: 14.

<http://sinop.unemat.br/projetos/revista/index.php/eventos/article/viewFile/946/677>. Acesso em: 19 de agosto de 2014 às 9: 25.