UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

LUCIENE RODRIGUES DA SILVA

ALGUMAS APLICAÇÕES DE PROGRESSÕES ARITMÉTICA E GEOMÉTRICA NA MATEMÁTICA FINANCEIRA

CAMPINA GRANDE – PB
2014

LUCIENE RODRIGUES DA SILVA

ALGUMAS APLICAÇÕES DE PROGRESSÕES ARITMÉTICA E GEOMÉTRICA NA MATEMÁTICA FINANCEIRA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências para obtenção do grau de licenciado em Matemática.

Orientadora: Profª. Me. Joselma Soares dos Santos/UEPB

CAMPINA GRANDE – PB
2014

S586a Silva, Luciene Rodrigues da.
Algumas aplicações de progressões aritmética e geométrica na Matemática Financeira [manuscrito] / Luciene Rodrigues da Silva. - 2014.
39 p. : il. color.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2014.
"Orientação: Profa. Ma. Joselma Soares dos Santos, Departamento de Matemática".

1. Matemática Financeira. 2. Progressão aritmética. 3. Progressão geométrica. I. Título.

21. ed. CDD 658.403

LUCIENE RODRIGUES DA SILA

ALGUMAS APLICAÇÕES DE PROGRESSÕES ARITMÉTICA E GEOMÉTRICA NA MATEMÁTICA FINANCEIRA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências para obtenção do grau de licenciado.

Aprovada pela banca examinadora em 10/12/2014.

Banca Examinadora

Joselma S. Santos

Profª. Me. Joselma Soares dos Santos / UEPB
Orientadora

Fernando Luiz Tavares da Silva

Prof. Me. Fernando Luiz Tavares da Silva / UEPB
Examinador

Kátia Suzana Medeiros Graciano

Prof. Me. Kátia Suzana Medeiros Graciano / UEPB
Examinadora

DEDICATÓRIA

Aos meus pais Maria e Luiz que me criaram com muito amor e carinho, e me preparam para a vida. A eles irei sempre dedicar as minhas conquistas.

AGRADECIMENTOS

A Deus, que sempre esteve ao meu lado, me dando sabedoria, ânimo, proteção e força para enfrentar todas as batalhas com as quais me deparei ao longo desta caminhada, por ter permitido a realização do meu sonho de ser professor de matemática e principalmente pelo dom da vida.

Aos meus pais, Maria e Luiz, que me criaram, me educaram e me incentivaram a estudar para alcançar os meus objetivos.

Aos meus irmãos, Cícero, Alexandre, José, Luciana, Fátima, Lúcia e Antônio, que sempre torceram pela minha realização pessoal.

Ao meu tio Manoel ,pelo apoio e incentivo.

Aos meus professores de matemática do ensino básico, Carlos e Damião, que despertaram em mim o gosto pela matemática e me motivaram a fazer esse curso.

Aos meus colegas: José Válber, Rodrigo, Josênelle, Claudenor, Juscelino, Michelly, Ataiz, Andreia, Fabrício e Daniela, pela amizade construída, o apoio me dado e os bons momentos vividos durante esses cinco anos de curso.

As minhas amigas, Pollyana, Josenele e especialmente a minha melhor amiga Daniele que me incentivaram e me apoiaram durante todos esses anos.

Aos amigos e colegas da minha cidade, com os quais viajei durante esse período pra Campina Grande, pelo companheirismo e união, principalmente nos momentos em que tivemos dificuldades pra conseguir transporte.

À minha orientadora, professora Joselma Soares, pela competência, disponibilidade e valiosa contribuição para a realização desse trabalho.

Aos professores da banca examinadora, Fernando Luiz e Kátia Suzana, pela disponibilidade e indispensáveis sugestões dadas para o aprimoramento desse trabalho.

Enfim, a todos que contribuíram de forma direta ou indireta, para a minha formação profissional.

“Talvez não tenha conseguido fazer o melhor, mas lutei para que o melhor fosse feito. Não sou o que deveria ser, mas graças a Deus, não sou o que era antes.”

Marthin Luther King

RESUMO

Este trabalho tem como tema central o estudo das progressões aritmética e geométrica, tendo como objetivo associar as progressões aritmética e geométrica com a matemática financeira, em particular, aplicar a progressão aritmética para demonstrar algumas fórmulas estudadas no regime de juros simples e a progressão geométrica para demonstrar algumas fórmulas estudadas no regime de juros compostos, e dessa maneira contribuir para uma melhor compreensão do ensino das progressões aritmética e geométrica, visto a importância de se aplicar esse conteúdo ao nosso cotidiano, fato que ocorre frequentemente na matemática financeira.

Palavras-Chave: Progressão Aritmética, Progressão Geométrica, Matemática Financeira.

ABSTRACT

This work is focused on the study of arithmetic and geometric progressions, aiming to involve arithmetic and geometric progressions with financial mathematics, in particular, apply the arithmetic progression to demonstrate some formulas studied in simple interest basis and the geometric progression demonstrate some formulas studied in compound interest basis, and thus contribute to a better understanding of the teaching of arithmetic and geometric progressions, as the importance of applying this content to our daily lives, a fact that often occurs in financial mathematics.

Keywords: Arithmetic Progression, Geometric Progression, Financial Mathematics.

LISTA DE FIGURAS

SÚMARIO

1 INTRODUÇÃO

Os registros referentes aos estudos das progressões começaram com os povos antigos, os babilônicos e os egípcios.

Os egípcios à cerca de 5000 anos atrás com a necessidade de garantir a produção de seus alimentos, começaram a observar os períodos em que ocorria a enchente do rio Nilo, que era de fundamental importância para sua sobrevivência, pois dependiam do rio Nilo para produzir seus alimentos, sendo então, fundamental determinar o período de enchente para poderem plantar na época certa. Dessa forma, os egípcios observaram que o rio Nilo subia depois que a estrela Sírius se levantava a leste, um pouco antes do Sol e chegaram a conclusão que isso ocorria a cada 365 dias, e através dessas observações criaram um calendário solar formado por doze meses, de 30 dias cada mês e cinco dias de festas , dedicados aos deuses; Osíris, Hórus, Seth, Ísis e Nephthys. Além disso dividiram os doze meses em três estações de quatro meses cada um e assim determinaram o período de semear, o período de crescimento e o período da colheita.

Na Mesopotâmia surgiram várias tabletas babilônicas muito interessantes, mas a mais importante foi a tableta Plimpton 322 (1900 a.c a 1600 a.c na qual em alguma dessas tabletas, a progressão geométrica $1 + 2 + 2^2 + ... + 2^9$ é somada de tal maneira que a série de quadrados $1 + 2^2 + 3^2 + ...+10^2$ é achada, ficando implícita a soma de uma progressão geométrica.

Figura 1: Tabela Plimpton

O Papiro Rhind (ou Ahmes, datado a aproximadamente a 1650 a.c,) é um texto matemático na forma de manual prático que contém 85 problemas copiados em escrita hierática pelo escriba Ahmes de um trabalho mais antigo. O papiro foi adquirido no Egito pelo egiptólogo, escocês A. Henry Rhind, sendo mais tarde comprado pelo Museu Britânico. Esse papiro e o papiro de Moscou são as nossas principais fontes de informações sobre á matemática egípcia antiga. E é no papiro Rhind que é encontrada a progressão geométrica, formada pelas frações

$$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\frac{1}{32},\frac{1}{64}$$

Do Hekat, conhecida como frações dos olhos do deus Hórus.

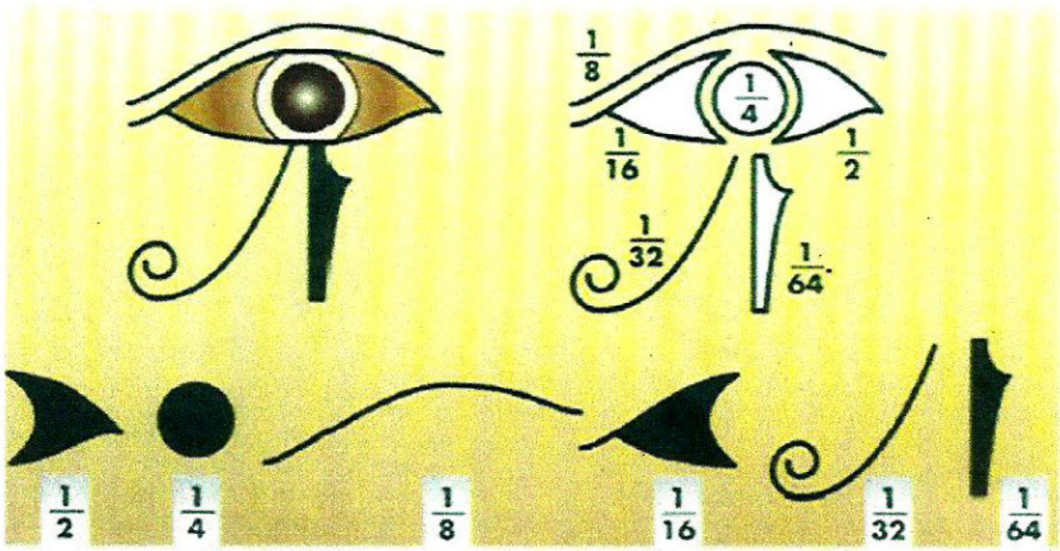


Figura2. Olho de Hórus

Os egípcios somavam frações com 6 elementos usando a multiplicação por um fator comum. Por exemplo, para calcular a soma.

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64},$$

multiplica-se ambos os membros da igualdade acima por 64, obtendo

$$64\,.S \;=\; 64 \cdot \frac{1}{2} + 64 \cdot \frac{1}{4} + 64 \cdot \frac{1}{8} + 64 \cdot \frac{1}{16} + 64 \cdot \frac{1}{32} + 64 \cdot \frac{1}{64}.$$

Logo,

Daí,

O que deixa implícita a soma de uma progressão geométrica.

Todavia, foi na Grécia que o estudo sistematizado da matemática começou a acontecer.

Presume – se que se deve a Pitágoras (585 ac a 500 ac) e aos sábios gregos a criação da aritmética teórica. Dá- se aos membros mais antigos da escola pitagórica aproximadamente 600 ac, o surgimento dos números figurados, na qual esses números expressam o número de pontos em certas configurações geométricas representando um elo de ligação entre a geometria e a aritmética. Na figura abaixo fica claro que o enésimo número triangular é dado pela soma da progressão aritmética, pois a soma dos termos de uma progressão aritmética finita é metade do produto do número de termos pela soma dos dois termos extremos, sendo assim a figura abaixo justifica a nomenclatura dos números triangulares dada por :

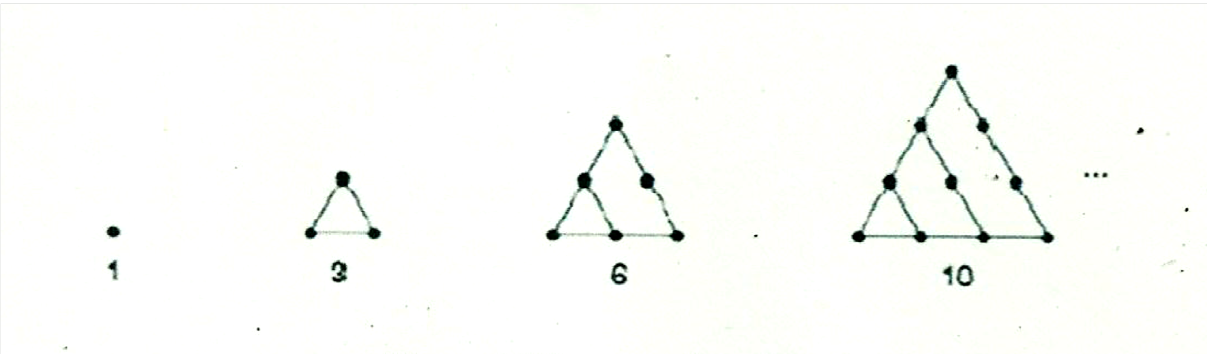


Figura 3. Números triangulares

O grego Euclides de Alexandria também teve êxito na história da matemática, produziu a obra Os Elementos. A primeira edição desse trabalho surgiu em 1482, sendo composta por 465 proporções distribuídas em 13 livros, e é no livro VIII que encontramos as proporções contínuas e progressões geométricas relacionadas, de forma que, se temos uma proporção contínua , então formam uma progressão geométrica.

Porém foi com Johann Friderich Carl Gauss o episodio mais fascinante da progressão aritmética, que aos dez anos de idade, durante uma aula de matemática seu professor pediu para que todos os alunos obtivessem a soma dos números de 1 a 100, e em poucos minutos Gauss apresentou o resultado correto, da seguinte maneira, somando os números equidistantes dos extremos, ele observou que o resultado 101 era sempre o mesmo.

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 97 + 98 + 99 + 100$$

Na qual ele multiplicou a constante 101 pelo número de termos e dividiu pela metade, chegando ao resultado. Que mais tarde se tornou a fórmula da soma da progressão aritmética

$$s = \frac{n\,(a_1 + a_n)}{2}.$$

Mas é claro que Gauss não chegou a essa fórmula naquela época, mas foi um passo muito importante para o estudo das progressões aritmética e geométrica.

Neste trabalho estudamos essas progressões com o objetivo de aplicar tais conceitos em algumas fórmulas de matemática financeira. Os resultados aqui apresentados foram obtidos por meio de estudos bibliográficos, bem como pesquisas na internet. Para isto, dividimos o trabalho em quatro capítulos.

No segundo capítulo, estudamos as Progressões Aritméticas, definição, fórmulas do termo geral e da soma dos termos, com suas respectivas demonstrações, além de apresentarmos alguns exemplos.

No terceiro capítulo, estudamos as Progressões Geométricas, definição, fórmulas do termo geral e da soma de termos, apresentando suas demonstrações, além de alguns exemplos.

E por fim, no último capítulo é apresentada a ideia central deste trabalho que é mostrar algumas aplicações de progressões aritmética e geométrica na matemática financeira, em especial nas fórmulas de juros e montante, estudadas no regime de juros simples e no regime de juros compostos.

2. PROGRESSÃO ARITMÉTICA

Neste capítulo, inicialmente iremos definir as progressões aritméticas, e em seguida apresentar e demonstrar as fórmulas do termo geral e da soma dos seus termos, e dar exemplos.

2.1 Definição de Progressão Aritmética

Antes de definirmos, iniciaremos com os seguintes problemas.

Problema 2.1: Uma fábrica de automóveis produziu 600 veículos em janeiro e aumenta mensamente sua produção de 40 veículos. Quantos veículos produziram em junho?

Solução:

Como a produção aumenta mensalmente 40 veículos, os valores da produção mensal, a partir de janeiro são: 600, 640, 680, 720, 760, 800, $\cdots$. Portanto, em junho a fábrica produziu 800 veículos.

Podemos observar neste problema que o aumento de veículos a cada mês é sempre o mesmo, no qual esse aumento constante foi de 40 veículos a cada mês.

Problema 2.2: A população atual de uma certa cidade é de 20.000 habitantes. Essa população aumenta anualmente em 100 habitantes. Qual será a população dessa cidade daqui a 10 anos?

Solução:

Como a população aumenta anualmente 100 habitantes, a população anual, a partir da população atual é 20000, 20100, 20200, 20300, 20400, 2050, 20600, 20700, 20800, 20900, 21000,... . Assim em 10 anos a população dessa cidade será de 21000 habitantes.

Podemos observar neste problema que o aumento da população em cada ano é sempre o mesmo, no qual esse aumento constante foi de 100 habitantes por ano.

Definição: Chamamos de Progressão Aritmética (P.A.) uma sequência na qual a diferença entre cada termo e o termo anterior é constante. Essa diferença constante é chamada de razão da progressão e, é representada pela letra r.

Assim, nos problemas 2.1 e 2.2, temos exemplos de progressões aritméticas de razões dadas respectivamente por, $r = 40$ e $r = 100$.

2.2 Classificação de uma progressão aritmética P.A.

Podemos classificar uma progressão aritmética de três formas:

I. Crescente, quando cada termo é maior que o seu antecessor, ou seja, $a_n > a_{n-1}, \forall\, n \in \mathbb{N}$. Onde por definição $a_n = a_{n-1} + r$, temos :

$$a_n > a_{n-1} \Rightarrow a_{n-1} + r > a_{n-1} \Rightarrow r > 0.$$

Assim, a P. A. é crescente quando a razão for maior que zero.

Exemplo 2.1: $(1, 3, 5, 7, \cdots)$, com $a_1 = 1$ e $r = 2$.

II. Decrescente, quando cada termo é menor que o seu antecessor, ou seja, $a_n < a_{n-1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Onde por definição $a_n = a_{n-1} + r$, temos:

$$a_n < a_{n-1} \Rightarrow a_{n-1} + r < a_{n-1} \Rightarrow r < 0.$$

Assim, a P. A. é decrescente quando a razão for menor que zero.

Exemplo 2.2: $(0, -4, -8, -12, \cdots,)$, com $a_1 = 0$ e $r = -4$

III. Constante, quando todos os termos são iguais, ou seja, $a_n = a_{n-1}, \forall\, n \in \mathbb{N}$. Onde por definição $a_n = a_{n-1} + r$, temos:

$$a_n = a_{n-1} \Rightarrow a_{n-1} + r = a_{n-1} \Rightarrow r = 0.$$

Assim, a P. A. é constante quando a razão for igual a zero.

Exemplo 2.3: $(1, 1, 1, 1, \cdots)$, com $a_1 = 1$ e $r = 0$

*

2.3 A Fórmula do termo geral de uma progressão aritmética PA

Podemos encontrar uma regra para encontrar um termo qualquer de uma P.A., fixando apenas o primeiro termo igual a a_1 e razão igual a r, isto é, por definição temos:

$a_1 = a.$

$a_2 = a_1 + r.$

$a_3 = a_2 + r \Rightarrow a_3 = (a_1 + r) + r \Rightarrow a_3 = a_1 + 2r.$

$a_4 = a_3 + r \Rightarrow a_4 = (a_1 + 2r) + r \Rightarrow a_4 = a_1 + 3r.$

Daí, podemos observar que o termo geral de uma progressão aritmética PA é dada por,

$a_n = a_1 + (n-1)r, n \in \mathbb{N}^*,$

onde:

a_n é o termo geral;

a_1 é o primeiro termo;

n é o número de termos (até n);

r é a razão da P.A.

Podemos mostrar que está fórmula, conhecida como fórmula do termo geral de uma PA, é válida para todo $n \in N^*$, usando o Princípio da indução finita (1), conforme veremos a seguir.

i) Para $n = 1$, temos

$$a_1 = a_1 + (1-1)r \Rightarrow a_1 = a_1.$$

Logo, para $n = 1$, a fórmula é verdadeira.

ii) Suponhamos que a igualdade é válida para algum $n = k \in N^*$, $k \geq 1$, isto é:

$$a_k = a_1 + (k-1)r.$$

Agora, mostremos que a igualdade é válida para $n = k + 1$, isto é,

$$a_{k+1} = a_1 + [(k+1) - 1]r.$$

Por definição, $a_{k+1} = a_k + r$, daí usando a hipótese de indução.

$$a_{k+1} = a_k + r = (a_1 + (k-1)r) + r = a_1 + [(k+1) - 1]r.$$

---

[1] Teorema(Princípio de indução Finita) seja uma propriedade P(n) para todo $n \in$N suponha que:

a) P(1) é verdadeira, isto é, afirmação é válida para $n = 1$
b) P(k) é verdadeira→P($k + 1$) verdadeira, isto é, admitindo a veracidade da afirmação para um natural k arbitrário, é possível demonstrar a veracidade para $k + 1$.

Logo, a igualdade é válida para

Portanto, pelo Princípio de indução finita é válida para todo .

Observação: Em alguns casos denotamos o primeiro termo da progressão aritmética por , neste caso, o termo geral é dada por:

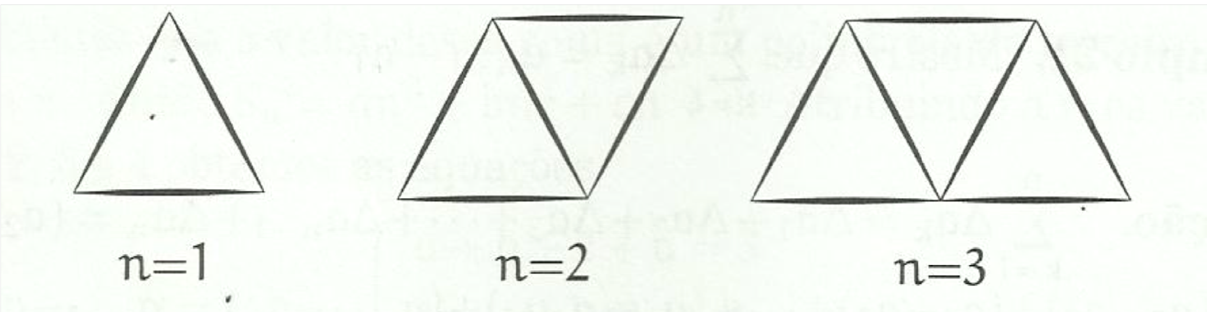
Exemplo 2.4: No problema 2.2, para saber a população de uma certa cidade após 10 anos, podemos usar a fórmula do termo geral de uma P.A., neste caso, e

Como,

,

Temos:

Exemplo 2.5: Formam-se triângulos com palitos, conforme a figura.



Qual o número de palitos usados para construir triângulos?

Solução:

Seja o número de palitos usados para formar triângulos, temos:

e ,

Portanto, para construir triângulos é necessário palitos.

Exemplo 2.6: Determine a PA em que o sexto termo é 7 e o décimo termo é 15.

Solução:

Para escrever a PA é necessário determinar a_1 e r, temos

$$\begin{cases} a_6 = 7 \ \rightarrow \ a_1 + 5r = 7 \qquad (I) \\ a_{10} = 15 \rightarrow \ a_{10} + 9r = 15 \quad (II) \end{cases}$$

Resolvendo o sistema acima, obtemos:

$r = 2$ e $a_1 = -3$.

Logo, a PA é $(-3, -1, 1, 3, \cdots,)$.

2.3 Soma dos termos de uma PA

Considere uma progressão aritmética dada por $(a_1, a_2 + \cdots + a_n + \cdots)$, então a soma dos n primeiros termos é:

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n \ . \qquad (1)$$

Por outro lado

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1 \ . \qquad (2)$$

Somando (1) e (2), obtemos:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \cdots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1). \qquad (3)$$

Onde podemos observar que,

$$\begin{cases} a_2 + a_{n-1} = a_1 + r + a_{n-1} = a_1 + a_n \ . \\ \vdots \\ a_{n-1} + a_2 = a_{n-1} + a_1 + r = a_1 + a_{n-1} + r = a_1 + a_n. \end{cases}$$

Logo, no segundo termo de (3), temos n parcelas iguais a $a_1 + a_n$, daí,

$$2S_n = n(a_1 + a_n) \ \Rightarrow \ S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

Portanto, a soma dos n primeiros termos da progressão aritmética $(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots)$ é

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

Podemos provar esta igualdade usando o princípio de indução finita, isto é, provaremos que:

$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{(a_1+a_n)n}{2}$, para $n \in \mathbb{N}^*$.

i) Para $n = 1$, temos:

$$a_1 = \frac{(a_1 + a_1)1}{2} \Rightarrow a_1 = \frac{2a_1}{2} \ \Rightarrow \ a_1 = a_1.$$

Logo, a fórmula vale para $n = 1$.

ii)Suponhamos que a igualdade é válida para algum $n = k$, $k \in N^*$, isto é,

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

Mostremos que a igualdade é válida para $n = k + 1$, isto é,

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1} = \frac{(a_1 + a_{k+1})(k+1)}{2}.$$

De fato, pela hipótese do princípio de indução,

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k = \frac{(a_1 + a_n)k}{2},$$

adicionando em ambos os membros da igualdade o termo $k + 1$, temos

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1} = \frac{(a_1+a_k)k}{2} + a_{k+1}$$

$$\Rightarrow a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1} = \frac{(a_1+a_k)k}{2} + (a_k + r)$$

$$\Rightarrow a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1} = \frac{(a_1+a_k)k+2(a_k+r)}{2}$$

$$\Rightarrow a_1 + a_2 + \cdots a_k + a_{k+1} = \frac{a_1.k+a_k.k+2a_k+2r}{2}$$

$$\Rightarrow a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1} = \frac{a_1.k+(a_1+(k-1).r).k+2(a_1+(k-1).r)+2r}{2}$$

$$\Rightarrow a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1} = \frac{a_1k+a_1k+2a_1+(k-1)kr+2(k-1)r+2r}{2}$$

$$\Rightarrow a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1} = \frac{a_1(2k+2)+[(k-1)k+2(k-1)r+2]r}{2}$$

$$\Rightarrow a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1} = \frac{a_1(2k+2)+k(k-1+2)r}{2}$$

$$\Rightarrow a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1} = \frac{2a_1(k+1)+k(k+1)r}{2}$$

$$\Rightarrow a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1} = \frac{k(+1)(2a_1+kr)}{2} = \frac{(k+1)(a_1+a_1+kr)}{2}$$

$$\Rightarrow a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1} = \frac{(k+1)(a_1+a_{k+1})}{2}$$

Logo, a igualdade é válida para $n = k + 1$.

Portanto, pelo princípio de indução finita $S_n = \frac{(a_1+a_n)n}{2}$ é válida para todo $n \epsilon N^*$.

Exemplo 2.7: Calcule a soma dos termos da PA(2, 5, 8,11,$\cdots$) desde o vigésimo quinto até o quadragésimo primeiro, inclusive.

Solução: Como $a_1 = 2$ e $r = 3$, temos,

$a_{25} = 2 + (25 - 1).3 = 74$ e $a_{41} = 2 + (41 - 1).3 = 122.$

Como do vigésimo quinto até o quadragésimo primeiro, inclusive, temos 17 termos, 74,77,...,122, temos

$$S_{17} = \frac{(74 + 122).17}{2} = 1666.$$

Portanto, a soma é 1666.

3. PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

Neste capítulo, inicialmente iremos definir as progressões geométricas, e em seguida apresentar e demonstrar as fórmulas do termo geral e da soma dos seus termos.

3.1 Definição de Progressão Geométrica

Antes de definirmos, iniciaremos com os seguintes problemas.

Problema 3.1: Em 2005 uma empresa produziu 400000 unidades de certo produto. Quantas unidades produziram no período de 2005 a 2010, se o aumento de produção anual for de 10% em relação ao ano anterior?

Solução: Como o aumento da população é de 10% em relação ao ano anterior, temos:

- A produção em 2005 $= 400000$.
- A produção em 2006 = (produção em 2005). 1,10 = 400000. 1,10 = 440000
- A produção em 2007 = (produção em 2006). 1,10 = 440000. 1,10 = 484000
- A produção em 2008 = (produção em 2007). 1,10 = 484000. 1,10 = 532400
- A produção em 2009 = (produção em 2008). 1,10 = 532400. 1,10 = 585640
- A produção em 2010 = (produção em 2009). 1,10 = 585640. 1,10 = 644204.

Portanto, a produção anual, nesse período será dada pela sequência,
(400000, 440000, 484000, 532400, 585640, 644204).
Fica claro que, nessa sequência, cada termo, a partir do segundo, é obtido multiplicando o termo anterior por um mesmo número fixo, 1,10.

Definição: Chamamos de progressão geométrica PG uma sequencia na qual é constante o quociente da divisão de cada termo pelo termo anterior. Esse quociente constante é chamado de razão da progressão e, é representada pela letra q.

No problema 3.1, temos uma progressão geométrica, onde a razão é dada por $q = 1{,}10.$

Observação: A partir do problema 3.1, podemos observar que uma progressão geométrica é uma sequencia na qual a taxa de crescimento de cada termo para o seguinte é sempre a mesma, e neste caso a razão q de uma progressão geométrica é simplesmente o valor de $1 + i$, onde i é a taxa de crescimento constante de cada termo para o seguinte.

Exemplo 3.1: A população de um país é hoje igual a P_0 e cresce 4% ao ano. Qual será a população desse país daqui a n anos?

Solução:

- P_0 é a população inicial, que cresce a 4% ao ano. Note que a população ao final do primeiro ano é

$$P_1 = P_0 + 4\%P_0 = P_0 + 0{,}04P_0 = (1 + 0{,}04)P_0.$$

- A população ao final do segundo ano

$$P_2 = P_1 + 4\%P_1 = (1 + 0{,}04)P_0 + 0{,}04(1 + 0{,}04)P_0 = (1 + 0{,}04)P_0(1 + 0{,}04).$$
$$= (1 + 0{,}04)^2P_0$$

- A população ao final do terceiro ano será

$$P_3 = P_2 + 4\%P_2 = (1 + 0{,}04)^2P_0 + 0{,}04(1 + 0{,}04) = (1 + 0{,}04)^3P_0.$$

De onde podemos observar que a população daqui a n anos é dada por

$$P_n = (1 + 0{,}04)^nP_0.$$

3.2 Classificação das progressões geométricas PG

As progressões geométricas podem ser classificadas em cinco categorias:

I. Crescentes - cada termo é maior que o anterior, ou seja, $a_n > a_{n-1}, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$, isto ocorre de duas maneiras

a)PG com termos positivos

$$a_n > a_{n-1} \Leftrightarrow \frac{a_n}{a_{n-1}} > 1 \Leftrightarrow q > 1.$$

Exemplo 3.2: $(1,2,4,8,16)$, com $a_1 = 1$ e $q = 2$.

b)PG com termos negativos

$$a_n > a_{n-1} \Leftrightarrow 0 < \frac{a_n}{a_{n-1}} < 1 \Leftrightarrow 0 < q < 1.$$

Exemplo 3.3: $(-54, -18, -6, -2, -\frac{2}{3}, \cdots)$, com $a_1 = -54$ e $q = \frac{1}{3}$.

II. Constante - cada termo é igual ao anterior, $a_n = a_{n-1}, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$,. Observemos que isso ocorre em duas situações:

a) P.G. com termos todos nulos. Neste caso, $a_1 = 0$ e q qualquer.

b)P.G. com termos iguais e não nulos

$$a_n = a_{n-1} \Leftrightarrow \frac{a_n}{a_{n-1}} = 1 \Leftrightarrow q = 1.$$

Exemplo 3.4: $(7,7,7,7, \cdots)$, com $a_1 = 7$ e $q = 1$.

III Decrescentes - cada termo é menor que o termo anterior, $a_n < a_{n-1}, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Notemos que isto pode ocorre de duas maneiras.

a)P.G. com termos positivos

$$a_n < a_{n-1} \Leftrightarrow 0 < \frac{a_n}{a_{n-1}} < 1 \Leftrightarrow 0 < q < 1.$$

Exemplo 3.5: $\left(\mathbf{1}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{9}}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{27}}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{81}} \cdots\right)$com $a_1 = 1$ e $q = \frac{1}{3}$

b)P.G. com termos negativos

$$a_n < a_{n-1} \Leftrightarrow \frac{a_n}{a_{n-1}} > 1 \Leftrightarrow q > 1.$$

Exemplo 3.6: $(-1, -2, -4, -8, -16, \cdots)$, com $a_1 = -1$ e $q = 2$.

IV Alternantes são as PG em que cada termo tem sinal contrário ao do termo anterior, isto ocorre quando $q < 0$.

Exemplo 3.7: $(5, -5,5, -5,5, \cdots)$, com $a_1 = 5$ e $q = -1$.

V Estacionária são as PG em que $a_1 \neq 0$ e $a_2 = a_3 = a_4 = \cdots = 0$.

Exemplo 3.8: $(3,0,0,0,0,\cdots)$, com $a_1 = 3$ e $q = 0$.

3.3A Fórmula do Termo Geral de uma P.G.

Conforme vimos na definição, em uma progressão geométrica $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots)$ de razão q, partindo do primeiro termo, para avançarmos um termo basta multiplicarmos o primeiro termo pela razão $q, (a_2 = a_1 q)$; para avançarmos dois termos, basta multiplicarmos o primeiro termo pelo quadrado da razão $q, (a_3 = a_2 q^2)$ e assim por diante. Desse modo encontramos o termo de ordem n. Pois, temos

$$
\begin{aligned}
&a_1 = a_1\\
&a_2 = a_1 q\\
&a_3 = a_2 q\\
&a_4 = a_3 q\\
&\vdots\\
&a_{n-1} = a_{n-2}.\,q\\
&a_n = a_{n-1}.\,q
\end{aligned}
$$

Multiplicando termo a termo as igualdades acima, obtemos:

$$a_2.\,a_3.\,a_4.\cdots.\,a_{n-1}.\,a_n = (a_1.\,q)(a_2.\,q)(a_3.\,q)\cdots(a_{n-2}.\,q)(a_{n-1}.\,q).$$

Simplificando a igualdade acima, temos:

$$a_n = a_1(q.\,q.\cdots.\,q)$$

Daí, o termo geral de uma P.G. é dado por:

$a_n = a_1.\,q^{n-1},\ n \in \mathbb{N}^*.$

Onde:

a_n é o termo geral

a_1 é o primeiro termo

n é número de termo (até n)

q é a razão

Sendo assim, podemos mostrar que está fórmula, conhecida como fórmula do termo geral de uma PG, é válida para todo $n \in N^*$, usando o Princípio da indução finita, conforme veremos a seguir.

i)Para $n = 1$, temos

$$a_1 = a_1 q^{1-1} \Rightarrow a_1 = a_1 q^0 \Rightarrow a_1 = a_1.$$

Logo, a fórmula vale para $n = 1$.

ii)Suponhamos que a igualdade é válida para $n = k \in N^*, k \geq 1$, isto é,

$$a_k = a_1 q^{k-1}.$$

E agora, mostremos que a igualdade é valida para $n = k + 1$, isto é,

$$a_{k+1} = a_1 q^{k+1-1}.$$

Notemos que, pela definição $a_{k+1} = a_k . q$, assim, usando a hipótese de indução, temos:

$$a_{k+1} = a_1 q^{k-1} . q = a_1 q^{k+1-1}.$$

Logo, a igualdade é válida para $n = k + 1$.

Portanto, pelo princípio de indução finita $a_n = a_1 q^{n-1}$ é válida para todo $n \in N^*$.

Observação 3.2: Em alguns casos denotamos o primeiro termo da PG por a_0 , neste caso o termo geral é dado por $a_n = a_0 q^n$

Exemplo 3.9: A produção de uma empresa nos meses de janeiro, fevereiro e março, respectivamente forma uma PG. Se a produção em janeiro foi de 3000 unidades e em março foi de 27000 unidades, quantas unidades foram produzidas em fevereiro?

Solução:

Usando a fórmula do termo geral, com:

a_1=3000 , $a_n =$ produção em março $= 27000$ unidades e $n = 3$. Determinemos o valor da razão q. Temos

$$a_3 = a_1 q^{3-1} \Rightarrow 27000 = 3000q^2 \Rightarrow q^2 = \frac{27000}{3000} \Rightarrow q^2 = 9 \Rightarrow q = 3.$$

Agora, determinemos a_2

$$a_2 = a_1 . q \Rightarrow a_2 = 3000.3 \Rightarrow a_2 = 9000.$$

Portanto, foram produzidas em fevereiro 9000 unidades.

3.4A Fórmula da soma dos n primeiros termos de uma PG

Consideremos uma PG dada pela sequência $(a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n)$, temos

$a_2 = a_1.q$

$a_3 = a_1 q^2$

$a_4 = a_1 q^3$

$\vdots$

$a_n - 1 = a_1 q^{(n-1)-1}$

$a_n = a_1 q^{n-1}$

Daí, somando termo a termo de ambos os membros das igualdades acima,

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n - 1 + a_n = a_1 + a_1.q + a_1.q^2 + \cdots + a_1.q^{n-1}.$$

Ou seja,

$$S_n = a_1 + a_1.q + a_1.q^2 + \cdots + a_1.q^{n-2} + a_1.q^{n-1}. \qquad (4)$$

Multiplicando ambos os lados da última igualdade por q, obtemos:

$$qS_n = a_1.q + a_1.q^2 + a_1.q^3 + \cdots + a_1.q^{n-1} + a_1.q^n. \qquad (5)$$

Fazendo (5) - (4), obtemos:

$$qS_n - S_n = (a_1.q + a_1.q^2 + \cdots + a_1.q^{n-1} + a_1.q^n) -$$
$$-(a_1 + a_1.q + a_1.q^2 + \cdots + +a_1.q^{n-2} + a_1.q^{n-1}).$$

Simplificando a expressão, obtemos:

$$S_n(q-1) = a_1.q^n - a_1 \Rightarrow S_n(q-1) = a_1(q^n - 1),$$

Ou seja,

$$S_n = \frac{a(q-1)}{q-1} \text{ ou } S_n = \frac{a\,(1-q)}{1-q}, \text{ com } q \neq 1.$$

Logo, a soma dos n primeiros termos de uma P.G . $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de razão $q \neq 1$, é :

$$S_n = a_1 \frac{(1-q^n)}{1-q}.$$

Podemos demonstrar essa fórmula, usando o princípio de indução finita, isto é, provaremos que:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_1 \frac{(1-q^n)}{1-q}, \forall\, n \in N^*.$$

Vejamos,

i)Para $n = 1$, temos:

$$a_1 = a_1 \frac{(1-q^1)}{1-q} \Rightarrow a_1 = a_1 \frac{(1-q)}{1-q} \Rightarrow a_1 = a_1 \ .$$

Logo, a fórmula vale para $n = 1$.

ii)Suponhamos que a igualdade é válida para $n = k \in N^*$, isto é,

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k = a_1 \frac{(1-q^k)}{1-q}.$$

E mostremos que a igualdade é válida para $n = k + 1$, isto é

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{k+1} = a_1 \frac{(1-q^{k+1})}{1-q}.$$

De fato, pela hipótese de indução,

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k = a_1 \frac{(1-q^k)}{1-q}.$$

Adicionando em ambos os membros da igualdade a_{k+1}, temos,

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1} = a_1 \frac{(1-q^k)}{1-q} + a_{k+1}.$$

E como $a_{k+1} = a_k.q$, temos $a_{k+1} = a_1 q^{(k+1)-1}$, sendo assim,

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1} = a_1 \frac{(1-q^k)}{1-q} + a_1 q^k$$

$$\Rightarrow a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1} = \frac{a_1(1-q^k) + (1-q)a_1 q^k}{1-q}$$

$$\Rightarrow a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1} = \frac{a_1(1-q^k + q^k - q^{k+1})}{1-q}$$

$$\Rightarrow a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1} = a_1 \frac{(1-q^{k+1})}{1-q}$$

Logo, a igualdade é válida para $n = k + 1$.

Portanto, pelo princípio de indução finita $S_n = a_1 \frac{(1-q^n)}{1-q}$ é válida para todo $n \in N^*$.

Exemplo 3.10: Uma pessoa aposta na loteria durante cinco semanas, de tal forma que, em cada semana, o valor da aposta é o dobro da aposta da semana anterior. Se o valor da aposta da primeira semana é de R$ 60,00, qual o total da apostado após as cinco semanas?

Solução: Temos: $a_1 = 60$ e $q = 2$, daí

$$S_5 = 60 \frac{(1-2^5)}{1-2} \Rightarrow S_5 = 60 \frac{(1-32)}{-1} \Rightarrow S_5 = 60 \frac{(-31)}{-1} \Rightarrow S_5 = 1860.$$

Portanto, em cinco semanas o total a apostado foi de R$ 1860,00.

4. APLICAÇÕES DAS PROGRESSÕES ARITMÉTICAS E DAS PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS

Neste capítulo, veremos algumas aplicações das progressões aritméticas e geométricas na matemática financeira.

4.1 Conceitos Básicos de Matemática Financeira

A operação básica da matemática financeira é a operação de empréstimo. Nestas operações, alguém que dispõe de um capital C (chamado de principal), empresta-o a outro por um certo período de tempo, e após esse período, recebe o seu capital C de volta, acrescido de uma renumeração J pelo o empréstimo. Essa renumeração é chamada de juro. A soma $C + J$ é chamada de montante e será representada por M, isto é, $M = C + J$. A razão $i = \frac{J}{C}$ que é a taxa de crescimento do capital, será sempre referida ao período da operação chamada de taxa de juros.

Nas definições e problemas que vamos estudar, iremos usar os seguintes símbolos:

- C_0 é o capital inicial ou (valor presente);
- J é o juros;
- C_n é o montante ou (valor futuro);
- n é o número de período de tempo;
- i é taxa de juros.

Onde a unidade de tempo n expressa em (mês, trimestre, semestre, etc) será a mesma unidade de tempo da taxa de juros i (expressa ao mês, ao trimestre, ao semestre, etc). Ou seja, necessariamente i e n devem ser expressos na mesma unidade de tempo.

Existem dois tipos de regime de capitalização: o regime de capitalização simples (juros simples) e o regime de capitalização composto (juros compostos), conforme veremos nas seções seguintes.

4.2 Aplicação das Progressões Aritméticas no Regime de juros simples

No regime de juros simples, os juros somente incidem sobre o capital inicial da operação (aplicação ou empréstimo), não se registrando juros sobre o saldo dos juros acumulados. Assim, os juros acumulados após n períodos serão dados por:

$$J = C.i.n.$$

Observe agora, o seguinte problema.

Problema 4.1: Um capital de R\$ 100000,00 foi aplicado á taxa de juros simples de 2% ao mês. Qual o montante futuro no fim dos 3 meses?

Solução:

Temos: $C_0 = R\$100000{,}00,\ \ i = 2\%$ ao mês $e\ n = 3$ meses. Daí,

- 2% de $R\$\ 100000{,}00 = 0{,}02.100000{,}00 = R\$2000{,}00$ (juros em 1 mês)
- $3.R\$\ 2000{,}00 = R\$\ 6000{,}00$ (rendimento em juros simples ao fim de 3 meses)
- $C_3 = R\$100000{,}00 + R\$6000{,}00 = R\$106000{,}00.$

  Logo, o montante após 3 meses será de $R\$106000{,}00.$

Podemos observar no problema 4.1 que,

- Ao final do primeiro período (no caso, mês) o valor futuro ou montante acumulado é dado por:

$$C_1 = C_0 + C_0 i = C_0(1 + i)$$

- Ao final do segundo período o valor futuro ou montante acumulado será:

$$C_2 = C_0(1 + i) + C_0 i = C_0(1 + i + i) = C_0(1 + 2i)$$

- Ao final do terceiro período o valor futuro ou montante acumulado será:

$$C_3 = C_0(1 + 2i) + C_0 i = C_0(1 + 2i + i) = C_0(1 + 3i)$$

Note que, no regime de juros simples, os valores acumulados ao final de cada período formam uma progressão aritmética, visto que, o montante do mês seguinte é calculado a partir do valor do montante do mês anterior mais o juro que é constante, ou seja, é o valor inicial mais a razão, que nesse caso é juro, que é dado por: $C_0 i$.

Logo, a sequência $(C_0, C_1, C_2, \cdots, C_n, \ldots)$, é uma P.A. de razão $C_0 i$. Assim para sabermos o montante ou valor futuro para um período n qualquer, basta usarmos a fórmula do termo geral de uma P.A., que conforme vimos na observação 2.1 do capítulo 1, neste caso é dada por:

$$a_n = a_0 + nr,$$

Onde: $a_n = C_n, a_0 = C_0 \; e \; r = J = C_0 . i$. Daí, podemos concluir que no final de n períodos o valor futuro acumulado será de,

$$C_n = C_0(1 + ni), \forall n \in \mathbb{N}^* \; .$$

Observação 4.1: Poderíamos resolver este problema, usando a fórmula acima, sem precisar calcular o montante dos meses anteriores. No problema temos,

$$C_n = R\$100000, n = 3 \text{ meses } e \; i = 2\% = 0{,}02 \text{ ao mês},$$

Daí, como $C_n = C_0(1 + ni)$, temos:

$$C_3 = 100000(1 + 3.0{,}02) \Rightarrow C_3 = 106000.$$

Logo, o montante acumulado ao final de 3 meses é R$106000.

Observação 4.2: Como vimos que necessariamente i e n devem ser expressos na mesma unidade de tempo, do contrário, teremos que transformar o prazo da taxa para o prazo da capitalização ou, de maneira inversa, o período da capitalização passa a ser expresso na unidade de tempo da taxa de juros.

No regime de juros simples, essa transformação é processada pela denominada taxa proporcional (linear ou nominal) de juros.

Definição 4.1: Consideremos duas taxas de juros arbitrárias i_1 e i_2, relacionadas respectivamente aos períodos n_1 e n_2, referidos a unidade comum de tempo das taxas, estas taxas se dizem proporcionais quando:

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{n_1}{n_2}.$$

Exemplo 4.1: Verifique se as taxas de 18% ao ano e 1,5% ao mês são proporcionais.

Solução: Temos,

$$\frac{18}{1{,}5} = \frac{12}{1} \Rightarrow 12 = 12.$$

Logo, as taxas dadas são proporcionais.

Exemplo 4.2: Obtenha as taxas mensal e trimestral proporcional a juros de 120% ao ano.

Solução:

i)taxa mensal: $\frac{120\%}{12} = 10\%$

Logo, a taxa mensal proporcional é de 10% ao mês.

ii)taxa trimestral: $\frac{120\%}{4} = 30\%$

Logo, a taxa trimestral proporcional é de 30% ao trimestre.

Exemplo 4.3: Em 01/09/2014 uma pessoa emprestou a quantia de $R\$4000{,}00$, a juros simples, com a taxa de 4% ao mês. Qual era o montante da dívida em 01/12/2014?

Solução: Temos, $c_0 = 4000{,}00$, $i = 4\%$ ao mês e $n = 4$ meses, daí, como $C_n = C_0(1 + ni)$, obtemos:

$$C_n = 4000(1 + 4.0{,}04)$$
$$\Rightarrow C_n = 4000(1 + 0{,}16)$$
$$\Rightarrow C_n = 4000(1{,}16)$$
$$\Rightarrow C_n = 4640.$$

Portanto, em 01/12/2014 o montante foi de $R\$4640{,}00$.

4.3 Aplicações da Progressão Geométrica no Regime de juros compostos

No regime de juros compostos, os juros formados ao final de cada período de tempo são acrescidos ao capital formando um montante (capital +juros) do período. Esse montante, por sua vez, passará a render juros no período seguinte formando um novo montante, e assim sucessivamente.

Iniciemos, observando o problema anterior no regime de juros compostos.

Problema 4.2: Um capital de R\$ 10000,00 foi aplicado á taxa de juros compostos de 5% ao mês. Qual o montante no fim dos 3 meses?

Solução:

No regime de capitalização composto, temos:

i) No primeiro mês: $2\%\ de\ 100000 = 2000$(juro produzido no primeiro mês).

Logo, $M = R\$100000{,}00 + 2000{,}00 = 102000{,}00$ (montante ao final do primeiro mês).

ii) No segundo mês: $2\%\ de\ 102000 = 2040$ (juros produzidos no segundo mês).

Logo, $M = R\$102000{,}00 + 2040{,}00 = 104040{,}00$(montante acumulado no segundo mês).

iii)No terceiro mês:$2\%104040 = 2080{,}80$ (juros produzidos no terceiro mês).

Logo, $M = R\$104040{,}00 + 2080{,}80 = R\$106120{,}80$(montante acumulado no terceiro mês)

Portanto, no fim dos três meses o montante é $R\$106120{,}80$.

Notemos que, no regime de juros compostos, ocorre o que chamamos "juros sobre juros", pois para determinar o montante (valor futuro) de determinado período, calculamos os juros sobre o valor acumulado no período anterior, ou seja, o juro não é constante.

Sendo assim podemos observar no problema anterior que:

i) Ao final do primeiro período o montante acumulado de dado por:

$$C_1 = C_0 + C_0 i = C_0(1 + i).$$

i) Ao final do segundo período o montante acumulado e dado por:

$$C_2 = C_0(1 + i) + C_0(1 + i)i = C_0(1 + i)(1 + i) = C_0(1 + i)^2.$$

ii) Ao final do terceiro período o montante acumulado será dado por:

$$C_3 = C_0(1 + i)^2 + C_0(1 + i)^2.i = C_0(1 + i)^2(1 + i) = C_0(1 + i)^3.$$

Note que, no regime de juros compostos, os valores acumulados ao final de cada período formam uma progressão geométrica, visto que o valor do montante no mês seguinte é calculado a partir do valor do montante do mês anterior mais o juro sobre este valor, o que é equivalente a multiplicar o valor do montante do mês anterior pela razão $1 + i$, onde i é a taxa de juros.

Logo, a sequência $(C_0, C_1, C_2, C_3, \cdots, C_n, ...)$ é uma progressão geométrica de razão $1 + i$, onde assim para sabermos o montante ou valor futuro para um período n qualquer, basta usarmos a fórmula do termo geral de uma P.G., que conforme vimos na observação 2.2 do capítulo 2, neste caso é dada por:

$$a_n = a_0 . q^n,$$

Onde $a_n = C_n, a_0 = C_0 \; e \; r = 1 + i.$ Daí, podemos concluir que no final de n períodos o valor futuro acumulado será de,

$$C_n = C_0(1 + i)^n, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Observação 4.3: Poderíamos resolver este problema, usando a fórmula acima, sem precisar calcular o montante dos meses anteriores. No problema temos,

$$C_n = R\$100000, n = 3 \text{ meses } e \; i = 2\% = 0{,}02 \text{ ao mês},$$

Como $C_n = C_0(1 + i)^n$, temos:

$$C_3 = 100000(1 + 0{,}02)^3$$

$$\Rightarrow C_3 = 100000(1 + 0{,}02)^3$$

$$\Rightarrow C_3 = 106120{,}80.$$

Logo, o montante acumulado ao final de 3 meses é R$106120,80.

Observe que ao mudarmos o regime de capitalização para o mesmo problema obtemos respostas diferentes.

Observação 4.4: No regime de juros compostos, para transformar o prazo da taxa de juros, usamos a chamada taxa de equivalente.

Definição 4.2: Duas taxas de juros se dizem equivalentes quando, aplicadas a um mesmo capital e pelo mesmo intervalo de tempo, produzem o mesmo juro. Assim, se a taxa de juros relativamente a um determinado período de tempo é igual a i, temos que a taxa de juros relativamente a n período de tempo e dada por:

$$1 + I = (1 + i)^n \text{ ou } I = (1 + i)^n - 1 \text{ ou } i = \sqrt[n]{1 + I} - 1$$

Onde I é a taxa para os n períodos de tempo (prazo maior).

Exemplo 4.4: Calcular a taxa equivalente a 34% ao ano para os seguintes prazos:

a) Um mês

Solução: Temos $I = 34\%$ ao ano, e como em um ano há $\frac{12}{1}$ meses, isto é, $n = 12$, daí como $i = \sqrt[n]{1 + I} - 1$, obtemos

$$i = \sqrt[12]{1 + 0{,}34} - 1 \Rightarrow i = 0{,}0247 \Rightarrow i = 2{,}47\% \text{ ao mês.}$$

b)Um semestre

Solução: Temos $I = 34\%$ ao ano, e como em um ano há $\frac{12}{2}$ semestres, isto é, $n = 2$, daí como $i = \sqrt[n]{1 + I} - 1$, obtemos

$$i = \sqrt{1 + 0{,}34} - 1 \Rightarrow i = 0{,}1576 \Rightarrow i = 15{,}76\% \text{ ao semestre.}$$

Exemplo 4.5: Calcular a taxa anual de juros equivalente a 8% ao trimestre.

Solução: Temos $i = 8\%$ ao trimestre, e como em um ano há $\frac{12}{3}$ trimestres, isto é, $n = 4$, daí como $I = (1 + i)^n - 1$, obtemos

$$I = (1 + 0{,}08)^4 - 1 \Rightarrow i = 0{,}3605 \Rightarrow i = 36{,}05\% \text{ ao ano.}$$

Observação 4.5: Um erro muito comum é confundir taxas proporcionais com taxas equivalentes, por exemplo, é muito comum achar que juros de 10% ao mês equivalem a juros anuais de 12.10% = 120% ao ano, o que não é verdade, pois taxas como 10% ao mês e 120% ao ano são chamadas de taxas proporcionais, pois a razão entre elas é igual à razão dos períodos ao quais elas se referem, de fato vimos que para calcular a taxa anual de juros equivalente usamos a seguinte fórmula $1 + I = (1 + i)^n$, portanto a taxa de juros anual equivalente a 10% ao mês é

$$I = (1 + 0{,}10)^{12} - 1 = 2{,}1384 \Rightarrow I = 213{,}84\% \text{ ao ano.}$$

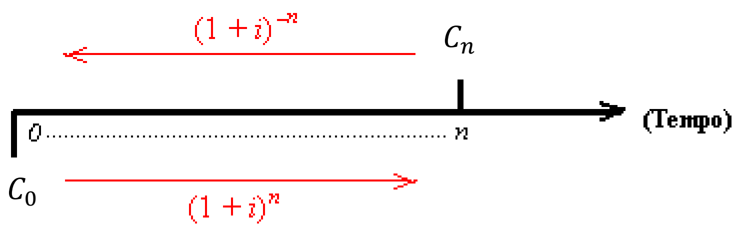
Ou seja, a tradução da expressão “120% ao ano, com capitalização mensal” é “10% ao mês”. E, muitas pessoas podem pensar que os juros são de realmente 120% ao ano, mas isso não é verdade, conforme vimos acima, os juros são de 213,84% ao ano, o que é bem maior que os 120% ao ano. A taxa 120% ao ano é chamada de taxa nominal e a taxa de 213,84% ao ano é chamada de taxa efetiva, e nas operações financeiras a taxa realmente utilizada é a taxa efetiva.

Definição 4.3: Dois ou mais capitais representativos de uma certa data dizem-se equivalentes quando, a uma certa taxa de juros, produzem resultados iguais numa data comum.

Assim, após observar a taxa equivalente no regime de capitalização composto, a fórmula

$$C_n = C_0(1+i)^n$$

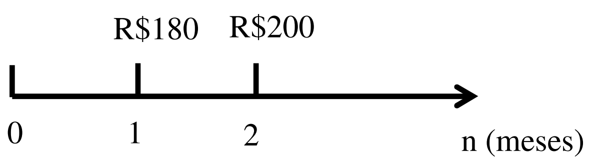
é a fórmula fundamental da equivalência de capitais para obter o valor futuro, basta multiplicar o atual por $(1+i)^n$. Para obter o valor atual, basta dividir o valor futuro por $(1+i)^n$, ou equivalentemente, multiplicar por$(1+i)^{-n}$, conforme figura abaixo.



Está fórmula nos auxilia na tomada de algumas decisões envolvendo por exemplo uma compra, quando será melhor comprar "a vista" ou "a prazo", onde escolhemos uma data chamada "data focal" e usamos a equivalência de capitais para analisar as alternativas de pagamentos, nesta data. Lembrando que devemos usar a mesma data focal para analisar todas as formas de pagamento, e a melhor será a que der o menor valor.

Exemplo 4.6: Lúcia comprou um exaustor, pagando $R\$\ 180{,}00$, um mês após a compra e $R\$\ 200{,}00$, dois meses após a compra. Se os juros são de 25% sobre o saldo devedor, qual é o preço à vista?

Solução: Temos, $i = 25\% = 0{,}25$ ao mês, e os seguintes pagamentos:



Como queremos o preço à vista, escolhemos a data focal 0. Trazendo os pagamentos para esta data obtemos:

$$\frac{180}{(1+0{,}25)} + \frac{200}{(1+0{,}25)^2} = 144 + 128 = 272.$$

Logo, o preço à vista é de $R\$272{,}00$.

Exemplo 4.7: Noemi tem duas opções de pagamento na compra de um televisor de 50 polegadas.

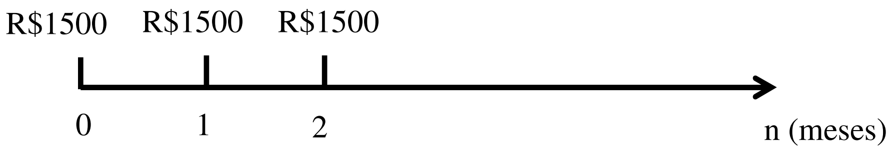
a) 3 prestações mensais de $R\$1500,00$

b) 9 prestações mensais de $R\$700,00$

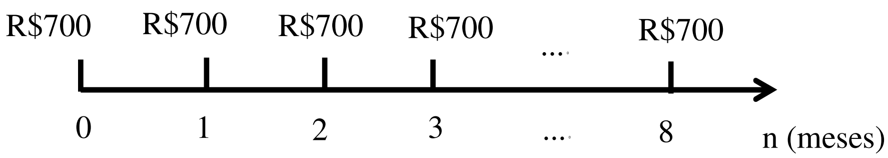
Nos dois casos, a primeira prestação é paga no momento da compra. Sabendo que Noemi consegue fazer seu dinheiro reder 3% ao mês, qual é a melhor opção de pagamento para ela?

Solução: Temos, $i = 3\% = 0{,}03$ ao mês, e as seguintes formas de pagamento:

A –



B –



Para comparar, determinaremos o valor dos dois conjuntos de pagamentos na mesma época, então, escolhendo a data focal 2. Trazendo os pagamentos para esta data obtemos:

Forma de Pagamento A:

$$V_2 = 1500(1 + 0{,}03)^2 + 1500(1 + 0{,}03) + 1500$$

$$\Rightarrow V_2 = 1591{,}35 + 1545 + 1500 = R\$4636{,}35.$$

Forma de Pagamento B:

$$V_2 = 700(1 + 0{,}03)^2 + 700(1 + 0{,}03) + 700 + \frac{700}{1 + 0{,}03} + \frac{700}{(1 + 0{,}03)^2}$$

$$+ \frac{700}{(1 + 0{,}03)^3} + \frac{700}{(1 + 0{,}03)^4} + \frac{700}{(1 + 0{,}03)^5} + \frac{700}{(1 + 0{,}03)^6}$$

$$\Rightarrow V_2 = 742{,}63 + 721 + 700 + 679{,}61 + 659{,}82 + 640{,}60 + 621{,}94 +$$

$$+603{,}83 + 586{,}24 = R\$5295{,}82.$$

Logo, a melhor opção de pagamento é a opção A.

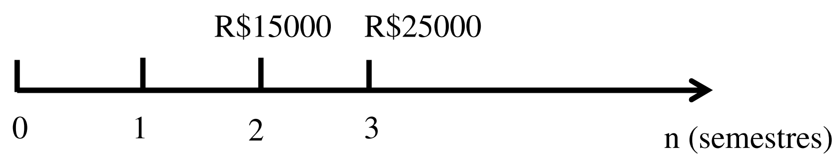
Exemplo 4.8: Uma financeira oferece a um cliente dois títulos, vencendo o primeiro em 1 ano, no valor de $R\$15000{,}00$ e o segundo em 1 ano e meio, no valor de $R\$25000{,}00$. O cliente aceita assinando uma nota promissória com vencimento para 6 meses. Sabendo-se que a taxa de juros considerada na operação foi de 30% ao ano, qual é o valor da nota promissória em seu vencimento?

Solução: Temos $i = 30\%$ =0,30 ao ano. Como o prazo é dado em semestres, a taxa semestral equivalente é:

$$i = \sqrt{1 + 0{,}30} - 1$$

$$i = 0{,}1402 = 14{,}02\% \text{ ao semestre}$$

Os pagamentos são dados por:



Escolhendo a data focal 1, e trazendo todos os valores para esta data, obtemos:

$$x = \frac{15000}{(1 + 0{,}1402)} + \frac{25000}{(1 + 0{,}1402)^2}$$

$$\Rightarrow x = 13155{,}59 + 19229{,}94 \cong 32385{,}53.$$

Logo, o valor da nota promissória em seu vencimento foi de $R\$32385{,}52$.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foram apresentados uma breve história do surgimento das progressões aritmética e geométrica e uma revisão da literatura das progressões aritmética e geométrica, mostrando uma de suas mais importantes aplicações que é na matemática financeira.

A revisão da teoria das progressões aritméticas e geométricas, através de exemplos, para assim chegar as fórmulas possibilita uma maior compreensão de suas definições e fórmulas. Além disso, o estudo da matemática financeira, no regime de juros simples e no regime de juros compostos através de exemplos, possibilitou um melhor entendimento e visão sendo possível perceber a sua importância no nosso cotidiano, visto que ao realizamos operações de compra ou venda de produtos e serviços, aplicações e empréstimos bancários, é necessário termos conhecimentos de juros simples e compostos para tomarmos a decisão mais adequada.

A elaboração deste trabalho mostrou como aplicar as progressões aritméticas e geométricas em algumas fórmulas da matemática financeira, através de exemplos para a partir daí deduzir algumas fórmulas do regime de juros simples e composto, deixando claro que os valores acumulados ao final de cada período, que chamamos de montante ou valor futuro, nos juros simples formam uma progressão aritmética, enquanto que nos juros compostos formam um progressão geométrica, sendo assim para encontrarmos o montante ou valor futuro de um período de tempo qualquer, basta usarmos a fórmula do termo geral da P.A.(juros simples) e de uma P.G. (juros compostos).

Esperamos que este trabalho possa de alguma forma contribuir para uma melhor compreensão do estudo das progressões aritméticas e geométricas.

REFERÊNCIAS

BOYER, C. **História da matemática.** 2. ed. Trad. Elza Gomide. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática.** 1. ed. São Paulo: Ática, 2005.

.LIMA, Elon Lages. **A matemática do ensino médio**.6.ed.Rio de Janeiro: SBM 2006.

IEZZI, Gelson; HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de matemática elementar, 4:** sequências, matrizes, determinantes, sistemas. 7. ed. São Paulo: Atual, 2004.

SOUZA, Joamir Roberto de. **Novo olhar matemática**. 1 ed. São Paulo: FTD,2010.

MAIA, Rodolfo José Diniz. **Progressões Aritméticas e Geométricas.** Campina Grande, 2011. 32 p. Monografia (Licenciatura em Matemática). Centro de Ciências e tecnologia, Universidade Estadual da Paraíba.

SITES REFERIDOS

SURGIMENTO DAS PROGRESSÕES ARITMÉTICAS E GEOMÉTRICAS
http://www.Somaticaeducar.com.br/arquivo/material/112008-08-23-19-2811pdf
Acesso em: 16 de setembro de 2014

HISTÓRIA DA PROGRESSÃO ARITMÉTICA E GEOMÉTRICA
http://br.answers.yahoo.com/question/index
Acesso em 18 de outubro de 2014