Centro de Ciências e Tecnologia - CCT

Departamento de Matemática

Curso de Licenciatura em Matemática

Isabella Silva Duarte

Espaços Métricos e o Teorema do Ponto Fixo de Banach

Campina Grande - PB

2014

ISABELLA SILVA DUARTE

Espaços Métricos e o Teorema do Ponto Fixo de Banach

Trabalho de Conclusão do Curso apresentado ao Departamento de Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia - CCT da Universidade Estadual da Paraíba - UEPB , em cumprimento às exigências legais para a obtenção do título de Graduada no Curso de Licenciatura em Matemática .

Orientação da Professora Ms. Joselma Soares dos Santos.

Campina Grande - PB
2014

D812e Duarte, Isabella Silva.
Espaços métricos e o teorema do ponto fixo de Banach [manuscrito] / Isabella Silva Duarte. - 2014.
54 p.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2014.
"Orientação: Profa. Ma. Joselma Soares dos Santos, Departamento de Matemática".

1. Espaços métricos. 2. Espaço de Banach. 3. Teorema do Ponto Fixo. I. Título.

21. ed. CDD 512

ISABELLA SILVA DUARTE

Espaços Métricos e o Teorema do Ponto Fixo de Banach

Trabalho de Conclusão do Curso apresentado ao Departamento de Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia - CCT da Universidade Estadual da Paraíba - UEPB , em cumprimento às exigências legais para a obtenção do título de Graduada no Curso de Licenciatura em Matemática .

Aprovado pela banca examinadora em 28 de Novembro de 2014.

Banca Examinadora

Joselma S. Santos

Prof^{a}. Ms. Joselma Soares dos Santos
Departamento de Matemática - Campus I/UEPB
Orientadora

Luciana Freitas

Prof^{a}. Dr^{a} Luciana Roze de Freitas
Departamento de Matemática - Campus I/UEPB
Examinadora

Luciano dos Santos Ferreira

Prof. Ms. Luciano dos Santos Ferreira
Departamento de Matemática - Campus VI/UEPB
Examinador

Dedico este trabalho a todos aqueles que me apoiaram e torceram por mim durante toda minha vida acadêmica. Aos meus pais, meu noivo Jucyano Cunha, meus professores da educação básica, destacando entre eles meu querido professor Ednaldo Bernardo, aos meus professores da graduação, e entre tantos, destaco minha orientadora Joselma Soares. Com carinho e muito esforço, este é pra vocês.

Agradecimentos

Primeiramente a DEUS, por ter me abençoado com determinação durante toda a minha vida e por ter posto suas mãos sobre mim nos momentos que eu mais precisei.

Aos meu pais, Fátima e José Paulo, e ao meu noivo e futuro marido, Jucyano Cunha, por terem compreendido toda a minha falta de atenção durante a minha graduação, e mesmo assim, me apoiado nos momentos de desespero e me aconselhado nas vezes em que eu cogitei a hipótese de desistir.

Aos meus amigos de turma que, assim como eu, passavam por esses momentos de desespero, e mesmo assim arranjavam força para encorajar uns aos outros. Pela ajuda mútua nas muitas e muitas vezes que passávamos todo o dia na universidade estudando para todas as disciplinas quando era preciso. Esses eu posso citar os nomes, por serem poucos os que chegaram até o final comigo, mas não esquecendo todos os outros que passaram pela turma. Obrigada meus amigos: Alex Junior, Ana Trajano, Elionora Ramos, Elivelton Silva, Josyclesio Lima e Thâmara Brasil.

Aos meus professores de graduação, por contribuírem não só para o meu crescimento enquanto estudante, mas também para meu desenvolvimento enquanto pessoa. Aqui destaco alguns que foram de fundamental importância para meu prosseguimento dentro desta universidade: Aldo Trajano, Aluska Dias, Conceição Vieira, Davis Matias, Fernando Luiz, José Elias, Luciana Freitas, Milla Miranda, Thiciany Iwano e Vandemberg Lopes.

Por fim, mas não menos importante, à minha orientadora Joselma Soares, que também se inclui no parágrafo acima. Agradeço por toda a sua paciência e dedicação para comigo, e por não ter me deixado "na mão" em nenhum momento.

Agradeço desde já aos professores da banca, Luciana Freitas e Luciano Ferreira, por terem aceitado o convite, por examinarem este trabalho e pelas possíveis sugestões que virão a enriquecê-lo.

Obrigada a todos e a cada um.

"Nunca deixe que te digam que não vale a pena acreditar no sonho que se tem...".
Renato Russo

Resumo

Neste trabalho temos como principal objetivo enunciar e demonstrar o Teorema do Ponto Fixo de Banach e exibir algumas de suas aplicações. Para isto, estudamos inicialmente os espaços métricos, as sequências de Cauchy em espaços métricos e alguns resultados a-cerca destes conteúdos, e em seguida estudamos os espaços métricos completos, a fim de definirmos os espaços de Banach, e finalmente enunciar, demonstrar e apresentar algumas aplicações do Teorema do Ponto Fixo de Banach (para contrações), o qual diz que se M é um espaço métrico completo, toda contração $f : M \to M$ possui um único ponto fixo em M, isto é, existe um único $x \in M$ tal que $f(x) = x$.

Palavras-Chave: Espaços Métricos, Espaço de Banach, Teorema do Ponto Fixo.

Abstract

In this work we have as main objective to formulate and demonstrate Fixed Point Theorem of Banach and display some of their applications. For this, first we study metric spaces, sequences of cauchy in metric spaces and some results about these content, and then studied the complete metric spaces, the order to define the Banach spaces, and finally stating, demonstrate and present some applications of the Fixed Point Theorem Banach (for contractions), which says that if M is a space complete metric, every contraction $f : M \to M$ has a unique fixed point in M ie here is a single $x \in M$ such that $f(x) = x$.

Keywords: Metric Space, Banach Space, Fixed Point Theorem.

SUMÁRIO

Introdução

A distância de dois pontos em $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ desempenham um papel fundamental tanto no Cálculo como na Geometria. Nos cursos de Cálculo de funções de uma ou várias variáveis, as noções de derivação e integração recaem sobre a noção de convergência e limite, e ambas, por sua vez, recaem sobre a noção intuitiva de distância entre pontos. Ao longo do seu desenvolvimento a Matemática, especialmente no século XIX, reconheceu a importância de abstrair e generalizar a noção intuitiva de distância, aplicando-a a outros tipos de conjuntos, ou melhor dizendo, a outros tipos de "espaços", onde um ponto poderia ser uma curva ou uma função. Esse desenvolvimento conduziu às noções de *métrica*, de *espaços métricos* e de *espaços métricos completos*. O teorema do *ponto fixo de Banach* é um resultado sobre espaços métricos, com muitas aplicações, particularmente para demonstrar a existência de soluções de equações diferenciais e equações integrais. Neste trabalho temos como principal objetivo definir e demonstrar o Teorema do Ponto Fixo de Banach, o qual nos garante que

"Se M é um espaço métrico completo, toda contração $f : M \to M$ possui um único ponto fixo em M."

Na demontração deste Teorema, podemos observar que uma estratégia para se obter pontos fixos é a partir de um ponto qualquer $x_0 \in M$, aplicar f sucessivas vezes, obtendo-se $x_1 = f(x_0),\ x_2 = f(x_1) = f^2(x_0), \ldots, x_n = f(x_{n-1}) = f^n(x_0)$ e no limite $n \to \infty$, esperar obter um ponto fixo, isto é, obter um elemento $x \in M$ satisfazendo $f(x) = x$. Essa ideia é chamada de *Método das Aproximações Sucessivas*.

Para isto, nosso trabalho está dividido em quatro capítulos. O capítulo 1 é destinado ao estudo dos Espaços Métricos, onde definimos métrica, espaço métrico, norma e espaço vetorial normado, além de alguns resultados acerca deste conteúdo. No capítulo 2 tratamos das Funções Contínuas, mais especificamente das Aplicações Lipschitzianas e das Contrações Fracas, além de definirmos as aplicações lineares. O capítulo 3 aborda o conceito de Sequências, em especial as Sequências de Cauchy, além da definição de Espaço Métrico Completo. Por fim, o capítulo 4 traz a definição de Espaço de Banhach e o ponto fixo, e finalmente o enunciado e a demonstração do nosso principal resultado, o Teorema do Ponto Fixo de Banach. Em seguida estudamos algumas de suas aplicações, em particular para provar a existência e unicidade de soluções para equações diferenciais ordinárias e equações integrais. Além destes capítulos, nosso trabalho contém um apêndice, o qual traz alguns dos principais resultados que foram utilizados.

1 Espaços Métricos

1.1. Espaços métricos

Definição 1.1 *Uma métrica num conjunto M, não-vazio, é uma função* $d : M \times M \to \mathbb{R}$*, que associa a cada par ordenado de elementos* $x, y \in M$ *um número real* $d(x,y)$*, chamado a distância de x a y, de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições para quaisquer x, y, z em M:*

M1) $d(x,x) = 0$*;*
M2) *Se* $x \neq y$ *então* $d(x,y) > 0$*;*
M3) $d(x,y) = d(y,x)$*;*
M4) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Definição 1.2 *Um Espaço Métrico é um par* (M,d) *onde M é um conjunto e d é uma métrica em M.*

Exemplo 1.1 *Considerando-se o conjunto* $\mathbb{R}$ *dos números reais a função* $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$*, dada por* $d(x,y) = |x-y|$*, onde* $|x|$ *representa o módulo ou valor absoluto de* $x \in \mathbb{R}$*, é uma métrica sobre* $\mathbb{R}$*.*

Solução: Verifiquemos cada item da definição, para isto usaremos as propriedades de módulo ou valor absoluto de números reais. De fato, sejam $x, y, z \in \mathbb{R}$, temos:
M1) $d(x,x) = |x-x| = |0| = 0$;

M2) Seja $x \neq y$. Se $x > y$, então $|x-y| = x-y > 0$. Para o caso $x < y$, temos

$$|x-y| = -(x-y) = y-x > 0;$$

M3) $d(x,y) = |x-y| = |(-1)\cdot(y-x)| = |-1|\cdot|y-x| = 1\cdot|y-x| = |y-x| = d(y,x)$;

M4) $d(x,z) = |x-z| = |x+(-y+y)-z| = |(x-y)+(y-z)| \leq |x-y|+|y-z|$. Ou seja,

$$d(x,z) = |x-z| \leq |x-y|+|y-z| = d(x,y)+d(y,z).$$

E então concluímos que d é uma métrica sobre $\mathbb{R}$.

Definição 1.3 *Seja X um conjunto arbitrário. Uma função real $f : X \to \mathbb{R}$ chama-se limitada quando existe uma constante $k > 0$ tal que $|f(x)| \leq k$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Exemplo 1.2 *A função $f(x) = sen(x)$, com $x \in \mathbb{R}$ é uma função limitada.*

Solução: Com efeito, sabemos que $-1 \leq sen(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, logo, pela propriedade de módulo, $|sen(x)| \leq 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Proposição 1.1 *A soma, a diferença e o produto de funções limitadas são ainda limitadas.*

Demonstração: Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções limitadas em M. Então existem $k_1 > 0$ e $k_2 > 0$ números reais tais que $|f(x)| \leq k_1$ e $|g(x)| \leq k_2$ para todo $x \in M$.
(i) A soma $|(f+g)(x)|$ é limitada, pois

$$|(f+g)(x)| = |f(x)+g(x)| \leq |f(x)|+|g(x)| \leq k_1+k_2.$$

(ii) O produto $|(f \cdot g)(x)|$ é limitado.
De fato,

$$|(f \cdot g)(x)| = |f(x) \cdot g(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)| \leq k_1 \cdot k_2.$$

■

Definição 1.4 *Indicaremos por $\mathcal{B}(X;\mathbb{R})$ o conjunto das funções limitadas $f : X \to \mathbb{R}$, isto é,*

$$\mathcal{B}(X;\mathbb{R}) = \{f : X \to \mathbb{R} : f \ \ limitada\}.$$

Exemplo 1.3 *Definiremos agora uma métrica em $\mathcal{B}(X;\mathbb{R})$ pondo, para $f,g \in \mathcal{B}(X;\mathbb{R})$ arbitrárias,*

$$d(f,g) = sup_{x \in X}|f(x)-g(x)|.$$

Solução: Temos que d está bem definida, pois sendo f e g funções limitadas o supremo está bem definido. Verifiquemos que d satisfaz as condições de métrica.
De fato, sejam $f,g,h \in \mathcal{B}(X;\mathbb{R})$, usando as propriedades de supremo, temos:
M1) $d(f,f) = sup_{x \in X}|f(x)-f(x)| = sup_{x \in X}|0| = 0$;

M2) Se $f \neq g$, então $d(f,g) = sup_{x \in X}|f(x) - g(x)| > 0$, pois, por definição de módulo, como $f \neq g$, temos $|f(x) - g(x)| > 0$ para todo $x \in X$, e consequentemente

$$sup_{x \in X}|f(x) - g(x)| > 0;$$

M3) $d(f,g) = sup_{x \in X}|f(x) - g(x)| = sup_{x \in X}|(-1) \cdot (-f(x) + g(x))|$.
Pela propriedade de valor absoluto,

$$|(-1) \cdot (-f(x) + g(x))| = |-1| \cdot |g(x) - f(x)| = |g(x) - f(x)|,$$

o que implica que

$$d(f,g) = sup_{x \in X}|g(x) - f(x)| = d(g,f);$$

M4) $d(f,h) = sup_{x \in X}|f(x) - h(x)| = sup_{x \in X}|f(x) - g(x) + g(x) - h(x)|$.
Usando a desigualdade triangular, temos que

$$d(f,h) \leq sup_{x \in X}[|f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)|].$$

E como, pela regra de supremo,

$$sup_{x \in X}[|f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)|] = sup_{x \in X}|f(x) - g(x)| + sup_{x \in X}|g(x) - h(x)|,$$

concluímos que

$$d(f,h) \leq d(f,g) + d(g,h).$$

Essa métrica é chamada *métrica da convergência uniforme*, ou *métrica do sup*.

1.2. Bolas e esferas

Seja a um ponto do espaço métrico M. Dado um número real $r > 0$, definimos:

Definição 1.5 *Chamamos bola aberta de centro a e raio r o conjunto $B(a;r)$, formado pelos pontos de M que estão a uma distância menor do quer do ponto a. Ou seja,*

$$B(a;r) = \{x \in M, d(x,a) < r\}.$$

Definição 1.6 *Chamamos de bola fechada de centro a e raio r o conjunto $B[a;r]$ dos pontos de M cuja distância ao ponto a é menor ou igual a r. Ou seja,*

$$B[a;r] = \{x \in M; d(x,a) \leq r\}.$$

Definição 1.7 *Chamamos de esfera de centro a e raio r o conjunto $S(a;r)$, formado pelos pontos $x \in M$ tais que $d(x,a) = r$. Assim:*

$$S(a;r) = \{x \in M; d(x,a) = r\}.$$

Assim, temos que $B[a;r] = B(a;r) \cup S(a;r)$ e essa é uma reunião disjunta.

Observação 1.1 *Quando a métrica d provem de uma norma no espaço vetorial E, podemos escrever:*
$B(a;r) = \{x \in E; \| x - a \| < r\}$;
$B[a;r] = \{x \in E; \| x - a \| \leq r\}$;
$S(a;r) = \{x \in E; \| x - a \| = r\}$.

Exemplo 1.4 *Com a métrica usual da reta, para todo $a \in \mathbb{R}$ e todo $r > 0$, a bola aberta de centro a e raio r é o intervalo aberto $(a - r, a + r)$, já que satisfaz a condição*

$$|x - a| < r \Rightarrow -r < x - a < r,$$

ou seja, $a - r < x < a + r$.
De forma análoga temos que $B[a;r]$ é o intervalo fechado $[a - r, a + r]$ e a "esfera" $S(a;r)$ tem apenas os dois pontos $a - r$ e $a + r$.

Observação 1.2 *Seja (x_n) um sequência em M. Afirmar que $lim\, x_n = a$ num espaço métrico M equivale a dizer que toda bola B de centro a (e portanto todo conjunto aberto A contendo a ou toda vizinhança V de a) contém x_n para todo valor de n, com excessão de um número finito deles.*

1.3. Espaços métricos normados e espaços métricos com produto interno

Definição 1.8 *Seja E um espaço vetorial real. Uma norma em E é uma função real*

$$\| \; \| : E \to \mathbb{R},$$

que associa a cada vetor $x \in E$ o número real $\| x \|$, de modo a serem cumpridas as condições abaixo para quaisquer $x, y \in E$ e λ escalar:

N1) *Se $x \neq 0$ então $\| x \| \neq 0$;*
N2) $\| \lambda \cdot x \| = |\lambda| \cdot \| x \|$;
N3) $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$.

Observação 1.3 *A desigualdade que consta no item N3) é conhecida como Desigualdade Triangular.*

Definição 1.9 *Um espaço vetorial normado é um par $(E, \parallel \parallel)$, onde E é um espaço vetorial real e $\parallel \parallel$ é uma norma em E.*

Definição 1.10 *Seja E um espaço vetorial real. Um produto interno em E é uma função $\langle , \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$, que associa a cada par ordenado de vetores x, $y \in E$ um número real $\langle x, y \rangle$, chamado o produto interno de x por y, de modo a serem cumpridas as condições abaixo, para $x, y, z \in E$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ arbitrários:*

P1) $\langle x+z, y\rangle = \langle x, y\rangle + \langle z, y\rangle$;

P2) $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda \cdot \langle x, y\rangle$;

P3) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$;

P4) $x \neq 0 \Rightarrow \langle x, x\rangle > 0$.

As três primeiras propriedades implicam

$$\langle x, y+z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle, \langle x, \lambda y\rangle = \lambda \cdot \langle x, y\rangle \ \ e \ \ \langle 0, y\rangle = 0.$$

Observação 1.4 *A partir do produto interno define-se a norma de um vetor $x \in E$ pondo*

$$\parallel x \parallel = \sqrt{\langle x, x\rangle},$$

ou seja,

$$\parallel x \parallel^2 = \langle x, x\rangle.$$

Proposição 1.2 *(Desigualdade de Cauchy-Schwarz) Sejam u e $v \in E$, com E um Espaço Métrico qualquer. Então, vale a expressão $|\langle u, v\rangle| \leq \parallel u \parallel \cdot \parallel v \parallel$.*

Demonstração: Sejam $u, v \in E$, se $u = 0$, a desigualdade é óbvia, pois

$$|\langle u, v\rangle| = |0| = 0 \text{ e } \parallel u \parallel = 0.$$

Se $u \neq 0$, tomando $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda = \langle u, v\rangle / \parallel u \parallel^2$, temos que o vetor $w = v - \lambda u$ é perpendicular a u, isto é, $\langle w, u\rangle = 0$, pois

$$\langle w, u\rangle = \langle v - \lambda u, u\rangle = \langle v, u\rangle - \lambda\langle u, u\rangle = \langle v, u\rangle - \lambda \parallel u \parallel^2 = 0.$$

Daí,

$$\parallel v \parallel^2 = \langle v, v\rangle = \langle w+\lambda u, w+\lambda u\rangle = \langle w, w\rangle + 2\lambda\langle w, u\rangle + \lambda^2\langle u, u\rangle = \parallel w \parallel^2 + 2\lambda\langle w, u\rangle + \lambda^2 \parallel u \parallel^2,$$

e como $\langle w,u\rangle = 0$, obtemos

$$\| v \|^2 = \| w \|^2 + \lambda^2 \| u \|^2,$$

de onde segue que

$$\lambda^2 \| u \|^2 \leq \| v \|^2,$$

pois $\| w \|^2 + \lambda^2 \| u \|^2 \geq \lambda^2 \| u \|^2$.

Mas, $\lambda^2 \| u \|^2 = \langle u,v\rangle^2 / \| u \|^2$, e portanto

$$|\langle u,v\rangle| \leq \| u \| \cdot \| v \| .$$

■

Exemplo 1.5 $\mathbb{R}^n$ *é um espaço vetorial com produto interno. Sejam* $x = (x_1,...,x_n)$ *e* $y = (y_1,...,y_n)$*. Sendo* $\langle x,y\rangle = x_1 \cdot y_1 + ... + x_n \cdot y_n$ *o produto interno desse espaço.*

Solução: Com efeito, sejam $x = (x_1,...,x_n)$, $y = (y_1,...,y_n)$ e $z = (z_1,...,z_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que

P1) $\langle x+z,y\rangle = (x_1 + z_1) \cdot y_1 + (x_2 + z_2) \cdot y_2 + ... + (x_n + z_n) \cdot y_n$, pela distributividade da soma, temos

$$\langle x+z,y\rangle = (x_1 \cdot y_1 + y_1 \cdot z_1) + ... + (x_n \cdot y_n + y_n \cdot z_n).$$

Usando a comutatividade e a associatividade da adição, obtemos

$$\langle x+z,y\rangle = (x_1 \cdot y_1 + ... + x_n \cdot y_n) + (y_1 \cdot z_1 + ... + y_n \cdot z_n),$$

que pela definição dada, resulta em

$$\langle x+z,y\rangle = \langle x,y\rangle + \langle y,z\rangle.$$

P2) $\langle \lambda x,y\rangle = \lambda x_1 \cdot y_1 + \lambda x_2 \cdot y_2 + ... + \lambda x_n \cdot y_n$. Usando a propriedade distributiva, temos que

$$\langle \lambda x,y\rangle = \lambda \cdot (x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + ... + x_n \cdot y_n).$$

E pela definição, concluímos que

$$\langle \lambda x,y\rangle = \lambda \cdot \langle x,y\rangle.$$

P3) $\langle x,y\rangle = x_1\cdot y_1 + x_2\cdot y_2 + ... + x_n\cdot y_n$. Usando a propriedade comutativa da multiplicação, obtemos que

$$\langle x,y\rangle = y_1\cdot x_1 + y_2\cdot x_2 + ... + y_n\cdot x_n = \langle y,x\rangle.$$

P4) Se $x \neq 0$, então $\langle x,x\rangle = x_1\cdot x_1 + x_2\cdot x_2 + ... + x_n\cdot x_n = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 > 0$.

Satisfeitas P1) - P4), concluímos que $\mathbb{R}^n$ possui produto interno definido por $\langle x,y\rangle = x_1\cdot y_1 + ... + x_n\cdot y_n$.

Exemplo 1.6 *São espaços vetoriais normados*

I) $(\mathbb{R}^n, \|\ \|_1)$, *onde para* $x = (x_1,x_2,...,x_n) \in \mathbb{R}^n$, *define-se* $\| x \|_1 = \sqrt{\sum(x_i)^2}$;

II) $(\mathbb{R}^n, \|\ \|_2)$, *onde para* $x = (x_1,x_2,...,x_n) \in \mathbb{R}^n$, *define-se* $\| x \|_2 = \sum \| x_i \|$;

III) $(\mathbb{R}^n, \|\ \|_3)$, *onde para* $x = (x_1,x_2,...,x_n) \in \mathbb{R}^n$, *define-se* $\| x \|_3 = max \| x_i \|$.

De fato, sendo $\mathbb{R}^n$ *um espaço vetorial, resta mostrarmos que as funções acima definem uma norma em* $\mathbb{R}^n$. *Vejamos,*

I) Sejam $x = (x_1,x_2,...,x_n)$ *e* $y = (y_1,y_2,...,y_n) \in \mathbb{R}^n$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$.

N1) Se $x \neq 0$ *então* $x_i \neq 0$ *para algum* $1 \leq i \leq n$. *Daí,*

$$\| x \|_1 = \sqrt{\sum(x_i^2)} = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2} \neq 0.$$

N2) $\| \lambda\cdot x \|_1 = \sqrt{\sum(\lambda\cdot x_i)^2} = \sqrt{\sum(\lambda^2\cdot x_i^2)} = \sqrt{\lambda^2\cdot\sum x_i^2} = \sqrt{\lambda^2}\cdot\sqrt{\sum x_i^2}$
$= |\lambda|\cdot \| x \|_1$;

N3) $\| x+y \|_1 = \sqrt{\sum(x_i+y_i)^2} \Rightarrow (\| x+y \|_1)^2 = \sum(x_i+y_i)^2$.

Desenvolvendo o produto notável do segundo membro da igualdade, temos

$$(\| x+y \|_1)^2 = \sum(x_i^2 + 2\cdot x_i\cdot y_i + y_i^2) = \sum x_i^2 + \sum 2\cdot x_i\cdot y_i + \sum y_i^2,$$

e pela definição temos que

$$(\| x+y \|_1)^2 = \| x \|_1^2 + 2\sum x_i\cdot y_i + \| y \|_1^2\ . \tag{1.1}$$

Como $\sum x_iy_i = \langle x,y\rangle \leq |\langle x,y\rangle|$ *e pela desigualdade de Cauchy-Schwarz*

$$|\langle x,y\rangle| \leq \| x \|_1 \cdot \| y \|_1, temos$$

$$\sum x_iy_i \leq \| x \|_1 \cdot \| y \|_1\ .$$

Assim,

$$2\sum x_iy_i \leq 2\cdot \| x \|_1 \cdot \| y \|_1\ .$$

Substituindo essa expressão em (1.1), obtemos

$$(\| x+y \|_1)^2 \leq \| x \|_1^2 + 2 \cdot \| x \|_1 \cdot \| y \|_1 + \| y \|_1^2,$$

o que implica em

$$(\| x+y| \|_1)^2 \leq (\| x \|_1 + \| y \|_1)^2,$$

e extraindo a raiz quadrada em ambos os membros da desigualdade concluímos que

$$\| x+y \|_1 \leq \| x \|_1 + \| y \|_1 .$$

Portanto, $(\mathbb{R}^n, \| \; \|_1)$ *é um espaço vetorial normado.*

II) Sejam $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ *e* $y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$.

N1) Se $x \neq 0$ *então* $x_i \neq 0$ *para algum* $1 \leq i \leq n$.

Daí,

$$\| x \|_2 = \sum |x_i| \neq 0;$$

N2) Por definição,

$$\| \lambda x \|_2 = \sum |\lambda x_i| = |\lambda x_1| + ... + |\lambda x_n| = |\lambda|(|x_1| + ... + |x_n|) = |\lambda| \sum |x_i|,$$

ou seja,

$$\| \lambda x \|_2 = \lambda \| x \|_2 .$$

N3) Por definição $\| x+y \|_2 = \sum |x_i + y_i| = |x_1 + y_1| + ... + |x_n + y_n|$, *pela desigualdade triangular para o módulo ou valor absoluto de números reais, temos*

$$\begin{aligned} |(x_1+y_1| + |x_2+y_2| + ... + |x_n+y_n| &\leq |x_1| + |y_1| + |x_2| + |y_2| + ... + |x_n| + |y_n| \\ &= (|x_1| + ... + |x_n|) + (|y_1| + ... + |y_n|) \\ &= \sum |x_i| + \sum |y_i|. \end{aligned}$$

Assim,

$$\| x+y \|_2 \leq \| x \|_2 + \| y \|_2 .$$

Portanto, $(\mathbb{R}^n, \| \; \|_2)$ *é um espaço vetorial normado.*

III) Sejam $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ *e* $y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$.

N1) Se $x \neq 0$, temos que $x_i \neq 0$ para algum $i = 1, ..., n$. consequentemente, $|x_i| \neq 0$ para algum i. Logo, $\| x \|_3 = max|x_i| \neq 0$.

N2) $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n) \in \mathbb{R}^n$. Usando as propriedades de máximo, temos que

$$\| \lambda x \|_3 = max|\lambda \cdot x_i| = max(|\lambda| \cdot |x_i|) = |\lambda| \cdot max|x_i| = |\lambda| \cdot \| x_i \|_3 .$$

N3) Como $x, y \in \mathbb{R}^n$, então $x + y = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n$. Daí, usando as propriedades de máximo

$$\| x + y \|_3 = max|x_i + y_i| \leq max(|x_i| + |y_i|) = max|x_i| + max|y_i|,$$

ou seja,

$$\| x + y \|_3 \leq \| x \|_3 + \| y \|_3 .$$

Exemplo 1.7 *Outro exemplo de espaço vetorial normado é $\mathcal{B}(X;\mathbb{R})$, onde consideramos*

$$\| f \| = sup|f(x)|,$$

onde $\| f \|$ é a norma da função.

Solução: De fato, sendo $\mathcal{B}(X;\mathbb{R})$ um espaço vetorial, mostremos que a função acima define uma norma. Vejamos,

N1) Seja $f \in \mathcal{B}(X;\mathbb{R})$, $f \neq 0$ temos que $f(x) \neq 0$ para algum $x \in \mathbb{R}$ então $sup|f(x)| \neq 0$, ou seja $\| f \| \neq 0$.

N2) Sejam $f \in \mathcal{B}(X;\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos

$$\| (\lambda f) \| = sup_{x \in X}|(\lambda f)(x)| = sup_{x \in X}|\lambda \cdot f(x)|.$$

E por propriedade de supremo,

$$\| (\lambda f) \| = sup_{x \in X}|\lambda| \cdot sup_{x \in X}|f(x)| = |\lambda| \cdot sup_{x \in X}|f(x)| = |\lambda| \cdot \| f \| .$$

N3) Sejam f e $g \in \mathcal{B}(X;\mathbb{R})$, temos

$$\| f + g \| = sup_{x \in X}|(f + g)(x)| = sup_{x \in X}|f(x) + g(x)|,$$

usando a desigualdade triangular para o módulo de números reais, e as propriedades de supremo, obtemos

$$\| f + g \| \leq sup_{x \in X}[|f(x)| + |g(x)|] = sup_{x \in X}|f(x)| + sup_{x \in X}|g(x)| = \| f \| + \| g \| .$$

Logo, a aplicação dada define uma norma em $\mathcal{B}(X;\mathbb{R})$. Portanto, $\mathcal{B}(X;\mathbb{R})$ é um espaço vetorial normado.

Observação 1.5 *Acabamos de verificar que todo espaço vetorial com o produto interno é um espaço vetorial normado. A recíproca não é verdadeira.*

Exemplo 1.8 *Sejam $V = C([a,b],\mathbb{R})$ e $f,g \in V$. A aplicação $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ tal que*

$$(f,g) \to \langle f,g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

define um produto interno sobre V.

Solução:

P1) Sejam $f,g,h \in V$. Então,

$$\langle f+g,h \rangle = \int_a^b (f+g)(x)\cdot h(x)dx = \int_a^b [f(x)+g(x)]\cdot h(x)dx.$$

Usando a distributivadade do produto da soma temos

$$\langle f+g,h \rangle = \int_a^b [f(x)h(x)+g(x)h(x)]dx.$$

Pela propriedade de soma de integrais, obtemos

$$\langle f+g,h \rangle = \int_a^b f(x)h(x)dx + \int_a^b g(x)h(x)dx = \langle f,h \rangle + \langle g,h \rangle.$$

P2) Sejam $f,g \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então

$$\langle \lambda f,g \rangle = \int_a^b (\lambda f)(x)\cdot g(x)dx = \int_a^b \lambda \cdot f(x)\cdot g(x)dx.$$

Usando a propriedade de integral temos

$$\langle \lambda f,g \rangle = \lambda \int_a^b f(x)g(x)dx = \lambda \langle f,g \rangle.$$

P3) Sejam $f,g \in V$.

$$\langle f,g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b g(x)f(x)dx = \langle g,f \rangle.$$

P4) Seja $f \in V$, com $f \neq 0$ para algum $x \in [a,b]$. Então,

$$\langle f,f \rangle = \int_a^b f(x)\cdot f(x)dx = \int_a^b [f(x)]^2dx.$$

Agora, usando as propriedades de integral, como $f \neq 0 \Rightarrow f^2 > 0$, temos

$$\int_a^b [f(x)]^2 dx > 0,$$

ou seja, $\langle f, g \rangle > 0$.

2 Funções Contínuas

Este capítulo é destinado ao estudo das Funções Contínuas, com definições e propriedades fundamentais para o prosseguimento deste trabalho.

2.1. Definição de funções contínuas

Definição 2.1 *Sejam M,N espaços métricos. Diz-se que a aplicação $f : M \longrightarrow N$ é contínua no ponto $a \in M$ quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, é possível obter $\delta > 0$ tal que*

$$d(x,a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \varepsilon, \text{ para todo } x \in M.$$

Diz-se que $f : M \to N$ é contínua quando ela é contínua em todos os pontos $a \in M$.

Exemplo 2.1 *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. A função f é contínua.*

Solução: Dado $a \in \mathbb{R}$ arbitrário, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x,a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

De fato, dado $\varepsilon > 0$, tomando $\delta = \varepsilon > 0$, temos

$$d(x,a) = |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| = |x-a| < \delta = \varepsilon.$$

Logo, f é contínua.

Exemplo 2.2 *Se $\| \, \| : V \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma norma no espaço vetorial V, então $\| \, \|$ é uma função contínua.*

Solução: Sejam $x, a \in V$, dado $\varepsilon > 0$, tomando $\delta = \varepsilon$, temos

$$d(x,a) < \delta \Longrightarrow d(\| x \|, \| a \|) < \varepsilon.$$

De fato, por definição,

$$d(\| x \|, \| a \|) = |\| x \| - \| a \||,$$

e pelas propriedades de norma

$$|\| x \| - \| a \|| \leq \| x - a \|,$$

consequentemente

$$d(\| x \|, \| a \|) \leq \| x - a \| = d(x,a) < \delta = \varepsilon.$$

Portanto, $\| \ \|$ é uma função contínua.

Proposição 2.1 *Sejam M um espaço métrico, E um espaço vetorial normado e $f, g : M \longrightarrow E$,*
$\alpha, \beta : M \longrightarrow \mathbb{R}$ aplicações contínuas, com $\beta(x) \neq 0$ para todo $x \in M$. Então são contínuas as aplicações $f + g : M \longrightarrow E$, $\alpha \cdot f : M \longrightarrow E$ e $\dfrac{\alpha}{\beta} : M \longrightarrow \mathbb{R}$, definidas por

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),\ (\alpha \cdot f)(x) = \alpha(x) \cdot f(x) \text{ e } \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)(x) = \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}.$$

Demonstração: *Ver referência [6].* ■

2.2. Aplicação lipschitziana e contração fraca

Definição 2.2 *(Aplicação Lipschitiziana) Seja $f : M \to N$, dizemos que f é uma aplicação Lipschitziana quando existe uma constante $c > 0$ (chamada de constante de Lipschitz) tal que $d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x,y)$, para quaisquer x e y em M.*

Proposição 2.2 *Sejam M, N espaços vetoriais. Se $f : M \to N$ é uma aplicação lipschitziana então f é contínua.*

Demonstração: De fato, sendo f uma aplicação lipschitziana, existe uma constante $c > 0$ tal que

$$d_N(f(x), f(y)) \leq c \cdot d_M(x,y).$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$, tomando $\delta = \dfrac{\varepsilon}{c} > 0$ temos que

$$d_M(x,y) < \delta \Rightarrow d_N(f(x), f(y)) \leq c \cdot d_M(x,y) < c \cdot \delta = c \cdot \frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon.$$

Portanto, f é contínua em M.

■

Proposição 2.3 *Se $f, g : M \to \mathbb{R}$ são funções lipschitzianas, o mesmo ocorre com $f + g$ e $k \cdot f$, com $k \in \mathbb{R}$.*

Demonstração: Como, por hipótese, f,g são lipschitzianas segue que existem $c_1 > 0$ e $c_2 > 0$, tais que

$$d(f(x),f(y)) \leq c_1 \cdot d(x,y), \forall x,y \in M,$$

e

$$d(g(x),g(y)) \leq c_2 \cdot d(x,y), \forall x,y \in M.$$

Daí,

(i)

$$d(f(x),f(y)) + d(g(x),g(y)) \leq c_1 \cdot d(x,y) + c_2 \cdot d(x,y),$$

o que implica que

$$d(f(x),f(y)) + d(g(x),g(y)) \leq (c_1 + c_2) \cdot d(x,y).$$

Como $(f+g)(x),(f+g)(y) \in \mathbb{R}$, temos

$$d((f+g)(x),(f+g)(y)) = |(f+g)(x) - (f+g)(y)| = |f(x) - f(y) + g(x) - g(y)|. \tag{2.1}$$

Mas, usando a desigualdade triangular para o módulo de números reais, temos

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y) + g(x) - g(y)| &\leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| \\ &= d(f(x),f(y)) + d(g(x),g(y)). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Assim, obtemos de (2.1) e (2.2)

$$d((f+g)(x),(f+g)(y)) \leq d(f(x),f(y)) + d(g(x),g(y)).$$

Portanto, $d((f+g)(x),(f+g)(y)) \leq (c_1+c_2) \cdot d(x,y)$, ou seja, $f+g$ é lipschitiziana.

(ii) Como o conjunto imagem da função f é um subconjunto de $\mathbb{R}$, onde a distância é dada pelo módulo, temos,

$$d(kf(x),kf(y)) = |kf(x) - kf(y)| = |k \cdot (f(x) - f(y))|,$$

por propriedade de módulo,

$$d(kf(x),kf(y)) = |k| \cdot |f(x) - f(y)| = |k| \cdot d(f(x),f(y)).$$

Utilizando a hipótese de que $d(f(x), f(y)) \leq c_1 \cdot d(x,y), \forall x,y \in M$, pois f é Lipschitziana, obtemos

$$d(kf(x), kf(y)) = |k| \cdot d(f(x), f(y)) \leq |k| \cdot c_1 \cdot d(x,y),$$

agora, fazendo $|k| \cdot c_1 = c_3 > 0$, com $c_3 \in \mathbb{R}$, concluímos que

$$d(kf(x), kf(y)) \leq c_3 \cdot d(x,y),$$

e portanto, kf é uma função lipschitzina.

■

Definição 2.3 *Se $f : M \to N$ é tal que $d(f(x), f(y)) \leq d(x,y)$ para quaisquer $x,y \in M$, dizemos que f é uma contração fraca. Neste caso f é lipschitziana (com $c = 1$) e portanto é contínua.*

Exemplo 2.3 *Seja E um espaço vetorial normado, toda norma $x \to \| x \|$ é uma contração fraca.*

Solução: De fato, observe que $f(x) = \| x \|$. Assim,

$$d(f(x), f(y)) = | \| x \| - \| y \| | = |d(x,0) - d(y,0)| \leq d(x,y).$$

Exemplo 2.4 *A aplicação constante $f : M \to N$, $f(x) = k$, para todo $x \in M$ e $k \in \mathbb{R}$ é uma contração fraca.*

Solução: Por definição,

$$d(f(x), f(y)) = d(k,k) = 0.$$

Além disso, $d(x,y) \geq 0$, para todo $x,y \in M$, concluímos que

$$d(f(x), f(y)) = d(k,k) = 0 \leq d(x,y),$$

ou seja,

$$d(f(x), f(y)) \leq d(x,y).$$

2.3. Transformações lineares

Definição 2.4 *Sejam E, F espaços vetoriais. Uma transformação linear $f : E \to F$ é uma correspondência que associa cada vetor $x \in E$ um vetor $f(x) \in F$ de modo que valham, para quaisquer $x,y \in E$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, as relações:*

(i) $f(\alpha x) = \alpha \cdot f(x)$*;*
(ii) $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

Observação 2.1 *Se* $f : E \to F$ *é uma transformação linear e* $u, v \in E$, *então*
(i) $f(0) = 0$*;*
(ii) $f(-x) = -f(x)$*;*
(iii)$f(u-v) = f(u) - f(v)$.
Com efeito,
(i) Por definição, $f(0) = f(0+0)$ *e como* f *é uma transformação linear,*

$$f(0+0) = f(0) + f(0)$$

assim, temos que

$$f(0) = f(0) + f(0) = 2f(0),$$

o que implica que $f(0) = 0$*.*
(ii) Temos, $0 = f(0) = f(x-x)$*, e como* f *é linear,*

$$f(x-x) = f(x+(-x)) = -f(x) + f(-x),$$

então,

$$0 = f(x) + f(-x) \Rightarrow f(x) = f(-x).$$

(iii) Pela linearidade da transformação linear f *e pelo item (ii), temos*

$$f(u-v) = f(u+(-v)) = f(u) + f(-v) = f(u) - f(v).$$

Exemplo 2.5 *A aplicação* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *definida por* $f(x,y) = (-x,y)$ *é uma transformação linear.*

Solução: De fato,
(i) Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $v = (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Então,

$$f(\alpha v) = f(\alpha(x,y)) = f(\alpha x, \alpha y),$$

pela definição de f, temos

$$f(\alpha x, \alpha y) = (-(\alpha x), \alpha y) = \alpha(-x,y) = \alpha \cdot f(x,y)$$

ou seja, $f(\alpha v) = \alpha \cdot f(v)$.

(ii) Sejam $v = (x_1, y_1), w = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Então,

$$v + w = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Daí, $f(v+w) = f(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$, e pela definição de f,

$$\begin{aligned} f(x_1 + x_2, y_1 + y_2) &= (-(x_1 + x_2), y_1 + y_2) \\ &= (-x_1, y_1) + (-x_2, y_2) \\ &= f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2), \end{aligned}$$

assim,

$$f(v+w) = f(v) + f(w).$$

Portanto, de (i) - (ii), obtemos que f é uma transformação linear.

Proposição 2.4 *Sejam E e F espaços vetoriais normados. As seguintes afirmações a respeito de uma transformação linear $f : E \to F$ são equivalentes:*
(1) f é contínua;
(2) f é contínua em $0 \in E$;
(3) Existe $c > 0$ tal que $\| f(x) \| \leq c \cdot \| x \|$ para todo $x \in E$;
(4) Existe $c > 0$ tal que $\| f(x) - f(y) \| \leq c \cdot \| x - y \|$ para quaisquer $x, y \in E$.

Demonstração: Devemos mostrar que $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (1)$.
(1) implica em (2)

É imediata, pois se f é contínua, f é contínua em todos os pontos de E. Logo, f também é contínua em $0 \in E$.

(2) implica em (3)

Se f é contínua em $0 \in E$, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que:

$$d(x, 0) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(0)) < \varepsilon,$$

ou seja, $\| x - 0 \| < \delta \Rightarrow \| f(x) - f(0) \| < \varepsilon$. E como f é linear obtemos

$$\| x \| < \delta \Rightarrow \| f(x) - 0 \| < \varepsilon,$$

assim

$$\| x \| < \delta \Rightarrow \| f(x) \| < \varepsilon.$$

Em particular, se tomarmos $\varepsilon = 1$, temos:

$$\| x \| < \delta \Rightarrow \| f(x) \| < 1, \quad \forall x \in E.$$

Note que, considerando $\frac{1}{c} < \delta$, com $c > 0$, então para $x \neq 0$, temos que

$$\frac{x}{c\cdot \parallel x \parallel} \in E \;\; e \;\; \left|\left|\frac{x}{c\cdot \parallel x \parallel}\right|\right| = \frac{1}{c} < \delta,$$

o que implica que

$$\left|\left| f\left(\frac{x}{c\cdot \parallel x \parallel}\right)\right|\right| < 1. \tag{2.3}$$

Pela linearidade de f, temos que

$$\left|\left| f\left(\frac{x}{c\cdot \parallel x \parallel}\right)\right|\right| = \left|\left| \frac{1}{c\cdot \parallel x \parallel}\cdot f(x)\right|\right| = \frac{1}{c\cdot \parallel x \parallel}\cdot \parallel f(x) \parallel .$$

Daí, e pela desigualdade (2.3), obtemos

$$\left|\left| f\left(\frac{x}{c\cdot \parallel x \parallel}\right)\right|\right| < 1 \Rightarrow \frac{1}{c\cdot \parallel x \parallel}\cdot \parallel f(x) \parallel < 1 \Rightarrow \parallel f(x) \parallel < c\cdot \parallel x \parallel, \;\; \forall\, x \;\in\; E.$$

O que implica dizer que f é uma função lipschitziana.

(3) implica em (4)

Do item (3), existe $c > 0$ tal que $\parallel f(x) \parallel \leq c\cdot \parallel x \parallel$, para todo $x \in E$ e $c > 0$. Sejam $x_1, y_1 \in E$, como $x = x_1 - y_1 \in E$, temos

$$\parallel f(x_1 - y_1) \parallel \leq c\cdot \parallel x_1 - y_1 \parallel .$$

Pela linearidade de f, obtemos

$$\parallel f(x_1) - f(y_1) \parallel \leq c\cdot \parallel x_1 - y_1 \parallel, \forall\, x_1, y_1 \in E.$$

(4) implica em (1)

Do item (4) temos que $\parallel f(x) - f(y) \parallel \leq c\cdot \parallel x - y \parallel$ para quaisquer $x, y \in E$, o que significa dizer que f é uma função lipschitziana, logo, f é contínua.
O que encerra esta demonstração.

$\blacksquare$

Definição 2.5 *Sejam E, F espaços métricos, com F um conjunto fechado. Definimos o espaço das funções lineares e contínuas por*

$$\mathcal{L}(E,F) = \{f : E \to F, \text{ com } f \text{ uma aplicação linear e contínua } \}.$$

E a norma nesse espaço é dada por $\parallel f \parallel = sup_{x\in E, \|x\|=1} \parallel f(x) \parallel$.

Proposição 2.5 *Sejam E, F espaços vetorias normados. Para toda aplicação $f : E \to F$ linear e contínua, temos $\parallel f(x) \parallel \leq \parallel f \parallel \cdot \parallel x \parallel, \;\; \forall x \;\in\; E$*

Demonstração: Seja $x \in E$, se $x = 0$, a desigualdade é óbvia, pois $\| x \| = 0$ e sendo f linear $f(0) = 0$ e $\| f(0) \| = 0$.
Se $x \neq 0$, tomemos $x = \dfrac{y}{\| y \|} \neq 0$, com $y \in E$, $y \neq 0$. Assim,

$$\| f(y) \| = \left\| f\left(\| y \| \cdot \frac{y}{\| y \|} \right) \right\|.$$

Pela linearidade de f, obtemos $\| f(y) \| = \| y \| \cdot \left\| f\left(\dfrac{y}{\| y \|} \right) \right\|$, assim,

$$\| f(x) \| \leq \| f \| \cdot \left\| \frac{y}{\| y \|} \right\|.$$

E como

$$\left\| \frac{y}{\| y \|} \right\| = 1,$$

obtemos

$$\| f(y) \| \leq \| f \| \cdot \| y \|, \ \forall y \in E.$$

$\blacksquare$

Proposição 2.6 *Seja $S = \{u \in E, \| u \| = 1\}$ a esfera unitária de E. Uma aplicação linear $f : E \to F$ é contínua se, e somente se, $f|_S$ é limitada.*

Demonstração: $(\Rightarrow)$ Se f é contínua, como f é linear segue que $f \in \mathcal{L}(E, F)$ e pela proposição anterior, $\forall x \in E$ vale $\| f(x) \| \leq \| f \| \cdot \| x \|$. Em particular, se $x \in S$ temos que $\| x \| = 1$, daí

$$\| f \| \leq \| f \| \cdot 1.$$

Tomando $c = \| f \| \geq 0$, tem-se $\| f \| \leq c, \forall x \in S$.
Logo, $f|_S$ é limitada.

$(\Leftarrow)$ Para mostrar que f é contínua, pela Proposição (2.4), basta mostrar que f é contínua em $0 \in E$, isto é, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\| x \| < \delta \Rightarrow \| f(x) \| < \varepsilon$.
Como $f|_S$ é limitada, existe $c > 0$ tal que

$$\| f(x) \| \leq c \cdot \| x \|, \forall \, x \in S.$$

Daí,

$$\| x \| < \delta \Rightarrow \| f(x) \| \leq c \cdot \delta.$$

Tomando $\delta = \dfrac{\varepsilon}{c}$, temos

$$\| x \| < \delta \Rightarrow \| f(x) \| < \varepsilon.$$

Portanto, f é contínua.

■

3 Sequências de Cauchy em Espaços Métricos

Neste capítulo iremos definir o conceito de *sequência*, dando ênfase as *Sequências de Cauchy* para introduzirmos o conceito de *Espaços Métricos Completos*.

3.1. Sequências

Definição 3.1 *Seja (M,d) um espaço métrico. Toda aplicação $n \to x_n$ de $\mathbb{N}^*$ em M, é chamada sequência de elementos de M e a notação para se identificar tal sequência é $(x_1,x_2,...,x_n,...)$ ou, resumidamente, (x_n).*

Observação 3.1 *Devemos distinguir o conjunto de termos de uma sequência da sequência propriamente dita. Dada uma sequência (x_n), cada imagem x_n é chamada termo da sequência. Por exemplo, se definirmos $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ pondo $x_n = (-1)^n$, então obteremos a sequência $(-1,1,-1,1,...)$, cujo conjunto de valores é $\{-1,1\}$.*

São exemplos de sequências:

(a) $(\sqrt{2})_{n\in\mathbb{N}} = (\sqrt{2},\sqrt{2},\sqrt{2},...,\sqrt{2},...)$

(b) $(n)_{n\in\mathbb{N}} = (1,2,3,4,5,...)$

(c) $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{4},...\right)$

Definição 3.2 *Uma sequência (x_n) no espaço métrico M chama-se limitada quando o conjunto dos seus termos é limitado, isto é, quando existe $c > 0$ tal que $d(x_m,x_n) \leq c$, para quaisquer $m,n \in \mathbb{N}$.*

Exemplo 3.1 *Seja $x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, com $x_n = \dfrac{1}{2^n}$. Neste caso obtemos a sequência $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{8},\dots\right)$. Mostremos que essa sequência é limitada.*

Solução: Queremos mostrar que existe $c > 0$ tal que $d(x_m, x_n) \leq c, \forall m, n \in \mathbb{N}$.
De fato, sejam $m, n \in \mathbb{N}$ quaisquer. Suponha que $m > n$, então temos

$$d(x_m, x_n) = |x_m - x_n| = \left| \frac{1}{2^m} - \frac{1}{2^n} \right| \leq \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^n}. \tag{3.1}$$

Observe que se $m > n$ então $2^m > 2^n$ o que implica que $\frac{1}{2^m} < \frac{1}{2^n}$.
Daí, e da equação (3.1), obtemos

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Além disso, como $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ então $\frac{1}{2^{n-1}} \leq 1$.
Logo, $d(x_m, x_n) \leq 1, \forall m, n \in \mathbb{N}$, ou seja, (x_n) é limitada.

Definição 3.3 *Uma subsequência de (x_n) é uma restrição da aplicação $n \to x_n$ a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < ... < n_k < ...\}$ de $\mathbb{N}$.*

A subsequência é indicada pelas notações $(x_{n_1}, x_{n_2}, ..., x_{n_k}, ...)$, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ ou, simplesmente, (x_{n_k}).

Exemplo 3.2 *Seja $x_n = (-2)^n$ uma sequência no espaço métrico M. Para n par, temos a seguinte subsequência de x_n, $(4, 16, 64, ...)$. Já para n ímpar, temos $(-2, -8, -32, ...)$ como subsequência de x_n.*

Observação 3.2 *No caso particular das sequências de números reais, uma sequência (x_n) é dita monótona quando para todo $n \in \mathbb{N}$ é de algum dos quatro tipos descritos a seguir:*

Crescente - Quando $x_n < x_{n+1}$;
Descrescente - Quando $x_n > x_{n+1}$;
Não-crescente - Quando $x_n \geq x_{n+1}$;
Não-decrescente - Quando $x_n \leq x_{n+1}$.

Exemplo 3.3 *Fixado $q \in \mathbb{R}$, seja (x_n) uma sequência cujo termo geral é $x_n = q^n, \forall n \in \mathbb{N}$. Quando $q = 0$ ou $q = 1$, temos as sequências constantes $(0, 0, 0, ...)$ e $(1, 1, 1, ...)$, respectivamente. Se $0 < q < 1$, então para todo $n \in \mathbb{N}$ temos $q^n > q^{n+1}$, logo (x_n) é decrescente. Se $q > 1$, então $q^n < q^{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ e portanto a sequência (x_n) é crescente. Já para o caso $-1 \leq q < 0$ a sequência não é monótona, pois seus termos são alternadamente, positivos e negativos.*

3.2. Limite de uma sequência

Definição 3.4 *Seja (x_n) uma sequência num espaço métrico M. Diz-se que o ponto $a \in M$ é o limite da sequência (x_n) quando, para todo número $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, pode-se obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < \varepsilon$.*

Em outras palavras, se a partir de um índice natural a distância entre os termos da sequência e o ponto $a \in M$ diminuir gradativamente, dizemos que a é o limite da sequência.

Denotemos por $a = lim\ x_n$, $a = lim_{n\to\infty} x_n$ ou $a = lim_{n\in\mathbb{N}} x_n$. Diz-se também que x_n tende para a e escreve-se ainda $x_n \to a$.

Definição 3.5 *Uma sequência (x_n) de pontos de M é chamada estácionária quando $x_n = p$, a partir de um certo índice. Com $p \in M$. Assim: $(x_n) = (x_1, x_2, ..., x_r, p, p, p, ...)$.*

Proposição 3.1 *As sequências estacionárias são convergentes para o termo que se repete, ou seja, $(x_1, x_2, ..., x_r, p, p, ...) \to p$; uma vez que $x_{r+1} = x_{r+2} = ... = p$.*

Demonstração: De fato, para todo $\varepsilon > 0$,

$$n \geq r + 1 \Rightarrow d(x_n, p) = d(p, p) = 0 < \varepsilon.$$

$\blacksquare$

Em particular, as sequências constantes $(p, p, p, ...)$ convergem para essa constante p.

Proposição 3.2 *Toda sequência convergente é limitada.*

Demonstração: Seja (x_n) uma sequência convergente num espaço métrico M, isto é,

$$lim\ x_n = a, \text{ em M},$$

por definição dado $\varepsilon = 1 > 0$, podemos obter $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$n > n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < 1.$$

Mas, usando a definição de bola aberta,

$$d(x_n, a) < 1 \Rightarrow x_n \in B(a, 1).$$

Assim, o conjunto de valores da sequência (x_n) está contido na reunião $\{x_1, ..., x_{n_0}\} \bigcup B(a, 1)$ que é um conjunto limitado, pois é a reunião de dois conjuntos limitados. Portanto (x_n) é limitada. $\blacksquare$

Proposição 3.3 *(Unicidade do limite.) Uma sequência não pode convergir para dois limites diferentes.*

Demonstração: Ver referência [6]. ■

Proposição 3.4 *Se $lim\, x_n = a$ então toda subsequência de (x_n) converge para a.*

Demonstração: Ver referência [6]. ■

Proposição 3.5 *Toda sequência monótona limitada de números reais é convergente.*

Demonstração: Seja, sem perda de generalidade, $(x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n \leq ...)$ a sequência monótona e limitada, com $x_n \in \mathbb{R}$ e $n = 1, 2, ...$
Tomemos $a = sup_{n\in\mathbb{N}}\, x_n$. Afirmamos que $lim\, x_n = a$.
De fato, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a - \varepsilon < x_{n_0}$ e como (x_n) é não decrescente, temos que

$$n \geq n_0 \Rightarrow x_n \geq x_{n_0}.$$

E pelo fato de $a = sup_{n\in\mathbb{N}}\, x_n$, então

$$n \geq n_0 \Rightarrow a - \varepsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq a < a + \varepsilon.$$

Ou seja, $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ e assim, $lim\, x_n = a$. ■

Definição 3.6 *Diz-se que uma sequência de aplicações $f_n : X \to M$ (definidas num conjunto arbitrário X e tomando valores num espaço métrico M) converge simplesmente (ou pontualmente) em X para a aplicação $f : X \to M$ quando, para cada $x \in X$, a sequência $(f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x), ...)$ tem limite $f(x)$ em M. Ou seja, para cada $x \in X$, tem-se $lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.*

Isso significa que, dados arbitrariamente $x \in X$ e $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ (dependendo de x e de ε) tal que

$$n > n_0 \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

Definição 3.7 *Diremos que a sequência de aplicações $f_n : X \to M$ converge uniformemente em X para a aplicação $f : X \to M$ quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, for possível encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$ para qualquer que seja $x \in X$.*

Observação 3.3 *Se $f_n \to f$ uniformemente em X então $f_n \to f$ simplesmente em X.*

3.3. Sequência de Cauchy

Definição 3.8 *Uma sequência (x_n) num espaço métrico M chama-se uma sequência de Cauchy quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$m,n > n_0 \Rightarrow d(x_m,x_n) < \varepsilon.$$

Em outras palavras, a partir de um certo índice n_0 a distância entre os termos da sequência diminui.

Exemplo 3.4 *A sequência $\left(\frac{1}{n}\right)$ é de Cauchy.*

Solução: Mostremos que, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $m,n > n_1 \Rightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon$.
De fato, dado $\varepsilon > 0$, pela Propriedade Arquimediana [ver apêndice A], existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $n_1 \cdot \varepsilon > 2$. Daí,

$$m,n > n_1 \Rightarrow |x_m - x_n| = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| \leq \left|\frac{1}{m}\right| + \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}.$$

Mas, para $m > n_1$, temos $\frac{1}{m} < \frac{1}{n_1}$ e para $n > n_1$ temos $\frac{1}{n} < \frac{1}{n_1}$. Logo,

$$m,n > n_1 \Rightarrow |x_m - x_n| < \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_1} = \frac{2}{n_1},$$

de onde segue que

$$m,n > n_1 \Rightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon.$$

Portanto, $\left(\frac{1}{n}\right)$ é de Cauchy.

Proposição 3.6 *Toda subsequência de uma sequência de Cauchy é também de Cauchy.*

Demonstração: Ver referência [6]. ■

Proposição 3.7 *Toda sequência convergente é de Cauchy.*

Demonstração: Seja (x_n) uma sequência do espaço métrico M. Por hipótese, (x_n) é convergente, ou seja, lim $(x_n) = a$, para algum $a \in M$. Logo, por definição, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow d(x_n,a) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Daí, se tomarmos $m,n > n_0$ temos que $d(x_m,a) < \frac{\varepsilon}{2}$ e $d(x_n,a) < \frac{\varepsilon}{2}$, o que implica

$$d(x_m,x_n) \leq d(x_m,a) + d(a,x_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Logo, (x_n) é de Cauchy. ■

Proposição 3.8 *Toda sequência de Cauchy é limitada.*

Demonstração: Seja (x_n) uma sequência de Cauchy no espaço métrico M. Ou seja, dado $\varepsilon > 0$, e sem perda da generalidade tomemos esse $\varepsilon = 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m,n > n_0 \Rightarrow d(x_m,x_n) < 1.$$

Assim, o conjunto $\{x_{n_0+1},x_{n_0+2},...\}$ é limitado e tem seu diâmetro ≤ 1.
Logo, o conjunto de termos da sequência é dado por $\{x_1,x_2,...,x_n,...\}$ e por sua vez pode ser escrito como a união de dois subconjuntos, $\{x_1,x_2,...,x_{n_0}\} \cup \{x_{n_0+1},x_{n_0+2},...\}$ que são limitados (onde $\{x_1,x_2,...,x_{n_0}\}$ é limitado por ser finito).
Portanto, o conjunto $\{x_1,x_2,...,x_{n_0},x_{n_0+1},x_{n_0+2},...\}$ é limitado, ou seja, a sequência de Cauchy (x_n) é limitada. ■

Observação 3.4 *Nem toda sequência limitada é de Cauchy. Um exemplo disso é a sequência* $(1,0,1,0,...)$ *na reta. Mesmo sendo limitada, esta sequência não é de Cauchy, pois a distância entre dois termos consecutivos é constante igual a 1, ou seja,* $d(x_n,x_{n+1}) = 1$ *para todo n.*

Proposição 3.9 *Uma sequência de Cauchy que possui uma subsequência convergente é convergente (e tem o mesmo limite que a subsequência).*

Demonstração: Seja (x_n) uma sequência de Cauchy no espaço métrico M e (x_{n_k}) uma subsequência de (x_n) que converge para o ponto $a \in M$. Mostremos que $\lim x_n = a$.
Com efeito, sendo (x_{n_k}) uma subsequência de (x_n) que converge para o ponto $a \in M$, temos que dado $\varepsilon > 0$ existe $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$n_k > p \quad \Rightarrow \quad d(x_{n_k},a) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

E sendo (x_n) um sequência de Cauchy, dado $\varepsilon > 0$ existe $q \in \mathbb{N}$ tal que

$$m,n > q \quad \Rightarrow \quad d(x_m,x_n) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Seja $n_0 = max\{p,q\}$. Para todo $n > n_0$ existem termos da subsequência de (x_n) que ultrapassam o índice n_0, ou seja, existe $n_k > n_0$, assim

$$d(x_n,a) \leq d(x_m,x_{n_k}) + d(x_{n_k},a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Logo, obtemos que dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow d(x_n,a) < \varepsilon,$$

ou seja, que lim $x_n = a$. ■

3.4. Espaço métrico completo

Definição 3.9 *Diz-se que um espaço métrico M é completo quando toda sequência de Cauchy em M é convergente.*

Exemplo 3.5 *A reta é um espaço métrico completo.*

Solução: Já mostramos no Capítulo 1 que $\mathbb{R}$ é um espaço métrico. Mostremos agora que $\mathbb{R}$ é completo. Para isto, considere (x_n) uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$ e para cada $n \in \mathbb{N}$ considere

$$X_n = \{x_n, x_{n+1}, \ldots\}.$$

Note que $X_1 \supset X_2 \supset \ldots X_n \supset \ldots$ e como, pela Proposição (3.8), toda sequência de Cauchy é limitada, temos que os conjuntos X_n são limitados e assim possuem ínfimo e supremo.
Definamos $a_n = inf\ X_n,\ \ n = 1, 2, \ldots$
Como $X_1 \supset X_2 \supset \ldots X_n \supset \ldots$, segue das propriedades de ínfimo (ver apêndice) que

$$inf\ X_1 \leq inf\ X_2 \leq \ldots \leq inf\ X_n \leq \ldots,$$

ou seja $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \leq \ldots$ e sendo X_n limitado por b, $\forall n \in \mathbb{N}$ temos que $inf\ X_n \leq b$, assim,

$$a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \leq \ldots \leq b = sup\ X_1.$$

Sendo (a_n) uma sequência monótona e limitada de números reais, segue, da Proposição (3.5), que (a_n) é convergente. Portanto, existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $lim\ a_n = a$. Portanto, $\mathbb{R}$ é um espaço mmétrico completo.

Proposição 3.10 *Um subespaço fechado de um espaço métrico completo é completo.*

Demonstração: Ver referência [6]. ■

Proposição 3.11 *O produto cartesiano $M \times N$ é completo se, e somente se, M e N são completos.*

Demonstração: Ver referência [6]. ■

Corolário 3.1 *$M_1 \times \ldots \times M_n$ é completo se, e somente se, $M_1, \ldots, M_n$ são completos.*

Exemplo 3.6 *$\mathbb{R}^n$ é um espaço métrico completo.*

Solução: Já vimos no exemplo anterior que $\mathbb{R}$ é um espaço métrico completo, portanto, pelo corolário 3.1, concluímos que $\mathbb{R}^n$ é completo.

Exemplo 3.7 *Seja F um espaço métrico completo. $\mathcal{B}(X;F)$ é um espaço métrico completo.*

Solução: Seja (f_n) uma sequência de Cauchy em $\mathcal{B}(X;F)$. Temos, por definição, que (f_n) é limitada, isto é, existe $c > 0$ tal que

$$\| f_n(x) \| < c, \tag{3.2}$$

sendo (f_n) de Cauchy temos que para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$m,n > N \Rightarrow \| f_m - f_n \| < \varepsilon,$$

usando as regras de supremo e o fato de (f_n) ser de Cauchy, obtemos

$$m,n > N \Rightarrow sup_{x\in X} \| f_m(x) - f_n(x) \|_F < \varepsilon. \tag{3.3}$$

Assim, para cada $x = x_0 \in X$ fixado, temos, pela propriedade de supremo, que

$$m,n > N \Rightarrow \| f_m(x_0) - f_n(x_0) \| < \varepsilon. \tag{3.4}$$

Isto mostra que $(f_m(x_0))$ é uma sequência de Cauchy em F, e sendo F completo,$(f_m(x_0))$ é convergente, isto é,

$$f_m(x_0) \to f(x_0) \text{ quando } m \to \infty.$$

Desse modo, pela unicidade do limite, para cada $x \in X$, podemos associar um único elemento $f(x) \in F$. Isso define uma função f de X em F.
Afirmação:$f \in B(X;F)$ e $f_m \to f$.
De fato, fazendo $n \to +\infty$ na equação (3.4), temos

$$\| f(x) \| < c, \text{ para todo } x \in X,$$

o que implica $f \in B(X;F)$.

Agora, fazendo $n \to +\infty$ na equação (3.6), obtemos

$$m > N \Rightarrow \| f_m - f \| < \varepsilon,$$

ou seja,

$$f_m \to f \text{ em } B(X;F).$$

Portanto, $B(X;F)$ é um espaço métrico completo.

4 Espaços de Banach e o Teorema do Ponto Fixo

Neste capítulo enunciaremos, demonstraremos e exibiremos algumas aplicações do principal resultado deste trabalho: o Teorema do Ponto Fixo de Banach.

4.1. Espaço de Banach e contrações

Definição 4.1 *Chamamos de espaço de Banach um espaço vetorial normado completo.*

Exemplo 4.1 *Sejam E,F espaços vetoriais normados, sendo F um espaço métrico completo, o conjunto*

$$\mathcal{L}(E,F) = \{f : E \to F, \text{ com } f \text{ uma aplicação linear e contínua}\},$$

munido da norma

$$\| f \| = sup_{x \in X \ e \ \|x\|=1} \| f(x) \|,$$

é um espaço de Banach.

Solução: Como $\mathcal{L}(E,F)$ é um espaço vetorial e a aplicação acima define uma norma em E, basta mostrar que $\mathcal{L}(E,F)$ é completo, isto é, que toda sequência de Cauchy em $\mathcal{L}(E,F)$ é convergente.
Seja (f_n) uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}(E,F)$, temos que (f_n) é linear e contínua, assim, pela Proposição (4.2), $(f_n|_s)$ é limitada. Então,$(f_n|_s)$ é de Cauchy em $\mathcal{B}(S,F)$, onde $S = \{x \in E, \| x \| = 1\}$.

Mas, como por hipótese, F é completo, então, $\mathcal{B}(S,F)$ é completo, e sendo $(f_n|_s)$ de Cauchy em $\mathcal{B}(S,F)$, existe $f_0 \in \mathcal{B}(S,F)$, tal que

$$f_n \to f_0 \tag{4.1}$$

uniformemente em S.
Indiquemos por $f : E \to F$ a extensão da aplicação $f_0 : S \to F$, definida por:

$$f(\lambda x) = \lambda \cdot f_0(x), \;\; se \;\; x \in S \;\; e \;\; \lambda \in \mathbb{R}. \tag{4.2}$$

Inicialmente mostremos que $f_n \to f$ simplesmente em E e que $f \in \mathcal{L}(E,F)$.
De fato, sendo f_n linear,
(i) Se $x = 0$: $lim_{n\to\infty} f_n(0) = lim_{n\to\infty} 0 = 0 = 0 \cdot f_0(0) = f(0 \cdot 0) = f(0)$.
(ii) Se $x \neq 0$, $lim_{n\to\infty} f_n(x) = lim_{n\to\infty} f_n\left(\| x \| \cdot \frac{x}{\| x \|}\right) = \| x \| \cdot lim_{n\to\infty} f_n\left(\frac{x}{\| x \|}\right)$,
e como $\left\| \frac{x}{\| x \|} \right\| = 1$, temos que $\frac{x}{\| x \|} \in S$, consequentemente,

$$lim f_n\left(\| x \| \cdot \frac{x}{\| x \|}\right) = f_0\left(\| x \| \cdot \frac{x}{\| x \|}\right).$$

Daí, $lim_{n\to\infty} f_n(x) = \| x \| \cdot f_0\left(\frac{x}{\| x \|}\right)$, e por (4.2) e pela linearidade de f,

$$\| x \| . f_0\left(\frac{x}{\| x \|}\right) = f\left(\| x \| \cdot \frac{x}{\| x \|}\right) = f(x).$$

Logo, $lim f_n(x) = f(x)$ para todo $x \in X$, o que implica que $f \in \mathcal{L}(E,F)$, ou seja, $\mathcal{L}(E,F)$ é completo.
Portanto, $\mathcal{L}(E,F)$ é um espaço de Banach.

Definição 4.2 *Sejam M,N espaços métricos. Chamamos de contração uma aplicação $f : M \to N$ quando existe uma constante c, com $0 \leq c < 1$, tal que $d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x,y)$ para quaisquer $x,y \in M$.*

De certo modo isso nos diz que quando a função é uma contração a distância entre as imagens é muito menor que a distância entre os pontos do conjunto.

Proposição 4.1 *Toda contração é uniformemente contínua.*

Demonstração: Ver Referência [6] ■

4.2. O Teorema do Ponto Fixo de Banach

Definição 4.3 *Seja M um espaço métrico. Um ponto fixo de uma aplicação $f : M \to M$ é um ponto $x \in M$ tal que $f(x) = x$.*

Exemplo 4.2 *A aplicação $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^2$, tem dois pontos fixos, que são os pontos 0 e 1. Pois, $f(0) = 0^2 = 0$ e $f(1) = 1^2 = 1$.*

Teorema 4.1 *(Teorema de Banach sobre pontos fixos de contrações) Se M é um espaço métrico completo, toda contração $f : M \to M$ possui um único ponto fixo em M.*

Demonstração: Seja (x_n) uma sequência em M tal que fixado um ponto $x_0 \in M$ e fazendo $x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), x_3 = f(x_2), ..., x_n = f(x_{n-1}), x_{n+1} = f(x_n), ...$ Mostremos que $a = lim x_n$ é o único ponto fixo de f. Admitamos que a sequência (x_n) convirja para um ponto $a \in M$.
Provemos a existência do ponto fixo:
Como, por hipótese, $lim\, x_n = a$, temos que $f(a) = f(lim\, x_n)$. Mas, como f é uma contração, f é contínua, daí,

$$f(lim\, x_n) = lim\, f(x_n),$$

o que implica, $f(a) = lim\, f(x_n)$.
Mas, por hipótese, $f(x_n) = x_{n+1}$, então, $f(a) = lim\, x_{n+1}$, e como supomos que (x_n) converge para a, segue da unicidade do limite, que

$$f(a) = a.$$

Portanto a é o ponto fixo de f.

Provemos a unicidade do ponto fixo:
Suponha que existem dois pontos fixos, $f(a) = a$ e $f(b) = b$ e como f é uma contração

$$d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x,y), \text{ com } 0 \leq c < 1 \text{ para } x,y \text{ quaisquer em } M,$$

então,

$$d(a,b) = d(f(a), f(b)) \leq c \cdot d(a,b),$$

ou seja $d(a,b) \leq c \cdot d(a,b) \Rightarrow d(a,b) \cdot (1-c) \leq 0$.
Como $1 - c > 0$, temos que $d(a,b) \leq 0$. Mas por se tratar de métrica, $d(a,b)$ deve ser sempre maior ou igual a zero, nos restando apenas a possibilidade $d(a,b) = 0$. E isso acontece se, e somente se, $a = b$. Portanto, o ponto fixo é único.

Para encerrarmos a demonstração, basta apenas provar que a sequência (x_n) admitida inicialmente é de fato convergente. Para isto, basta mostrar que (x_n) é de cauchy em M, pois sendo M completo (x_n) é convergente.
Veja que, sendo f uma contração e como

$$x_1 = f(x_0),\ \ x_2 = f(x_1),\ \ x_3 = f(x_2), ...,\ \ x_n = f(x_{n-1}),\ \ x_{n+1} = f(x_n), ...,$$

temos

$$d(x_1,x_2) = d(f(x_0), f(x_1)) \leq c \cdot d(x_0,x_1),$$

$$d(x_2,x_3) = d(f(x_1), f(x_2)) \leq c \cdot d(x_1,x_2) \leq c \cdot (c \cdot d(x_0,x_1)) = c^2 \cdot d(x_0,x_1)$$

e de modo geral temos $d(x_n,x_{n+1}) \leq c^n \cdot d(x_0,x_1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (podemos mostrar isto usando o Príncipio de Indução Finita sobre n).
Daí, segue-se que, para $n, p \in \mathbb{N}$ quaisquer:

$$\begin{aligned} d(x_n,x_{n+p}) &\leq d(x_n,x_{n+1}) + d(x_{n+1},x_{n+2}) + \ldots + d(x_{n+p-1},x_{n+p}) \\ &\leq [c^n + c^{n+1} + \ldots + c^{n+p-1}] \cdot d(x_0,x_1). \end{aligned}$$

Usando a distributividade da multiplicação,

$$d(x_n,x_{n+p}) \leq c^n \cdot [1 + c + \ldots + c^{p-1}] \cdot d(x_0,x_1).$$

Mas, observe que $[1 + c + \ldots + c^{p-1}]$ é a soma dos termos de uma progressão geométrica de razão c e lembremos que essa soma é dada pela expressão $\dfrac{1}{1-R}$ onde R é a razão da P.G, logo, temos que $[1 + c + \ldots + c^{p-1}] = \dfrac{1}{1-c}$ e assim obtemos que

$$d(x_n,x_{n+p}) \leq \frac{c^n}{1-c} \cdot d(x_0,x_1).$$

Como, pelo fato de $0 \leq c < 1$, $lim_{n\to\infty}\, c^n = 0$, obtemos que $d(x_n,x_{n+p}) \leq \varepsilon,\ \ \forall n \geq n_0$ com $\varepsilon > 0$ sendo tão pequeno quanto se queira. Portanto, (x_n) é uma sequência de Cauchy no espaço métrico completo M e concluimos assim que a sequência é convergente.

$\blacksquare$

Corolário 4.1 *Seja $f : M \to M$ tal que, para algum m, a composta f^m é uma contração. Então:*
(i) *f tem um único ponto fixo;*
(ii) *para todo $x_1 \in M$, a sequência $(f^n(x_1))$, com $n \in \mathbb{N}$ converge ao ponto fixo.*

Demonstração:
(i) Inicialmente mostremos que existe o ponto fixo de f.
Por hipótese, para algum m, f^m é uma contração, e, pelo teorema anterior, existe um e só um $x \in M$ tal que $f^m(x) = x$. Provemos então que x é o ponto fixo de f.
Como $f(f^m(x)) = f^m(f(x))$, para todo $x \in M$, e x é ponto fixo de f^m, temos

$$f(x) = f(f^m(x)) = f^m(f(x)),$$

ou seja, $f^m(f(x)) = f(x)$, o que nos diz que $f(x)$ também é ponto fixo de f^m.
Mas havíamos afirmado que $f^m(x) = x$, logo, pela unicidade do ponto fixo, $f(x) = x$ o que implica que x é o ponto fixo de f.
E podemos garantir que esse é o único ponto fixo, já que todo ponto fixo de f é também o ponto fixo de f^m, que é único.

(ii) Já vimos pelo Teorema anterior que considerando
$x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), x_3 = f(x_2), \ldots, x_n = f(x_{n-1}), x_{n+1} = f(x_n), \ldots$ a sequência (x_n) converge em M para o único ponto fixo de f, consequentemente para todo $x_1 \in M$, a sequência $(f^n(x_1))$, com $n \in \mathbb{N}$ converge ao ponto fixo. ■

Exemplo 4.3 *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função satisfazendo a condição de Lipschitz,*

$$|f(t) - f(s)| \leq c \cdot |t - s|,$$

para quaisquer $t, s \in \mathbb{R}$, com $0 \leq c < 1$. Então existe um e apenas um t_1 tal que $f(t_1) = t_1$ e, para qualquer $t \in \mathbb{R}$, temos $f^n(t) \to t_1$ quando $n \to \infty$.

Solução: Com efeito, vimos no Capítulo 3 que $\mathbb{R}$ é um espaço métrico completo, e por hipótese, f é uma contração, já que a constante de lipschitz é tal que $0 \leq c < 1$, então, segue do Teorema (4.1) que

(i) existe um único $t_1 \in \mathbb{R}$ tal que $f(t_1) = t_1$, ou seja, existe um e apenas um ponto fixo de f em $\mathbb{R}$, e

(ii) para qualquer $t \in \mathbb{R}$, temos que $f^n(t) \to t_1$, ou seja, qualquer composta de f converge ao ponto fixo t_1.

Exemplo 4.4 *Sejam $F \subset \mathbb{R}^n$ fechado, $g : F \to F$ satisfazendo a condição de Lipschitz,*

$$\| g(x) - g(y) \| \leq c \cdot \| x - y \|,$$

para quaisquer $x, y \in F$, com $0 \leq c < 1$. Então existe um e apenas um $t \in F$ tal que $g(t) = t$.

Solução: De fato, $\mathbb{R}^n$ é um espaço métrico completo, e como $F \subset \mathbb{R}^n$, sendo F fechado, temos que F também é um espaço métrico completo. Além disso, por hipótese, g é um contração. Então segue do Teorema (4.1) que existe um, e apenas um, ponto fixo de g em F, assim, existe um único $t \in F$ tal que $g(t) = t$.

Observação 4.1 *Dada uma aplicação T de um espaço métrico (M, d) nele mesmo, uma estratégia para se obter pontos fixos é a partir de um ponto qualquer $x_0 \in M$ e aplicar f, sucessivas vezes, obtendo-se $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1) = f^2(x_0), \ldots, x_n = f(x_{n-1}) = f^n(x_0)$ e no limite quando $n \to \infty$, esperar obter um ponto fixo, isto é, obter um elemento $x \in M$ satisfazendo $f(x) = x$. Essa ideia é chamada de Método das Aproximações Sucessivas.*

4.3. Algumas aplicações do Teorema do Ponto Fixo de Banach

Apresentaremos aqui algumas aplicações do Teorema do Ponto Fixo de Banach, mais precisamente para demonstrar a existência de soluções de equações diferenciais ordinárias e de equações integrais.

4.3.1. Aplicação em Equações Diferenciais Ordinárias

Definição 4.4 *Uma equação diferencial de primeira ordem é uma equação do tipo*

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t))$$

onde $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *é uma função contínua.*

Proposição 4.2 *(Teorema da Existência e Unicidade de Cauchy para Equações Diferenciais): Sejam* $(t_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *e* f *uma aplicação definida em* $I = [t_0 - a, t_0 + a] \times B[y_0, b] \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *a valores em* $\mathbb{R}$, *contínua e lipschitziana na segunda variável, isto é, existe uma constante real c tal que*

$$|f(t, z_1) - f(t, z_2)| \leq c \cdot |z_1 - z_2|,$$

para $t \in [t_0 - a, t_0 + a]$ *e* $z_1, z_2 \in B[y_0, b]$. *Então, existe* a_1, *com* $0 < a_1 \leq a$ *tal que a equação diferencial* $y' = f(t, y)$ *tem apenas uma solução u definida em* $[t_0 - a_1, t_0 + a_1]$ *e satisfazendo* $u(t_0) = y_0$.

Demonstração:

Seja M tal que $|f(t, y)| \leq M$, para $(t, y) \in [t_0 - a, t_0 + a] \times B[y_0, b]$. Tomamos $a_1 = min\left(a, \dfrac{b}{M}\right)$. Suponhamos que $a \leq \dfrac{b}{M}$, isto é, que $a_1 = a$. Observe que $M \neq 0$, pois, caso contrário teríamos $f \equiv 0$ e a afirmação é trivial.

Consideremos agora o espaço métrico completo $E = \mathcal{C}([t_0 - a, t_0 + a], B[y_0, b])$ formado pelas aplicações contínuas de $[t_0 - a, t_0 + a]$ em $B[y_0, b]$, munido da métrica da convergência uniforme,

$$d(u, v) = \| u - v \| = sup_{[t_0 - a, t_0 + a]} \{ \| u(t) - v(t) \| \}.$$

Seja $u \in E$, e definamos $T_u : [t_0 - a, t_0 + a] \to \mathbb{R}$ por

$$T_u(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s)) ds.$$

Note que, T_u está bem definida, pois como $u \in E$ e $f(t,u(t))$ lipschitziana na segunda variável, temos que $f(t,u(t))$ é contínua e portanto integrável. Mostremos agora que $T_u \in E$.

(i) $T_u(t) \in B_b[y_0]$.

De fato, temos

$$T_u(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,u(s))ds,$$

o que implica

$$T_u(t) - y_0 = \int_{t_0}^{t} f(s,u(s))ds.$$

Aplicando o balor absoluto em ambos os membros da igualdade acima e usando a propriedade de norma de uma integral, obtemos

$$|T_u(t) - y_0| = \left| \int_{t_0}^{t} f(s,u(s))ds \right| \leq \int_{t_0}^{t} |f(s,u(s))|ds. \tag{4.3}$$

Lembremos que $|f(t,y)| \leq M$ para $(t,y) \in [t_0 - a, t_0 + a] \times B[y_0, b]$. Assim, da equação (4.3) obtemos

$$|T_u(t) - y_0| \leq \int_{t_0}^{t} Mds = M \cdot s\Big|_{t_0}^{t} = M(t - t_0),$$

usando propriedade de módulo, o fato de $t \in [t_0 - a, t_0 + a]$ e de $a \leq \dfrac{b}{M}$ concluímos que

$$|T_u(t) - y_0| \leq M \cdot |t - t_0| < M \cdot a < b.$$

Portanto, $T_u(t) \in B[y_0, b]$.

(ii) T_u é contínua.

De fato, dados $t_0, t_1, t_2 \in [t_0 - a, t_0 + a]$, onde $t_0 < t_1 < t_2$, vale

$$|T_u(t_2) - T_u(t_1)| = \left| y_0 + \int_{t_0}^{t_2} f(s,u(s))ds - y_0 - \int_{t_0}^{t_1} f(s,u(s))ds \right|,$$

o que implica

$$|T_u(t_2) - T_u(t_1)| = \left| \int_{t_0}^{t_2} f(s,u(s))ds - \int_{t_0}^{t_1} f(s,u(s))ds \right|.$$

Aplicando as propriedades de integral, obtemos

$$|T_u(t_2) - T_u(t_1)| = \left| \int_{t_1}^{t_2} f(s,u(s))ds + \int_{t_0}^{t_1} f(s,u(s))ds - \int_{t_0}^{t_1} f(s,u(s))ds \right|,$$

isto é,

$$|T_u(t_2) - T_u(t_1)| = \left| \int_{t_1}^{t_2} f(s, u(s)) ds \right| \leq \int_{t_1}^{t_2} |f(s, u(s))| ds \leq \int_{t_0}^{t_1} \parallel f \parallel ds.$$

Como $\parallel f \parallel \leq M$, concluímos que

$$|T_u(t_2) - T_u(t_1)| \leq \int_{t_1}^{t_2} |f(s, u(s))| ds \leq \int_{t_1}^{t_2} M ds \leq M \cdot |t_2 - t_1|.$$

Assim, T_u é lipschitziana, e consequentemente é contínua.

Logo, $T_u \in E = \mathcal{C}([t_0 - a, t_0 + a], B[y_0, b])$ para toda $u \in E = \mathcal{C}([t_0 - a, t_0 + a], B[y_0, b])$. Podemos escrever portanto, que T é uma aplicação do espaço métrico completo E em si mesmo. Finalmente, se tomarmos $k = a \cdot c$, veremos que $0 < k < 1$ e que, para $u, v \in E$ quaisquer, vale

$$\begin{aligned}
\parallel T_u - T_v \parallel &= sup_{t \in I} |T_u(t) - T_v(t)| \\
&= sup_{t \in I} \left| y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s)) - y_0 - \int_{t_0}^{t} f(s, v(s)) \right| \\
&= sup_{t \in I} \left| \int_{t_0}^{t} [f(s, u(s)) - f(s, v(s))] ds \right|.
\end{aligned}$$

Aplicando a propriedade de norma de uma integral, temos que

$$\parallel T_u - T_v \parallel \leq sup_{t \in I} \int_{t_0}^{t} |[f(s, u(s)) - f(s, v(s))]| ds.$$

Usando o fato de f ser lipschitziana e algumas propriedades de supremos, obtemos

$$\parallel T_u - T_v \parallel \leq sup_{t \in I} \int_{t_0}^{t} c \cdot |u(t) - v(t)| ds \leq c \cdot \parallel u - v \parallel \cdot sup_{t \in I} \int_{t_0}^{t} ds.$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo e por propriedade de supremo, temos

$$\parallel T_u - T_v \parallel \leq c \cdot \parallel u - v \parallel \cdot sup(t - t_0) = c \cdot \parallel u - v \parallel \cdot |t - t_0|.$$

Como $t \in [t_0 - a, t_0 + a]$ e tomando $k = a \cdot c < 1$, temos que

$$\parallel T_u - T_v \parallel \leq c \cdot \parallel u - v \parallel \cdot a = k \cdot \parallel u - v \parallel .$$

O que implica que T é uma contração, já que $\parallel T_u - T_v \parallel \leq k \cdot \parallel u - v \parallel$, com $0 \leq k < 1$. Sendo T uma contração e E um espaço métrico completo, podemos aplicar o teorema do ponto fixo de Banach, e assim garantimos que existe uma e só uma $u \in E$ que satisfaz $T_u(t) = u(t)$, o que implica,

$$u(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s)) ds,$$

daí usando o Teorema Fundamental do Cálculo, temos $u'(t) = f(t,u(t))$, e além disso $u(t_0) = y_0$. Portanto, a equação diferencial $y' = f(t,y)$ admite uma única solução da u definida em $[t_0 - a_1, t_0 + a_1]$ e satisfazendo $u(t_0) = y_0$, como queríamos mostrar. ■

4.3.2. Aplicação em Equações Integrais

Proposição 4.3 *(Aplicação em equações integrais). Consideremos a equação integral linear (de Fredholm de segunda espécie)*

$$y(t) = f(t) + \lambda \cdot \int_a^b k(t,s) \cdot y(s)ds \tag{4.4}$$

onde $k : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ *é contínua e* $\| k \| \leq M$. *Então, para todo* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tal que* $|\lambda| < \dfrac{1}{M \cdot (b-a)}$, *e* $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ *existe uma e só uma* $u \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, *que é solução da equação integral.*

Demonstração: Temos $E = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ é um espaço métrico completo. Seja $T : E \to E$ tal que $x \mapsto T_x$, onde

$$(T_x)(t) = f(t) + \lambda \cdot \int_a^b k(t,s) \cdot x(s)ds, \ \ t \in [a,b].$$

Observe que T é uma contração.
De fato, dados $u, v \in E$, temos

$$\begin{aligned} \| T_u(t) - T_v(t) \| &= \left| [f(t) + \lambda \cdot \int_a^b k(t,s) \cdot u(s)ds - (f(t) + \lambda \cdot \int_a^b k(t,s) \cdot v(s)ds)] \right| \\ &= \left| [\lambda \cdot \int_a^b k(t,s) \cdot u(s)ds - \lambda \cdot \int_a^b k(t,s) \cdot u(s)ds] \right|. \end{aligned}$$

Usando a distributividade e as propriedades de integral, temos

$$\| T_u(t) - T_v(t) \| = \left| \lambda \cdot \int_a^b k(t,s)[u(s) - v(s)]ds \right|,$$

e por propriedades de norma $|T_u(t) - T_v(t)| \leq |\lambda| \cdot \left| \int_a^b k(t,s)[u(s) - v(s)]ds \right|$.
Aplicando a propriedade de norma de uma integral, obtemos

$$|T_u(t) - T_v(t)| \leq |\lambda| \cdot \int_a^b |k(t,s)[u(s) - v(s)]|ds,$$

e usando a propriedade de que a norma do produto de dois termos é o produto das normas desses termos, chegamos em

$$|T_u(t) - T_v(t)| \leq |\lambda| \cdot \int_a^b \| k(t,s) \| \cdot |[u(s) - v(s)]|ds. \tag{4.5}$$

Lembremos que, por hipótese, a aplicação k é limitada, sendo $\| k \| \leq M$ e além disso,

$$\| u - v \| = sup_{s \in [a,b]} |u(s) - v(s)| \Rightarrow |u(s) - v(s)| \leq \| u - v \| .$$

Assim, desses fatos e da equação (4.5) obtemos

$$|T_u(t) - T_v(t)| \leq |\lambda| \cdot \int_a^b M \cdot \| u - v \| \, ds = |\lambda| \cdot M \cdot \| u - v \| \cdot (b - a).$$

Tomemos $0 < |\lambda| < \dfrac{1}{M \cdot (b-a)}$, temos

$$|T_u(t) - T_v(t)| \leq c \cdot \| u - v \|,$$

com $0 < c < 1$.
Por fim, sabendo que

$$\| T_u - T_v \| = sup_{t \in [a,b]} |T_u(t) - T_v(t)|,$$

concluímos que $\| T_u - T_v \| \leq c \cdot \| u - v \|$, com $0 \leq c < 1$, ou seja, T é uma contração.

Logo, pelo fato de E ser completo e T uma contração, temos pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, que existe uma e só uma função $u \in E$ que satisfaz

$$T_u(t) = u(t),$$

ou seja,

$$u(t) = f(t) + \lambda \cdot \int_a^b k(t,s) \cdot u(s) ds.$$

$\blacksquare$

A Alguns Resultados Utilizados

Apresentaremos agora, alguns dos principais resultados e definições que foram utilizados durante o trabalho.

A.1. Propriedades de valor absoluto

Nesta seção apresentamos a definição e propriedades do valor absoluto de um número real.

Definição A.1 *Seja $x \in \mathbb{R}$, o valor absoluto de x é dado por:*

$$|x| = \begin{cases} -x, & se \quad x \leq 0 \\ x, & se \quad x > 0 \end{cases}$$

Proposição A.1 *Sejam x e $y \in \mathbb{R}$, então:*

(1) $|x| = \sqrt{x^2}$

(2) $|x| \geq 0$

(3) $|x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

(4) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

(5) $|x + y| \leq |x| + |y|$

(6) $|-x| = |x|$

(7) $|x - y| = 0 \Longleftrightarrow x = y$

(8) $|x - y| \leq |x - z| + |z - y|$

(9) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ *(se $y \neq 0$)*

(10) $|x - y| \geq ||x| - |y||$

(11) $|x| \leq y \Longleftrightarrow -y \leq x \leq y$

(12) $|x| \geq y \Longleftrightarrow x \leq -y$ *ou* $y \leq x$

A.2. Propriedade arquimediana

Nesta seção apresentaremos um resultado importante sobre números reais, a *Propriedade Arquimediana*.

Proposição A.2 *Dados $a, b \in \mathbb{R}$ com $a > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \cdot a > b$.*

Demonstração: Ver referência [8]. ■

A.3. Propriedades de supremo e ínfimo

Nesta seção apresentaremos a definição e algumas propriedades do supremo e ínfimo.

Definição A.2 *Seja $S \subset \mathbb{R}$. Um elemento $t \in S$ é dito cota superior de S se:*
$x \leq t$, para todo $x \in S$.

Definição A.3 *Um elemento $m \in S$ é dito cota inferior de S se:*
$x \geq m$, para todo $x \in S$.

Definição A.4 *Um número u denomina-se Supremo de S, se:*
i. *u é cota superior para S e*
ii. *se t é qualquer cota superior para S então $u \leq t$.*
Notação: $\sup S = u$

Definição A.5 *Um número u denomina-se Ínfimo de S, se:*

i. u é cota inferior para S e

ii. se t é qualquer cota inferior para S então $u \geq t$.
Notação: $\inf S = u$

Proposição A.3 *Considere $A, B \subset \mathbb{R}$ conjuntos limitados e $c \in \mathbb{R}$, onde $A + B = \{x + y; x \in A, y \in B\}$ e $c.A = \{c \cdot x; x \in A\}$, temos*
(1) $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$
(2) $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$
(3) $\sup(c \cdot A) = c \cdot \sup A$, *caso* $c \geq 0$
(4) $\inf(c \cdot A) = c \cdot \inf A$, *caso* $c \geq 0$
(5) $\sup(c \cdot A) = c \cdot \inf A$, *caso* $c < 0$
(6) $\inf(c \cdot A) = c \cdot \sup A$, *caso* $c < 0$

Proposição A.4 *Seja $f, g : X \to \mathbb{R}$ funções limitadas. As funções $f + g$, $cf : X \to \mathbb{R}$, satisfazem as seguintes propriedades*

(1) $\sup(f+g) \leq \sup f + \sup g$
(2) $\inf(f+g) \geq \inf f + \inf g$
(3) $\sup(c \cdot f) = c \cdot \sup f$*, caso* $c \geq 0$
(4) $\inf(c \cdot f) = c \cdot \inf f$*, caso* $c \geq 0$
(5) $\sup(c \cdot f) = c \cdot \inf f$*, caso* $c < 0$
(6) $\inf(c \cdot f) = c \cdot \sup f$*, caso* $c < 0$

Demonstração: (Ver [5]) ■

A.4. Espaço vetorial real

Nesta seção apresentaremos a definição de espaço vetorial real.

Definição A.6 *Um espaço vetorial real é um conjunto* V*, não vazio, com duas operações: soma,* $V \times V \xrightarrow{+} V$*, e multiplicação por escalar,* $\mathbb{R} \times V \xrightarrow{\cdot} V$*, tais que, para quaisquer* $u, v, w \in V$ *e* $a, b \in \mathbb{R}$*,* $u+v \in V$ *e* $au \in V$*, e as propriedades abaixo sejam satisfeitas:*
i $(u+v)+w = u+(v+w)$
ii $u+v = v+u$
iii *Existe* $0 \in V$ *tal que* $u+0 = u$*. (0 é chamado de vetor nulo.)*
iv *Existe* $-u \in V$ *tal que* $u+(-u) = 0$*.*
v $a(u+v) = au+av$
vi $(a+b)v = av+bv$
vii $(ab)v = a(bv)$
viii $1u = u$

A.5. Conjuntos fechados

Nesta seção definiremos Conjuntos Fechados. Para isso exibiremos também a definição de *ponto aderente* e *fecho*.

Definição A.7 *Um ponto a diz-se aderente a um conjunto X de um espaço métrico M quando* $d(a,X) = 0$*. Isto é, existem pontos de X arbitrariamente próximos de* a*, ou seja, para cada* $\varepsilon > 0$*, podemos encontrar* $x \in X$ *tal que* $d(a,x) < \varepsilon$*.*

Outras maneiras equivalentes de dizer que a é aderente a X são:
(i) para todo $\varepsilon > 0$, tem-se $B(a;\varepsilon) \bigcap X \neq \varnothing$;
(ii) para todo aberto A contendo a tem-se que $A \bigcap X \neq \varnothing$;
(iii) toda vizinhança de a tem pontos em comum com X.

Definição A.8 *Chamamos de fecho (ou aderência) de um conjunto X num espaço métrico M o conjunto $\overline{X}$ dos pontos de M que são aderentes a X.*

Definição A.9 *Um conjunto F é dito fechado quando $F = \overline{F}$, ou seja, quando F é igual ao seu fecho.*

Referências

[1] DOMINGUES, Hygino Hugueros. **Espaços Métricos e Introdução à Topologia**. São Paulo. Editora Atual, 1982.

[2] ENCICLOPÉDIA **Stefan Banach**. Biografia UOL. Cracóvia, 1892. Disponível em http://educacao.uol.com.br/biografias/stefan-banach.jhtm. Acesso em: 01 de novembro de 2014.

[3] HONIG, Chaim Samuel. **Aplicações da Topologia à Análise**. São Paulo. Editora Livraria da Física, 2011.

[4] LIMA, Elon Lages. **Álgebra Linear**. 8ª ed. Rio de Janeiro: Editora Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2012.

[5] LIMA, Elon Lages. **Análise Real: Funções de Uma Variável**. 11^o ed. Rio de Janeiro. Editora IMPA, 2011.

[6] LIMA, Elon Lages. **Espaços Métricos**. Rio de Janeiro. Editora Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2003.

[7] LOURÊDO, Aldo Trajano; OLIVEIRA, Alexandro Marinho. **Um primeiro curso de álgebra linear**. Notas de aula. Campina Grande, 2013.

[8] MACIEL, Aldo Bezerra; LIMA, Osmundo Alves. **Introdução a Análise Real** . 22^o ed. Campina Grande. Editora EDUEP, 2005.