



UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA
PURA E APLICADA

O Teorema de Hahn-Banach e Aplicações

EDNA CORDEIRO DE SOUZA

Campina Grande - PB

Maio de 2011

Edna Cordeiro de Souza

O Teorema de Hahn-Banach e Aplicações

Monografia apresentada ao curso de Especialização em Matemática Pura e Aplicada do Departamento de Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba em cumprimento às exigências legais para obtenção do título de Especialista em Matemática Pura e Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo

Campina Grande - PB

Maio de 2011

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL-UEPB

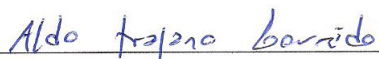
S729t	<p>Souza, Edna Cordeiro de.</p> <p>O Teorema de Hahn-Banach e aplicações [manuscrito]/ Edna Cordeiro de Souza. 2011.</p> <p>48 f. : il.</p> <p>Monografia (Especialização em Ensino de Matemática Básica) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Tecnologias, 2011.</p> <p>”Orientação: Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo, Departamento de Matemática, Estatística e Computação”.</p> <p>1. Aplicações Matemáticas. 2. Matemática - Teoremas. 3. Teorema de Hahn-Banach. I. Título.</p> <p>22. ed. CDD 515.5</p>
-------	---

Edna Cordeiro de Souza

O Teorema de Hahn-Banach e Aplicações

Aprovado em: 27/05/2011

COMISSÃO EXAMINADORA



Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo

Departamento de Matemática - CCT/UEPB

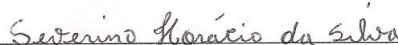
Orientador



Prof. Dr. Manuel Antolino Milla Miranda

Departamento de Matemática - CCT/UEPB

Examinador



Prof. Dr. Severino Horácio da Silva

Departamento de Matemática e Estatística - CCT/UFCG

Examinador

Dedicatória

Este trabalho é dedicado à meus familiares bem como a todos os meus professores que contribuíram de forma decisiva para a minha formação e todos os meus colegas do curso de Especialização em Matemática Pura e Aplicada da UEPB.

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus por me conceder saúde, coragem, perseverança e estímulo para desenvolver este trabalho. Ao meu pai, irmãs e sobrinhas pelo apoio e compreensão, principalmente a minha mãe, Maria do Socorro Cordeiro de Souza, que sempre me estimulou a continuar estudando e me ajudou incondicionalmente sempre que precisei. Ao meu orientador Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo pelo incentivo e dedicação tanto durante as aulas como durante a orientação deste trabalho. Aos meus mestres que me instruíram fazendo de mim uma profissional capacitada e comprometida. Aos professores que participaram da comissão examinadora, Prof. Dr. Manuel Antolino Milla Miranda e Prof. Dr. Severino Horácio da Silva pela colaboração no aperfeiçoamento deste trabalho. A todos que fazem parte da Coordenação e do Departamento do Curso de Matemática. Aos meus amigos de um modo geral pelo incentivo, principalmente a Fábio, Luciano, Carlos, Elisângela, Edileusa e André. Aos professores do Curso de Especialização em Matemática Pura e Aplicada, Prof. Osmundo Alves de Lima, Prof. Ernesto Trajano de Lima Filho, Prof. Vandenberg L. Vieira, Profa. Kátia Elizabete Galdino, Profa. Abigail Fregni Lins, Prof. Aldo Maciel e Prof. Aldo Trajano Lourêdo. Enfim a todos aqueles que embora não tenham sido citados me ajudaram direta ou indiretamente de alguma forma.

Epígrafe

”Não existem pessoas de sucesso e pessoas fracassadas. O que existem são pessoas que lutam pelos seus sonhos ou desistem deles.”

Resumo

Neste trabalho, temos como objetivo principal apresentar e demonstrar o Teorema de Hahn-Banach que é um dos resultados de maior aplicação da análise funcional. Este teorema permite que funcionais lineares definidos em um subespaço de um espaço vetorial sejam estendidos a todo o espaço. O teorema se apresenta na literatura em diversas formas, tanto analíticas como geométricas. Neste trabalho será apresentado o Teorema de Hahn-Banach na sua forma analítica e geométrica, seguida de uma de suas aplicações. Em sua forma analítica, o teorema de Hahn-Banach será demonstrado para o caso em que o espaço vetorial é real e para o caso em que o espaço vetorial é complexo. Na sua forma geométrica, o Teorema de Hahn-Banach trata da separação de convexos por hiperplanos. Por fim, mostraremos uma aplicação deste resultado na separação de conjuntos convexos por um funcional linear. Para tanto, foi realizada uma pesquisa bibliográfica em busca de alguns resultados preliminares necessários à demonstração deste teorema. Dessa forma, neste trabalho apresentamos os pressupostos necessários para enunciarmos e demonstrarmos o Teorema de Hahn-Banach.

Abstract

In this monograph, we aim to introduce and demonstrate the Hahn-Banach theorem which is a result of increased applications of functional analysis. This theorem allows linear functional defined on a subspace of a space vector to be extended to any space. The theorem is presented in the literature several forms, both as analytical geometry. This work will be displayed Hahn-Banach theorem in its form and analytic geometry, followed by one of its applications. In its analytical form, the Hahn-Banach theorem will be demonstrated for the case where the vector space is real and for the case where the vector space is complex. On its geometry, form the Hahn-Banach theorem deals with the separation of convex by hyperplanes. For, we show an application of this result in the separation of convex sets by a linear functional. To this end, we performed a bibliographical research in search of some preliminary results necessary to show this theorem. Thus, in this work we present the assumptions necessary to articulate and demonstrate the Hahn-Banach theorem.

Sumário

1	O Teorema de Hahn-Banach	2
1.1	Forma Analítica do Teorema de Hahn-Banach	2
1.2	Funcionais Sublineares e Seminormas	2
1.3	O Teorema de Hahn-Banach em Espaços Vetoriais Reais	4
1.4	O Teorema de Hahn-Banach em Espaços Vetoriais Complexos	5
1.5	O Teorema de Hahn-Banach em Espaços Normados	8
1.6	O Teorema de Hahn-Banach em Dimensão Finita	11
1.7	Forma Geral do Teorema de Hahn-Banach	11
1.8	O Dual Topológico	17
1.9	Algumas observações envolvendo o Teorema de Hahn-Banach	21
2	Forma Geométrica do Teorema de Hahn-Banach	25
2.1	Aplicações do Teorema de Hahn-Banach	30
2.2	Separação de Convexos por Funcionais Lineares	30
A	Apêndice	34
A.1	Lema de Zorn	34
A.2	Teorema de Riesz	36
	Bibliografia	39

Introdução

O Teorema de Hahn-Banach¹ é um dos principais resultados da análise funcional. Ele trata da extensão de funcionais lineares (ou mais geralmente transformações lineares) definidos em subespaços. Interessados em resolver determinadas equações, Riesz (em 1911) e Helly (em 1912) obtiveram os primeiros teoremas de extensão de funcionais em alguns espaços de funções. O primeiro resultado para o caso real foi obtido por Hahn em 1927 e, de forma mais geral, por Banach em 1929. A versão complexa foi publicada em 1938, e é devida a H. F. Bohnenblust e A. Sobczyk. O Teorema de Hahn-Banach, em particular, garante que, em espaços vetoriais normados, sempre existem funcionais lineares contínuos e não nulos. Em espaços vetoriais topológicos, isso pode não ocorrer. La Salle, em 1941, mostrou que tais funcionais existem se, e somente se, o espaço possui um aberto (contendo a origem) convexo e disjunto de todo o espaço, um caso particular desses espaços são os espaços localmente convexos.

Neste trabalho temos como objetivo enunciar e demonstrar o Teorema de Hahn-Banach o qual garante a existência de extensões lineares para todo o espaço, de funcionais lineares definidos em um subespaço. Serão apresentados no decorrer deste trabalho o Teorema de Hahn-Banach em sua forma analítica para o caso em que o espaço vetorial é real e o caso em que este é complexo, também demonstraremos o Teorema para espaços de dimensão finita, espaços normados e uma forma mais geral do Teorema, além de uma versão geométrica no qual o Teorema de Hahn-Banach trata, principalmente, da separação de convexos por hiperplanos.

Por fim, mostraremos uma aplicação deste resultado na separação de convexos por um funcional linear.

¹O nome do teorema é em honra ao matemático austríaco Hans Hahn (1927) e ao polonês Stefan Banach (1929).

Capítulo 1

O Teorema de Hahn-Banach

1.1 Forma Analítica do Teorema de Hahn-Banach

Nesta seção, enunciaremos e provaremos um importante Resultado da Análise Funcional o Teorema de Hahn-Banach segundo sua forma analítica. Para tanto, apresentaremos alguns conceitos necessários à demonstração do Teorema. Como este teorema se refere, fundamentalmente, a funcionais lineares, recordemos que estes são aplicações lineares definidas sobre um espaço vetorial E , ou sobre um subespaço vetorial de E , tomando valores sobre o corpo \mathbb{K} ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), ou seja f é um funcional linear em E , se $f : E \rightarrow \mathbb{K}$ satisfaz:

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y),$$

sempre que $x, y \in E$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

1.2 Funcionais Sublineares e Seminormas

Definição 1 *Sejam E um espaço vetorial, L um subespaço linear de E , e g um funcional linear em L . Um funcional linear f em E é uma extensão de g se $f(x) = g(x)$, $\forall x \in L$.*

Definição 2 *Seja E um espaço vetorial real. Um funcional sublinear em E é um funcional $p : E \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:*

- (i) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$, $x, y \in E$.
- (ii) $p(\alpha x) = \alpha p(x)$, $x \in E$, $\alpha \geq 0$.

Exemplo 1.2.1 Se f é um funcional linear em E , então é sublinear.

Exemplo 1.2.2 Se E é um espaço normado, então $p(x) = \|x\|$ é sublinear.

De fato, temos:

$$(i) \quad p(x + y) = \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| = p(x) + p(y), \quad x, y \in E.$$

$$(ii) \quad p(\alpha x) = \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| = \alpha p(x), \quad x \in E, \quad \alpha \geq 0.$$

Exemplo 1.2.3 Seja $X = \mathbb{R}^2$ defina $p(x_1, x_2) = |x_1| + x_2$. Então, p é sublinear.

Sejam $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$, temos:

$$x + y = (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

e

$$(\alpha x) = (\alpha x_1, \alpha x_2).$$

Então,

$$(i) \quad p(x + y) = p(x_1 + y_1, x_2 + y_2) = |x_1 + y_1| + (x_2 + y_2) \leq (|x_1| + x_2) + (|y_1| + y_2) = p(x) + p(y).$$

$$(ii) \quad p(\alpha x) = p(\alpha x_1, \alpha x_2) = |\alpha x_1| + \alpha x_2 = \alpha(|x_1| + x_2) = \alpha p(x), \quad x \in X, \quad \alpha \geq 0.$$

Observação 1 Segue-se da definição que se p é um funcional sublinear em E , então

$$(i) \quad p(0) = 0;$$

$$(ii) \quad -p(-x) \leq p(x), \quad \forall x \in E;$$

$$(iii) \quad -p(y - x) \leq p(x) - p(y) \leq p(x - y), \quad x, y \in E.$$

Não é necessário que $p(x) \geq 0, \forall x \in E$ (por exemplo, considere os exemplo 1.2.1 e 1.2.3), no entanto se p satisfaz $p(-x) = p(x) \quad \forall x \in E$, então $p(x) \geq 0, \quad \forall x \in E$ e o do item (iii) acima, temos

$$|p(x) - p(y)| \leq p(x - y), \quad x, y \in E.$$

Para espaços complexos, é necessário que façamos uma restrição aos funcionais sublineares.

Definição 3 Seja E um espaço vetorial tomando valores sobre o corpo \mathbb{K} ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Uma seminorma em E é uma função $p : E \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$(i) \quad p(x + y) \leq p(x) + p(y), \quad x, y \in E.$$

$$(ii) \quad p(\alpha x) = |\alpha| p(x), \quad x \in E, \quad \alpha \in \mathbb{K}.$$

Note que, uma seminorma p é uma norma se, e somente se $p(x) = 0$ implica $x = 0$. Se E é real então a seminorma p é um funcional sublinear, porém, a recíproca não é verdadeira.

Exemplo 1.2.4 *O exemplo 1.2.2 é uma seminorma, mesmo em espaços complexos. Os exemplos 1.2.1 e 1.2.3 não são seminormas.*

Observação 2 *Note que se p é uma seminorma em E , então*

- (i) $p(0) = 0$;
- (ii) $p(-x) = p(x)$;
- (iii) $p(x) \geq 0, \quad x \in E$;
- (iv) $|p(x) - p(y)| \leq p(x - y) \quad x, y \in E$.

O processo de extensão será um pouco diferente para os casos real e complexo. Primeiro veremos um resultado geral para o caso real o qual será demonstrado nas seções seguintes.

1.3 O Teorema de Hahn-Banach em Espaços Vetoriais Reais

Um dos principais resultados deste trabalho consiste no teorema abaixo, cuja demonstração será dada na seção 1.7, onde usamos o Lema de Zorn.

Teorema 1 (Hahn-Banach) *Seja E um espaço vetorial real, com um funcional sublinear p definido em E . Suponha que L é um subespaço linear de E e g é um funcional linear em L satisfazendo*

$$g(x) \leq p(x), \quad x \in L.$$

Então g tem uma extensão f em E tal que

$$f(x) \leq p(x), \quad x \in E. \tag{1.1}$$

Observação 3 *Segue-se de (1.1) que*

$$-p(-x) \leq -f(-x) = f(x) \leq p(x), \quad x \in E.$$

1.4 O Teorema de Hahn-Banach em Espaços Vetoriais Complexos

Agora, a partir do caso real, vamos deduzir uma forma do teorema de Hahn-Banach para o caso complexo. Note que se E é um espaço vetorial sobre o corpo \mathbb{C} , E é automaticamente um espaço vetorial sobre o corpo \mathbb{R} , pois podemos restringir a multiplicação escalar aos escalares reais, denotaremos esse espaço vetorial real por E_R (ressaltamos que os elementos de E e E_R são os mesmos, a diferença entre os dois espaços é simplesmente que a E_R só é permitido a multiplicação por números reais). Se, além disso, E é um espaço normado, então E_R também é um espaço normado, com a mesma norma de E .

Lema 1 *Se f é um funcional linear em E , então existe um único funcional linear real f_R em E_R tal que*

$$f(x) = f_R(x) - if_R(ix), \quad x \in E. \quad (1.2)$$

Reciprocamente, se f_R é um funcional linear real em E_R e f é definido por (1.2), então f é um funcional linear complexo em E .

Se, além disso, E é um espaço normado então $f \in E' \Leftrightarrow f_R \in E'_R$ e, neste caso, $\|f\| = \|f_R\|$.

Demonstração: Para um arbitrário $x \in E$, podemos escrever

$$f(x) = f_R(x) + if_I(x), \quad x \in E,$$

onde f_R e f_I são valores reais. Além disso, se f é um funcional linear em E então f_R e f_I são funcionais lineares em E_R , onde E_R é E considerado como um espaço vetorial real. Além disso, para qualquer $x \in E$,

$$f(ix) = f_R(ix) + if_I(ix).$$

Mas $f(ix) = if(x) = -f_I(x) + if_R(x)$. Então $f_R(ix) = -f_I(x)$. Conseqüentemente,

$$f(x) = f_R(x) - if_R(ix), \quad x \in E.$$

Reciprocamente, seja f_R um funcional linear em E_R . Então f_R é uma aplicação de E em \mathbb{R} tal que $f_R(ax + by) = af_R(x) + bf_R(y) \quad \forall x, y \in E \quad e \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$.

Definindo $f : E \rightarrow \mathbb{C}$ por (1.2), segue que f é um funcional linear em E , pois como f_R é aditivo então f também o é e, se $a, b \in \mathbb{R}$ e $x \in E$, temos que

$$\begin{aligned}
 f((a + ib)x) &= f_R(ax + ibx) - if_R(-bx + iax) \\
 &= af_R(x) + bf_R(ix) + ibf_R(x) - iaf_R(ix) \\
 &= (a + ib)f_R(x) - (a + ib)if_R(ix) \\
 &= (a + ib)[f_R(x) - if_R(ix)] \\
 &= (a + ib)f(x)
 \end{aligned}$$

Note que a homogeneidade de f_R não implica imediatamente a homogeneidade de f , pois $f_R(\lambda x) = \lambda f_R(x)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ mas não em geral para $\lambda \in \mathbb{C}$.

Finalmente, segue de (1.2) que,

$$|f(x)|^2 = |f_R(x)|^2 + |f_R(ix)|^2, \quad x \in E$$

Portanto, se $f \in E'$ então para qualquer $x \in E$, temos

$$|f_R(x)| \leq |f(x)| \leq \|f\| \|x\|$$

assim, $f_R \in E'_R$ e

$$\|f_R\| \leq \|f\| \tag{1.3}$$

Reciprocamente, se $f_R \in E'_R$ então para qualquer $x \in E$, podemos escolher $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $|f(x)| = \alpha f(x)$, onde $|\alpha| = 1$, assim

$$|f(x)| = f(\alpha x) = f_R(\alpha x) \leq \|f_R\| \|x\|$$

Portanto, $f \in E'$ e

$$\|f\| \leq \|f_R\| \tag{1.4}$$

Assim, de (1.3) e (1.4) segue que

$$\|f\| = \|f_R\|.$$

■

Lema 2 *Seja E um espaço vetorial complexo e seja p uma seminorma em E . Suponha que L é um subespaço linear de E e g um funcional linear em L satisfazendo*

$$|g(x)| \leq p(x), \quad x \in L.$$

Suponha que g_R , um funcional linear em L_R obtido por aplicação do lema 1 à g , tem uma extensão f_R em E_R , satisfazendo

$$|f_R(x)| \leq p(x), \quad x \in E_R.$$

então g tem uma extensão f em E tal que

$$|f(x)| \leq p(x), \quad x \in E. \tag{1.5}$$

Demonstração: Pelo Lema 1 existe um correspondente funcional complexo f em E , o qual é claramente uma extensão de g . Para mostrar que f satisfaz (1.5), suponha que $x \in E$, com $f(x) \neq 0$, e escolha $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $|f(x)| = \alpha f(x)$ (onde, $|\alpha| = 1$). Então

$$|f(x)| = f(\alpha x) = f_R(\alpha x) \leq p(\alpha x) = |\alpha|p(x) = p(x),$$

desde que p é uma seminorma. Isso completa a demonstração. ■

Combinando o teorema 1 e o lema 1, obtemos a seguinte versão geral do teorema de Hahn-Banach.

Teorema 2 (Hahn-Banach) *Seja E um espaço vetorial real ou complexo e p uma seminorma em E . Suponha que L é um subespaço linear de E e g é um funcional linear em L satisfazendo*

$$|g(x)| \leq p(x), \quad x \in L.$$

Então, g tem uma extensão f em E tal que

$$|f(x)| \leq p(x), \quad x \in E.$$

Demonstração: Se E for um espaço real normado o resultado segue do teorema 1 e do fato de p ser uma seminorma. Portanto, suponha que E é um espaço normado complexo. Denote por f_R o funcional linear real em L obtido por aplicação do lema 1 à g . Temos, por (1.2),

$$g_R(x) \leq |g_R(x)| \leq |g(x)| \leq p(x), \quad x \in L.$$

Assim, pelo teorema 1, g_R tem uma extensão f_R em E_R , satisfazendo

$$|f_R(x)| \leq p(x), \quad x \in E_R.$$

Então segue do lema 2 que g tem uma extensão f em E tal que

$$|f(x)| \leq p(x), \quad x \in E.$$

■

1.5 O Teorema de Hahn-Banach em Espaços Normados

Nesta seção estudaremos o Teorema de Hahn-Banach em espaços normados.

Lema 3 *Seja E um espaço linear real, L um subespaço linear próprio de E , e seja p um funcional sublinear em E e g um funcional linear em L , tal que $g(x) \leq p(x)$, $\forall x \in L$. Suponha que $z_1 \notin L$, e seja*

$$L_1 = [z_1] \oplus L = \{\alpha z_1 + x; \alpha \in \mathbb{R}, x \in L\}.$$

Então, existe $\xi_1 \in \mathbb{R}$ e $g_1 : L_1 \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo

$$g_1(\alpha z_1 + x) = \alpha \xi_1 + g(x) \leq p(\alpha z_1 + x), \quad \alpha \in \mathbb{R}, x \in L. \quad (1.6)$$

Note que, g_1 é linear em L_1 , e $g_1(x) = g(x)$, $x \in L$, assim g_1 é uma extensão de g .

Demonstração: Para qualquer $u, v \in L$, temos

$$g(u) + g(v) = g(u + v) \leq p(u + v) = p(u - z_1 + z_1 + v) \leq p(u - z_1) + p(v + z_1),$$

e assim,

$$g(u) - p(u - z_1) \leq -g(v) + p(v + z_1) \quad (1.7)$$

tomemos o ínfimo em (1.7) com $v \in L$, então

$$g(u) - p(u - z_1) \leq \inf_{v \in L} \{-g(v) + p(v + z_1)\} = \xi_1$$

temos também

$$-\xi_1 + g(u) \leq p(u - z_1), \quad u \in L \quad (1.8)$$

$$\xi_1 + g(v) \leq p(v + z_1), \quad v \in L. \quad (1.9)$$

Multiplicando (1.8) por $\beta > 0$, temos

$$-\beta\xi_1 + g(\beta u) \leq p(\beta u - \beta z_1)$$

e escrevendo $\alpha = -\beta$, $x = \beta u$ obtemos (1.6) quando $\alpha < 0$. Analogamente, multiplicando (1.9) por $\beta > 0$, temos

$$\beta\xi_1 + g(\beta v) \leq p(\beta v + \beta z_1)$$

e escrevendo $\alpha = \beta$, $x = \beta v$ obtemos (1.6) quando $\alpha > 0$, quando $\alpha = 0$ (1.6) segue imediatamente da definição de p . ■

Teorema 3 *Suponha E um espaço vetorial normado, L um subespaço linear fechado de E tal que $L \neq E$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $0 < \alpha < 1$. Então existe $x_\alpha \in E$ tal que $\|x_\alpha\| = 1$ e $\|x_\alpha - y\| > \alpha$, $\forall y \in L$.*

Omitiremos a demonstração deste teorema, ao leitor interessado sugere-se consultar [4]

Lema 4 *Seja E um espaço normado separável de dimensão infinita e suponha que $0 < \alpha < 1$. Então existe uma sequência de vetores unitários $\{z_n\}$ em E tal que $\|z_m - z_n\| \geq \alpha$ para qualquer $m, n \in \mathbb{N}$ com $m \neq n$ e $\overline{\{z_n\}} = E$.*

Demonstração: Seja $\{x_n\}$ uma sequência contável e densa em E . Claramente, $\overline{\{x_n\}} = E$. Seja $\{y_n\}$ uma subsequência obtida pela retirada de todos os elementos da sequência $\{x_n\}$ que são escritos como combinação linear de elementos precedentes. Por construção, a sequência $\{y_n\}$ é linearmente independente. Além disso, para qualquer número finito de elementos de $\{x_n\}$ escritos como combinação linear, temos um número finito de elementos de $\{y_n\}$ escritos como combinação linear, assim $[x_n] = [y_n]$, e portanto $\overline{[y_n]} = E$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, seja $U_k = [y_1, \dots, y_k]$. Construíamos uma sequência de vetores $\{z_n\}$ indutivamente. Seja $z_k = \frac{y_k}{\|y_k\|}$. Agora, suponha que para algum $k \in \mathbb{N}$ construíamos um conjunto de vetores unitários $\{z_1, \dots, z_k\}$, com

k elementos e a propriedade: $[z_1, \dots, z_k] = U_k$, e se $m \neq n$ então $\|z_m - z_n\| \geq \alpha$. Por aplicação do teorema 3 para os espaços U_k e U_{k+1} , existe um vetor unitário $z_{k+1} \in U_{k+1}$ tal que

$$\|z_{k+1} - y\| \geq \alpha, \quad y \in U_k.$$

Em particular, para cada vetor z_m , $m = 1, \dots, k$. Assim o conjunto $\{z_1, \dots, z_k, z_{k+1}\}$, com $k + 1$ elementos também tem a mesma propriedade acima. Desde que E é de dimensão infinita, este processo indutivo pode continuar indefinidamente produzindo uma sequência $\{z_n\}$ com a propriedade acima. Assim, temos $\overline{[z_n]} = \overline{[y_n]} = \overline{[x_n]} = E$ (desde que a sequência $\{x_n\}$ é densa em E), o que completa a demonstração. ■

Teorema 4 (Hahn-Banach) *Seja E um espaço normado real ou complexo e L um subespaço linear de E . Para qualquer $g \in L'$ existe uma extensão $f \in E'$ de g tal que $\|f\| = \|g\|$.*

Demonstração: Seja $p(x) = \|g\|\|x\|$, $\forall x \in E$. Então p é uma seminorma em E . De fato, temos:

- (i) $p(x + y) = \|g\|\|x + y\| \leq \|g\|(\|x\| + \|y\|) = \|g\|\|x\| + \|g\|\|y\| = p(x) + p(y)$, $x, y \in E$
- (ii) $p(\alpha x) = \|g\|\|\alpha x\| = |\alpha|\|g\|\|x\| = |\alpha|p(x)$, $x \in E$, $\alpha \in \mathbb{K}$.

Podemos supor que $L \neq E$ e L fechado. Primeiro discutiremos o caso real e a partir deste deduziremos o caso complexo. A partir de agora vamos supor E separável.

(i) Suponha que E é real. Notemos que (1.6), juntamente com a forma de p , implica que a extensão g_1 construída no lema 3 satisfaz $g_1 \in L'_1$ e $\|g_1\| = \|g\|$. Pelo Lema 4 existe uma sequência de vetores unitários $\{z_n\}$ em $E \setminus L$ tal que se definimos

$$L_n = [z_1, \dots, z_n] \oplus L, \quad n \geq 1, \quad L_\infty = [z_1, z_2, \dots] \oplus L.$$

Então, $z_{n+1} \notin L_n$, $n \geq 1$, e $E = \overline{L_\infty}$ (ou $E = L_n$, para algum n finito, em cujo caso a extensão $f \in E'$ pode ser construída por aplicação do Lema 3 n vezes).

Seja $L_0 = L$, $g_0 = g$, e suponha que, para algum $n \geq 0$, temos uma extensão $g_n \in L'_n$ de g satisfazendo $\|g_n\| = \|g\|$. Aplicando o Lema 3 à g_n obtemos uma extensão $g_{n+1} \in L'_{n+1}$ com $\|g_{n+1}\| = \|g_n\| = \|g\|$. Daí, concluímos que, $\forall n \geq 0$, existe uma extensão $g_n \in L'_n$ com $\|g_n\| = \|g\|$. Agora, mostremos que existe uma extensão desse funcional para L_∞ , e então para E .

Para qualquer $x \in L_\infty$, existe um inteiro $n(x)$ tal que $x \in L_{n(x)}$, assim, para todo $m \geq n(x)$, $x \in L_m$ e $g_m(x) = g_{n(x)}(x)$. Assim, podemos definir $g_\infty(x) = g_{n(x)}(x)$. Note que,

a partir das propriedades dos funcionais g_n , $n \geq 0$, que g_∞ é uma extensão de g e satisfaz $\|g_\infty\| = \|g\|$. Finalmente, desde que $E = \overline{L}_\infty$, f_∞ tem uma extensão por continuidade, $f \in E'$, satisfazendo $\|f\| = \|g_\infty\| = \|g\|$, o que completa a prova do teorema quando E é real.

(ii) Agora, suponha que E é complexo. Aplicando a primeira parte da demonstração e o lema 2 à $g \in L'$ obtemos um funcional linear complexo $f \in E'$ tal que

$$|f(x)| \leq p(x) = \|f\|\|x\|, \quad x \in E.$$

Portanto, $\|f\| = \|g\|$. ■

1.6 O Teorema de Hahn-Banach em Dimensão Finita

Teorema 5 (Hahn-Banach) *Seja E um espaço vetorial real, com um funcional sublinear p definido em E . Suponha $g : L \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear onde L é um subespaço de E satisfazendo*

$$g(x) \leq p(x), \quad \forall x \in L.$$

Então g tem uma extensão f em E tal que

$$f(x) \leq p(x), \quad x \in E.$$

Demonstração: Suponha que $L \neq E$. Considere $x_0 \in E \setminus L$ e $L_0 = L \oplus [x_0] = \{x + tx_0; t \in \mathbb{R}, x \in L\}$. Defina $f_0 : L_0 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f_0(x + tx_0) = g(x) + t\alpha_0$ onde $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ é escolhido de modo que $f_0(x) \leq p(x), \forall x \in L_0$. Assim, $f_0(x) = g(x)$ se $x \in L$, f_0 é linear e $f_0(x) \leq p(x), \forall x \in L_0$. Se $L_0 = E$ a demonstração acaba. Caso contrário, tome $x_1 \in E \setminus L_0$ e considere $L_1 = L_0 \oplus [x_1]$ e defina $f_1 : L_1 \rightarrow \mathbb{R}$ por $f_1(x + tx_1) = f_0(x) + t\alpha_1$. Tem-se que f_1 é linear $f_1(x) = f_0(x), \forall x \in L_0$ e $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ é escolhido de modo que $f_1(x) \leq p(x), \forall x \in L_1$. Se $L_1 = E$ a prova acaba. Se não, tome $x_2 \in E \setminus L_1$ e considere $L_2 = L_1 \oplus [x_2]$ e prossiga o raciocínio como anteriormente, como $\dim E < \infty$, existirá um $n \in \mathbb{N}$ tal que $L_n = E$. ■

1.7 Forma Geral do Teorema de Hahn-Banach

Nesta seção provaremos o teorema 1, para isto utilizaremos o Lema de Zorn, o qual enunciaremos a seguir. Para tanto, recordemos algumas noções da teoria dos conjuntos ordenados.

Definição 4 Um conjunto P é dito *parcialmente ordenado* quando for munido de ordem parcial, isto é, uma relação que satisfaz as seguintes condições:

(i) $x \leq x, \forall x \in P$;

(ii) Se $x \leq y$ e $y \leq z$, então $x \leq z, \forall x, y, z \in P$;

(iii) Se $x \leq y$ e $y \leq x$, então $x = y, \forall x, y \in P$.

Se, além disso, $x \leq y$ ou $y \leq x, \forall x, y \in P$ então a relação será chamada uma *ordem total* e P será chamado *totalmente ordenado*.

Exemplo 1.7.1 A ordem \leq usual em \mathbb{R} é uma ordem total

Exemplo 1.7.2 Se S é um conjunto arbitrário, e seja M o conjunto de todos os subconjuntos de S . A relação de inclusão de conjuntos, $A < B \Leftrightarrow A \subset B$ é uma ordem parcial em M .

Seja $Q \subset P$ um subconjunto de P , dizemos que $c \in P$ é uma **cota superior** de Q se para todo $y \in Q$ se tem $y \leq c$.

Dizemos que $m \in P$ é um elemento **maximal** de P se para todo $x \in P$ tal que $m \leq x$ se tem necessariamente $x = m$.

Observação 4 Nem sempre um elemento maximal de P é o seu maior elemento. Na verdade, podem existir vários elementos maximais em P .

Finalmente, dizemos que P é *indutivo* se todo subconjunto totalmente ordenado de P admite uma cota superior.

Lema 5 (Zorn) Todo conjunto não vazio, parcialmente ordenado e indutivo admite um elemento maximal.

Demonstração: (Teorema 1) Seja H o conjunto de todas as extensões lineares de g tal que, $\forall h \in H$,

$$h(x) \leq p(x), \quad \forall x \in D(h).$$

Note que o conjunto H é não vazio, pois $g \in H$. Logo, podemos definir uma ordem parcial em H , da seguinte forma:

$$h_i \leq h_j \Leftrightarrow h_j \text{ é extensão de } h_i$$

isto é,

$$h_i \leq h_j \Leftrightarrow D(h_i) \subset D(h_j) \text{ e } h_i(x) = h_j(x), \forall x \in D(h_i).$$

Seja $P = (h_i)_{i \in I}$ um subconjunto de H , totalmente ordenado.

Considere φ uma função definida da seguinte forma:

- (i) $D(\varphi) = \bigcup_{i \in I} D(h_i)$;
- (ii) $\varphi(x) = h_i(x)$, se $x \in D(h_i)$.

Note que φ está bem definida, pois se $x \in D(h_i) \cap D(h_j)$ então $h_i(x) = h_j(x)$, uma vez que P é totalmente ordenado e, portanto, $D(h_i) \subset D(h_j)$ ou $D(h_j) \subset D(h_i)$.

Observe que, como $D(h_i)$ é subconjunto não vazio de E , então $\bigcup_{i \in I} D(h_i)$ é subconjunto não vazio de E . Além disso, dados $x_1, x_2 \in D(\varphi)$, existem h_1 e h_2 em P tais que $x_1 \in D(h_1)$ e $x_2 \in D(h_2)$. Como P é totalmente ordenado, $h_1 \leq h_2$ ou $h_2 \leq h_1$. Daí, $x_1, x_2 \in D(\max\{h_1, h_2\})$. Logo, como este conjunto é um espaço vetorial, concluímos que $x_1 + x_2 \in D(\max\{h_1, h_2\})$. Portanto, $x_1 + x_2 \in D(\varphi)$.

Note também que, se $x \in D(\varphi)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então $\lambda x \in D(\varphi)$, pois $\forall i \in I$, $D(h_i)$ é um espaço vetorial.

Portanto, concluímos que $D(\varphi)$ é um subespaço vetorial de E .

Além disso, φ é linear, pois $\forall x_1, x_2 \in D(\varphi)$, temos que existem $h_1, h_2 \in P$ tais que $x_1 \in D(h_1)$ e $x_2 \in D(h_2)$. Então,

$$\begin{aligned} \varphi(x_1 + x_2) &= \max\{h_1, h_2\}(x_1 + x_2) \\ &= \max\{h_1, h_2\}(x_1) + \max\{h_1, h_2\}(x_2) \\ &= \varphi(x_1) + \varphi(x_2). \end{aligned}$$

Dado $x \in D(\varphi)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos que existe $h \in P$ tal que $x \in D(h)$ e,

$$\varphi(\lambda x) = h(\lambda x) = \lambda h(x) = \lambda \varphi(x).$$

Além disso, pela própria definição de φ , observemos que esta é uma extensão de cada $h_i \in P$, onde cada h_i é uma extensão de g . Logo, φ é uma extensão da g . E como para cada

$h_i \in P$, temos

$$D(h_i) \subset \bigcup_{i \in I} D(h_i) = D(\varphi)$$

e

$$\varphi(x) = h_i(x), \quad \forall x \in D(h_i),$$

podemos dizer que $\forall h_i \in P$ temos $\varphi \geq h_i$, isto é φ é uma cota superior de P .

Daí, pelo Lema de Zorn, H tem um elemento maximal, que indicaremos por f .

Agora, basta mostrar que $D(f) = E$, e assim provaremos o teorema.

Suponha por absurdo que $D(f) \neq E$.

Então, podemos supor um elemento $z \in E \setminus D(f)$ e considerar Z o subespaço de E gerado por $D(f) \cup [z]$, isto é, $\forall y \in Z$, $y = x + \lambda z$, para algum $x \in D(f)$ e algum $\lambda \in \mathbb{R}$.

Seja $\psi : Z \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida por:

$$\psi(x + \lambda z) = f(x) + \lambda c,$$

onde c é uma constante que fixaremos a seguir.

Note que sendo f linear, dados $y_1, y_2 \in Z$, tais que $y_1 = x_1 + \lambda_1 z$ e $y_2 = x_2 + \lambda_2 z$, temos

$$y_1 + y_2 = (x_1 + \lambda_1 z) + (x_2 + \lambda_2 z) = (x_1 + x_2) + (\lambda_1 + \lambda_2)z,$$

e então

$$\begin{aligned} \psi(y_1 + y_2) &= \psi((x_1 + x_2) + (\lambda_1 + \lambda_2)z) \\ &= f(x_1 + x_2) + (\lambda_1 + \lambda_2)c \\ &= f(x_1) + \lambda_1 c + f(x_2) + \lambda_2 c \\ &= \psi(x_1 + \lambda_1 z) + \psi(x_2 + \lambda_2 z) \\ &= \psi(y_1) + \psi(y_2). \end{aligned}$$

E ainda, se $\alpha \in \mathbb{R}$, temos:

$$\alpha y_1 = \alpha(x_1 + \lambda_1 z) = \alpha x_1 + (\alpha \lambda_1)z,$$

Então

$$\psi(\alpha y_1) = \psi(\alpha x_1 + (\alpha \lambda_1)z)$$

$$\begin{aligned}
&= f(\alpha x_1) + (\alpha \lambda_1)c \\
&= \alpha f(x_1) + \alpha(\lambda_1 c) \\
&= \alpha(f(x_1) + \lambda_1 c) \\
&= \alpha\psi(x_1 + \lambda_1 z) \\
&= \alpha\psi(y_1)
\end{aligned}$$

Assim, ψ é um funcional linear em Z .

Além disso, no caso em que $y \in D(f)$, temos que $y = y + 0z$, logo $y \in Z$ e, assim, $\psi(y) = f(y)$, isto é, ψ é uma extensão linear de f tal que $D(f)$ é subconjunto próprio de Z .

Agora, mostremos que $\psi \in H$. Temos que ψ é uma extensão de g , pois f é extensão linear de g .

Portanto, devemos mostrar apenas que ψ , com uma escolha adequada de c , satisfaz à seguinte condição:

$$\psi(y) \leq p(y), \quad \forall y \in D(\psi).$$

Sejam $x_1, x_2 \in D(f)$.

Como p é um funcional sublinear, $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$, $\forall x, y \in E$, e ainda, como f é linear e $f(x) \leq p(x)$, $\forall x \in D(f)$, temos:

$$\begin{aligned}
f(x_1) - f(x_2) &= f(x_1 - x_2) \\
&\leq p(x_1 - x_2) \\
&= p(x_1 + z - z - x_2) \\
&\leq p(x_1 + z) + p(-z - x_2).
\end{aligned}$$

Daí, segue-se que

$$-p(-z - x_2) - f(x_2) \leq p(x_1 + z) - f(x_1), \quad (1.10)$$

onde z é fixado.

Agora, seja

$$M = \sup\{-p(-z - x_2) - f(x_2); x_2 \in D(f)\}$$

e

$$m = \inf\{p(x_1 + z) - f(x_1); x_1 \in D(f)\}.$$

Então, $M \leq m$ e para um c_z com $M \leq c_z \leq m$, de (1.10), temos

$$-p(-z - x_2) - f(x_2) \leq c_z \leq p(x_1 + z) - f(x_1), \quad \forall x_1, x_2 \in D(f). \quad (1.11)$$

Fixando o c_z , obtemos.

Para $\lambda < 0$, pelo lado esquerdo da desigualdade (1.11) e substituindo x_2 por $\lambda^{-1}w$, onde $w = \lambda x_2$, temos,

$$-p(-z - \lambda^{-1}w) - f(\lambda^{-1}w) \leq c_z \Rightarrow -p(-z - \lambda^{-1}w) - \lambda^{-1}f(w) \leq c_z.$$

Daí, multiplicando $(-\lambda)$ a cada membro da desigualdade, obtemos:

$$\lambda p(-z - \lambda^{-1}w) + f(w) \leq -\lambda c_z.$$

Logo,

$$f(w) + \lambda c_z \leq -\lambda p(-z - \lambda^{-1}w).$$

Daí, fazendo $y_1 = w + \lambda z$, temos:

$$\begin{aligned} \psi(y_1) &= \psi(w + \lambda z) \\ &= f(w) + \lambda c_z \\ &\leq -\lambda p(-z - \lambda^{-1}w). \end{aligned}$$

Pela homogeneidade de p , temos

$$\psi(y_1) \leq -\lambda p(-z - \lambda^{-1}w) = p(w + \lambda z) = p(y_1).$$

Assim,

$$\psi(y_1) \leq p(y_1), \quad \forall y_1 \in D(\psi), \quad \text{onde } \lambda < 0.$$

Para $\lambda > 0$, pelo lado direito da desigualdade (1.11) e substituindo x_1 por $\lambda^{-1}v$, onde $v = \lambda x_1$, temos,

$$c_z \leq p(\lambda^{-1}v + z) - f(\lambda^{-1}v) \Rightarrow c_z \leq p(\lambda^{-1}v + z) - \lambda^{-1}f(v).$$

Daí, multiplicando cada membro da desigualdade por λ , temos

$$\lambda c_z \leq \lambda p(\lambda^{-1}v + z) - f(v)$$

Logo,

$$f(v) + \lambda c_z \leq \lambda p(\lambda^{-1}v + z).$$

Daí, fazendo $y_2 = v + \lambda z$, temos

$$\begin{aligned}\psi(y_2) &= \psi(v + \lambda z) \\ &= f(v) + \lambda c_z \\ &\leq \lambda p(\lambda^{-1}v + z).\end{aligned}$$

E novamente pela homogeneidade de p , temos

$$\psi(y_2) \leq \lambda p(\lambda^{-1}v + z) = p(v + \lambda z) = p(y_2).$$

Portanto, $\psi(y_2) \leq p(y_2)$, $\forall y_2 \in D(\psi)$, onde $\lambda > 0$.

Note ainda que, $\forall y \in D(\psi)$ tal que $\lambda = 0$, $y \in D(f)$ e $\psi(y) = f(y) \leq p(y)$.

Assim, concluímos que $\psi(y) \leq p(y)$, $\forall y \in Z$, e portanto, $\psi \in H$, o que é absurdo, pois contradiz o fato de f ser elemento maximal de H . Logo, $D(f) = E$ e fica provado que f é um funcional linear definido em E , que estende g e é majorado por p . ■

1.8 O Dual Topológico

O espaço vetorial E' das formas lineares contínuas f sobre E , munido da norma dual

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)| = \sup_{\|x\| \leq 1} f(x)$$

é dito o dual topológico de E .

Observação 5 *Notação:* Dados $f \in E'$ e $x \in E$, $f(x)$ será denotado às vezes por $\langle f, x \rangle$ onde $\langle \cdot \rangle$ é o produto interno na dualidade E', E .

Teorema 6 *O dual topológico E' de um espaço normado E é um espaço de Banach.*

Demonstração: Seja (f_n) uma sequência de Cauchy em E' . Logo, $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$m, n > N \Rightarrow \|f_n - f_m\| < \epsilon$$

Assim, $\forall x \in E$ temos:

$$|f_n(x) - f_m(x)| = |(f_n - f_m)(x)| \leq \|f_n - f_m\| \|x\| < \epsilon \|x\|$$

implicando que $(f_n(x))$ é uma seqüência de Cauchy de números reais. Desde que, \mathbb{R} é completo para cada $x \in E$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$ existe.

Seja $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$. Mostraremos que $f \in E'$. De fato,

(i) f é linear.

$$f(\alpha x + y) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(\alpha x + y) = \lim_{n \rightarrow +\infty} [\alpha f_n(x) + f_n(y)] = \alpha \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) + \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(y) = \alpha f(x) + f(y).$$

(ii) f é limitada.

Para qualquer j e um apropriado N , temos que:

$$\|f_{N+j} - f_N\| < 1, \forall n \geq N \Rightarrow \|f_{N+j}\| \leq 1 + \|f_N\|, \forall n \geq N.$$

Ou ainda,

$$|f_{N+j}(x)| \leq \|f_{N+j}\| \|x\| \leq (1 + \|f_N\|) \|x\|.$$

Desde que isto é verdade para qualquer j , fazendo $j \rightarrow \infty$ obtém-se

$$|f(x)| \leq (1 + \|f_N\|) \|x\|$$

e portanto, $f \in E'$.

Mostraremos agora que $f_n \rightarrow f$ em E' .

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{ tal que } m, n > N \Rightarrow \|f_n - f_m\| < \epsilon.$$

Então, $\forall x \in E$ temos:

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon \|x\|, \forall m, n > N.$$

Portanto,

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} |f_n(x) - f_m(x)| = \left| f_n(x) - \lim_{m \rightarrow +\infty} f_m(x) \right| < \epsilon \|x\|$$

implicando que

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon \|x\|, \forall x \in E \Rightarrow \|f_n - f\| < \epsilon,$$

o que completa a prova. ■

Corolário 1 *Sejam L um subespaço vetorial de E e $g : L \rightarrow \mathbb{R}$ uma função linear contínua com norma*

$$\|g\|_{L'} = \sup \{g(x) ; x \in L \text{ e } \|x\| \leq 1\}$$

Então existe $f \in E'$ que prolonga g e tal que $\|f\|_{E'} = \|g\|_{L'}$

Demonstração: Seja $p : E \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $p(x) = \|g\|_{L'} \|x\|$. Então, p satisfaz

(i) $p(\lambda x) = \lambda p(x), \forall \lambda > 0 \text{ e } \forall x \in E$;

(ii) $p(x + y) \leq p(x) + p(y) \forall x, y \in E$.

Para $x \in L, x \neq 0$ temos que $g\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \leq \|g\|_{L'} \Rightarrow \frac{1}{\|x\|} g(x) \leq \|g\|_{L'} \Rightarrow g(x) \leq \|g\|_{L'} \|x\| = p(x)$.

Se $x = 0$ a desigualdade é clara, pois $0 = g(0)$ e $p(0) \geq 0$. Portanto, $g(x) \leq p(x), \forall x \in L$. Pelo Teorema de Hahn-Banach, existe $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ função linear que prolonga g e $f(x) \leq p(x) = \|g\|_{L'} \|x\|, \forall x \in E$. Daí, segue que

$$\|f\|_{E'} \leq \|g\|_{L'}.$$

Como f prolonga g , temos que $\|f\|_{E'} \geq \|g\|_{L'}$.

Portanto, segue que,

$$\|f\|_{E'} = \|g\|_{L'}.$$

■

Corolário 2 *Para todo $x_0 \in E$, existe $f_0 \in E'$ tal que $\|f_0\|_{E'} = \|x_0\|$ e $\langle f_0, x_0 \rangle = \|x_0\|^2$.*

Demonstração: Se $x_0 = 0$ tome $f_0 = 0$. Se $x_0 \neq 0$ consideremos

$$L = \mathbb{R}x_0 = \{tx_0 ; t \in \mathbb{R}\}.$$

Então, L é um subespaço vetorial de E . Seja $g : L \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(tx_0) = t\|x_0\|^2$.

g é linear pois

$$g(\alpha x + y) = g((\alpha t + t')x_0) = (\alpha t + t')\|x_0\|^2 = \alpha(t\|x_0\|^2) + t'\|x_0\|^2 = \alpha g(x) + g(y).$$

$$|g(tx_0)| = (|t| \|x_0\|) \|x_0\|$$

$$|g(tx_0)| \leq \|x_0\| \text{ se } \|tx_0\| \leq 1$$

e

$$|g(tx_0)| = \|x_0\| \text{ se } \|tx_0\| = 1.$$

Portanto, $\|x_0\| = \sup_{\|tx_0\| \leq 1} |g(tx_0)|$, ou seja, $\|x_0\| = \|g\|_{L'}$. Pelo corolário anterior, existe $f_0 \in E'$ tal que $\|f_0\|_{E'} = \|g\|_{L'} = \|x_0\|$ e $\langle f_0, x \rangle = g(x), \forall x \in L$. Em particular,

$$\langle f_0, x_0 \rangle = g(x_0) = \|x_0\|^2.$$

■

Observação 6 (1) " Se $\langle f, x \rangle = 0, \forall f \in E'$ então $x = 0$. "

Segue do corolário que dado $x \in E$, existe $f \in E'$ tal que $\langle f, x \rangle = \|x\|^2$. Como $\langle f, x \rangle = 0$ implica que $\|x\| = 0$ e portanto, $x = 0$.

(2) Decorre do corolário 2 que se $E \neq \{0\}$ então $E' \neq \{0\}$.

(3) O elemento f_0 no corolário 2 não é único em geral. Sejam $E = \mathbb{R}^2$ e $\|(x, y)\| = |x| + |y|$. Seja $x_0 = (1, 0)$ para $0 \leq \lambda \leq 1$ considere $f_\lambda : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definido por $f_\lambda(x, y) = x + \lambda y$.

Note que,

$$f_\lambda(x_0) = f_\lambda(1, 0) = 1 = \|x_0\|^2$$

$$|f_\lambda(x, y)| = |x + \lambda y| \leq |x| + |\lambda||y| \leq |x| + |y| = \|(x, y)\|.$$

Assím,

$$\|f_\lambda\| = \sup_{\|(x, y)\| \leq 1} |f_\lambda(x, y)| \leq 1 = \|x_0\|. \quad (1.12)$$

Note ainda que

$$\|f_\lambda\| = \sup_{\|(x, y)\| \leq 1} |f_\lambda(x, y)| \geq |f_\lambda(1, 0)| = 1 = \|x_0\| \quad (1.13)$$

Portanto, de (1.12) e (1.13) obtemos $\|f_\lambda\| = \|x_0\|$. Neste caso, temos infinitos funcionais lineares f_λ pois temos infinitos λ em $[0, 1]$.

Corolário 3 Para cada $x \in E$, temos:

$$\|x\| = \sup_{\substack{f \in E' \\ \|f\| \leq 1}} |\langle f, x \rangle| = \max_{\substack{f \in E' \\ \|f\| \leq 1}} |\langle f, x \rangle|.$$

Demonstração: Temos que, $|\langle f, x \rangle| \leq \|x\|, \forall f \in E'$ com $\|f\| \leq 1$. Seja $x \neq 0$. Então pelo corolário 2 existe $f_0 \in E'$ tal que $\|f_0\| = \|x\|$ e $\langle f_0, x \rangle = \|x\|^2$. Seja $f_1 = \frac{1}{\|x\|} f_0$ então $\|f_1\| = 1$

e $\langle f_1, x \rangle = \frac{1}{\|x\|} f_0(x) = \|x\|$. Logo,

$$\|x\| = \langle f_1, x \rangle \leq \sup_{\substack{f \in E' \\ \|f\| \leq 1}} |\langle f, x \rangle| = \|x\|,$$

implicando que,

$$\langle f_1, x \rangle = \sup_{\substack{f \in E' \\ \|f\| \leq 1}} |\langle f, x \rangle|.$$

O funcional f_1 garante que o sup pode ser substituído pelo máximo. Portanto,

$$\|x\| = \sup_{\substack{f \in E' \\ \|f\| \leq 1}} |\langle f, x \rangle| = \max_{\substack{f \in E' \\ \|f\| \leq 1}} |\langle f, x \rangle|.$$

■

1.9 Algumas observações envolvendo o Teorema de Hahn-Banach

(1) O Teorema de Hahn-Banach não garante a unicidade do prolongamento. No entanto, se $\bar{L} = E$ o prolongamento é único.

Exemplo 1.9.1 *Vejamos agora um exemplo da não unicidade de f no Teorema de Hahn-Banach.*

Seja $E = \mathbb{R}^2$ e $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x = y\}$. Considere $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definido por $p(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, temos que p é sublinear.

Seja $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definido por $g(x, x) = x$, tem-se que g é linear e $g(x, x) \leq p(x, x)$.

De fato, $g(x, x) = x \leq |x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + x^2} = p(x, x)$. Considere agora os funcionais lineares

$$f_1(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; f_1(x, y) = x$$

$$f_2(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; f_2(x, y) = y$$

Note que $f_1|_L = g$ e $f_2|_L = g$. Além disso, temos:

$$f_1(x, y) = x \leq |x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} = p(x, y)$$

e

$$f_2(x, y) = y \leq |y| = \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} = p(x, y),$$

o que mostra que o funcional que estende g não é único.

(2) Será que podemos prolongar transformações lineares contínuas do tipo $g : L \rightarrow \mathbb{R}^2$, com as mesmas propriedades enumeradas no Teorema de Hahn-Banach?

A resposta é afirmativa quando considerarmos em \mathbb{R}^2 a norma do máximo, isto é, para $(x, y) \in \mathbb{R}^2$; $|(x, y)|_{\max} = \max\{|x|, |y|\}$.

Seja $L \subseteq E$ um subespaço e $g : L \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g = (g_1, g_2)$ uma transformação linear contínua com

$$\|g\|_L = \sup_{\substack{x \in L \\ \|x\| \leq 1}} |g(x)|_{\max} = \sup_{\substack{x \in L \\ \|x\| \leq 1}} [\max\{g_1(x), g_2(x)\}] \quad (1.14)$$

Afirmção 1: os funcionais g_1 e g_2 são contínuos.

De fato, pois

$$g_i(x) \leq |g_i(x)| \leq \|g\|_L, \quad \forall x \in L, \quad \|x\| \leq 1, \quad i = 1, 2.$$

Logo, $g_i \in L'$, $i = 1, 2$.

Afirmção 2: $\|g\|_L = \max\{\|g_1\|_{L'}, \|g_2\|_{L'}\}$

Note que por (1.14),

$$\|g_1\|_{L'}, \|g_2\|_{L'} \leq \|g\|_L \Rightarrow \max\{\|g_1\|_{L'}, \|g_2\|_{L'}\} \leq \|g\|_L \quad (1.15)$$

Por outro lado, para cada $x \in L$ com $\|x\| \leq 1$ temos,

$$\max\{|g_1(x)|, |g_2(x)|\} \leq \max\{\|g_1\|_{L'}, \|g_2\|_{L'}\}$$

de onde segue da definição de supremo que

$$\|g\|_L \leq \max\{\|g_1\|_{L'}, \|g_2\|_{L'}\} \quad (1.16)$$

De (1.15) e (1.16),

$$\|g\|_L = \max\{\|g_1\|_{L'}, \|g_2\|_{L'}\}$$

Observação 7 Se $f : E \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma transformação linear contínua com $f = (f_1, f_2)$, temos

$$\|f\|_E = \max\{\|f_1\|_{E'}, \|f_2\|_{E'}\}.$$

Aplicando o Teorema de Hahn-Banach, existem $f_1, f_2 \in E'$ tal que f_1 e f_2 prolongam g_1 e g_2 respectivamente com

$$\|f_1\|_{E'} = \|g_1\|_{L'} \quad e \quad \|f_2\|_{E'} = \|g_2\|_{L'}$$

Definindo

$$\begin{aligned} f &: E \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\mapsto f(x) = (f_1(x), f_2(x)) \end{aligned}$$

tem-se

$$f(x) = g(x), \quad \forall x \in L$$

e f é contínua, logo

$$\|f\|_E = \max\{\|f_1\|_{E'}, \|f_2\|_{E'}\} \Rightarrow \|f\|_E = \max\{\|g_1\|_{L'}, \|g_2\|_{L'}\} \Rightarrow \|f\|_E = \|g\|_L$$

(3) A demonstração do Teorema de Hahn-Banach sobre espaço de Hilbert é "mais simples" tendo em vista o Teorema de Riesz.

Definição 5 Dizemos que H é um espaço de Hilbert se H for um espaço vetorial com produto interno que é um espaço de Banach com a norma derivada do produto interno.

Teorema 7 (Riesz) Se H é um espaço de Hilbert e $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ é um funcional linear contínuo, então existe (e é único) um elemento $y \in H$ tal que

$$f(x) = \langle x, y \rangle, \quad \forall x \in H$$

e

$$\|f\|_{H'} = \|y\|$$

Observação 8 No teorema 7 \langle, \rangle é o produto interno em H .

Demonstração: A prova deste teorema é dada no apêndice. ■

Vamos demonstrar o Teorema de Hahn-Banach em um espaço de Hilbert H .

Sejam $L \subseteq H$ subespaço de H "fechado" e $g : L \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear contínuo em L . Aplicando o Teorema da Representação de Riesz, existe $y \in L$ tal que

$$g(x) = \langle x, y \rangle, \quad \forall x \in L \quad e \quad \|g\|_{L'} = \|y\|.$$

Defina

$$\begin{aligned} f &: H \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \langle x, y \rangle. \end{aligned}$$

claramente $f \in E'$, pois pela desigualdade de Cauchy Schwartz

$$|f(x)| = |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

e pelo Teorema da Representação de Riesz,

$$\|f\|_{E'} = \|y\|$$

Portanto, f prolonga g com

$$\|f\|_{E'} = \|g\|_{L'}$$

Observação 9 Para o caso $E = \mathbb{R}^n$ o Teorema de Hahn-Banach é bastante simples. Considere $L \subset \mathbb{R}^n$ um subespaço de E . Denotemos por $g : L \rightarrow \mathbb{R}$ uma função linear satisfazendo

$$g(x) = \|x\|, \quad \forall x \in L.$$

Então, construiremos uma função satisfazendo as condições do Teorema de Hahn-Banach. De fato, denotemos por $\{e_1, \dots, e_r\}$ a base ortonormal de L . Esta base pode ser estendida ortonormalmente a uma base do \mathbb{R}^n . Denotemos por $B = \{e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n\}$ esta base. Tomemos $x = c_1 e_1 + \dots + c_n e_n$ e f de tal forma que

$$f(e_{r+1}) = 0, \dots, f(e_n) = 0, \quad f(c_1 e_1 + \dots + c_n e_n) = g(x)$$

A função f assim definida satisfaz

$$\begin{aligned} f(x) &= f(c_1 e_1 + \dots + c_n e_n) \\ &= f(c_1 e_1 + \dots + c_r e_r) + f(c_{r+1} e_{r+1} + \dots + c_n e_n) \\ &= g(\bar{x}) = \|\bar{x}\| \leq \|x\| \end{aligned}$$

onde $\bar{x} = c_1 e_1 + \dots + c_r e_r$.

Capítulo 2

Forma Geométrica do Teorema de Hahn-Banach

Neste capítulo, demonstraremos o Teorema de Hahn-Banach sob um aspecto geométrico, mas para isto precisaremos apresentar alguns conceitos preliminares.

Definição 6 Dizemos que $L \subset E$ é convexo se dados $a, b \in L$ então

$$ta + (1 - t)b \in L, \quad \forall t \in (0, 1).$$

Proposição 1 Seja E um espaço vetorial real. Se f é funcional linear não nulo e $\alpha \in \mathbb{R}$ então o hiperplano $M = \{x \in E; f(x) = \alpha\}$ determina quatro conjuntos convexos, chamados quartos de espaço que são os seguintes:

$$M_1 = \{x \in E; f(x) < \alpha\}, \quad M_2 = \{x \in E; f(x) > \alpha\}, \quad M_3 = \{x \in E; f(x) \leq \alpha\} \text{ e} \\ M_4 = \{x \in E; f(x) \geq \alpha\}$$

Demonstração: Veja [3] ■

Definição 7 Seja E um espaço vetorial real. Dizemos que um subconjunto convexo S está em um dos lados de um hiperplano M se S está inteiramente contido em um dos quatro quartos de espaço determinados por M .

Definição 8 Se S está contido em um dos lados de M e $S \cap M = \emptyset$, dizemos que S está estritamente em um lado de M .

Definição 9 Um caminho num espaço topológico (E, C) é uma função contínua $f : [0, 1] \rightarrow (E, C)$.

Definição 10 Um conjunto M num espaço topológico (E, C) é dito ser conexo por caminho se, para cada dois ponto $a, b \in M$, existe um caminho ligando a à b .

Proposição 2 Todo conexo por caminho é conexo.

Proposição 3 Seja E um espaço vetorial topológico. Se U é um conjunto aberto em E , então $a + U$ e αU são abertos, para cada $a \in E$ e α escalar não nulo. Se U é aberto e F é um subconjunto arbitrário de X , então $U + F$ é aberto. Onde, $a + U = \{a + x; x \in U\}$, $\alpha U = \{\alpha x; x \in U\}$ e $U + F = \{x + y; x \in U \text{ e } y \in F\}$.

Definição 11 Seja E um espaço vetorial topológico. Um subespaço vetorial de dimensão 1 é chamado hiperplano.

Proposição 4 Seja E um espaço vetorial topológico. Um hiperplano M de E ou é fechado ou é denso em E .

Lema 6 Seja E um espaço vetorial real. Para que um subconjunto convexo S de E esteja estritamente em um lado de um hiperplano M , é necessário e suficiente que $S \cap M = \emptyset$.

Demonstração: Se S está estritamente em um dos lados do hiperplano M , pela definição (8), $S \cap M = \emptyset$.

Agora, suponha que $M = \{x \in E; f(x) = \alpha\}$, onde f é um funcional linear, e $S \cap M = \emptyset$.

Como S é convexo e f é um funcional linear então $f(S)$ é um conjunto convexo. Além disso, como $\forall s \in S, f(s) < \alpha$ ou $f(s) > \alpha$, S está contido em um dos quartos de espaço:

$$M_1 = \{x \in E; f(x) < \alpha\} \quad \text{ou} \quad M_2 = \{x \in E; f(x) > \alpha\}.$$

Logo, S está estritamente em um dos lados de M . ■

Lema 7 Se L é um subespaço de um espaço vetorial topológico E , tal que $\dim E/L \geq 2$, então o complemento de L em E , $E \setminus L$, é um conjunto conexo.

Demonstração: Basta mostra que $E \setminus L$ é conexo por caminho (proposição 2).

Sejam $a, b \in E \setminus L$ e \bar{a} e \bar{b} as classes de equivalência de a e b , respectivamente.

Se \bar{a} e \bar{b} são linearmente independentes, então o segmento que liga a à b pertence a $E \setminus L$.

De fato, se

$$(1-t)a + tb \in L, \text{ para algum } t \in (0, 1), \text{ então } (1-t)\bar{a} + t\bar{b} = \bar{0}$$

e isto implica que \bar{a} e \bar{b} são linearmente dependentes, o que é um absurdo.

Daí, o segmento que liga a à b pertence a $E \setminus L$.

Se \bar{a} e \bar{b} são linearmente dependentes, como $\dim E/L \geq 2$ existe $\bar{c} \in E/L$ (quociente de E por L) tal que \bar{a} e \bar{c} , \bar{b} e \bar{c} são linearmente independentes. Mas, da discussão anterior, sabemos que o segmento que liga a à c e c à b estão em $E \setminus L$ e, portanto, $E \setminus L$ é conexo por caminho. ■

Lema 8 *Seja K um conjunto convexo aberto, não vazio, num espaço vetorial topológico E . Seja L um subespaço vetorial de E tal que $L \cap K = \emptyset$. Então, ou L é um hiperplano ou existe um ponto $a \in E \setminus L$ tal que o subespaço $L \oplus Ra$ não intercepta K .*

Demonstração: O conjunto $\bigcup_{\lambda > 0} \lambda K$ é aberto, assim como o conjunto $U = L + \bigcup_{\lambda > 0} \lambda K$ (proposição 3).

Note que $U \cap L = \emptyset$, pois se para algum $x \in L$ pudéssemos ter $x = y + \lambda k$, onde $y \in L$, $k \in K$ e $\lambda > 0$, então $k = \lambda^{-1}(x - y)$ estaria em $K \cap L$, sendo L um subespaço de E , o que contradiz a hipótese de que $L \cap K = \emptyset$.

Por outro lado, como L é um subespaço de E , temos que $(-U) \cap L = \emptyset$ e então $U \cap (-U) = \emptyset$, pois se $x \in U \cap (-U)$ então $x = y_1 + \lambda_1 k_1 = y_2 - \lambda_2 k_2$, onde $y_1, y_2 \in L$, $k_1, k_2 \in K$, $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. Daí, $\lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2 = y_2 - y_1 \in L$.

E, então

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} k_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} k_2 \in K \cap L,$$

sendo K um conjunto convexo em E , o que é absurdo, pois $L \cap K = \emptyset$ por hipótese.

Agora, suponhamos que L não seja um hiperplano, então $\text{codim } L \geq 2$, Daí pelo Lema 7, $E \setminus L$ é conexo. Como U e $-U$ são abertos disjuntos contidos em $E \setminus L$, então $E \setminus L \neq U \cup (-U)$, pois se $E \setminus L = U \cup (-U)$, existiria uma separação de $E \setminus L$ e este não seria conexo.

Logo, existe $a \in E$, tal que $a \in E \setminus L$ e $a \notin U \cup (-U)$. Daí, $(L + Ra) \cap K = \emptyset$ pois se existisse $k = y + \lambda a$ que está em K , para algum $y \in L$, $\lambda \in \mathbb{R}$, então $\lambda \neq 0$, já que $K \cap L = \emptyset$, e $a = \lambda^{-1}(k - y)$. Daí, $a \in \lambda^{-1}k + L$, isto é, $a \in U$, se $\lambda^{-1} > 0$, ou $a \in -U$, se $\lambda^{-1} < 0$, o que contradiz o fato de que $a \notin U \cup (-U)$.

Logo, $(L + Ra) \cap K = \emptyset$ para algum $a \in E \setminus L$. ■

Teorema 8 *Sejam K um subconjunto convexo aberto não vazio, num espaço vetorial topológico real E , e L uma variedade linear que não intercepta K . Então existe um hiperplano fechado M que contém L e tal que K está estritamente em um dos lados de M .*

Demonstração: Seja $\mathfrak{M} = \{N; N \text{ é subespaço, } L \subset N \subset E \text{ e } N \cap K = \emptyset\}$. Note que, $\mathfrak{M} \neq \emptyset$, pois $L \in \mathfrak{M}$.

Considere \mathfrak{M} parcialmente ordenado pela relação de inclusão de conjuntos, isto é,

$$M < N \text{ se } M, N \in \mathfrak{M} \text{ e } M \subset N.$$

Suponha $\{N_\alpha\}$ um subconjunto de \mathfrak{M} totalmente ordenado.

Fazendo $N = \bigcup_{\alpha} N_\alpha$, note que $N \in \mathfrak{M}$ e N é cota superior para $\{N_\alpha\}$.

Pelo Lema de Zorn, existe um elemento maximal M em \mathfrak{M} .

Suponha que exista $a \in E \setminus M$ tal que $(M + \mathbb{R}a) \cap K = \emptyset$.

Como $L \subset M \subset (M + \mathbb{R}a)$, existe um subespaço $M + \mathbb{R}a > M$ tal que $M + \mathbb{R}a \in \mathfrak{M}$, o que é absurdo, pois M é elemento maximal de \mathfrak{M} . Daí, $\forall a \in E \setminus M$, $(M + \mathbb{R}a) \cap K \neq \emptyset$. Então, pelo Lema 8, M é um hiperplano.

Agora, suponha que M é denso¹. Então $\overline{M} = E$, assim $\forall x \in E$, para qualquer V_x vizinhança de x , $V_x \cap M \neq \emptyset$. Em particular,

$$\forall x \in K, \forall V_x \Rightarrow V_x \cap M \neq \emptyset.$$

Mas, como K é aberto, K é vizinhança de todos os seus pontos. Daí, $K \cap M \neq \emptyset$, o que é absurdo. Portanto, M não é denso. Logo, como M é hiperplano, M é fechado (proposição 4). Como $M \cap K = \emptyset$, pelo Lema 6, K está estritamente em um dos lados de M . ■

¹Um subconjunto M de um espaço topológico E diz-se denso se o fecho de M coincide com E . Equivalentemente, M é denso em E se qualquer vizinhança de qualquer ponto de E contiver um elemento de M .

Corolário 4 *Seja $F \subset E$ um subespaço vetorial tal que $\overline{F} \neq E$. Então existe*

$$f \in E', f \neq 0$$

tal que

$$\langle f, x \rangle = 0, \forall x \in F.$$

Demonstração: Pela segunda forma geométrica do Teorema de Hanh-Banach, com $A = \overline{F}$ e $B = \{x_0\}$, onde $x_0 \notin A$, então existe um hiperplano fechado de equação $[f = \alpha] = \{x; f(x) = \alpha\}$ que separa \overline{F} e $\{x_0\}$ no sentido estrito. Portanto, existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\langle f, x \rangle \leq \alpha - \epsilon, \forall x \in \overline{F} \text{ e } \langle f, x_0 \rangle \geq \alpha + \epsilon.$$

Em particular,

$$\langle f, x \rangle < \alpha, \forall x \in F,$$

pois $F \subset \overline{F}$ e $\alpha - \epsilon < \alpha$.

Como F é um subespaço vetorial temos

$$\langle f, \lambda x \rangle < \alpha, \forall x \in F \text{ e } \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

implicando

$$\lambda \langle f, x \rangle < \alpha, \forall x \in F \text{ e } \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

implicando

$$\langle f, x \rangle < \frac{\alpha}{\lambda}, \forall x \in F, \forall \lambda > 0.$$

Fazendo $\lambda \rightarrow \infty$ vem que

$$\langle f, x \rangle \leq 0, \forall x \in F.$$

Então

$$\langle f, -x \rangle \leq 0, \forall x \in F \Rightarrow -\langle f, x \rangle \leq 0, \forall x \in F \Rightarrow \langle f, x \rangle \geq 0, \forall x \in F.$$

Logo,

$$\langle f, x \rangle = 0, \forall x \in F.$$

■

Observação 10 *Para mostrarmos que um subespaço vetorial $F \subset E$ é denso em E , consideramos uma forma linear contínua $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 0, \forall x \in F$ e mostramos que $f \equiv 0$.*

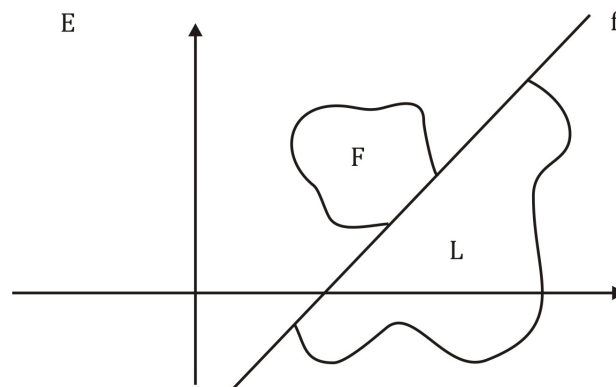
2.1 Aplicações do Teorema de Hahn-Banach

O Teorema de Hahn-Banach é um dos principais resultados para o desenvolvimento da Análise Funcional e com aplicações em diversos problemas encontrados na matemática. A seguir, apresentaremos algumas delas.

2.2 Separação de Convexos por Funcionais Lineares

Antes de apresentarmos esta aplicação, é necessário a apresentação de alguns conceitos que proporcionarão um melhor entendimento desta aplicação.

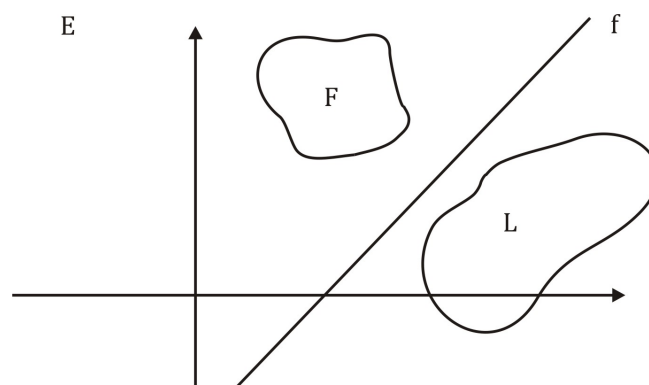
Definição 12 *Sejam L e F subconjuntos do espaço vetorial E e $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear. Diz-se que f separa L e F quando existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que se $x \in L$ então $f(x) \geq \alpha$ e se $x \in F$ então $f(x) \leq \alpha$.*



Dizemos que f separa estritamente L e F se existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$f(x) \leq \alpha - \varepsilon, \quad \forall x \in F$$

$$f(x) \geq \alpha + \varepsilon, \quad \forall x \in L.$$



Definição 13 $L - F = \{z \in E; z = x - y, x \in L, y \in F\}$.

Definição 14 Seja E um espaço vetorial. Diz-se que $L \subset E$ é convexo se:

$$\exists x_0 \in L \text{ tal que } \forall x \in E, \exists \varepsilon > 0, |t| < \varepsilon \Rightarrow x_0 + tx \in L.$$

Definição 15 Seja L subconjunto de E . Diz-se que L é absorvente se L é convexo na origem, isto é,

$$\forall x \in E, \exists \varepsilon > 0, |t| < \varepsilon \Rightarrow tx \in L.$$

Proposição 5 Se L é absorvente, então $0 \in L$.

Proposição 6 Seja $K \subset E$ um conjunto absorvente. O Funcional de Minkowski de K tem as seguintes propriedades:

(i) $p(0) = 0$;

(ii) $p(\lambda x) = \lambda p(x), \forall \lambda > 0, \forall x \in E$;

(iii) $p(x + y) \leq p(x) + p(y), \forall x, y \in E$.

Observação 11 A prova para esta proposição pode ser encontrada em "Introductory Functional Analysis With Applications", Taylor, 1980.

Lema 9 Sejam L, F subconjuntos de um espaço vetorial real E e $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear, f separa F e L se, e somente se, f separa $\{0\}$ e $L - F$.

Demonstração: Admitamos que o funcional f separe L e F . Neste caso, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que:

$$f(x) \geq \alpha, \text{ se } x \in L$$

$$f(y) \leq \alpha, \text{ se } y \in F.$$

Daí, $f(x - y) = f(x) - f(y) \geq 0 = f(0)$.

Seja, $z \in L - F$, então $z = x - y$, onde $x \in L$ e $y \in F$. Além disso, $f(z) = f(x - y) = f(x) - f(y) \geq 0$.

Logo, $f(0) \leq 0$ e $f(z) \geq 0$. Portanto, existe um real nas condições da definição 12. Deste modo, f separa $\{0\}$ e $L - F$.

Por outro lado, se f separa $\{0\}$ e $L - F$ então temos $0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(z) \geq 0, \forall z \in L - F$, e $f(0) \leq 0$, ou $f(z) \leq 0, \forall z \in L - F$, e $f(0) \geq 0$, isto é, $f(L - F) \subseteq \mathbb{R}_-$ ou $f(L - F) \subseteq \mathbb{R}_+$.

Deste modo, se $f(L - F) \subseteq \mathbb{R}_+$, temos:

$$\forall x \in L, \forall y \in F, f(x - y) \geq 0 \Rightarrow f(x) - f(y) \geq 0, \text{ ou seja } f(x) \geq f(y).$$

E assim, segue-se a existência de um c nas condições da definição 12.

Analogamente, quando $f(L - F) \subseteq \mathbb{R}_-$, teremos um α nas mesmas condições. Portanto, f separa $\{0\}$ e $L - F$. ■

Lema 10 f separa L e F se, e somente se, f separa $L + x_0$ e $F + x_0, \forall x_0 \in E$.

Demonstração: Pelo Lema 9, f separa L e F se, e somente se, f separa $\{0\}$ e $L - F$. Mas,

$$\forall x_0 \in E, L - F = (L + x_0) - (F + x_0).$$

Logo, f separa L e F se, e somente se, separa $L + x_0$ e $F + x_0$. ■

Teorema 9 *Sejam L e F subconjuntos disjuntos de E tais que F é convexo e L é absorvente. Então, existe um funcional linear $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ que separa L e F .*

Demonstração: Sejam $y_0 \in F$ e $K = L - F + y_0$.

Como L é absorvente, temos que:

$$\begin{aligned} \forall x \in E, \exists \varepsilon > 0, |t| < \varepsilon &\Rightarrow tx \in L, \text{ ou seja} \\ \forall x \in E, \exists \varepsilon > 0, |t| < \varepsilon &\Rightarrow tx - y_0 \in L - y_0. \end{aligned}$$

Como $L - y_0 \subset L - F$ então:

$$\forall x \in E, \exists \varepsilon > 0, |t| < \varepsilon \Rightarrow tx \in L - F + y_0,$$

isto é, K é absorvente.

Daí, temos P_K o funcional de Minkowski associado à K , então

$$P_K(y_0) = \inf A_{y_0}, \text{ onde } A_{y_0} = \{t > 0; y_0 \in tK\}.$$

Mas, $1 \notin A_{y_0}$, pois como L e F são conjuntos disjuntos, $0 \notin L - F$, logo, $y_0 \notin K$.

Portanto, $\forall \beta \in A_{y_0}, \beta > 1$.

Daí, $P_K(y_0) \geq 1$.

Sejam L_0 o subespaço gerado por y_0 e $f_0 : L_0 \rightarrow \mathbb{R}$ o funcional linear definido por $f_0(\alpha y_0) = \alpha P_K(y_0), \forall \alpha \in \mathbb{R}$, onde $L_0 = \mathbb{R}y_0$.

Para $\alpha > 0$, temos

$$f_0(\alpha y_0) = \alpha P_K(y_0) = P_K(\alpha y_0).$$

Para $\alpha < 0$, temos

$$f_0(\alpha y_0) = \alpha P_K(y_0) < 0 \leq P_K(\alpha y_0).$$

Podemos, então, afirmar que

$$\forall x \in L_0, f_0(x) \leq P_K(x).$$

Pelo Teorema de Hahn-Banach, existe uma extensão $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ de f_0 , tal que $f(x) \leq P_K(x), \forall x \in E$.

Note que, se $x \in K$ então $f(x) \leq P_K(x)$ e ainda como $x \in 1.K, 1 \in \{t > 0 \mid x \in tK\}$, daí

$$P_K(x) = \inf\{t > 0 \mid x \in tK\} \leq 1.$$

Logo, $f(x) \leq 1, \forall x \in K$.

E $f(y_0) = P_K(y_0) \geq 1$.

Dessa forma, f separa K e $\{y_0\}$. Daí, pelo Lema 9, f separa $L - F$ e $\{0\}$ e pelo Lema 10, f separa L e F .

■

Apêndice A

Apêndice

A.1 Lema de Zorn

Antes de enunciarmos e demonstrarmos o Lema de Zorn recordemos que seja P um conjunto parcialmente ordenado e seja Q um subconjunto de P . Definimos:

(i) $c \in P$ é uma cota superior para Q em P , se,

$$x \leq c \quad \forall x \in Q.$$

(ii) O supremo de Q em P é o menor (caso exista) das cotas superiores.

Um conjunto P parcialmente ordenado é dito ser indutivamente ordenado, se todo subconjunto Q totalmente ordenado de P , possuir cota superior, e estritamente indutivamente ordenado se possuir um supremo.

Considere,

- (1) A um conjunto estritamente indutivamente ordenado.
- (2) $f : A \rightarrow A$ tal que $x \leq f(x)$, $\forall x \in A$.
- (3) (BOURBARKI) Dados A como em (1) e f como em (2), então existe $x_0 \in A$ tal que $f(x_0) = x_0$.

Lema 11 *Seja A um conjunto não vazio estritamente indutivamente ordenado, então A contém elemento maximal.*

Demonstração: Suponha por absurdo que não. Logo, dado $x \in A$, existe $y_x \in A$ tal que $x < y_x$. Defina,

$$f : A \rightarrow A$$

$$x \mapsto f(x) = y_x$$

Assim, $f(x) < x, \forall x \in A$. Por Bourbaki existe $x_0 \in A$ tal que $f(x_0) = x_0$, isto é, $y_{x_0} = x_0$, contradizendo a construção de f . ■

Lema 12 (Zorn) *Seja P um conjunto não vazio indutivamente ordenado, então P tem um elemento maximal.*

Demonstração: Seja \leq a ordem de P e defina A como o conjunto de todos os subconjuntos de P que são totalmente ordenados. Temos,

- (1) $A \neq \emptyset$, pois qualquer subconjunto unitário de P pertence a A .
- (2) A é parcialmente ordenado por inclusão. É imediato (hipótese).
- (3) A é estritamente indutivamente ordenado.

De fato, seja T um subconjunto de A totalmente ordenado por inclusão. Assim, $T = \{\chi_\alpha\}_{\alpha \in I}$ é uma ordem. Seja $Z = \bigcup_{\alpha \in I} \chi_\alpha$, vamos mostrar que Z é totalmente ordenado em P . Se $x, y \in Z$, então $x \in \chi_\alpha$ e $y \in \chi_\beta$ para $\alpha, \beta \in I$. Como $\chi_\alpha, \chi_\beta \in T$ que é totalmente ordenado por inclusão, segue que $\chi_\alpha \subseteq \chi_\beta$ ou $\chi_\beta \subseteq \chi_\alpha$. Daí, $x, y \in \chi_\beta$ ou $x, y \in \chi_\alpha$. Como $\chi_\alpha, \chi_\beta \in A \Rightarrow \chi_\alpha$ e χ_β são totalmente ordenados em P . Logo, Z é totalmente ordenado. Assim, $Z \in A$. É fácil ver que Z é um supremo de T em A . Pelo Lema 11, existe $\chi_0 \in A$ que é maximal. Seja m uma cota superior para χ_0 em P . Afirmamos que m é elemento maximal de P . De fato, seja $x_0 \in P$ com $m \leq x_0$ se $x_0 \notin \chi_0$, então $\chi_0 \cup \{x_0\}$ é totalmente ordenado, assim, $\chi_0 \cup \{x_0\} \in A$ contrariando a maximalidade de χ_0 em A . Assim, $x_0 \in \chi_0$ e $x_0 \leq m$. Portanto, $x_0 = m$ o que prova o Lema de Zorn. ■

Na prova do lema 11, ao definirmos $f : A \rightarrow A$ utilizamos o seguinte fato:

”Dado $x \in A$, existe $y_x \in A$ com $x < y_x, \forall x \in A$.” Na verdade a existência de tal família $\{y_x\}_{x \in A}$ é assegurada pelo axioma da escolha, como veremos a seguir.

Enunciando de uma maneira geral, o axioma da escolha diz:

”Dada uma família $\{\chi_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de conjuntos não vazios, existe uma família $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$, onde $x_\alpha \in \chi_\alpha$ para cada $\alpha \in I$.”

Em nosso caso, seja $B_x = \{y \in A; x < y\}$, sendo cada $B_x \neq \emptyset$, temos uma família $\{B_x\}_{x \in A}$ e pelo axioma da escolha, a família $\{y_x\}_{x \in A}$ é bem definida e, portanto, a função $f : A \rightarrow A$ fica bem definida.

Proposição 7 *Seja H um espaço de Hilbert e $L \subset H$ um subespaço vetorial fechado próprio. Então existe $z \in H \setminus L$ tal que $\|z\| = 1$ e $z \perp L$.*

A.2 Teorema de Riesz

Os funcionais lineares em um espaço de Hilbert podem ser representados através do produto interno.

Teorema 10 (Teorema de Representação de Riesz) *Se H é um espaço de Hilbert. Dado $f \in H'$ existe um único $y \in H$ tal que*

$$f(x) = \langle x, y \rangle, \quad \forall x \in H$$

Além disso,

$$\|f\|_{H'} = \|y\|_H.$$

Demonstração: Como $f \in H'$, $L = \ker f$ é fechado. Se $L = H$ então $f \equiv 0$ e tomamos $y = 0$. Caso contrário, pela proposição anterior existe $z \in H \setminus L$ tal que $\|z\| = 1$ e $z \perp L$. Temos $H = [z] \oplus L$. Mais especificamente, dado $x \in H$ podemos escrever

$$x = \frac{f(x)}{f(z)}z + \left(x - \frac{f(x)}{f(z)}z \right) \tag{A.1}$$

e

$$x - \frac{f(x)}{f(z)}z \in L$$

Afirmamos que $y = f(z)z$. De fato, fazendo o produto interno de (A.1) com o vetor $y = f(z)z$ segue que

$$\langle x, y \rangle = \left\langle \frac{f(x)}{f(z)}z + \left(x - \frac{f(x)}{f(z)}z \right), f(z)z \right\rangle = \left\langle \frac{f(x)}{f(z)}z, f(z)z \right\rangle = f(x) \langle z, z \rangle = f(x).$$

Além disso, pela desigualdade de Cauchy-Schwartz temos $|f(x)| = |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$, de modo que $\|f\|_{H'} \leq \|y\|$ e

$$\|f\|_{H'} \geq f\left(\frac{y}{\|y\|}\right) = \frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|} = \|y\|.$$

Assim, segue que $\|f\|_{H'} = \|y\|_H$. ■

Conclusão

O Teorema de Hahn-Banach é um importante resultado dentro da Análise Funcional, particularmente no que diz respeito a aplicações em problemas lineares.

Seu resultado garante a existência de extensões lineares para todo o espaço, de funcionais lineares definidos em um subespaço.

Neste trabalho apresentamos o Teorema de Hahn-Banach sob vários aspectos e embora tenha sido exibida apenas uma aplicação são várias as aplicações decorrentes deste resultado.

Assim, o Teorema de Hahn-Banach é de grande utilidade e um dos principais resultados da Análise Funcional.

Referências Bibliográficas

- [1] ALVES, C.O.; **Notas de Aulas: Introdução a Análise Funcional** , UFCG, 2005.
- [2] BACHMAN, G and NARICI, L.; **Functional Analysis**, Dover, New York, 1989.
- [3] BREZIS, H.; **Fucntional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations**, Springer, New York, 2010.
- [4] BRYAN, P.R and YOUNGSON, A.M.; **Linear Functional Analysis**, Secondy Edition, Springer, New York, 2008.
- [5] KREYSZIG, E.; **Introductory Functional Analysis with Applications**, John Wiley e Sons, New York, 1989.
- [6] TAYLOR, A and LAY, D.; **Introductory Functional Analysis with Applications**, John Wiley e Sons, New York, 1980.
- [7] VIEIRA, A. C. et al. **O Teorema de Hahn-Banach**, 1987. (Apostila elaborada pelos alunos do Departamento de Análise da Universidade Federal Fluminense).