UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

VERONILDO SALES DOS SANTOS

ESTUDO E APLICAÇÕES DOS LOGARITMOS

Campina Grande-PB
2014

VERONILDO SALES DOS SANTOS

ESTUDO E APLICAÇÕES DOS LOGARITMOS

Trabalho de conclusão do curso Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba. Em cumprimento às exigências para obtenção do Título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Me. LUCIANO DOS SANTOS FERREIRA

Campina Grande-PB

2014

S237e Santos, Veronildo Sales dos.
Estudo e aplicações dos logaritmos [manuscrito] / Veronildo Sales dos Santos. - 2014.
41 p. : il. color.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2014.
"Orientação: Prof. Me. Luciano dos Santos Ferreira, Departamento de Matemática".

1. Logaritmos. 2. Função exponencial. 3. Matemática. I. Título.

21. ed. CDD 510.7

VERONILDO SALES DOS SANTOS

ESTUDO E APLICAÇÕES DOS LOGARITMOS

Trabalho de conclusão do curso Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba. Em cumprimento às exigências para obtenção do Título de Licenciado em Matemática.

Aprovada em, 13 de novembro 2014.

Luciano dos Santos Ferreira

Prof. Me. Luciano dos Santos Ferreira/UEPB

Departamento de Matemática

Orientador

Joselma S. Santos

Profa. Me. Joselma Soares dos Santos/UEPB

Departamento de Matemática

Examinadora

Luiz Lima de Oliveira Junior

Prof. Me. Luiz Lima de Oliveira Junior/UEPB

Departamento de Matemática

Examinador

Dedicatória

A todos que acreditaram no meu potencial,
aos meus Pais: Maria Gorete e José Inácio
pelo apoio, e a minha Esposa Ceiça.

Agradecimentos

Em primeiro lugar agradeço a Deus, que é digno de toda honra, e de toda glória. Agradeço por Ele me iluminar durante toda essa trajetória.

Aos meus pais José Inácio e Maria Gorete, que apesar das dificuldades enfrentadas, sempre me incentivou nos estudos.

Ao meu orientador, professor Me. Luciano dos Santos Ferreira.

Aos professores Joselma e Luiz pelas dicas.

A minha esposa Ceiça.

Aos meus irmãos e irmãs.

E a todos que, de maneira direta ou indireta, contribuíram de alguma forma para a realização deste trabalho.

Portanto, quer comais quer bebais, ou façais outra qualquer coisa, fazei tudo para glória de Deus. 1 Coríntios 10:31

Resumo

O objetivo deste trabalho é estudar os logaritmos e algumas de suas aplicações, os quais são de suma importância, pois o mesmo tem grandes variedades de aplicações práticas, tanto na Matemática, como por exemplo no caso da matemática financeira no estudo dos juros compostos, como também em outras diversas áreas do conhecimento, como Física, Biologia, Química, Medicina, Geografia entre outras. Inicialmente, vamos examinar as definições e as propriedades mais importantes que envolvem as potências, os quais serão úteis posteriormente para definirmos logaritmo de um número real positivo, e ao mesmo revisaremos as propriedades da função exponencial, que é a inversa da função logarítmica, para posteriormente estudarmos logaritmos e funções logarítmicas, e finalmente estudar algumas aplicações dos logaritmos na Acústica e nos Terremotos.

Palavras-chave: Exponencial, Logaritmos e Aplicações.

abstract

The objective of this work is to study the logarithms and some of its applications, which are very important, because it has great variety of practical applications, both in mathematics, such as in the case of financial mathematics in the study of compound interest, as also in several other areas of knowledge such as Physics, Biology, Chemistry, Medicine, Geography and others. We will first examine the definitions and the most important properties involving powers, which will later be useful to define logarithm of a positive real number, and the same will review the properties of the exponential function, which is the inverse of the logarithmic function for later study logarithms and logarithmic functions, and finally study some applications of logarithms in Acoustics and earthquakes.
Keywords: Exponential, logarithms and Applications.

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

O estudo dos logaritmos é essencial quando está relacionado com suas aplicações no cotidiano, a qual motivou para o desenvolvimento deste trabalho que abrangem explicitamente sua história e utilidade como ferramenta de cálculo, e suas aplicações que abrange diversas áreas do conhecimento como na Química, Medicina, Músicas, Acústica, Astronomia dentre outras. Este trabalho esta dividido em 3 capítulos: No primeiro resume uma breve história dos logaritmos, em seguida um resumo de potências de expoente com números inteiros, pois serão uteis posteriormente e as propriedades das funções exponenciais e no segundo capítulo o estudo dos logaritmos e suas propriedades, as funções logarítmicas e algumas demonstrações, e finalmente, no terceiro capítulo estudar algumas aplicações dos logaritmos na Acústica e nos Terremotos.

Capítulo 1

Potência e Função Exponencial

Iniciaremos este texto apresentando uma breve história dos logaritmos e em seguida, algumas definições, propriedades e resultados que desempenharão um papel importante no decorrer do estudo, ao que se segue.

1.1 História dos logaritmos

Os logaritmos foram inventados, no inicio do século XVII, como instrumento para facilitar e simplificar os cálculos aritméticos, os mesmos transformam multiplicações e divisões, em operações mais simples de adição e subtração, assim efetuava-se com maior rapidez operações complicadas, para à época, pois não tinham os recursos como à calculadora e outros que facilitassem, nas operações dos cálculos, por exemplo: fazer produto de números muito grandes, ou até mesmo resolver uma potenciação com expoente fracionário. Napier foi um dos protagonista, dos logaritmos. John Napier nasceu em 1550, e morreu dia 4 de abril de 1617. Era um matemático escocês, foi ele quem criou o método dos logaritmos naturais que, foi proposto pela primeira vez em 1614, em um livro intitulado *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* escrito por ele, Barão de Merchiston na Escócia. Napier começou a reduzir operações tediosas de multiplicações à operações mais simples de adição, através da correspondência entre progressões aritméticas e geométricas. Este método contribuiu para o avanço da ciência, e especialmente a astronomia, fazendo com que cálculos muito difíceis se tornassem possíveis. Anterior à invenção de calculadoras e computadores, era uma ferramenta constantemente usada em observações, navegação e outros ramos da matemática prática. Além de sua imensa utilidade na realização de cálculos práticos, os logaritmos também têm um papel muito importante em matemática teórica. De início, Napier chamou os logaritmos de “ números artificiais ”e os antilogaritmos de “números naturais ”. Mais tarde, Napier formou a palavra logaritmo, que vem do grego: *logos* cujo, significado é razão, e *arithmos*, que significa número. Napier escolheu dessa forma porque a diferença entre dois logaritmos determina a razão entre os números dos quais eles são tomados, de forma que uma série aritmética de logaritmos corresponde a uma série geométrica de números. Veja: Consideremos uma progressão geométrica de razão a,

$$a, a^2, a^3, a^4, a^5, ..., a^n, ...,$$

e os termos de uma progressão aritmética,

$$1, 2, 3, 5, ..., n, ...$$

Então temos que o produto de dois termos da primeira progressão, $a^x \cdot a^y$, está associada a soma $x + y$ dos termos recorrente a segunda progressão, como havíamos dito, sobre simplificação do produto para operação mais básica da adição. Considerando por exemplo da primeira progressão $a = 2$, temos:

PG	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16384
PA	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

Exemplo 1.1 *Vamos efetuar* $512 \cdot 16$.
Para efetuar $512 \cdot 16$ *basta observar que:*
512 está na primeira linha corresponde a 9 na segunda.
16 está na primeira linha que corresponde a 4 na segunda.
Basta somar agora $9 + 4 = 13$, *e verificar quanto vale o 13 na primeira linha de acordo com a segunda.*
Temos que, 13 na segunda linha corresponde 8192 na primeira.
Assim, $512 \cdot 16 = 8192$, *resultado encontrado através de uma simples operação de adição.*

Exemplo 1.2 *Vamos resolver* $32768 : 512$

32768 está na primeira linha correspondente a 15 na segunda.

512 está na primeira linha corresponde a 9 na segunda.

Basta subtrair $15 - 9 = 6$, *e verificar quanto vale o 6 na primeira linha de acordo com a segunda. Temos que, 6 na segunda linha corresponde a 64 na primeira.*

Assim, $32768 : 512 = 64$, *veja, que através de uma simples operação de subtração efetuamos o quociente dado.*

1.2 Potência de um expoente inteiro

Definição 1.1 *Seja a um número real qualquer e n um número natural. Definimos potência de base a e expoente n que se indica com o símbolo* a^n *como:*

$$\begin{cases} a^0 = 1 \ para \ a \neq 0 \\ a^n = a^{n-1} \cdot a \ \forall \ n, \ n \geq 1 \end{cases}$$

Através dessa definição acima temos que:

$a^1 = a^0 \cdot a = 1 \cdot a = a$

$a^2 = a^1 \cdot a = a \cdot a$

$a^3 = a^2 \cdot a = (a \cdot a) \cdot a = a \cdot a \cdot a$

De modo geral, para $n = k$ com $k \geq 2$, temos que a^k é um produto de k fatores iguais a a.

$$a^k = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{k \ fatores}.$$

Potência de expoente inteiro negativo

Definição 1.2 *Dados um número real a, não nulo, e um número n natural, chama-se potência de base a e expoente* $-n$ *o número* a^{-n}, *que é o inverso de* a^n.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \ .$$

Exemplo 1.3 *Calculemos o valor de* $y = [3^{-1} - (-3)^{-1}]^{-1}$.

$y = \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{-3}\right]^{-1} = \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right]^{-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}.$

Propriedades 1.1 *Se $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, m, n \in \mathbb{N}$, então vem as seguintes propriedades:*

I) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

II) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, a \neq 0$ *e* $m \geq n$

III) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

IV) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}, b \neq 0$

V) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Para demonstrar as propriedades, iremos considerar a e m fixos, as propriedades I e II serão demostrada por indução sobre n.

Demonstração:

1. A propriedade é verdadeira para $n = 1$, pois:

$$a^m \cdot a = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{m\ fatores} \cdot a = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot ... \cdot a \cdot a}_{m+1\ fatores} = a^{m+1}.$$

2. Suponhamos que seja valida para $n = k$, isto é,

$$a^m \cdot a^k = a^{m+k}.$$

3. Mostraremos que é verdadeira para $n = k + 1$, isto é, $a^m \cdot a^{k+1} = a^{m+k+1}$. De fato,

$$a^m \cdot a^{k+1} = a^m \cdot (a^k \cdot a) = (a^m \cdot a^k) \cdot a = a^{m+k} \cdot a = a^{m+k+1}$$

4. Concluímos que, para todo m e n,

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Demonstração II

$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, $m \geq n$ e $a \neq 0$.

1. Mostremos que a igualdade vale para $n = 1$,

$$\frac{a^m}{a} = \frac{\overbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot ... \cdot a)}^{m\ vezes}}{a} = \frac{\overbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot ... \cdot a)}^{m-1\ vezes} \cdot a}{a} = a^{m-1}.$$

2. Suponhamos que seja valida para $n = k$, isto é,

$$\frac{a^m}{a^k} = a^{m-k}.$$

3. Mostremos que é verdadeira para $n = k + 1$, isto é, mostremos que:

$$\frac{a^m}{a^{k+1}} = a^{m-(k+1)}.$$

De fato,

$$\frac{a^m}{a^{k+1}} = \frac{a^m}{(a^k \cdot a)} = \left(\frac{a^m}{a^k}\right) \cdot \frac{1}{a} = a^{m-k} \cdot \frac{1}{a} = \frac{a^{m-k}}{a} = a^{m-k-1} = a^{m-(k+1)}$$

4. Concluimos que, para todo m e n, é válido

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

As demonstrações III, IV e V, podem ser obtidas com argumentos similares.

1.3 Função Exponencial

Definição 1.3 *Dado um número real a, sendo $0 < a \neq 1$, denomina-se função exponencial de base a a uma função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ que associa a cada x real o número a^x.*

Em símbolos:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto a^x$$

Exemplo 1.4 *São funções exponenciais em $\mathbb{R}$.*

a) $f(x) = 2^x$; *c)* $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$;

b) $h(x) = \left(\sqrt{3}\right)^x$; *d)* $p(x) = 10^x$.

Observação 1.1 *Devemos ter $a > 0$ e $a \neq 1$, pois:*

1. *Para $a = 0$ e $x < 0$, não existiria a^x(Não teriamos uma função defenida em $\mathbb{R}$);*

2. *Para $a < 0$ e $x = \frac{1}{2}$, por exemplo, $a = -2$ e $x = \frac{1}{2}$ teriamos: $f(\frac{1}{2}) = (-2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-2}$ não haveria a^x (não teriamos uma função em $\mathbb{R}$);*

3. *Para $a = 1$ e $x \in R$ qualquer número real, $a^x = 1$(função constante).*

Estudaremos os casos em que, a função exponencial é crescente e decrescente, ou seja, quando $a > 1$ e $0 < a < 1$.

1° caso: A função exponencial $f(x) = a^x$ é crescente se, e somente se, $a > 1$, isto é, dados x_1 e x_2 com $x_1 < x_2$ se tem sempre: $a^{x_1} < a^{x_2}$, se e somente se $a > 1$. Veja na figura1.1, o aspecto do gráfico para uma função exponencial crescente.

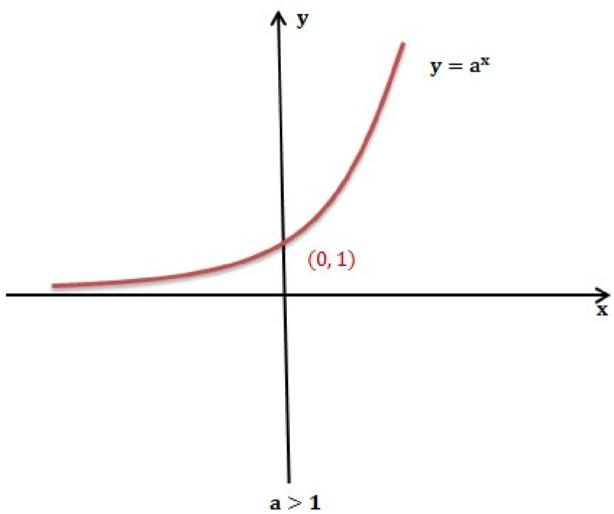

Figura 1.1: Gráfico da função exponencial crescente

Demonstração:

Suponhamos que $a > 1$, tomando a desigualdade,

$$1 < a, \qquad \text{(I)}$$

e multiplicando os membros da mesma por a, obtém-se:

$$a < a^2,$$

repetindo-se a operação k vezes, obteremos:

$$a^2 < a^3 < ... < a^k < a^{k+1} \qquad \text{(II)}$$

Do mesmo modo, para os valores negativos do expoente. Multiplicando por $\frac{1}{a}$ os membros da desigualdade (I), vem:

$$\frac{1}{a} < 1,$$

e repetindo-se esta operação k vezes, obteremos:

$$\frac{1}{a^2} < \frac{1}{a} < 1 \qquad \text{ou}$$
$$\frac{1}{a^3} < \frac{1}{a^2} < \frac{1}{a} < 1 \qquad \text{ou}$$
$$... < a^{-3} < a^{-2} < a^{-1} < a^0 < ... \qquad \text{(III)}$$

De modo geral podemos escrever, reunindo (I), (II) e (III):

$$... < a^{-k+1} < a^{-k} < ... < a^{-2} < a^{-1} < a^0 < a < a^2 < a^3 < ... < a^k < a^{k+1} < ...$$

2° caso. A função exponencial $f(x) = a^x$ é decrescente se, e somente se, $0 < a < 1$, isto é, dados x_1 e x_2 com $x_1 < x_2$ se tem sempre: $a^{x_1} > a^{x_2}$, se e somente se, $0 < a < 1$.

Demonstração:

Suponhamos que $0 < a < 1$, então,se

$$a < 1$$

multiplicando-se os membros da mesma por a temos:

$$a^2 < a$$

repetindo a operação, k vezes, obtemos,

$$a^{k+1} < a^k < ... < a^3 < a^2 < a < 1.$$

Com isso temos que:

$$a^{-k+1} > a^{-k} > ... > a^{-2} > a^{-1} > a^0 > a > a^2 > a^3 > ... > a^k > a^{k+1}.$$

Veja o aspectos do gráfico da função exponencial decrescente na figura 1.2.

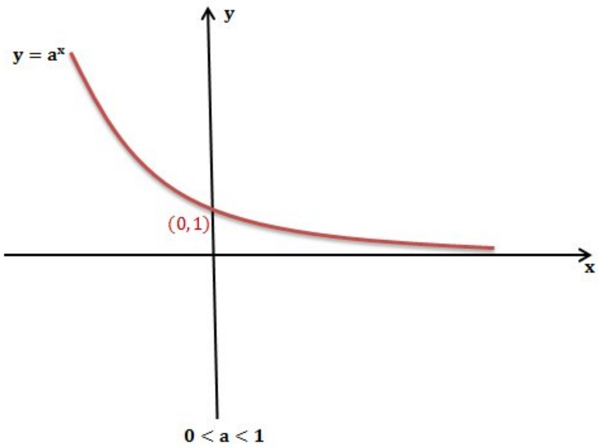

Figura 1.2: Gráfico da função exponencial decrescente

1.3.1 Equações exponenciais

Definição 1.4 *Equações exponenciais são equações com incógnita no expoente.*

Exemplo 1.5 *Vejamos algumas equações exponenciais, e em seguida os métodos fundamentais para sua resolução.*

(a) $2^x = 16$

(b) $4^x - 2^x = 2$

(c) $4^x = \dfrac{1}{8}$

Existem dois métodos fundamentais para resolver uma equação exponencial, no inicio mostraremos o primeiro método e o outro método será apresentado quando estivermos no estudo dos logaritmos.

Método da redução a uma base comum

Neste método, aplicaremos em ambos os membros da equação, transformações convenientes baseadas nas propriedades de potências, iremos reduzir a potência de mesma base a $(0 < a \neq 1)$. Pelo fato da função exponencial $f(x) = a^x$ ser injetora[1], podemos concluir que potências iguais e de mesma base têm os expoentes iguais, ora:

[1]Uma função $f : A \rightarrow B$ é injetora quando, para todo x_1 e x_2 pertencentes a A, $x_1 \neq x_2$;então $f(x_1) \neq f(x_2)$. Quando isso ocorre dizemos que a função é injetora.

$$a^b = a^c \Leftrightarrow b = c \quad (0 < a \neq 1)$$

Exemplo 1.6 *Resolver as equações exponenciais.*

(a) $2^x = 16 \Leftrightarrow 2^x = 2^4 \Leftrightarrow x = 4$

Logo, $S = \{4\}$.

(b) $9^x = 27 \Leftrightarrow 3^{2x} = 3^3 \Leftrightarrow 2x = 3 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}$

Logo, $S = \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$

(c) $2^{2x} = 2^{-3} \Leftrightarrow 2x = -3 \Leftrightarrow x = -\dfrac{3}{2}$

Logo, $S = \left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$

1.3.2 Inequações exponenciais

Definição 1.5 *Inequações exponenciais são inequações que possuem incógnita no expoente.*

Exemplo 1.7 *Vejamos algumas inequações exponenciais.*

1. $2^x > 32$
2. $2^x > 128$
3. $3^x < \frac{1}{27}$

Assim, como vimos que nas equações exponenciais, existem dois métodos fundamentais para sua resolução, o mesmo se aplica para as inequações exponenciais. Veremos o primeiro método usado no estudo de inequações exponenciais, e o segundo método será apresentado no estudo de logaritmos.

Método da redução a uma base comum

Usaremos esse método quando podemos deixar ambos os membros da inequação na forma de potências de mesma base a. $(0 < a \neq 1)$.

Lembremos que a função exponencial $f(x) = a^x$ é crescente, se $a > 1$, ou decrescente, se $0 < a < 1$. Logo, se b e c são números reais, então:

- Para $a > 1$ tem-se $a^b > a^c \Longleftrightarrow b > c$;
- Para $0 < a < 1$ tem-se $a^b > a^c \Longleftrightarrow b < c$.

Exemplo 1.8 *Resolva as seguintes inequações:*

1. $2^x > 64$
2. $\left(\dfrac{3}{5}\right)^x \geq \dfrac{125}{27}$

Solução:

1. $2^x > 64 \Leftrightarrow 2^x > 2^6$.

   Como a base é maior que 1, vem $x > 6$.

   Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} | x > 6\}$.

2. $\left(\dfrac{3}{5}\right)^x \geq \dfrac{125}{27} \Leftrightarrow \left(\dfrac{3}{5}\right)^x \geq \left(\dfrac{3}{5}\right)^{-3}$

   Como a base está entre 0 e 1, temos $x \leq -3$.

   Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} | x \leq -3\}$.

Capítulo 2

Logaritmo e Função Logarítmica

2.1 Logaritmos

Iniciaremos o estudo de logaritmos lembrando que no estudos de equações e inequações exponenciais, feito anteriormente, vimos um método de resolução das mesma que era reduzir as potências à mesma base. Se pretendêssemos resolver uma equação por exemplo $3^x = 16$, sabemos que x não pode assumir um valor inteiro, a partir desse problema enunciado simbolicamente pela igualdade $a^x = b$ surge a noção de **logaritmos**.

Definição 2.1 *Sejam a e b números reais positivos, com $a \neq 0$, chama-se logaritmo de b na base a o expoente x que satisfaz a igualdade $a^x = b$.*

Em símbolos: se $a, b \in \mathbb{R}, 0 < a \neq 1$ e $b > 0$, Temos:

$$\log_a b = x \Longleftrightarrow a^x = b$$

No símbolo $\log_a b = x$, dizemos que:
a é à base do logaritmo;
b é o logaritmando;
x é o logaritmo.

Definição 2.2 *Sejam a e b números reais positivos, com $a \neq 1$, se x é logaritmo, de b na base a, então b é o antilogaritmo de x na base a.*

Em símbolos:

$$\log_a b = x \iff b = anti \log_a x$$

Exemplo 2.1 *Observe os Logaritmos e os Antilogaritmos.*

1. $\log_2 32 = 5$, *pois* $2^5 = 32$*;*

2. $\log_5 5 = 1$, *pois* $5^1 = 5$*;*

3. $anti \log_3 2 = 9$, *pois* $\log_3 9 = 2$*;*

4. $anti \log_2 3 = 8$, *pois* $\log_2 8 = 3$.

Observação 2.1 *Decorre algumas consequências da definição de logaritmos, vejamos a seguir:*

1. *Quando o logaritmando for igual a* 1 *em qualquer base* $0 < a \neq 1$ *o logaritmo é igual a* 0*. De fato,*

$$\log_a 1 = 0, \text{ pois, } a^0 = 1.$$

2. *Quando o logaritmando for igual a base, o logaritmo será igual a* 1*. De fato,*

$$\log_a a = 1, \text{ pois, } a^1 = a.$$

3. *A potência de base* a *e expoente* $\log_a b$ *é igual a* b*. De fato,*

$$a^{\log_a b} = b, \text{ pois } \log_a b = m \Longrightarrow a^m = b \Longrightarrow a^{\log_a b} = b.$$

4. *Dados dois logaritmos com mesma base serão iguais se, e somente se, os logaritmandos forem iguais, isto é,*

$$\log_a b = \log_a c \iff b = c.$$

De fato, pela consequência anterior,

$$\log_a b = \log_a c \iff a^{\log_a c} = b \iff b = c.$$

Sistemas de logaritmos

Denominamos sistema de logaritmos com respeito a uma base a qualquer ($0 < a \neq 1$), o conjunto de todos os logaritmos dos números reais positivos na base a ($0 < a \neq 1$). Entre a infinidade de valores que pode assumir a base, e a infinidade de sistemas de logaritmos, iremos abordar dois sistemas de logaritmos importantíssimos, sistema de logaritmos decimais e o sistema de logaritmos neperianos.

Sistema de logaritmos decimais é o sistema de base 10, ou sistema de logaritmos de Briggs, Briggs foi o primeiro a publicar a tábua (tabela) dos logaritmos de 1 a 1 000 em 1617. Indicaremos, o logaritmo decimal da seguinte maneira,

$$\log_{10} x \text{ ou simplesmente } \log x.$$

Sistema de logaritmos neperianos, também conhecido por sistema de logaritmos naturais, é o sistema de base e ($e = 2,718...$), esse nome *neperiano* deve-se ao matemático de John Napier. O logaritmos neperiano de x, é representado por:

$$\log_e x \text{ ou simplesmente } \ln x.$$

Propriedades 2.1 *Agora iremos ver algumas propriedades e suas demonstrações, que nos ajudara bastante nos cálculos dos logaritmos.*
I. Logaritmo do produto

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c, \ com\ 0 < a \neq 1, b > 0ec > 0.$$

Demonstração:
Consideremos as expressões $\log_a(b \cdot c) = x$, $\log_a b = y$ *e* $\log_a c = k$, *queremos mostrar que* $x = y + k$. *Usando a definição temos as seguintes implicações:*

$$\begin{aligned} \log_a(b \cdot c) = x &\Longrightarrow a^x = b \cdot c; & \text{(i)} \\ \log_a b = y &\Longrightarrow a^y = b; & \text{(ii)} \\ \log_a c = k &\Longrightarrow a^k = c. & \text{(iii)} \end{aligned}$$

Substituindo (ii), (iii). em (i) vem:

$$a^x = a^y \cdot a^k \Longrightarrow a^x = a^{y+k} \Longrightarrow x = y + k.$$

II. Logaritmo do quociente,

$$\log_a \tfrac{b}{c} = \log_a b - \log_a c,\ com\ 0 < a \neq 1,\ b > 0\ e\ c > 0.$$

Demonstração:

De maneira análoga que fizemos para demonstrar I, consideremos as expressões $\log_a \frac{b}{c} = x$, $\log_a b = y$ *e* $\log_a c = k$ *, através da definição de logaritmos temos as seguintes implicações:*

$$\begin{aligned} &\log_a(\tfrac{b}{c}) = x \Longrightarrow a^x = \tfrac{b}{c}; && (i)\\ &\log_a b = y \Longrightarrow a^y = b; && (ii)\\ &\log_a c = k \Longrightarrow a^k = c. && (iii)\end{aligned}$$

Substituindo (ii) e (iii) em (i), obtemos:

$$a^x = \frac{a^y}{a^k} \Longrightarrow a^x = a^{y-k} \Longrightarrow x = y - k.$$

III. Logaritmo da potência

$$log_a b^\lambda = \lambda \cdot \log_a b,\ 0 < a \neq 1\ e\ b > 0.$$

Demonstração:

Consideremos, $\log_a b = x$ *e* $\log_a b^\lambda = y$, *mostremos que* $y = \lambda \cdot x$. *De fato:*

$$\begin{aligned} &\log_a b = x \Longrightarrow a^x = b && (i)\\ &\log_a b^\lambda = y \Longrightarrow a^y = b^\lambda && (ii)\end{aligned}$$

Substituindo (i) em (ii) obtemos:

$$a^y = (a^x)^\lambda \Longrightarrow a^y = a^{x \cdot \lambda} \Longrightarrow y = \lambda \cdot x.$$

As propriedades acima são válidas para $0 < a \neq 1$, $b > 0$ *e* $c > 0$, *o qual nos possibilita obter o logaritmo de um produto, de um quociente ou de uma potência sendo conhecidos apenas os logaritmos dos termos do produto, quociente ou da base da potência, veremos alguns exemplos de expressões logarítmicas, que utilizaremos as propriedades para calcula-las.*

Exemplo 2.2 *Se* $\log E = 1 + \log a + 2 \cdot \log b - \log c$, *com* $a, bc > 0$, *vamos determinar* E.
Solução: Como estamos com logaritmos de base 10, façamos $1 = \log 10$, *e usando as propriedades dadas acima, temos;*

$$\log E = \log 10 + \log a + \log b^2 - \log c$$
$$\Rightarrow \log E = \log 10 \cdot a + \log b^2 - \log c$$
$$\Rightarrow \log E = \log 10 \cdot a \cdot b^2 - \log c$$
$$\Rightarrow \log E = \log \left(\frac{10 \cdot a \cdot b^2}{c} \right)$$
$$\Rightarrow E = \frac{10 \cdot a \cdot b^2}{c}.$$

Exemplo 2.3 *Supondo* a, b *e* c *reais positivos, desenvolva* $\log_2 \left(\frac{b^2\sqrt{a}}{c} \right)$.
Solução:Temos,

$$\log_2 b^2\sqrt{a} - \log_2 c = \log_2 b^2 + \log_2 a^{\frac{1}{2}} - \log_2 c = 2\log_2 b + \tfrac{1}{2}\log_2 a - \log_2 c.$$

Mudança de base

Chegamos a situações em que os logaritmos têm bases diferentes, e a necessidade de convertê-la a uma base conveniente. Por exemplo, para aplicar as propriedades operatórias, os logaritmos precisam estar todos em uma mesma base, mostraremos a seguir uma fórmula que auxilia a mudança de base.

Se a, b *e* c *são números reais positivos e diferentes de* 1, *provemos que:*

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

Demonstração:

Consideremos $\log_a b = x, \log_c b = y$ *e* $\log_c b = z$ *com* $z \neq 0$ *pois* $a \neq 1$. *Mostremos que:*

$$x = \frac{y}{z}.$$

De fato,

$$\log_a b = x \Longrightarrow a^x = b; \qquad (i)$$
$$\log_c b = y \Longrightarrow c^y = b; \qquad (ii)$$
$$\log_c a = k \Longrightarrow c^z = a. \qquad (iii)$$

Substituindo (ii) e (iii) em (i), segue:

$$a^x = b \Longrightarrow (c^z)^x = c^y \Longrightarrow c^{zx} = c^y \Longrightarrow zx = y \Longrightarrow x = \tfrac{y}{z}.$$

Exemplo 2.4 *Escreva os logaritmos* $\log_4 9$ *e* $\log_5 3$ *na base 2:*

Solução: Pela fórmula dada acima, temos;
$\log_4 9 = \dfrac{\log_2 9}{\log_2 4}$ *e* $\log_5 3 = \dfrac{\log_2 3}{\log_2 5}$.

2.1.1 Função Logarítmica

Definição 2.3 *Dado um número real a sendo* $0 < a \neq 1$, *chama-se função logarítmica de base a a função f de* $\mathbb{R}_+^*$ *em* $\mathbb{R}$ *que associa a cada x o número* $\log_a x$, *isto é,* $f(x) = \log_a x$.

Em símbolos:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_+^* &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \log_a x \end{aligned}$$

Exemplo 2.5 *Vejamos, algumas funções logarítmicas:*

1. $f(x) = \log_3 x$;
2. $y = \log_4 x$;
3. $y = \log x$.

Gráfico da função logarítmica

Estudaremos, os casos em que a função logarítmica for crescente e decrescente, ou seja, quando $a > 1$ *e* $0 < a < 1$.

Para $a > 1$. *Se considerarmos uma função* $f(x) = \log_a x$, *podemos perceber que, quando os valores de x aumentam, os correspondentes valores de f(x) também aumentam, isso só ocorre porque a base é maior que 1. Portanto, a função* $f(x) = \log_a x$, *com* $a > 0$ *é crescente.*

Agora para $0 < a < 1$ *considerando uma função* $g(x) = \log_a x$, *podemos perceber nessa função que, quando os valores de x aumentam, os correspondentes valores de g(x)* *diminuem, isso ocorre porque a base está entre 0 e 1* $(0 < a < 1)$. *Portanto a função* $g(x) = \log_a x$, *com* $0 < a < 1$ *é decrescente.*

Com relação ao gráfico da função logarítmica. (Veja figuras 2.1 e 2.2),

- *Os gráficos, dessas funções interceptam no eixo* x *no ponto* $(1, 0)$ *e não interceptam no eixo das ordenadas;*
- *Os gráficos ocupam apenas o 1º e 4º quadrantes;*
- *O domínio de cada uma delas é o conjunto dos números reais positivos e a imagem é o conjunto dos numeros reais.*

Veja na Figura 2.1 o aspecto do gráfico da função logarítmica crescente: $a > 1$.

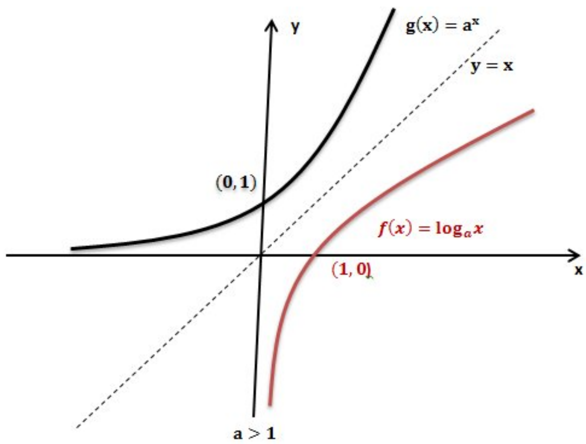

Figura 2.1: Gráfico da função Logarítmica crescente

Exemplo 2.6 *Dada a função* $f(x) = log_2(x + 1)$ *determine:*

a) $f(7)$

$f(7) = \log_2(7 + 1) \Longrightarrow f(7) = \log_2 8 \Longrightarrow f(7) = 3$

b) $f(0)$

$f(0) = \log_2(0 + 1) \Longrightarrow f(0) = \log_2 1 \Longrightarrow f(0) = 0$

Exemplo 2.7 *Quais funções são crescente ou decrescente?*

a) $h(x) = \log_2 x$ *Crescente , pois* $a > 1$.

b) $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ *Decrescente, pois* $0 < a < 1$.

Agora observe o aspecto da figura2.2 abaixo, quando $0 < a < 1$, *ou seja, decrescente:*

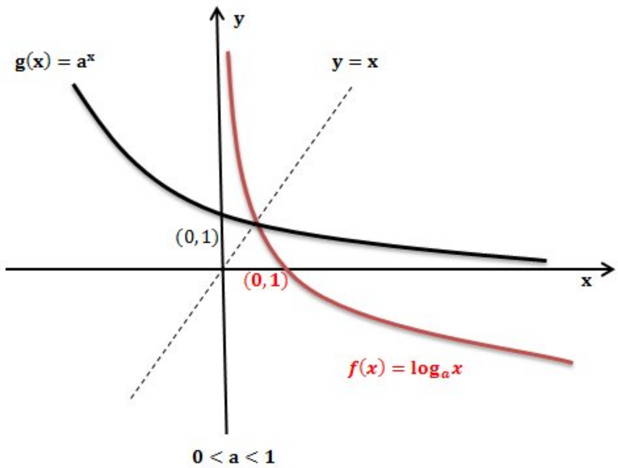

Figura 2.2: Gráfico da função Logarítmica decrescente

2.1.2 Equações logarítmicas

Como mostramos no capítulo 1, que existiam dois métodos para resolução de equações Exponenciais, e apresentamos um método que foi da redução a uma base comum, abordaremos agora, as equações exponenciais que não pode ser reduzidas a uma igualdade de potências de mesma base. A resolução dessas equações baseia-se na definição de Logaritmo, que já mostremos, isto é, se $0 < a \neq 1$ *e* $b > 0$ *temos:*

$$a^x = b \Longleftrightarrow x = \log_a b.$$

Exemplo 2.8 *Resolvamos as equações:*

a) $2^x = 3$

b) $5^x = 4$

Soluções: *Usando a definição de logaritmo, temos;*

a) $2^x = 3 \Longrightarrow x = \log_2 3$.
Logo, $S = \{\log_2 3\}$.

b) $5^x = 4 \Longrightarrow x = \log_5 4$.
Logo, $S = \{\log_5 4\}$.

A seguir, mostraremos à definição da equação logarítmica, e os métodos, de suas resoluções.

Definição 2.4 *Equações logarítmicas são equações que têm incógnita no logaritmando, ou na base do logaritmo, ou em ambos.*

Exemplo 2.9 *Veja algumas, equações logarítmicas e em seguida os métodos fundamentais para suas resoluções.*

1. $\log(2x - 3) = 1$
2. $\log_3(3 - x) = \log_3(3x + 7)$
3. $\log_x 64 = 2$

Existem dois métodos fundamentais para resolver uma equação logarítmica, o método de redução a uma igualdade entre dois logaritmos de mesma base , ou seja, $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ *que a solução é obtida por* $f(x) = g(x) > 0$. *Também veremos o método de redução a uma igualdade entre um logaritmo e um número real, que segue* $\log_a = k$, *a solução é obtida por* $f(x) = a^k$. *Veremos alguns exemplos resolvido utilizando os dois métodos.*

Método 1. Redução a uma igualdade entre dois logaritmos de mesma base.

Exemplo 2.10 *Vamos determinar o valor de x na equação* $\log_7(3x + 2) = \log_7(x + 7)$.
Solução: Por definição temos;
$3x + 2 = x + 7 \Longrightarrow 3x - x = 7 - 2 \Longrightarrow 2x = 5 \Longrightarrow x = \frac{5}{2}$.
Logo, $S = \left\{\frac{5}{2}\right\}$.

Exemplo 2.11 *Determine o valor de y sabendo que* $\log_y(4y-3) = \log_y(2y+1)$
$4y - 3 = 2y + 1 \Longrightarrow 4y - 2y = 1 + 3 \Longrightarrow 2y = 4 \Longrightarrow y = \frac{4}{2} \Longrightarrow y = 2$
Logo, $S = \{2\}$.

Método 2. Igualdade entre um logaritmo e um número real.

Exemplo 2.12 *Resolva as equações a seguir:*

a) $\log_x 64 = 2$

Solução: Por definição temos;

$64 = x^2 \Longrightarrow x^2 = 8^2 \Longrightarrow x = 8.$

Logo, $S = \{8\}$

b) $\log_y 0,01 = 2$

Solução: Por definição temos;

$0,01 = y^2 \Longrightarrow y^2 = \frac{1}{100} \Longrightarrow y^2 = (\frac{1}{10})^2 \Longrightarrow y = \frac{1}{10} \Longrightarrow y = 0,1.$

Logo, $S = \{0,1\}$

2.1.3 Inequações logarítmicas

Como havíamos prometido que apresentaríamos o segundo método de resolução de inequações exponenciais anterior, enfocaremos agora as inequações exponencias que não podem ser reduzidas a uma desigualdade de potência de mesma base, a resolução deste tipo de inequação baseia-se no crescimento ou decrescimento da função logarítmica, que a mesma já abordamos, isto é, $a^x > 0, b > 0$ *e* $0 < c \neq 1$ *temos:*

$$\textit{(I)}\ a^x > b \iff \begin{cases} \log_c a^x > \log_c \ \ \textit{se}\ c > 1 \\ \log_c a^x < \log_c b\ \textit{se}\ 0 < c < 1 \end{cases}$$

$$\textit{(II)}\ a^x < b \iff \begin{cases} \log_c a^x < \log_c \ \ \textit{se}\ c > 1 \\ \log_c a^x > \log_c b\ \textit{se}\ 0 < c < 1 \end{cases}$$

Exemplo 2.13 *Vamos resolver as inequações:*

a) $2^x < 3$

Solução:

Para resolver essa inequação primeiramente tomemos o logaritmos de ambos os membros da desigualdade na base 2. Mantemos a desigualdade pois a base do logaritmo é maior que um, e aplicamos as propriedades dos logaritmos. temos,

$2^x < 3 \Longrightarrow \log_2 2^x < \log_2 3 \Longrightarrow x \cdot \log_2 2 < \log_2 3 \Longrightarrow x < \log_2 3.$

Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} |\ x < \log_2 3\}.$

b) $3^x > 2$

Solução:

Para resolver essa inequação primeiramente tomemos o logaritmos de ambos os membros da desigualdade na base 3. Mantemos a desigualdade pois a base do logaritmo é maior que um, e aplicamos as propriedades dos logaritmos. temos,

$3^x > 2 \Longrightarrow \log_3 3^x > \log_3 2 \Longrightarrow x \cdot \log_3 3 > \log_3 2 \Longrightarrow x > \log_3 2.$

Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} |\ x > \log_3 2\}.$

Definição 2.5 *Inequações logarítmicas são inequações que têm incógnita no logaritmando, ou na base do logaritmo, ou em ambos.*

Para resolver uma inequação logarítmica, devemos observar sua base, já vimos que uma função logarítmica pode ser crescente ou decrescente, dependendo do valor da base a. Vejamos, dois casos para resoluções de inequações.

1° *(a* > 1*) Temos que, a relação de desigualdade entre os logaritmos se mantém entre os logaritmandos, veja:*

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Rightarrow f(x) > g(x).$$

Exemplo 2.14 *Vamos resolver a inequação* $\log_3(x-3) > \log_3 5.$

Resolução:

Condição de existência: $x - 3 > 0 \Rightarrow x > 3.$

Como a $= 3 > 0$*, a relação de desigualdade se mantém entre os logaritmandos, ou seja,*

$\log_3(x-3) > \log_3 5 \Rightarrow x - 3 > 5 \Rightarrow x > 8.$

Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} | x > 8\}.$

2º *($0 < a < 1$) Temos que, a relação de desigualdade entre os logaritmos se inverte entre os logaritmandos, veja:*

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Rightarrow f(x) < g(x).$$

Exemplo 2.15 *Vamos resolver a inequação* $\log_{\frac{1}{2}}(3x-1) > \log_{\frac{1}{2}}(2x+3)$.

Resolução:

Condição de existência: $3x - 1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{3}$ *e* $2x + 3 > 0 \Rightarrow x > -\frac{3}{2}$.

Como $a = \frac{1}{2}$, *a relação de logaritmos se inverte entre os logaritmandos:*

Portanto: $\log_{\frac{1}{2}}(3x-1) > \log_{\frac{1}{2}}(2x+3) \Rightarrow 3x - 1 < 2x + 3 \Rightarrow 3x - 2x < 3 + 1 \Rightarrow x < 4$.

Logo, usando a condição de existência, temos $S = \left\{x \in \mathbb{R} | -\frac{1}{3} < x < 4\right\}$.

Capítulo 3

Aplicações de Logaritmos

Os logaritmos possuem várias aplicações na Matemática e em diversas áreas do conhecimento, como na física, a escala logarítmica é utilizada em diversas aplicações. Uma delas é a escala de decibéis, que mede a intensidade de sons, essa escala logarítmica se encontra na base 10. Na química, por sua vez, os logaritmos são aplicados para calcular o pH (potencial hidrogeniônico) de uma solução, na biologia utilizada para calcular o crescimento da população mundial, é generalizável ao crescimento da população de qualquer espécie, por exemplo o propósito da reprodução de peixes, reprodução de bactérias, etc. Iremos através de exemplos demonstrar a utilização das técnicas de logaritmos na busca de resultados para algumas situações em questão.

3.1 Terremotos

As Aplicações dos Logaritmos englobam varias áreas como já havíamos dito, temos a utilização dos Logaritmos nos terremotos[1]*, no intuito de medir sua magnitude provocado pelo movimento das placas tectônicas, que é uma porção da litosfera limitada por zonas de convergência, zonas de subducção e zonas conservativas. A Terra tem sete placas tectônicas principais e muitas mais sub-placas de menores dimensões. Segundo a teoria da tectônica de placas, as placas tectônicas são criadas nas zonas de divergência, ou "zonas de rifte", e são consumidas em zonas de subducção. Quando uma placa tectônica se encontra com*

[1]São tremores passageiros que ocorrem na superfície terrestre.

outra ou colide, ou seja, uma placa mais densa mergulha sob uma menos densa. Esse fato produz acúmulo de pressão e descarga de energia, que se propaga em forma de ondas sísmicas, caracterizando o terremoto, o local onde há o encontro entre as placas tectônicas é chamado de hipocentro (no interior da Terra) e o epicentro é o ponto da superfície acima do hipocentro. As consequências podem ser sentidas a quilômetros de distância, dependendo da proximidade da superfície que ocorreu a colisão (hipocentro) e da magnitude do terremoto. A magnitude é a quantidade de energia liberada no foco do terremoto, sendo medida a partir de uma escala denominada Escala Richter.

> *A* ***Escala Richter*** *foi desenvolvida no ano 1935 pelos sismólogos Charles Francis e Beno Gutenberg. Ambos estudavam sismos no sul da Califórnia, utilizando um equipamento específico-o sismógrafo Wood-Anderson. Após recolher dados de inúmeras ondas sísmicas liberadas por terremotos, eles criaram um sistema para calcular as magnitudes dessas ondas. No principio, essa escala destinava a medir unicamente os tremores que ocorriam na Califórnia(Dante 2010 p 285.)*

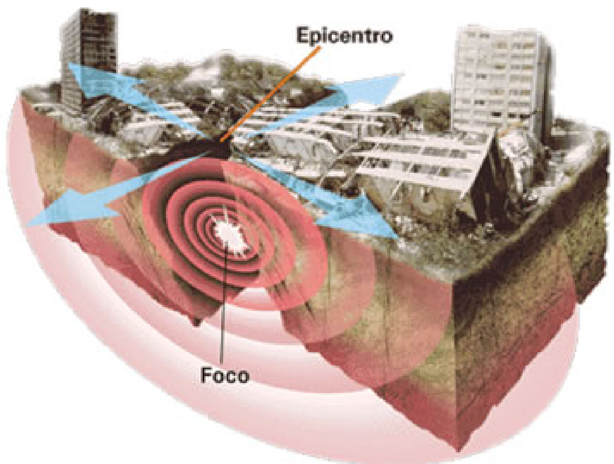

Figura 3.1: Demonstração do hipocentro (foco) e do epicentro de um terremoto

Essa escala corresponde ao logaritmo da medida da amplitude das ondas sísmicas do epicentro. Onda Sísmica é uma onda que se propaga através da terra, geralmente como consequência de um terremoto, ou devido a uma explosão. Estas ondas são estudadas pelos sismólogos e medidas por sismógrafos. Que pode ser definida por:

$$I = \frac{2}{3}\log_{10}\left(\frac{E}{E_0}\right),$$

onde: E é a energina liberada em quilowatt-hora e $E_0 = 7 \cdot 10^{-3} kWh$;
I *é a intensidade de um terremoto sendo um número que varia de* $I = 0$ *até* $I = 9,5$.

Veja na tabela abaixo que relaciona a magnitude dos terremotos e seu efeito:

Magnitude Richter	***Efeitos***
menor que 3.5	*Geralmente não sentido, mas gravado*
Entre 3.5 e 5.4	*As vezes sentido, mas raramente causa danos*
Entre 5.5 e 6.0	*Pequenos danos em predios.*
Entre 6.1 e 6.9	*Pode ser destrutivo em uma áreas de 100 km*
Entre 7.0 e 7.9	*Grande terremoto, pode causar sérios danos*
8.0 ou mais	*Enorme terremoto, pode causar grandes danos*

- *Quando a Escala Richter foi construída os pesquisadores levaram em consideração os tremores de terra que podiam variar da magnitude 1 até a magnitude 1 bilhão ou mais, depois eles consideraram a magnitude* $1 = 10^0$ *e a magnitude 1 bilhão como* 10^9.

- *Assim através da Escala Logarítmica é possível representar uma gama de valores que vai do zero a 1 bilhão por número que estão entre 1 e 9.*

- *Cada grau na Escala Richter é o expoente ao qual ao número 10 é elevado para se chegar ao real valor da magnitude do terremoto.*

Graus	***Magnitude***
4	$10^4 = 10000$
5	$10^5 = 100000$

O maior terremoto registrado ocorreu no dia 22 de maio de 1960, no Chile quando um tremor de $9,5$ *graus de magnitude na Escala Richter, causou a morte de mais de 2 mil pessoas, esse terremoto gerou um maremoto com ondas de até 10 metros. As ondas apagaram do mapa cidades inteiras na costa chilena e fizeram vítimas também em outros países banhados pelo Pacífico, como o Japão, as Filipinas e os Estados Unidos.*

Figura 3.2: Terremoto no Chile em 1960 registrou 9,5 graus de magnitude

Exemplo 3.1 *Qual a energia liberada em um terremoto de intensidade 8 na escala Richter?*

Solução

Temos, $I = 8$ *e* $E_0 = 7 \cdot 10^{-3} kWh$. *Daí,*

$I = \frac{2}{3}\log_{10}\left(\frac{E}{E_0}\right) \Rightarrow 8 = \frac{2}{3}\log_{10}\left(\frac{E}{7\cdot 10^{-3}}\right) \Rightarrow 2 \cdot \log_{10}\left(\frac{E}{7\cdot 10^{-3}}\right) = 24 \Rightarrow \log_{10}\left(\frac{E}{7\cdot 10^{-3}}\right) = 12$

Agora, usando a definição de logaritmo, obtemos.

$\left(\frac{E}{7\cdot 10^{-3}}\right) = 10^{12} \Rightarrow E = 7 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{12} \Rightarrow E = 7 \cdot 10^{-3+12} \Rightarrow E = 7 \cdot 10^{9}\ kWh.$

Logo, a energia liberada é de $7 \cdot 10^9\ kWh$.

Exemplo 3.2 *(Cesgranrio-RJ) As indicações* R_1 *e* R_2*, na escala Richter, de dois terremotos estão relacionadas pela fórmula* $R_1 - R_2 = \log\left(\frac{M_1}{M_2}\right)$*, em que* M_1 *e* M_2 *medem a energia liberada pelos terremotos sob a forma de ondas que se propagam pela crosta terrestre. Houve dois terremotos: um corresponde a* $R_1 = 8$ *e outro correspondente a* $R_2 = 6$*. A razão* $\frac{M_1}{M_2}$ *é:*

a) 2. *b)* $\frac{4}{3}$. *c)* $\log\left(\frac{4}{3}\right)$. *d)* $\log_2 10$. *e)* 10^2.

Solução*: Temos,* $R_1 = 8$ *e* $R_2 = 6$*. Daí,*

$R_1 - R_2 = \log\left(\frac{M_1}{M_2}\right) \Rightarrow 8 - 6 = \log\left(\frac{M_1}{M_2}\right) \Rightarrow 2 = \log\left(\frac{M_1}{M_2}\right) \Rightarrow \left(\frac{M_1}{M_2}\right) = 10^2.$

Logo a resposta é a alternativa ***(e)****.*

3.2 Acústica

A amplitude máxima de pressão que um ouvido humano pode suportar em sons muitos altos é de $28Pa$[1] *muito menor, que a pressão normal do ar que é aproximadamente* $10^5 Pa$. *O som apresenta três características como: altura, intensidade e timbre. A intensidade de um som varia com o quadrado da amplitude, a razão entre a intensidades no sistema auditivo humano é de* 10^{12}, *ou seja, os seres humanos podem ouvir em enorme faixa de intensidades.*

Figura 3.3: Ondas sonoras

Como os intervalos de valores são bem grandes, recorremos aos logaritmos. Considere a relação:

$$y = \log x.$$

Temos que x *e* y *são variáveis. Observe que, se multiplicamos* x *por* 10 *,* y *aumenta uma unidade. Pois, se fizemos* $y' = \log 10x$, *temos*

$$y' = \log 10x = \log 10 + \log x = 1 + y.$$

[1]O pascal (símbolo: Pa) é a unidade padrão de pressão e tensão no SI. O nome desta unidade é uma homenagem a Blaise Pascal, eminente matemático, físico e filósofo francês.

Da mesma forma se multiplicamos x por 10^{12} *o y aumenta 12 unidades. Assim quando falamos em intensidade I de uma onda sonora, falamos do nível sonoro N que representa a comparação entre a intensidade sonoro I e o limiar da audibilidade* I_0*. A grandeza nível sonoro N obedece a uma escala logarítmica, que é definida por:*

$$N = 10 \cdot \log \tfrac{I}{I_0},$$

Onde:

N- Intensidade do som, medida em decibel;

I- intensidade do som da fonte;

I_0*- Intensidade inicial de referência (* $= 10^{-12}(W/m^2)$ *) .*

I_0 *Sua unidade mais prática é o decibel (dB). As unidades bel (B) e decibel (dB) nome escolhido em homenagem ao físico escocês Alexander Graham Bell(1847-1922). O valor da intensidade inicial* $I_0 = 10^{-12}(W/m^2)$*, porque está mais próximo do limite inferior da faixa de audição humana. Para* $I = I_0$ *temos na equação* $N = 10 \cdot \log 1 = 0$*, logo a intensidade de referência corresponde a zero decibel. O valor de N aumenta em* $10dB$ *toda vez que a intensidade sonora em uma ordem de fatores de 10, assim,* $N = 30$ *corresponde a uma intensidade de* 10^3 *maior que a intensidade de referência.*

Exemplo 3.3 *Vamos calcular qual o valor em dB, de um som de intensidade sonora* $0,000988564W/m^2$.

$N = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0}$.

$$N = 10 \cdot \log \frac{0,000988564W/m2}{0,000000000001W/m2} = 90dB$$

Portanto o som está $90dB$ *acima da referência.*

O que exatamente representa essa unidade $90dB$ *?*

Esses valores são os expoentes de uma proporção na base 10. Para saber qual a proporção que representam basta aplicar a seguinte fórmula:

$10^{\frac{90}{10}} = 10^9 = 1000000000$ *ou um bilhão.*

Portanto o som é um bilhão de vezes mais forte que a referência.

Resultados Gerais

Os logaritmos são de suma importância desde a sua invenção, pois possibilitou tanto rapidez nos cálculos como teve suas contribuições no avanço da tecnologia, suas aplicações que tomaram diversos rumos, contribuiu de maneira significante para a sociedade. É indispensável estudar as aplicações de logaritmos quando está estudando o mesmo, pois além de despertar no alunado o interesse pelo assunto, está explorando algo riquíssimo em assunto que é de total importância. No decorrer do trabalho percebemos maravilhas que podemos encontrar no estudo dos logaritmos, desde a sua invenção até os dias de hoje.

Referências Bibliográficas

[1] BARROSO, Juliane Matsubara. ***Conexões com a Matemática*** *. 1° ed. Editora Moderna. São Paulo, 2010.*

[2] DANTE, Luiz Roberto. ***Matemática: Contexto e Aplicações****. 1° ed. Editora Ática. São Paulo, 2010.*

[3] FILHO, Benigno Barreto; Silva, Claúdio Xavier da. ***Matemática Aula Por Aula****. 1° ed. Editora FTD. São Paulo, 2013.*

[4] IEZZI, Gelson; Dolce, Osvaldo; Murakami, Carlos; ***Fundamentos de matemática elementar,****: logaritmos:-9° edição. São Paulo-Atual,2004.*

[5] IEZZI, Gelson; Dolce, Osvaldo; Degenszajn, David; et al. ***Matemática: Ciência e Aplicações****. Vol.1.Editora Atual. São Paulo, 2004.*

[6] SANTOS, Carlos Alberto Marcondes dos; Gentil, Nelson; et al. ***Matemática: Novo Ensino Médio****. 6° ed. Editora Ática, 2002.*

SITES REFERIDOS

`http://www.fund198.ufba.br/expo/razao.pdf`.
Acesso em: 18 de setembro de 2014 às 20:30.

`http://pt.wikipedia.org/wiki/John_Napier`.
Acesso em: 18 de setembro de 2014 às 21:20.

`http://www.bbc.co.uk/portuguese/noticias/2010/03/100301_terremotos_os_maiores_vdm.shtml`.
Acesso em: 12 de outubro de 2014 às 19:45.