



UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS VII
CURSO DE LICENCIATURA EM CIÊNCIAS EXATAS

EDCLEBIO RAMALHO DA SILVA

**MÉTODOS NUMÉRICOS PARA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS
ORDINÁRIAS UTILIZANDO O *SOFTWARE* MATLAB**

Patos
2014

EDCLEBIO RAMALHO DA SILVA

MÉTODOS NUMÉRICOS PARA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS
ORDINÁRIAS UTILIZANDO O *SOFTWARE* MATLAB

Artigo apresentado como requisito parcial
para obtenção do título de Licenciado em
Ciências Exatas, pelo Curso de
Licenciatura em Ciências Exatas do
Campus VII da Universidade Estadual da
Paraíba - UEPB

Orientador: Prof^a. Taciana Araújo de Souza

Patos

2014

UEPB - SIB - Setorial - Campus VII

S587m Silva, Edclebio Ramalho da
Métodos Numéricos para resolução de equações diferenciais ordinárias utilizando o Software Matlab [manuscrito] / Edclebio Ramalho da Silva. – 2014.
28 p. : il. color.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Ciências Exatas) – Centro de Ciências Exatas e Sociais Aplicadas, Universidade Estadual da Paraíba, 2014.

“Orientação: Profa. Esp. Taciana Araújo de Souza, CCEA”.

1. Equação diferencial. 2. Matemática. 3. Software Matlab. I. Título.

21. ed. CDD 510.7

EDCLEBIO RAMALHO DA SILVA

**MÉTODOS NUMÉRICOS PARA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES
DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS UTILIZANDO O *SOFTWARE* MATLAB**

Artigo apresentado à Universidade Estadual
da Paraíba como Trabalho de Conclusão do
Curso de Licenciatura em Ciências Exatas.

Aprovado em 23 de fevereiro de 2014.

Taciana Araújo de Souza

Profª Taciana Araújo de Souza

Orientador (a)

Ruth Brito de Figueiredo Melo

Profª Ms. Ruth Brito de Figueiredo Melo

Examinador (a)

Syana M. de A. Ramos

Profª Esp. Syana Monteiro de Alencar Ramos

Examinador (a)

MÉTODOS NUMÉRICOS PARA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS UTILIZANDO O *SOFTWARE* MATLAB

Edclebio Ramalho da Silva

Taciana Araújo de Souza

RESUMO

Neste trabalho será feita uma breve revisão das equações diferenciais ordinárias, mostrando alguns tipos de equações, assim como os métodos de resolução analítica das mesmas. Além disso, serão abordados métodos numéricos utilizados para a resolução de equações diferenciais ordinárias, como uma alternativa à solução analítica que, em alguns casos, pode se tornar um processo complexo. Será apresentada uma comparação entre os métodos numéricos estudados para a resolução de uma questão problema utilizando o *software* MatLab.

Palavras-chave: Equações diferenciais. Métodos numéricos. MatLab.

1. Introdução

Diversos fenômenos físicos podem ser modelados por equações diferenciais que podem ser resolvidas analiticamente ou utilizando algum método numérico. Neste trabalho o objetivo é expor e analisar alguns destes métodos de resolução de equações diferenciais, quer sejam eles analíticos ou numéricos. Apresentaremos um problema matemático e o solucionaremos utilizando alguns dos métodos expostos nesse trabalho, com a finalidade de mostrar qual é o método mais eficiente, para isto faremos o uso do *software* Matlab.

As equações diferenciais, tão utilizadas no século XXI para a obtenção de soluções de diversos problemas numéricos, originaram-se através de dois personagens, quase que, desconhecidos um do outro e, coincidentemente, na

mesma época ambos observavam problemas diferentes, porém utilizaram os mesmos métodos, diferindo apenas em suas notações. Isaac Newton, um cientista inglês, dando continuidade aos estudos de Galileu sobre a origem e natureza dos movimentos, precisava de um modelo matemático, ainda não descoberto, que unisse a velocidade de um móvel numa curva à existência de duas forças independentes que atuasse em conjunto. Já na Alemanha, Leibniz se dedicou ao estudo de somas infinitas de pequenas áreas que cobrem uma área mais complexa, e desse modo surgiram regras para tratar diferenciais (PIRES, 2004).

Muitos problemas encontrados em engenharia e outras ciências podem ser formulados em termos de equações diferenciais. Por exemplo, trajetórias balísticas, trajetórias dos satélites artificiais, estudo de redes elétricas, curvaturas de vigas, estabilidade de aviões, teoria das vibrações, reações químicas e outras aplicações estão relacionadas com equações diferenciais (FRANCO, 2006, p. 382).

Equação diferencial é toda equação em que a incógnita (x, y, w, z, \dots) é uma função apresentada na forma de suas respectivas derivadas. As equações diferenciais classificam-se em ordinárias e parciais. As equações diferenciais ordinárias são aquelas que possuem uma função de uma variável independente e suas derivadas, ao contrário das parciais, que possuem uma função de várias variáveis e suas derivadas parciais.

As equações diferenciais podem ser classificadas também de acordo com sua ordem (1ª ordem, 2ª ordem,...), sendo a mais alta ordem de derivação que aparece na equação. Para completar a nomenclatura das equações diferenciais também as separamos em linear e não-linear, sendo linear quando a função e suas derivadas aparecem linearmente na equação (RUGGIERO, 1996).

2. Equações Diferenciais Ordinárias

Neste trabalho serão abordadas as equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, ou seja, aquelas em que envolvem apenas derivadas de primeira ordem de uma função de uma única variável independente (MACHADO, 2012 p.39). A forma geral de uma equação diferencial ordinária de 1ª ordem é representada por

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \quad (2.1)$$

e podemos perceber que $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$ é uma função que envolve três fatores, a variável independente x , a variável dependente y e a derivada de y com relação a x , ou seja, $\frac{dy}{dx}$. Agora vejamos alguns exemplos de funções de F .

$$\frac{dy}{dx} + x^2 - y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} + xy^2 - y = x^2$$

$$\frac{dy}{dx} + \cos\frac{x^2}{y} - \sin y^3 = 0$$

Segundo Machado (2012), as equações diferenciais podem ser lineares ou não-lineares, escalares ou até mesmo vetoriais. E as equações diferenciais sendo ordinárias podem ser encontradas de duas maneiras, a *forma implícita*, conforme a equação 2.1, e em várias situações podemos escrevê-las na *forma explícita*, dada por

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (2.2)$$

em que $y = y(x)$. E, a partir daí, podemos escrever a função $f(x, y)$ em termos de uma razão entre duas funções quaisquer, $M(x, y)$ e $N(x, y)$, ou seja,

$$f(x, y) = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)} \quad (2.3)$$

Agora, iremos substituir a equação 2.2 em 2.3, temos

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}$$

ou, manipulando as funções,

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (2.4)$$

Desse modo, chegamos à *forma diferencial* em 2.4. A seguir mostraremos alguns tipos de equações diferenciais de primeira ordem e os métodos de resolução apropriados para cada uma delas.

2.1. Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem Separáveis

Definição 2.1: Considere que tenhamos uma equação diferencial apresentada pela forma geral

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = g(x)h(y) \quad (2.5)$$

agora conseguiremos escrever a função $f(x, y)$ em termos de um produto de duas funções, uma apenas de x , $g = g(x)$, e outra de y , $h = h(y)$. De acordo com Machado(2012), sempre que uma equação diferencial puder ser colocada na forma geral 2.5, ela é dita separável, podendo ser reescrita como

$$\frac{dy}{h(y)} = g(x)dx \quad (2.6)$$

a qual pode ser imediatamente integrada,

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)dx \quad (2.7)$$

forneendo uma equação envolvendo x e y , que é a solução da equação diferencial.

Considere agora que tenhamos uma equação diferencial na forma dada em 2.4, e suponha que as funções $M(x, y)$ e $N(x, y)$ possam ser escritas na forma

$$M(x, y) = g(x)h(y) \quad N(x, y) = G(x)H(y)$$

ou seja, que cada função pode ser escrita como o produto de duas funções, uma de cada variável. Com isso, temos

$$g(x)h(y)dx + G(x)H(y)dy = 0 \quad (2.8)$$

ou seja,

$$\frac{g(x)}{G(x)} dx = -\frac{H(y)}{h(y)} dy \quad (2.9)$$

A equação diferencial, na forma 2.9, também apresenta um lado da equação que envolve termos que dependem apenas de uma das variáveis, enquanto o outro lado depende apenas da outra variável, de modo a se tornar uma equação diferencial separável. Portanto, qualquer equação diferencial nas formas gerais 2.5 ou 2.8 pode ser separada e, por meio da separação, pode ser integrada, fornecendo a solução da equação diferencial (MACHADO, 2012. P.43).

2.2. Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem Homogêneas

Definição 2.2: A equação diferencial de primeira ordem $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$, é dita homogênea se, quando escrita na forma $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ existe uma função g tal que $f(x, y)$ possa ser colocada na forma $f(x, y) = g\left(\frac{y}{x}\right)$ e, assim, a equação diferencial fica

$$\frac{dy}{dx} = g\left(\frac{y}{x}\right) \quad (2.10)$$

Segundo Machado (2012), conseguimos verificar se uma equação diferencial é homogênea utilizando a idéia de função homogênea.

Definição 2.3: Uma função $F(x, y)$ é dita homogênea de grau n se ocorrer

$$F(tx, ty) = t^n F(x, y) \quad (2.11)$$

ou seja, quando em $F(x, y)$ substituimos x por tx e y por ty e depois fatoramos o t , a expressão resultante fica na forma acima.

Considerando a definição acima, temos que a equação diferencial 2.4 é homogênea se as funções $M(x, y)$ e $N(x, y)$ forem homogêneas e de mesmo grau.

Teorema 2.2: Se a equação diferencial

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (2.12)$$

é homogênea, a mudança de variáveis

$$y = vx \quad (2.13)$$

onde $v = v(x)$, ou

$$v = \frac{y}{x} \quad (2.14)$$

transforma a equação 2.12 numa equação diferencial separável nas variáveis v e x , sendo solucionada utilizando o método apresentado na seção 2.1.

2.3. Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem Exatas

Considere que, dada uma equação diferencial escrita na forma,

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (2.15)$$

ocorra, para essa equação, a seguinte igualdade:

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} \quad (2.16)$$

Neste caso, tal equação é chamada de *equação diferencial exata*. Assim, uma equação diferencial exata é aquela que, quando escrita na forma 2.15, satisfaz a condição dada por 2.16 (MACHADO, 2012).

Portanto, uma equação na sua forma diferencial 2.15 será exata se existir uma função $f(x, y)$ em que sua diferencial, $df(x, y)$, corresponda a

$$df(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy \quad (2.17)$$

onde,

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N(x,y) \quad (2.19)$$

sendo assim, temos

$$df(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy \quad (2.20)$$

Teorema 2.3: Dada a equação diferencial 2.15 ela será exata se, e somente se, for verificada a igualdade 2.16.

Supondo agora que a condição dada pela equação 2.16 seja satisfeita, conseguiremos integrar a equação em relação à x , encontrando

$$\int \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \partial x = \int M(x,y) \partial x \quad (2.21)$$

ou seja,

$$f(x,y) = \int M(x,y) \partial x + g(y) \quad (2.22)$$

Efetuando a integração parcial de $M(x,y)$ com relação a x , a "constante" de integração será uma função g , ou seja, uma função da variável y , no presente caso, $g(y)$ (MACHADO, 2012, p. 59).

Derivando parcialmente a equação 2.22 com relação a y , obtemos

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int M(x,y) \partial x + \frac{dg(y)}{dy} \quad (2.23)$$

Sabendo que 2.19 é satisfeita, temos

$$N(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} \int M(x,y) \partial x + \frac{dg(y)}{dy} \quad (2.24)$$

que pode ser escrita como

$$\frac{dg(y)}{dy} = N(x,y) - \int \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \partial x \quad (2.25)$$

Portanto,

$$g(y) = \int \frac{dg(y)}{dy} dy = g(y) + c, \text{ onde } c \text{ é uma constante qualquer.} \quad (2.26)$$

Agora é só substituir o valor encontrado de $g(y)$ em 2.22 e encontrar a função $f(x,y)$, dado por:

$$f(x,y) = \int M(x,y) \partial x + g(y) \quad (2.27)$$

2.4. Método do Fator Integrante

Quando uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) não pode ser solucionada por nenhum dos métodos apresentados anteriormente, podemos recorrer a ajuda de um fator integrante. Para explicá-lo devemos considerar uma EDO do tipo

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (2.28)$$

onde a expressão

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy \quad (2.29)$$

não é uma diferencial exata, ou seja, não existe uma função $f(x, y)$ tal que as condições

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = M(x, y) \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = N(x, y) \quad (2.30)$$

não sejam ambas verificadas. Além disso, o teste

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} \quad (2.31)$$

também não é satisfeito. Sabemos que, se 2.30 e 2.31, não são satisfeitas a equação não é exata. Porém, Machado (2012) nos diz que, ao supor que exista uma função $I(x, y)$ tal que, ao ser multiplicada pela expressão 2.29, a transforme numa EDO exata, ou seja, em

$$I(x, y)M(x, y)dx + I(x, y)N(x, y)dy = df(x, y) \quad (2.32)$$

que agora satisfaz as condições 2.30 e 2.31, logo temos

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = I(x, y)M(x, y) \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = I(x, y)N(x, y) \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial [I(x, y)M(x, y)]}{\partial y} = \frac{\partial [I(x, y)N(x, y)]}{\partial x} \quad (2.34)$$

Portanto, fator integrante é uma função $I(x, y)$ que, multiplicada pela EDO 2.28, a transforma numa EDO exata do tipo 2.32, nos afirma Machado (2012).

Esse método também pode ser utilizado para encontrar a solução de equações diferenciais lineares do tipo

$$a_1 \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = b(x) \quad (2.35)$$

ou,

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \quad (2.36)$$

onde

$$P(x) = \frac{a_0}{a_1} \quad Q(x) = \frac{b(x)}{a_1(x)} \quad (2.37)$$

para esse tipo equações, temos Machado (2012) que nos fornece a maneira de solucioná-las, dada por

$$y(x) = \frac{1}{I(x)} [\int I(x)Q(X)dx + c] \quad (2.38)$$

onde c é uma constante de integração, e o fator integrante $I(x, y)$ é encontrado através da fórmula

$$I(x) = I(x, y) = \exp[\int P(x)dx] \quad (2.39)$$

Os principais métodos analíticos usados na resolução de equações diferenciais de primeira ordem já foram apresentados, vamos agora introduzir alguns métodos numéricos que são utilizados com as mesmas finalidades, resolver EDO de primeira ordem.

3. Métodos Numéricos

Diversos métodos numéricos para solução de equações diferenciais surgiram devido à necessidade de solucionar diferentes tipos de problemas, que envolvem equações diferenciais e, no entanto, possuem uma solução analítica complexa. Nesses casos, os métodos numéricos são capazes de resolver tais problemas com certo grau de precisão em comparação à solução exata.

Desde à modelagem de um problema físico por um método matemático até à sua resolução por algum método numérico, podem surgir diversos tipos de erros. Segundo Arenales (2008), os principais erros que podem ocorrer no momento da resolução de um problema matemático, são:

a) Erros na fase da modelagem

Ao utilizar os métodos conhecidos para se representar, em um modelo matemático, a observação de algum fenômeno da natureza, cometem-se este erro através de simplificações, geralmente necessárias, feitas ao longo do processo.

b) Erros na fase de resolução

Ao necessitar da ajuda de algum equipamento na resolução de qualquer modelo matemático, o mecanismo utilizado pode apresentar falhas ou possuir uma capacidade limitada para se armazenar todos os dígitos significativos, sendo assim, erros podem ocorrer e, quando isso acontece, obtemos resultados não exatos, mas aproximados do valor exato.

c) Erros de representação

Este erro ocorre durante a construção de um equipamento computacional, na formação de sua arquitetura é muito importante observar a forma adotada para se representar os dados numéricos. Em resumo, quase todo equipamento possui uma memória, e é nesse local que cada número é armazenado em uma posição que consiste de um sinal que o identifica se o número é positivo ou negativo e um número fixo e limitado de dígitos significativos.

d) Erros de arredondamento

Ocorre quando se utiliza um equipamento computacional para solucionar um problema matemático, se o número encontrado não pertencer às regiões de Underflow ou de Overflow e este não é representável exatamente no sistema de ponto flutuante SPF esse valor será representado de forma aproximada.

e) Erro absoluto

A definição de Ruggiero (1996) para este erro, é que ao fazermos a diferença entre o valor exato de um número x e de seu valor aproximado \bar{x} :

$$EA_x = x - \bar{x} \quad (3.1)$$

denotamos por erro absoluto. Normalmente só conhecemos o valor \bar{x} , sendo assim, é muito difícil encontrar o valor exato do erro absoluto, mas o que geralmente se faz é obter um limitante superior ou uma estimativa para o módulo do erro.

f) Erro relativo

[...] "dependendo da ordem de grandeza dos números envolvidos, o erro absoluto não é suficiente para descrever a precisão de um cálculo. Por está razão, o erro relativo é amplamente empregado." (RUGGIERO, 1996, p. 13)

A definição deste erro é dado como sendo o valor do erro absoluto dividido pelo valor aproximado:

$$ER_x = \frac{EA_x}{\bar{x}} = \frac{x - \bar{x}}{\bar{x}} \quad (3.2)$$

Geralmente, nos diversos tipos de métodos numéricos são encontrados algum tipo de erro, pois nenhum deles é perfeitamente preciso, sendo assim, o que descobrimos ao solucionar algum problema matemático é um valor aproximado do real, e portanto deve-se procurar o melhor método antes de resolver algum problema, ou seja, o método que nos fornece o valor mais aproximado possível.

3.1. Métodos numéricos aplicados a soluções de EDOs

3.1.1. Método de Taylor de Ordem q

De aplicabilidade quase que geral, o método de Taylor será o primeiro que iremos discutir neste trabalho, ele nos servirá para introduzirmos outras maneiras e pode ser utilizado unindo-se com outros métodos. (FRANCO, 2006)

Para compreendermos esse método necessitaremos do conhecimento sobre a expansão em série de Taylor para $y(x_n + h)$ em torno do ponto x_n , sabendo que h é o comprimento da distância de um ponto para o outro, ou seja, se tomarmos um h muito pequeno teremos inúmeros pontos a serem analisados em um determinado intervalo. A expansão em série de Taylor é dada por:

$$y(x_n + h) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!} y''(x_n) + \dots + \frac{h^q}{q!} y^{(q)}(x_n) + \frac{h^{q+1}}{(q+1)!} y^{(q+1)}(\varepsilon_n) \quad (3.3)$$

$$x_n < \varepsilon_n < x_n + h \quad (3.4)$$

onde o ultimo termo de 3.3 é o **erro de truncamento local**, ou seja, quanto maior for a ordem q do método, menor será o erro.

As derivadas na expansão não são conhecidas explicitamente, porém, se f é suficientemente derivável, elas podem ser obtidas considerando a derivada total de $y' = f(x, y)$ com respeito a variável x , sem nos esquecermos que y é função de x . Assim, obtemos para as primeiras derivadas:

$$y' = f(x, y), \quad (3.5)$$

$$y'' = f' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} = f_x + f_y f, \quad (3.6)$$

$$y''' = f'' = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_x}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \left[\frac{\partial f_y}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} \frac{dy}{dx} \right] f + f_y \left[\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} \right] \quad (3.7)$$

$$y''' = f'' = f_{xx} + f_{xy} f + f_{yx} f + f_{yy} f^2 + f_y f_x + f_y^2 f \quad (3.7)$$

$$y''' = f'' = f_{xx} + 2f_{xy} f + f_{yy} f^2 + f_x f_y + f_y^2 f \quad (3.7)$$

⋮

De acordo com Franco (2006), continuando desta maneira, podemos expressar qualquer derivada de y em termos de $f(x, y)$ e de suas derivadas parciais. Contudo, é claro que, a menos que $f(x, y)$ seja uma função muito simples, as derivadas totais de ordem mais elevada tornam-se cada vez mais complexas.

Esta equação pode ser interpretada como uma relação aproximada entre valores exatos da solução (FRANCO, 2006, p. 384). Fazendo isso, obtemos:

$$y_{n+1} = y_n + hf_n + \frac{h^2}{2!}f'_n + \dots + \frac{h^q}{q!}f_n^{(q-1)} \quad (3.8)$$

que é chamado **Método de Taylor de ordem q**.

Essa expressão faz parte do grupo de métodos de passo simples, h , pois o método de Taylor exige o conhecimento apenas do valor do último ponto calculado, ou seja, o ponto x_n . Segundo Franco (2006), a equação se enquadra também na categoria de **Métodos Explícitos**, pois todos os termos do lado direito dependem apenas do ponto y_n , fornecendo o valor de y_{n+1} .

Considerado o método mais simples na resolução de equações diferenciais, o método de Taylor é o ponto de introdução para outros métodos, não se pode negar a sua importância nos cálculos, porém ele apresenta alguns pontos negativos que não se pode deixar de lado. Franco (2006) diz que, os seus resultados não são tão eficientes, é necessário calcular as derivadas parciais de f e está sempre avaliando os resultados obtidos nos pontos (x_n, y_n) , ele ainda nos fala que esse método não é válido para todos os problemas, ou seja, em alguns casos não se pode utilizar q qualquer.

3.1.2. Método de Euler

Esse método possui grande semelhança com o método de Taylor e isso não é só coincidência, Arenales (2008), afirma que o método de Euler foi desenvolvido através do método de Taylor de ordem 1. Para comprovar essa equação tem-se que considerar o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (3.9)$$

Esse método numérico foi desenvolvido por Leonhard Paul Euler, por volta de 1768 a partir da série de Taylor para $q = 1$, segundo Arenales(2008), essa fórmula é a mais simples para se calcular a solução aproximada do problema de valor inicial. Vejamos o desenvolvimento da série de Taylor para $q = 1$:

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n \quad (3.10)$$

sabe-se que se $y'_n = f(x_n, y_n)$, assim podemos escrever:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \rightarrow \text{Método de Euler} \quad (3.11)$$

O método de Euler consiste em n passos e é válido para cada um dos pontos x_n , $n = 0, 1, 2, 3, \dots, \mathbb{N}$ de um intervalo $[a, b]$ como podemos ver alguns passos abaixo (ARENALES, 2008).

$$\text{Primeiro passo} \rightarrow y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0),$$

$$\text{Segundo passo} \rightarrow y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1),$$

Terceiro Passo \rightarrow :

Segundo Franco (2006), o método de Euler não nos fornece resultados satisfatórios e em certos casos o método de Taylor é mais eficiente, pois nos dá valores com grau de valor mais aproximado.

3.1.3. Métodos de Runge-Kutta

Desenvolvidos por Carl David Tolmé Runge (1856-1927) e Wilhelm Kutta (1867-1944), os métodos numéricos de Runge-Kutta, assim conhecidos, são os mais utilizados para se calcular soluções aproximadas de problema de valor inicial (PVI), Arenales (2008) nos afirma que, a utilização frequente desse método ocorre pelo motivo de serem simples e com uma precisão semelhante aos métodos de Taylor.

Esses métodos apresentam precisão equivalente aos métodos de Taylor, porém, com a vantagem de evitar o cálculo de derivadas de ordem elevada que além, da complexidade analítica, exigem um significativo esforço computacional. Ao contrário disto, os métodos de Runge-Kutta são baseados na avaliação da função $f(x, y)$ em alguns pontos (ARENALES, 2008, p. 251).

Considere o PVI:

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (3.12)$$

Definição 3.1: Para o PVI dado, segundo Arenales (2008), temos a definição do método de Runge-Kutta de R -estágios, que é dado pela seguinte expressão:

$$y_{n+1} = y_n + h\phi_R(x_n, y_n, h) \quad (3.13)$$

onde

$$\phi_R(x_n, y_n, h) = c_1 k_1 + c_2 k_2 + \dots + c_R k_R \quad (3.14)$$

$$c_1 + c_2 + \dots + c_R = 1 \quad (3.15)$$

com

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$\begin{aligned}
k_2 &= f(x_n + ha_2, y_n + h(b_{21}k_1))a_2 = b_{21} \\
k_3 &= f(x_n + ha_3, y_n + h(b_{31}k_1 + b_{32}k_2))a_3 = b_{31} + b_{32} \\
k_4 &= f(x_n + ha_4, y_n + h(b_{41}k_1 + b_{42}k_2 + b_{43}k_3))a_4 = b_{41} + b_{42} + b_{43} \\
&\vdots \\
k_R &= f(x_n + ha_R, y_n + h(b_{R1}k_1 + \dots + b_{R,R-1}k_{R-1}))a_R = b_{R1} + b_{R2} + \dots + b_{R,R-1} \quad (3.16)
\end{aligned}$$

Note que a aproximação y_{n+1} é calculada a partir de y_n e uma "média" de valores da função $f(x_n, y_n)$ em vários pontos. Os parâmetros c_r, a_r, b_{rs} na definição de um método de Runge-Kutta podem ser escolhidos de modo que o método tenha a mesma ordem de um método de Taylor, o que define a ordem dos métodos de Runge-Kutta (ARENALLES, 2008, p. 252).

Segundo Ruggiero (1996), a idéia central dos métodos de Runge-Kutta é utilizar os pontos positivos dos métodos de série de Taylor, ou seja, a simplicidade dos resultados fornecidos muito aproximados, e abolir os negativos, que é o cálculo de várias derivadas de f e em seguida está sempre avaliando os resultados obtidos nos pontos (x_n, y_n) .

Os métodos de Runge-Kutta de ordem R , de acordo com Ruggiero (1996), são caracterizados por três propriedades básicas:

- i. são de passo um;
- ii. não exigem o cálculo de qualquer derivada de $f(x, y)$; ao invés disso, deve-se calcular $f(x, y)$ em vários pontos;
- iii. após expandir $f(x, y)$ por Taylor para função de duas variáveis em torno de (x_n, y_n) e agrupar os termos semelhantes, sua expressão coincide com a do método de série de Taylor de mesma ordem.

3.1.3.1. Método de Runge-Kutta de 1 estágio (método de Euler)

O método de Runge-Kutta de 1 estágio, ou seja, $R = 1$, é o mais simples, nos garante Arenales (2008). Quando observamos esse método e comparamos com os já mostrados neste trabalho, percebemos a semelhança desse método com o método de Euler, que conseqüentemente, se assemelha também ao método de Taylor de 1ª ordem. O método de Runge-Kutta é dado por:

$$y_{n+1} = y_n + hk_1, \quad \text{com } k_1 = f(x_n, y_n) \quad (3.17)$$

3.1.3.2. Método de Runge-Kutta de 2 estágio (método de Euler aperfeiçoado)

Conhecido como método de Heun, ou método de Euler Aperfeiçoado, segundo Ruggiero (1996), é um método que possui a finalidade de expor mudanças no método de Euler e com o propósito de conseguir um método de ordem mais elevada.

De acordo com Arenales (2008), o método de Runge-Kutta de 2 estágio é dado por:

$$y_{n+1} = y_n + h(c_1k_1 + c_2k_2) \quad (3.18)$$

com

$$c_1 + c_2 = 1$$

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f(x_n + ha_2, y_n + h(b_{21}k_1))a_2 = b_{21}$$

Agora vamos substituir os valores de b_{21} e k_1 em k_2 , temos que:

$$k_2 = f(x + a_2h, y + ha_2f) \quad (3.19)$$

Em torno do ponto (x, y) , desenvolve-se k_2 em série de Taylor, obtendo:

$$k_2 = f(x, y) + (a_2h)f_x(x, y) + (ha_2f)f_y(x, y) + \frac{(a_2h)^2}{2!}f_{xx}(x, y) + (a_2h)(ha_2f)f_{xy}(x, y) + \frac{(ha_2f)^2}{2!}f_{yy}(x, y) + O(h^3) \quad (3.20)$$

Substituindo o valor de k_1 por f e k_2 pela expressão em série de Taylor, em $\phi(x, y, h)$, segue que:

$$\phi(x, y, h) = c_1f + c_2 \left[f + (a_2h)f_x + (a_2hf)f_y + \frac{(a_2h)^2}{2!}f_{xx} + (a_2h)^2ff_{xy} + \frac{(a_2hf)^2}{2!}f_{yy} + O(h^3) \right]$$

$$\phi(x, y, h) = (c_1 + c_2)f + c_2a_2h(f_x + f_yf) + \frac{(a_2h)^2}{2!}c_2[f_{xx} + 2ff_{xy} + f_{yy}f^2] + O(h^3) \quad (3.21)$$

os termos de mesma potência de h podem ser agrupados. Franco (2006) ainda nos chama a atenção para a expressão anterior, observando que f e suas derivadas estão calculadas e (x, y) . Denotando-se por:

$$F = f_x + f_yf \quad e \quad G = f_{xx} + 2ff_{xy} + f_{yy}f^2 \quad (3.22)$$

obtemos:

$$\phi(x, y, h) = (c_1 + c_2)f + c_2a_2hF + \frac{(a_2h)^2}{2!}c_2G + O(h^3) \quad (3.23)$$

Agora podemos escrever a função $\phi_T(x, y, h)$, com $q = 3$, temos:

$$\phi_T(x, y, h) = f(x, y) + \frac{h}{2!}f'(x, y) + \frac{h^2}{3!}f''(x, y) + O(h^3)$$

$$\phi_T(x, y, h) = f + \frac{h}{2!}(f_x + f_y f) + \frac{h^2}{3!}(f_{xx} + 2f_{xy}f + f_{yy}f^2 + f_x f_y + f_y^2 f) + O(h^3)$$

$$\phi_T(x, y, h) = f + \frac{h}{2!}(f_x + f_y f) + \frac{h^2}{3!}[f_{xx} + 2f_{xy}f + f_{yy}f^2 + f_y(f_x + f_y f)] + O(h^3) \quad (3.24)$$

Usando F e G , 3.22, temos:

$$\phi_T(x, y, h) = f + \frac{h}{2}F + \frac{h^2}{3!}[G + f_y F] + O(h^3) \quad (3.25)$$

O método de Runge-Kutta de 2 estágio e ordem máxima pode ser determinado comparando $\phi(x, y, h)$ com $\phi_T(x, y, h)$, assim obtemos:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_2 a_2 = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (3.26)$$

Segundo Franco (2006), após resolver este sistema, obteremos o método de Runge-Kutta de ordem 2, porém o sistema acima possui duas equações e três incógnitas, ou seja, possui infinitas soluções, sendo assim, conseqüentemente, existem infinitos métodos de Runge-Kutta de 2 estágios e ordem 2.

Agora temos que atribuir valores para uma das constantes acima, para que possamos encontrar as outras duas funções em função desta. "Os **Métodos de Runge-Kutta de 2 estágios e ordem 2** mais usados são obtidos a seguir." (FRANCO, 2006, p. 408)

a) Tomando a constante $c_1 = 0$, encontramos $c_2 = 1$ e $a_2 = \frac{1}{2}$. Portanto:

$$y_{n+1} = y_n + hk_2 \quad (3.27)$$

$$\text{onde: } k_1 = f(x_n, y_n),$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_1\right)$$

que é conhecido como **Método de Euler Modificado**. Embora k_1 não apareça explicitamente, temos que calculá-lo a cada passo.

b) Tomando a constante $c_1 = \frac{1}{2}$, encontramos $c_2 = \frac{1}{2}$ e $a_2 = 1$. Portanto:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) \quad (3.28)$$

$$\text{onde: } k_1 = f(x_n, y_n),$$

$$k_2 = f(x_n + h, y_n + hk_1),$$

que é conhecido como **Método de Euler Melhorado**.

O principais métodos, analíticos e numéricos, utilizados na resolução de equações diferenciais já foram apresentados e agora iremos analisá-los,

separadamente, através de um problema matemático, proposto logo a seguir, e por fim, vamos comparar os resultados obtidos, com a finalidade de apresentar o método numérico que nos forneça os melhores resultados possíveis.

4. Modelo de circuito RL

O termo modelo é utilizado, frequentemente, como sinônimo de equações diferenciais ordinárias quando referidas a aplicações para descrever fenômenos físicos, químicos, entre outros. Um fenômeno físico que pode ser modelado por uma equação diferencial ordinária de 1ª ordem é comportamento de uma corrente elétrica num circuito RL.

Quando o movimento de uma corrente elétrica ocorre ao longo de uma trajetória que forma um circuito fechado, essa trajetória é denominada de circuito elétrico, nos afirma YOUNG (2009). Segundo Halliday e Resnick (2009), os circuitos RL são constituídos por um resistor com resistência R , um indutor de indutância L e uma fonte com voltagem E constante, e pode ser representado pela Figura 4.1. Os elementos que constituem um circuito RL são descritos a seguir:

- Resistor: É um condutor que cuja função em um circuito é oferecer certa resistência à passagem da corrente elétrica;
- Corrente elétrica: É o movimento de partículas carregadas;
- Indutor: É essencialmente um fio condutor enrolado em forma helicoidal e quando uma corrente elétrica circula por este dispositivo aparece um campo magnético ao redor dele;
- Tensão (ou fonte): A tensão (ou diferença de potencial) entre dois pontos é o trabalho necessário para transferir carga unitária de um ponto para outro. (KIENITZ, 2010).

Um circuito RL completo, ou seja, composto por todas as partes definidas anteriormente, é representado conforme a Figura 4.1, vejamos:

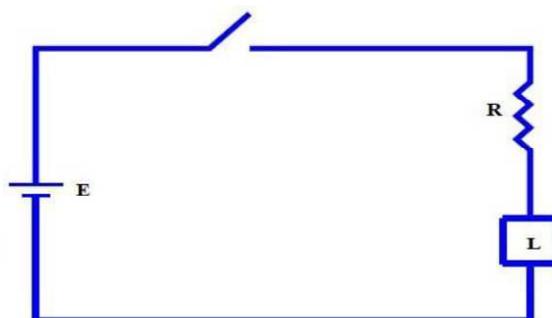


Figura 4.1: Circuito RL.

Segundo Halliday e Resnick (2009), inicialmente um indutor se opõe a qualquer variação da corrente que o atravessa e só após um tempo suficientemente longo o indutor se comporta como um fio comum. A corrente elétrica I em um circuito RL varia em função do tempo t , ou seja, $I = I(t)$. A variação da corrente elétrica, com relação ao tempo, pode ser descrita por uma equação diferencial ordinária de primeira ordem, conforme nos mostra a equação 4.1 a seguir.

$$L \frac{dI}{dt} + RI = E \quad (4.1)$$

Com todas as informações fornecidas e os métodos de resolução já apresentados neste trabalho podemos encontrar a função $I(t)$ e traçar os gráficos de cada método, para que por fim possamos comparar os seus resultados e expor qual é método mais eficiente, ou seja, qual é o método que fornece o resultado mais aproximado do valor exato.

5. Solução analítica utilizando o método do fator integrante

Considere a equação que descreve o modelo de circuito RL.

$$L \frac{dI}{dt} + RI = E \quad (5.1)$$

Se $L \neq 0$, podemos dividir a equação 5.1 por L , obtendo a seguinte equação:

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{E}{L} \quad (5.2)$$

essa expressão nos faz lembrar de uma equação diferencial de 1ª ordem linear escrita na sua forma normal, dada por:

$$\frac{dI}{dt} + P(t)I = Q(t) \quad (5.3)$$

onde

$$P(t) = \frac{R}{L} \quad Q(t) = \frac{E}{L} \quad (5.4)$$

Agora podemos encontrar o fator integrante, dado por

$$F(t) = \exp\left[\int P(t)dt\right] \quad (5.5)$$

em que R , L e E são constantes. Assim, temos:

$$F(t) = \exp\left[\int \frac{R}{L} dt\right] \quad (5.6)$$

$$F(t) = \exp\left[\frac{R}{L}t\right] \quad (5.7)$$

Temos o fator integrante F , agora podemos encontrar $I(t)$ através da fórmula

$$I(t) = \frac{1}{F(t)} * [\int F(t) * Q(t)dt + c] \quad (5.8)$$

onde c é uma constante.

$$I(t) = \frac{1}{\exp\left[\frac{R}{L}t\right]} * \left[\int \exp\left[\frac{R}{L}t\right] * \frac{E}{L} dt + c\right] \quad (5.9)$$

$$I(t) = \frac{1}{\exp\left[\frac{R}{L}t\right]} * \left[\exp\left[\frac{R}{L}t\right] * \frac{L}{R} * \frac{E}{L} + c\right] \quad (5.10)$$

$$I(t) = \frac{E}{R} + \frac{c}{\exp\left[\frac{R}{L}t\right]} \quad (5.11)$$

Considerando $I(0) = 0$, teremos o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} I(t) = \frac{E}{R} + \frac{c}{\exp\left[\frac{R}{L}t\right]} \\ I(0) = 0 \end{cases} \quad (5.12)$$

Assim, obtemos $c = -\frac{E}{R}$ e, portanto, a corrente elétrica será dada por:

$$I(t) = \frac{E}{R} \left(\frac{\exp\left[\frac{R}{L}t\right] - 1}{\exp\left[\frac{R}{L}t\right]} \right) \quad (5.13)$$

Tendo a função $I(t)$, equação 5.13, podemos encontrar os respectivos valores de I para cada instante t e representá-los, graficamente, utilizando o *software* MatLab.

6. Resultados e discussão

A fim de analisar os métodos numéricos estudados, utilizamos o *software* MatLab (Matrix Laboratory), que foi desenvolvido pela MathWorks em 1984, destinado à análise e modelagem de sistemas e algoritmos. Utilizamos a versão 2013a para comparar os resultados de cada método com a solução analítica do problema proposto a seguir.

6.1. Problema proposto

Considere um circuito RL com um resistor cuja resistência é $R = 10\Omega$, uma indutância $L = 10H$ e uma fonte com $E = 110V$. Determine os valores, para a função $I = I(t)$, nos instantes t , variando de $0 < t < 10s$.

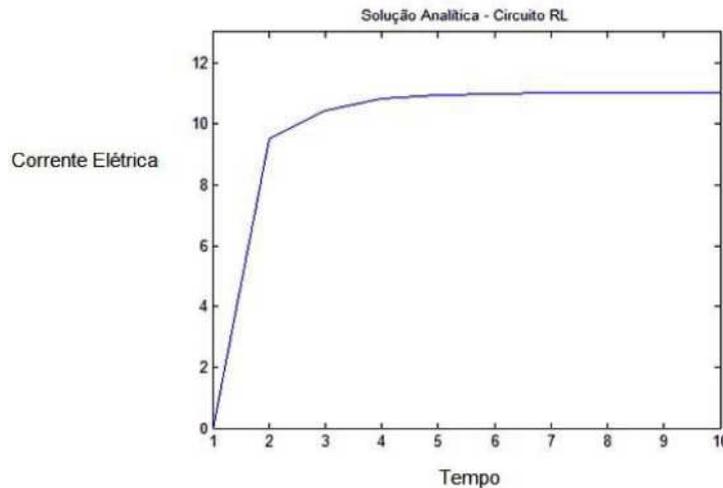
6.2. Solução analítica

Substituindo os valores de R , L e E na Equação 5.13, obtemos:

$$I(t) = \frac{110}{10} \left(\frac{\exp\left[\frac{10}{10}t\right] - 1}{\exp\left[\frac{10}{10}t\right]} \right) = 11 \left(\frac{\exp[t] - 1}{\exp[t]} \right)$$

Na Figura 6.1 podemos observar o gráfico da função $I(t)$ para $0 < t < 10s$.

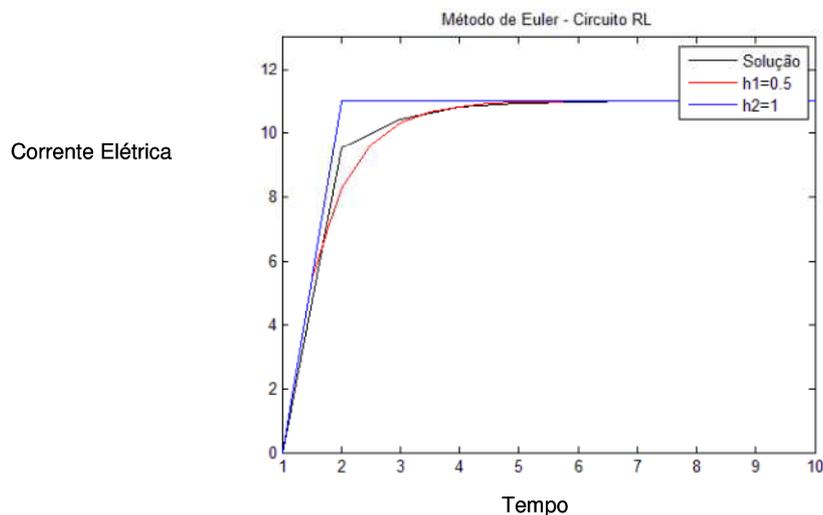
Figura 6.1 – Solução analítica



6.3. Método de Euler

Resolvendo a Equação 5.13 utilizando o método de Euler com o passo $h1 = 0,5$ e $h2 = 1$, obtemos os gráficos apresentados pela Figura 6.2, que também contém o gráfico da solução analítica.

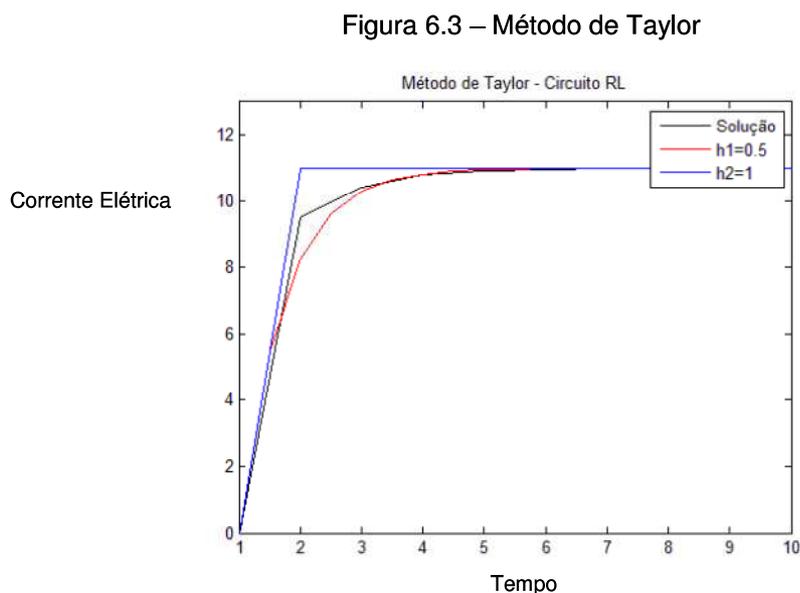
Figura 6.2 – Método de Euler



A partir do gráfico, Figura 6.2, podemos observar que o método de Euler para o passo $h_2 = 1$ extrapola os valores da solução analítica, e para o passo $h_1 = 0,5$ os valores obtidos pelo método de Euler são inferiores aos valores da solução analítica. Observamos que quando diminuimos o passo, ou seja, aumentamos o número de pontos considerados, o gráfico do método de Euler se aproxima melhor do gráfico da solução analítica.

6.4. Método de Taylor de ordem 2

Na Figura 6.3 podemos observar que, conforme a teoria, os resultados são semelhantes aos resultados obtidos pelo Método de Euler, isso se deve ao fato do Método de Euler ser derivado do Método de Taylor.



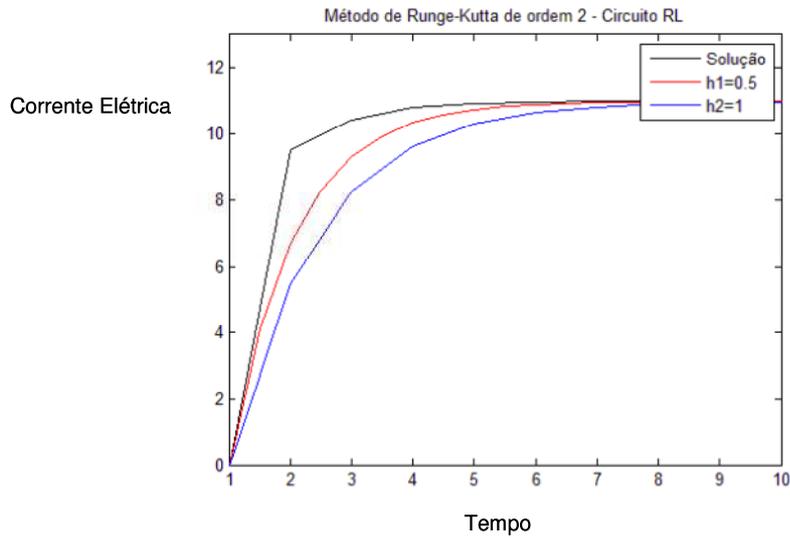
Utilizamos a ordem 2 do método de Taylor para criarmos esse gráfico, devido o método de Euler ser igual ao Taylor de ordem 1.

6.5. Método de Runge-Kutta

Na Figura 6.4 conseguimos observar que o Método de Runge-Kutta de ordem 2, (já que o de ordem 1 é semelhante ao de Taylor de mesma ordem e, conseqüentemente, é igual ao método de Euler), para o passo $h_1 = 0,5$, se

aproxima melhor da solução analítica, nos confirmando o fato de que, quanto menor é o passo, melhor será a precisão do método.

Figura 6.4 – Método de Runge-Kutta de ordem 2



Nas Figuras 6.5 e 6.6 podemos observar que não há grandes diferenças para os Métodos de Runge-Kutta de ordem 3 e de ordem 4 para o problema que foi proposto. Além disso, os gráficos com passo $h1 = 0,5$ e $h2 = 1$ também são semelhantes.

Figura 6.5 – Método de Runge-Kutta de ordem 3

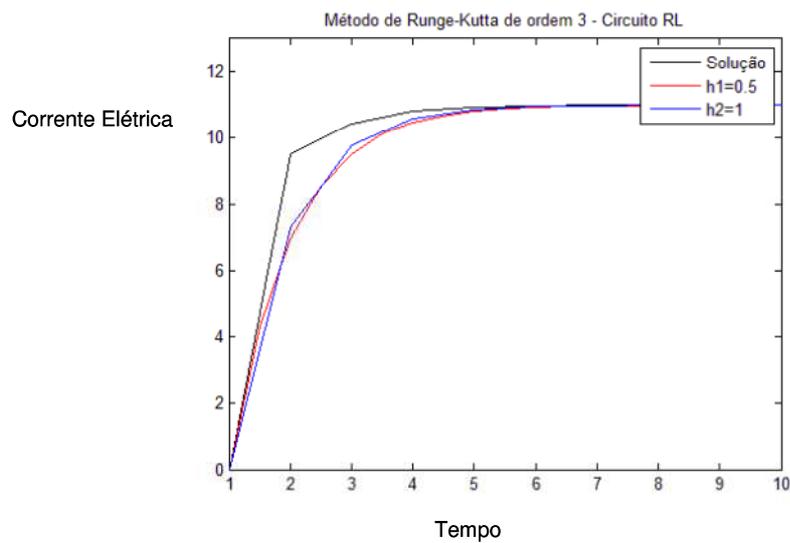
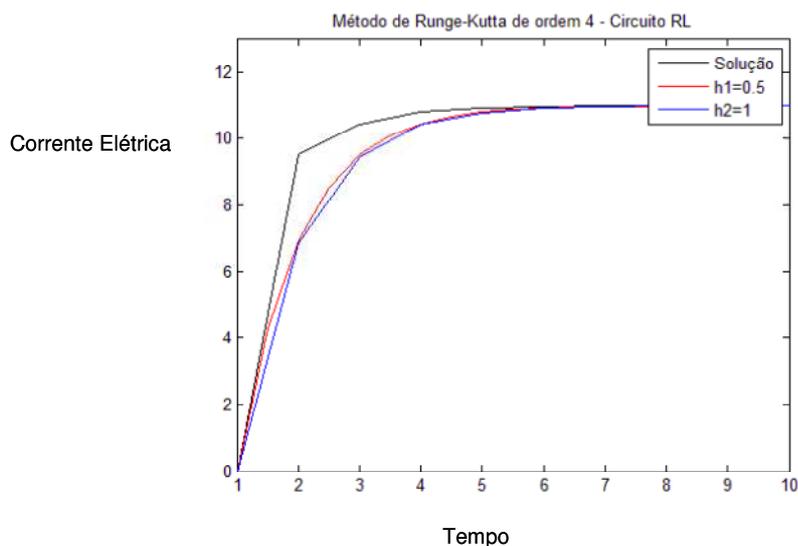


Figura 6.6 – Método de Runge-Kutta de ordem 4



7. Considerações finais

Neste trabalho observamos a importância do estudo das equações diferenciais, pois são utilizadas para modelagem de problemas em diversas áreas, tais como: física, química, biologia, entre outras. Em alguns casos, quando a solução analítica dessas equações diferenciais tornam-se complexas, utilizam-se métodos numéricos para resolução das mesmas.

Os métodos numéricos fornecem soluções aproximadas da solução exata, portanto, apresentam diferenças entre o valor exato e o valor obtido pelo método numérico. No entanto, observamos pelos gráficos obtidos através do *software* MatLab, que quanto menor o passo h , maior é o grau de precisão do resultado.

Os métodos numéricos apresentados neste trabalho apresentaram diferenças mínimas entre os seus resultados, quando comparados com a solução analítica, e o método de Taylor de ordem 2 se saiu “melhor” que os demais, pois os seus resultados se aproximaram bastante da solução exata.

Conforme a teoria estudada, o grau de precisão do método de Taylor deveria ser equivalente ao método de Runge-Kutta, sendo diferente apenas pelo fato de não ser preciso calcular diversas derivadas utilizando o método de Runge-Kutta, no entanto, observamos que a curva gerada pelo Método de Taylor de ordem 2, para o problema proposto, que é relativamente simples, atingiu um resultado mais excelente.

NUMERICAL METHODS FOR SOLVING ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS USING THE SOFTWARE MATLAB

ABSTRACT

In this paper a brief review of ordinary differential equations will be showing some types of equations, as well as methods of analytical resolution of the same. Also, be discussed numerical methods used to solve ordinary differential equations, as an alternative to the analytical solution, in some cases, can become a complex process. A comparison between the numerical methods studied for solving a problem using MatLab question will be presented.

Keywords: Differential equations. Numerical methods. MatLab.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARENALES, Selma. DAREZZO, Artur. **Cálculo numérico: aprendizagem com apoio de software.** São Paulo: Thomson Learning, 2008.

FRANCO, Neide Bertoldi. **Cálculo numérico.** São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.

HALLIDAY, David. RESNICK, Robert. WALKER, Jearl. **Fundamentos de física: eletromagnetismo.** Volume 3. Tradução e revisão técnica Ronaldo Sérgio de Biasi. Rio de Janeiro: LTC, 2009.

KIENITZ, Karl Heinz. **Análise de circuitos: um enfoque de sistemas.** 2ª ed. São José dos Campos: Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 2010.

MACHADO, Kleber Daum. **Equações diferenciais aplicadas.** Vol. 1. Ponta Grossa, PR: TODAPALAVRA, 2012.

MELO, Kelly Jacqueline Moura de. **Aplicação do método das diferenças finitas explícito na solução da equação do calor para o caso transiente e unidimensional.** Angicos, RN: UFERSA, 2011.

PIRES, José Agostinho Lopes. **Cálculo Diferencial: estudo histórico sobre a evolução do Cálculo Diferencial no século XVII.** 2004. 147 f. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática) - Departamento de Matemática, Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro (utad), Vila Real. 2004.

RUGGIERO, Márcia A. Gomes. LOPES, Vera Lúcia da Rocha. **Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais**. 2ª Ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 1996.

YOUNG, Hugh D. FREEDMAN, Roger A..**Física III: eletromagnetismo**. [colaborador A. Lewis Ford]. tradução Sonia Midori Yamamoto. revisão técnica Adir Moysés Luiz. São Paulo; Addison Wesley, 2009.