Universidade Estadual da Paraíba
Centro de Ciências e Tecnologia
Departamento de Matemática e Computação

Elisângela da Silva Rodrigues

Modelos de Distribuições de Probabilidade para Análise de Dados Compreendidos no Intervalo (0,1): Uniforme e Beta

Campina Grande
Julho de 2011

Elisângela da Silva Rodrigues

Modelos de Distribuições de Probabilidade para Análise de Dados Compreendidos no Intervalo (0,1): Uniforme e Beta

Trabalho apresentado ao Curso de Especialização em Matemática Pura e Aplicada da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento com as exigências legais para obtenção do título de Especialista.

Orientadora:
Prof^{a}. Dr^{a}. Divanilda Maia Esteves

Co-orientador:
Prof. Dr. Iesus Carvalho Diniz

Campina Grande
Julho de 2011

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL-UEPB

R696m Rodrigues, Elisângela da Silva.

Modelos de Distribuições de Probabilidade para Análise de Dados Compreendidos no Intervalo (0,1) [manuscrito]: uniforme e beta / Elisângela da Silva Rodrigues. 2011.

45 f. : il.

Monografia (Especialização em Matemática Pura e Aplicada) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Tecnologias, 2011.

“Orientação: Profa. Dra. Divanilda Maia Esteves, Departamento de Estatística (UEPB)”.

“Co-Orientação: Prof. Dr. Iesus Carvalho Diniz, Departamento de Matemática (UFRN)”.

1. Probabilidade. 2. Função de Distribuição Beta. 3. Índice de Desenvolvimento Humano. I. Título.

22. ed. CDD 519.2

Elisângela da Silva Rodrigues

Modelos de Distribuições de Probabilidade para a Análise de Dados Compreendidos no Intervalo (0,1): Uniforme e Beta

Trabalho apresentado ao Curso de Especialização em Matemática Pura e Aplicada da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento com as exigências legais para obtenção do título de Especialista.

Aprovado em: / /

Banca Examinadora:

Prof^a. Dr^a. Divanilda Maia Esteves
Orientadora

Prof. Dr. Iesus Carvalho Diniz
Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Prof. Dr. Gustavo Henrique Esteves
Universidade Estadual da Paraíba

Dedicatória

A Deus, meu refúgio e minha fortaleza.

Aos meus pais, Lúcia e Luís, que sonharam antes de mim o meu futuro, acreditando na minha capacidade e me incentivando sempre.

Aos meus irmãos, Eriverton e Elidiana, e sobrinhos, Thawan Lucas, Leonardo e Kevin, companheiros de muitas lutas e conquistas.

Ao meu noivo, Josemir Ramos, que durante está jornada sempre foi um apoio imprescindível, compartilhando comigo todas as vitórias, frustrações e alegrias.

Aos meus padrinhos Josafá P. de Almeida e Maria de Lourdes R. de Ameida pelo apoio e orações a mim concebidas.

As minhas cunhadas Mercicleide Ramos e Geovânia Clementino pela torcida e autoestima em mim confiadas.

A minha orientadora, Prof^a. Dr^a. Divanilda Maia Esteves, uma pessoa sublime.

Ao meu co-orientador, Prof. Dr. Iesus Carvalho Diniz, um poço de conhecimentos.

Ao Prof. Dr. João Gil de Luna, um ser ilustre, que sempre será um dos meus ídolos.

E a todos que, de uma forma ou de outra, torceram por mim nesta caminhada.

Agradecimentos

A Deus por me conceder saúde, coragem, perseverança e estímulo para desenvolver este trabalho.

Aos meus pais, irmãos e sobrinhos pelo apoio e compreensão, durante está caminhada, em especial ao meu irmão, Eriverton Rodrigues, pela sua indispensável contribuição.

Ao Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo pelo incentivo e apoio tanto durante as aulas como durante a trajetória deste trabalho.

A todo corpo docente do Departamento de Matemática que me instruíram fazendo de mim uma profissional mais capacitada e qualificada através de seus ensinamentos; superando assim minhas dificuldades.

A todos os funcionários da UEPB, os que contribuiam para manter a Universidade sempre limpa e bem conservada, os da biblioteca, os da Coordenação e do Departamento de Matemática.

Aos meus amigos de um modo geral, que me ajudaram de algum modo durante esta jornada.

Ao Prof. Dr. Iesus Carvalho Diniz, pelos seus ensinamentos.

E por fim, a peça fundamental desta conquista, meu noivo, pela sua paciência, compreensão e contribuição para a realização deste trabalho, por sempre estar do meu lado, me incentivando e levantando minha autoestima.

Resumo

O Índice de Desenvolvimento Humano (IDH) é um índice de caráter universal que serve para quantificar o desenvolvimento humano de uma dada região e é um índice cujos valores estão compreendidos no intervalo (0,1). As distribuições mais utilizadas para modelar variáveis aleatórias que geram resultados no intervalo (0,1) são a distribuição Uniforme e a distribuição Beta. A distribuição uniforme é muito simples, mas a beta por sua vez tem uma grande flexibilidade de ajuste dos seus parâmetros, o que leva a uma gama maior de opções de modelagem dos dados. Apesar de tamanha importância, a teoria da distribuição beta não é encontrada em muito detalhe nos livros básicos de probabilidade. Este trabalho teve como objetivo tratar de maneira mais detalhada e coesa as propriedades da distribuição Beta, bem como verificar o ajuste das séries de dados do Índice de Desenvolvimento Humano (IDH) dos 26 Estados Brasileiros, mais o Distrito Federal, à função de probabilidade Beta, bem como, em um segundo plano, analisar um possível ajuste dos dados com a distribuição Uniforme padrão. Para isto, fez-se uso do teste de aderência de Kolmogorov-Smirnov nas cinco séries de dados (1991, 2000, 2004, 2005 e 2008) do IDH, para analisar o ajuste dos dados quanto às distribuições mencionadas. Vale salientar que não é possível, através de uma análise visual dos dados de uma variável em um histograma para tirar conclusões quanto a melhor função de distribuição que melhor se ajuste aos dados em estudo. Logo, se faz importante a utilização de teste de aderência. Os dados de todas as séries em estudo apresentaram um bom ajuste à função de distribuição de probabilidade Beta, e rejeitando o ajuste para a distribuição Uniforme, dado um nível de significância de 5%.

Palavras chave: Função de distribuição Beta, IDH, Aderência

Abstract

The Human Development Index (HDI) is a universal index used to measure human development in a given region and is an index whose values are within the range (0,1). The distributions used to model random variables that generate results in the interval (0,1) are the uniform distribution and the Beta distribution. The uniform distribution is very simple, but the beta turn has a great flexibility of adjustment of its parameters, which leads to a wider range of options for modeling data. Despite such importance, the theory of beta distribution is not found in much detail in the books of basic probability. This work was in order to deal with more detailed and cohesive properties of the Beta distribution, and check the fit of the data series of the Human Development Index (HDI) of the 26 Brazilian states plus the Federal District, the Beta probability function as well as in the background, one can analyze the data set with uniform distribution pattern. For this, use has been made of the goodness-of-fit test of Kolmogorov-Smirnov test in the five data series (1991, 2000, 2004, 2005 and 2008) the HDI to analyze the fit of the data about the distributions mentioned. It is worth mentioning that it is not possible, through a visual analysis of data from a variable in a histogram to draw conclusions regarding the best distribution function that best fits the data in the study. Soon, it becomes important to use test compliance. Data for all series studied showed a good fit to the probability distribution function Beta, and rejecting the setting for the uniform distribution, given a significance level of 5%.

Keywords: Beta distribution function, HDI, Compliance

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

1 Introdução

O uso de funções densidade de probabilidade está diretamente ligado à natureza dos dados a que ela se relaciona. Algumas têm boa capacidade de estimação para pequeno número de dados, outras requerem grande série de observações. Devido ao número de parâmetros de sua equação, algumas podem assumir diferentes formas, enquadrando-se em um número maior de situações, ou seja, são mais flexíveis. Desde que respeitado o aspecto da representatividade dos dados, as estimativas dos seus parâmetros, para uma determinada região, podem ser estabelecidas como de uso geral, sem prejuízo da precisão na estimação da probabilidade (CATALUNHA et al., 2002).

Em inúmeras situações o pesquisador pode se deparar com informações de variáveis que possuem um comportamento em determinado intervalo de variação, em particular pode-se citar casos em que estes intervalos são do tipo proporções, índices ou taxas, ou seja, variações no intervalo (0,1). Como por exemplo, a proporção de pessoas com determinada doença, proporção de pessoas de determinada raça, porcentagem da renda gasta com alimentação/lazer/telefonia, ou até mesmo indicadores sociais (IDH - Índice de desenvolvimento humano, TMI - Taxa de mortalidade infantil), etc.

Kieschnick e McCullough (2003) separam esse tipo de variável em duas categorias. Os dados da primeira categoria podem ser modelados usando uma distribuição contínua, pois estão definidos no intervalo aberto (0,1), enquanto que na segunda, são definidos no intervalo fechado [0,1] e seguem uma distribuição mista (MIYASHIRO, 2008).

A distribuição uniforme pode ser definida de uma forma geral no intervalo (a,b) e também de uma forma padrão restrita ao intervalo (0,1). Está última, por sua vez, é um caso particular da distribuição beta quando $\alpha = \beta = 1$, que será abordada com maiores detalhes em nosso estudo.

Sabe-se que a distribuição beta é uma das mais usadas para modelar experimentos aleatórios que produzem resultados no intervalo (0,1) por conta da grande flexibilidade de ajuste de seus parâmetros. Isto a torna uma das mais flexíveis famílias de distribuições (BRITO, 2009).

Ferrari e Cribari-Neto (2004) propuseram o modelo de regressão beta para situações em que a variável resposta é contínua e restrita ao intervalo (0,1) e está relacionada a outras variáveis de uma estrutura de regressão. O modelo proposto é baseado na suposição de que a variável resposta tem distribuição beta utilizando uma parametrização da lei beta que é indexada pela média e um parâmetro de dispersão (MIYASHIRO, 2008).

Este trabalho visa descrever, através de uma abordagem matemática mais detalhada, algumas propriedades da distribuição de probabilidade Beta, pois verificamos que não há muitos trabalhos na área que exponha de forma objetiva e simples algumas dessas propriedades.

Na literatura, a distribuição beta é apresentada de duas formas. Uma denominada de fórmula geral, quando se refere a variáveis pertencentes a um intervalo qualquer do tipo (a,b), e outra conhecida como forma padrão, onde esta por sua vez trata variáveis definidas no intervalo (0,1) (VIALI, 2011). No referido trabalho será abordada esta última forma da distribuição Beta. Vale ressaltar que a forma padrão é a mais utilizada devido a sua praticidade de aplicação.

O referido trabalho está estruturado da seguinte forma: no Capítulo 2 propôs-se uma breve revisão literária da distribuição beta no que diz respeito à sua origem e aplicações em diversas áreas do conhecimento. Em seguida é feito de forma mais abrangente um estudo referente à teoria e a abordagem matemática da referida distribuição, com o intuito de contribuir para futuras pesquisas bibliográficas envolvendo algumas definições e posteriormente será abordado o cálculo dos seus momentos e da variância, bem como a estimação dos parâmetros (α, β) da distribuição utilizando o método dos momentos. Vale ressaltar que a estimação dos parâmetros pelo método de máxima verossimilhança não possui uma forma analítica explícita. No entanto existem propostas, através de métodos numéricos de maximização, por exemplo, o método escore de Fisher, para encontrar os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros da distribuição beta. Para maiores detalhes ver Reitman, 2007. Além disso, serão expostas algumas definições e propriedades da distribuição uniforme (0,1) a qual será feito uma analogia a distribuição beta, no que diz respeito a aderência das mesmas aos dados do Índice de Desenvolvimento Humano (IDH) brasileiro para os referidos anos observados. No Capítulo 3 fez-se uma aplicação com o objetivo de ilustrar a versatilidade desta distribuição. Apresentamos no Capítulo 4 os resultados e discussões a respeito da série em estudo. E por fim, no Capítulo 5, serão expostas as considerações finais.

2 Fundamentação Teórica

2.1 Leonhard Euler

Leonhard Euler[1] nasceu na cidade de Basiléia em 15 de abril de 1707, foi o primeiro filho de Paulus Euler e Margaretha Brucker. Paulus Euler veio de uma família de artesãos, enquanto Margaretha Brucker era derivada de uma família de estudiosos. Paulus Euler era um vigário na igreja de St. Jakob e apesar de teólogo, tinha interesses em matemática e fez cursos do famoso Jakob Bernoulli, dois anos na universidade.

Cerca de um ano e meio depois do nascimento de Leonhard, a família mudou-se para Riehen, um subúrbio da Basiléia, onde Paulus Euler assumiu o cargo de pastor protestante na paróquia local. Ele serviu nessa capacidade de fidelidade e devoção pelo resto de sua vida (GAUTSCHI, 2008).

As primeiras educações em Matemática de Euler foi em sua casa. Com aproximadamente oito anos de idade, Euler foi enviado para a escola de latim em Basiléia. Em 1720, aos treze anos, o que não era incomum para época, Euler foi matriculado na Universidade de Basiléia, ensinado por Johann Bernoulli, irmão mais novo de Jakob Bernoulli já então falecido. Euler, logo chamou a atenção de Johann Bernoulli por seus estudos matemáticos, o qual lhe ofereceu ajuda nas tardes de sábado.

Em 1771, já quase sem visão total do olho direito, Euler se submeteu a uma cirurgia, agora no olho esquerdo. Esta por sua vez, bem sucedida, porém levou a formação de um abscesso, logo destruíu a visão do olho esquerdo de Euler quase inteiramente. Ainda em 1771, sua casa de madeira foi queimada durante o grande incêndio de São Petersburgo.

Em 1773, Euler perde sua esposa Katharina Gsell. Para não ser dependente de seus filhos, devido estar quase cego, Euler se casou três anos mais tarde. Mesmo com todos esses trágicos acontecimentos, Euler ainda manteve-se matematicamente ativo como sempre. Neste período Euler escreveu inúmeros trabalhos, entre eles seus dois ”best-sellers,”cartas a uma princesa

[1]Leonhard Euler (1707 - 1783)

alemã e Álgebra. Devido a sua visão, Euler para escrever essas obras, contou com a ajuda de Niklaus Fuss, um compatriota de Basel e seu filho, Johann Albrecht.

Leonhard Euler morreu de derrame em 18 setembro de 1783 enquanto brincava com um de seus netos. Fórmulas que ele tinha escrito em dois de seus grandes ardósias para descrever a matemática subjacente ao vôo de balão realizadas em 05 de junho de 1783, pelos irmãos Montgolfier, em Paris, foram encontrados no dia da sua morte. Elaborado e preparado para publicação por seu filho, Johann Albrecht, que se tornou o último artigo de Euler, que apareceu em 1784(GAUTSCHI, 2008).

2.2 Integrais de Euler

Euler introduziu dois tipos de funções, a função beta, também chamada de integrante Euler do primeiro tipo, que é uma função especial definida por

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}du, \tag{2.1}$$

e a função gama, denominada integrante de Euler do segundo tipo, dada por

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-u}u^{\alpha-1}du. \tag{2.2}$$

Para inteiros positivos α e β, podemos escrever as funções acima citadas como sendo:

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)! \tag{2.3}$$

e

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} = \frac{(\alpha-1)!(\beta-1)!}{(\alpha+\beta-1)!}.$$

2.2.1 Função Beta

Sejam $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ números reais. A função Beta, escrita como $B(\alpha,\beta)$, $B : R_+^2 \to R_+$, e é definida pela equação (2.1).

Propriedades da Função Beta

i) A função Beta é simétrica, ou seja, $B(\alpha,\beta) = B(\beta,\alpha)$.

ii) A função Beta pode ser escrita utilizando a função Gamma ($\Gamma(.)$), onde

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

iii) $B(\alpha,\beta) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (sen\theta)^{2\alpha-1}(cos\theta)^{2\beta-1}d\theta, \alpha > 0, \beta > 0.$

iv) $B(\alpha,\beta) = \int_0^{\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}}dt, \alpha > 0, \beta > 0.$

v) $B(\alpha,\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\begin{pmatrix} n-\beta \\ n \end{pmatrix}}{\alpha+n}$

vi) $B(\alpha,\beta) = \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{\alpha\beta}{n(\alpha+\beta+n)}\right)^{-1}$

vii) $B(\alpha,\beta)(t \longmapsto t_+^{\alpha+\beta-1}) = (t \to t_+^{\alpha-1}) * (t \to t_+^{\beta-1}) \quad \alpha \geq 0, \beta \geq 0$ onde $t \longmapsto t_+^{\alpha}$ é uma *função de potência truncada* e (*) denota *convolução*. No entanto, essas definições fogem ao escopo deste trabalho.

viii) $B(\alpha,\beta)\cdot B(\alpha+\beta,1-\beta) = \frac{\pi}{\alpha sen(\pi\beta)}$

Algumas dessas identidades, por exemplo, viii pode ser aplicada para derivar o volume de n-bolas dimensionais em coordenadas cartesianas (Wikipedia, 2011)[3].

Essas propriedades não serão demonstradas, pois as mesmas requerem conhecimentos não triviais de matemática.

2.2.2 Função Gama

A função gama $\Gamma : R^+ \to R$ é definida pela equação (2.2).

A função gama ($\Gamma(.)$) é uma extensão da função fatorial, com seu argumento deslocado para baixo por 1, nos reais e nos números complexos. Isto é, se α for um número inteiro positivo, então $\Gamma(\alpha)$ reduz-se a equação (2.3). Pela Figura 1 é possível observar graficamente o comportamento da função gama.

Embora a função gama seja definida para todos os números complexos, exceto não-inteiros positivos, é definida através de uma integral imprópria que converge apenas para números complexos, com uma parte real positiva.

A função gama é um componente de distribuição de probabilidade, funções diversas, e como tal, é aplicável no domínio da probabilidade e estatística, bem como a análise combinatória.

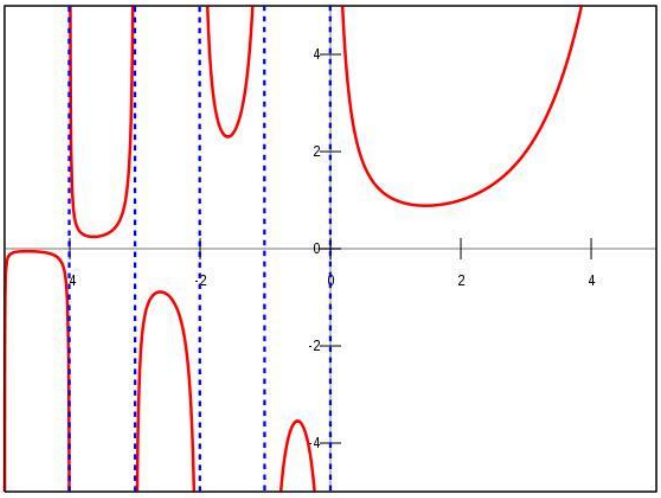

Figura 2.1: Gráfico da função gama.

Propriedades da Função Gama

A função Gama possui as seguintes propriedades:

i) $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$;

ii) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$;

iii) $\Gamma(1) = 1$;

iv) $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$;

v) $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)(\alpha-2)\cdots r\Gamma(r) \quad \forall\alpha = n+r, \quad n \in N, \quad r > 0$;

vi) $\Gamma(n) = (n-1)! \quad \forall n \in N^*$.

Demonstrações:

i) Para demonstrar esse resultado, iremos usar integração por partes.

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-u}u^\alpha du.$$

Fazendo,

$$x = u^\alpha \Rightarrow dx = \alpha u^{\alpha-1}$$
$$dy = e^{-u}du \Rightarrow -e^{-u}$$

Logo,

$$\Gamma(\alpha+1) = -u^\alpha e^{-u}|_0^\infty \int_0^\infty -e^{-u}\alpha u^{\alpha-1}du = 0+\alpha\int_0^\infty e^{-u}u^{\alpha-1}du = \alpha\Gamma(\alpha).$$

Como queríamos demonstrar.

ii) Note que,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} e^{-u}u^{-\frac{1}{2}}du.$$

Usando a seguinte transformação de variável:

$$u = \frac{t^2}{2}$$

então,

$$du = tdt$$

$$u = 0 \Rightarrow t = 0$$

$$u \to \infty \Rightarrow t \to \infty,$$

logo,

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{\infty} \left(\frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{t^2/2}}\right) tdt = \sqrt{2}\int_0^{\infty} e^{-t^2/2}dt = \sqrt{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Ou seja,

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}.$$

Como queríamos demonstrar.

iii) Note que,

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-u}du = 1.$$

sendo esse integrando a densidade de uma distribuição $Exp(1)$, tendo, portanto, norma 1.

iv)

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-u}u^{\alpha-1}du = 1.$$

Integrando por partes, temos:

$$\Gamma(\alpha) = -e^{-u}u^{\alpha-1}|_0^{\infty} + (\alpha-1)\int_0^{\infty} e^{-u}u^{\alpha-2} = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1).$$

A propriedade (v) se prova por indução, a partir da (iv), da mesma forma que (vi) se utiliza de (v) e (ii).

2.2.3 Relações entre as funções Beta e Gama

Sejam $\alpha > 0$ e $\beta > 0$. Então,

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}. \tag{2.4}$$

Demonstração: Inicialmente, tem-se que

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) = \int_0^{\infty} e^{-u}u^{\alpha-1}du \int_0^{\infty} e^{-v}v^{\beta-1}dv = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} u^{\alpha-1}v^{\beta-1}e^{-(u+v)}dudv.$$

Tome $(u,v) \to (x,y)$, onde $x = u+v$ e $y = \frac{u}{(u+v)}$. Segue que

$$y = \frac{u}{u+v} \Rightarrow y = \frac{u}{x} \Rightarrow u = xy.$$

e também

$$x = u+v \Rightarrow x = xy+v \Rightarrow v = x-xy \Rightarrow v = x(1-y).$$

Fazendo $\frac{\partial x}{\partial v}$ e $\frac{\partial y}{\partial u}$, obtemos

$$x = u+v \Rightarrow \frac{dx}{dv} = 1 \Rightarrow dx = dv$$

e

$$y = \frac{u}{x} \Rightarrow \frac{dy}{du} = \frac{1}{x} \Rightarrow xdy = du.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) &= \int_0^{\infty}\int_0^{1} (xy)^{\alpha-1}[x(1-y)]^{\beta-1}e^{-y}xdydx \\ &= \int_0^{\infty} x^{\alpha+\beta-1}e^{-x}dx \int_0^{1} y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}dy \\ &= \Gamma(\alpha+\beta)B(\alpha,\beta) \Rightarrow B(\beta,\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.\end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar.

Portanto, para calcular valores da função Beta, basta saber os valores da função gama, acabando com a possível necessidade de novas tabelas para a função Beta. Note que a riqueza da família de distribuições de probabilidade gama estava concentrada nos pequenos valores, pois os valores caudais sempre se comportavam de acordo com o expoente negativo. O caso da Beta é bem diferente: o suporte é limitado a $(0,1)$, mas o estudo assintótico da respectiva função de densidade não só é interessante como fundamental para a interpretação de algumas das principais propriedades teóricas (GNERI et al., 2002).

2.3 Distribuição Beta

Na Teoria das Probabilidades, a distribuição beta é uma distribuição de probabilidade contínua definida no intervalo $(0,1)$ e definida por dois parâmetros positivos, geralmente denotados por α e β. Tal distribuição é usada freqüentemente para descrever a distribuição de valores de probabilidade desconhecidos, como por exemplo, a probabilidade de sucesso em uma distribuição Binomial ou distribuição de Bernoulli. Na verdade, a distribuição beta é a priori das distribuições binomial e de Bernoulli. A distribuição beta é um caso especial da distribuição de Dirichlet com apenas dois parâmetros, e a beta é conjugada com a distribuição binomial e de Bernoulli, exatamente da mesma forma que a distribuição de Dirichlet é conjugada com a distribuição multinomial e distribuição categórica (Wikipedia, 2011)[1].

Em Estatística bayesiana, a distribuição beta pode ser vista como a probabilidade a posteriori do parâmetro p de uma distribuição binomial, depois de observar $\alpha - 1$ sucessos (com probabilidade p de sucesso) e $\beta - 1$ falhas (com probabilidade $1 - p$ de falha). Outra forma de expressar isso é que a colocação de uma distribuição prévia de Beta (α, β) sobre o parâmetro p de uma distribuição binomial é equivalente a adição de $\alpha - 1$ pseudo-observações de "sucesso"e $\beta - 1$ pseudo-observações de "falha"para o número real de sucessos e fracassos observados. Se α e β é maior que 1, este tem o efeito de suavizar a distribuição dos parâmetros, garantindo que uma massa de probabilidade positiva seja atribuída a todos os parâmetros, mesmo quando não há observações reais correspondentes a esses parâmetros observados (Wikipedia, 2011)[2].

Se α e β operam em conjunto o efeito disso é que eles funcionam como um parâmetro de concentração, ou seja, em teoria da Probabilidade e Estatística, um parâmetro de concentração é um tipo especial de parâmetro numérico de uma família paramétrica de distribuições de probabilidades. Parâmetros de concentração ocorrem em conjunto com distribuições cujo domínio é uma distribuição de probabilidade, tais como a distribuição simétrica de Dirichlet (Wikipedia, 2011)[1].

A distribuição beta é uma das mais usadas para modelar experimentos aleatórios que produzem resultados no intervalo $(0, 1)$, dada a grande flexibilidade de ajuste de seus parâmetros. Muitas das distribuições finitas encontradas na prática podem ser facilmente transformadas na distribuição beta padronizada (BRITO, 2009).

Algumas áreas e autores que utilizaram a distribuição beta.

i) Na engenharia, Bury (1999).

ii) Hidrologia, Janardan e Padmanabhan (1986).

iii) Reprodução bovina, McNally (1990).

iv) Radiação solar, Graham e Hollands (1990) e Milyutin e Yaromenko (1991).

v) Sinais de radar, Maffet e Wackerman (1991).

vi) Transmissão de HIV, Wiley et al. (1989).

vii) Modelagem, Johnson et al. (1995b, p. 235).

2.3.1 Descrição

A distribuição Beta é bastante versátil para representar os resultados como proporções ou probabilidades. Está definida no intervalo contínuo entre 0 e 1. Existem dois parâmetros α e β que trabalham em conjunto para determinar se a distribuição possui o valor com maior frequência, ou seja, a moda, no interior do intervalo de unidade e se ela é simétrica.

No modelo, os parâmetros α e β definem a forma da distribuição. Se $\alpha = \beta$, a distribuição é simétrica, se $\alpha > \beta$, a assimetria é negativa e no caso de $\alpha < \beta$, sua assimetria é positiva. Como pode ser observado na Figura 2.

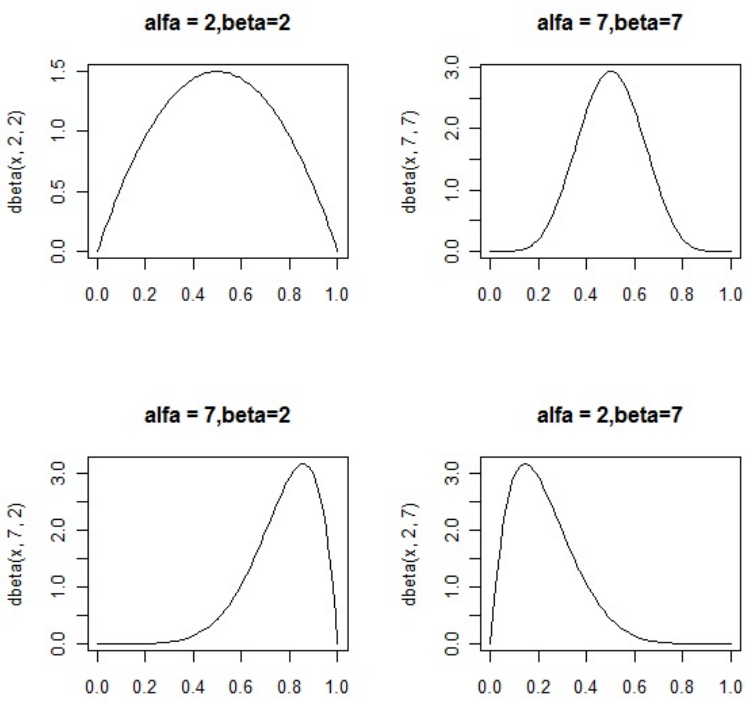

Figura 2.2: Curvas de densidade da distribuição beta para diversos valores de α e β.

Observação: A distribuição U(0,1) é um caso particular da distribuição Beta, quando $\alpha = \beta = 1$. A densidade beta é apropriada para modelar proporções, por causa do seu domínio (o intervalo $(0,1)$) e também pela variedade de forma que a densidade pode assumir, de acordo com os valores especificados de α e β.

2.3.2 Definição Matemática

Uma variável aleatória X tem distribuição Beta com parâmetros $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ se sua função de densidade de probabilidade tiver a seguinte forma:

$$f(x;\alpha,\beta) = \begin{cases} \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)}, & 0 < x < 1 \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

onde $B(.)$ é a função beta. A função beta, aparece como uma constante de normalização para garantir que a probabilidade total integra a unidade. Vale salientar que a partir desta seção passaremos a utilizar x como o elemento do domínio da função, e não u como nas seções anteriores.

Notação: $X \sim Beta(\alpha,\beta)$

Demonstração

Para que $f(x;\alpha,\beta)$ seja uma $f.d.p$ provaremos que:

i) $f(x;\alpha,\beta) \geq 0$

ii) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x;\alpha,\beta)dx = 1$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x;\alpha,\beta)dx &= \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)}dx \\ &= \frac{1}{B(\alpha,\beta)}\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx \\ &= \frac{1}{B(\alpha,\beta)}B(\alpha,\beta) = 1 \end{aligned}$$

2.3.3 Função de Distribuição

A função de distribuição é dada por

$$F(x;\alpha,\beta) = \frac{B_x(\alpha,\beta)}{B(\alpha,\beta)} = I_x(\alpha,\beta),$$

onde $B_x(\alpha,\beta)$ é a função Beta Incompleta. Essa função substitui a integral definida da Beta por uma indefinida. Assim $B_x(\alpha,\beta)$ é dada por:

$$B_x(\alpha,\beta) = \int_0^x t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt.$$

Enquanto que $B(\alpha,\beta)$ é dada por:

$$B(\alpha,\beta)=\int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}du=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

A função $I_x(\alpha,\beta)$ é denominada de Beta Incompleta Regularizada.

2.3.4 Momentos da Beta

Seja X uma variável aleatória contínua com distribuição $Beta(\alpha,\beta), min(\alpha,\beta)>0$. Então sua esperança e variância são respectivamente:

i) $E(X)=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$

ii) $Var(X)=\frac{\beta\alpha}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^2}$

Demonstrações

i) $E(X)=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$

A esperança de uma variável aleatória contínua é dada por:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx.$$

Vamos calcular o n-ésimo momento:

$$\begin{aligned}E(X^n)&=\int_0^1 x^n\frac{1}{B(\alpha,\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx\\&=\int_0^1\frac{1}{B(\alpha,\beta)}x^{n+\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx\\&=\frac{1}{B(\alpha,\beta)}\int_0^1 x^{n+\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx\end{aligned}$$

Note que

$$\int_0^1 x^{n+\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx=B(n+\alpha,\beta)$$

Logo

$$E(X)=\frac{B(n+\alpha,\beta)}{B(\alpha,\beta)}. \tag{2.5}$$

Note ainda que, de acordo com a equação (2.15) e também

$$B(n+\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(n+\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(n+\alpha+\beta)},$$

então

$$\begin{aligned}E(X^n) &= \frac{B(n+\alpha+\beta)}{B(\alpha,\beta)} = \frac{\frac{\Gamma(n+\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(n+\alpha+\beta)}}{\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}}\\ &= \frac{\Gamma(n+\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(n+\alpha+\beta)}\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\\ &= \frac{\Gamma(n+\alpha)\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(n+\alpha+\beta)\Gamma(\alpha)}.\end{aligned}$$

Fazendo $n = 1$, teremos

$$\begin{aligned}E(X) &= \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)\Gamma(\alpha)}\\ &= \frac{\alpha\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\beta)}{\alpha+\beta\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha)}\end{aligned}$$

e consequentemente

$$E(X) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}.$$

Como queríamos demonstrar.

Note também que se $n = 2$, teremos

$$\begin{aligned}E(X^2) &= \frac{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)\Gamma(\alpha)}\\ &= \frac{(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+\beta)}{(\alpha+\beta+1)\Gamma(\alpha+\beta+1)\Gamma(\alpha)}\\ &= \frac{(\alpha+1)\alpha\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\beta)}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha)}\\ &= \frac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)}.\end{aligned}$$

ii) É possível calcular a variância de uma viriável aleatória a partir da forma

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Neste caso,

$$
\begin{aligned}
Var(X) &= \frac{(\alpha)\Gamma(\alpha+1)}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)} - \frac{\alpha^2}{(\alpha+\beta)^2} \\
&= \frac{(\alpha)\Gamma(\alpha+1)(\alpha+\beta) - \alpha^2(\alpha+\beta+1)}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} \\
&= \frac{\alpha^3+\alpha^2\beta+\alpha^2+\alpha\beta+-\alpha^3-\alpha^2\beta-\alpha^2}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} \\
&= \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}.
\end{aligned}
$$

como queríamos demonstrar.

Basicamente, a definição 2.3.2 nos diz que a assimetria de uma distribuição Beta, que ocorre quando $\alpha \neq \beta$ tem consequências também no seu valor esperado: quanto maior o valor relativo de α comparado a β, mais próximo de um estará a esperança. Por outro lado, a assimetria da densidade de uma variável aleatória Beta não influencia na sua variância, cujo valor é invariante à permutação de α e β. Além disso, quanto maiores os valores de α e β, menor será a respectiva variância.

2.3.5 Estimando os parâmetros da Distribuição Beta

Para estimação dos parâmetros de uma distribuição, pode-se usar algumas técnicas já difundidas na literatura, como por exemplo, o método dos momentos, estimadores de máxima verossimilhança, estimadores de Bayes e algoritmo EM (Expectância-Maximização). Na seção a seguir serão obtidos os estimadores dos parâmetros da distribuição Beta utilizando o método dos momentos.

Método dos momentos

Este talvez seja o mais antigo método para se encontrar estimadores pontuais, datando, pelo menos, do século XIX, remontando a Karl Pearson. Ele tem a virtude de ser bastante simples em sua utilização e quase sempre gera algum tipo de estimativa. Em muitos casos, infelizmente, este método gera estimadores que precisam ser aperfeiçoados. No entanto, este é um bom ponto para começar, quando outros métodos se mostram intratáveis (CASELLA e BERGER, 2010).

Sejam,

$$
m_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^r, \quad r \geq 1,
$$

o r-ésimo momento amostral de uma amostra aleatória $X_1, X_2, \cdots X_n$ e

$$\mu_r = E(X^r), \quad r \geq 1,$$

o r-ésimo momento populacional. O método dos momentos consiste na obtenção de estimadores para $\theta = \theta_1, \theta_2, \cdots \theta_k$, resolvendo as equações,

$$m_r = \mu_r, \quad r = 1, 2, \cdots k.$$

Estimadores dos parâmetros α e β

Temos dois parâmetros, α e β, então formaremos um sistema de equação com os dois primeiros momentos:

$$\begin{cases} E(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x} \\ E(X^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{cases}$$

equivalentemente,

$$\begin{aligned} E(X^2) - [E(X)]^2 &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - [E(X)]^2 \\ Var(X) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - nE(X)^2 \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - E(X)^2 \end{aligned}$$

Da equação (2.6)

$$Var(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

onde será usada a notação,

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2.$$

Sabemos que

$$E(X) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

$$E(X^2) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)}$$

e também

$$S^2 = Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2,$$

logo,

$$E(X^2) = S^2 + [E(X)]^2$$

$$\frac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)} = S^2 + \bar{x}^2 \Rightarrow \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\frac{(\alpha+1)}{(\alpha+\beta+1)} = S^2 + \bar{x}^2$$

$$\bar{x}\frac{(\alpha+1)}{(\alpha+\beta+1)} = S^2 + \bar{x}^2.$$

Note que,

$$E(X) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} = \bar{x} \Rightarrow \alpha+\beta = \frac{\alpha}{\bar{x}},$$

então,

$$\frac{\alpha+1}{\frac{\alpha}{\bar{x}}+1} = \frac{S^2+\bar{x}^2}{\bar{x}} \Rightarrow \frac{\alpha}{\frac{\alpha+\bar{x}}{\bar{x}}} = \frac{S^2+\bar{x}^2}{\bar{x}}$$

$$\alpha+1 = \frac{\alpha+\bar{x}}{\bar{x}}\frac{S^2+\bar{x}^2}{\bar{x}} \Rightarrow \alpha+1 = \frac{(\alpha+\bar{x})(S^2+\bar{x}^2)}{\bar{x}^2}$$

$$\alpha = \frac{(\alpha+\bar{x})(S^2+\bar{x}^2)}{\bar{x}^2} - 1 \Rightarrow \alpha = \frac{(\alpha+\bar{x})(S^2+\bar{x}^2)-\bar{x}^2}{\bar{x}^2}$$

$$\alpha = \frac{\alpha S^2+\alpha\bar{x}^2+S^2\bar{x}+\bar{x}^3-\bar{x}^2}{\bar{x}^2} = \frac{\alpha S^2+\alpha\bar{x}^2}{\bar{x}^2} + \frac{S^2\bar{x}+\bar{x}^3-\bar{x}^2}{\bar{x}^2}$$

$$\alpha - \frac{\alpha S^2+\alpha\bar{x}^2}{\bar{x}^2} = \frac{S^2\bar{x}+\bar{x}^3-\bar{x}^2}{\bar{x}^2} \Rightarrow \frac{\alpha\bar{x}^2-\alpha S^2-\alpha\bar{x}^2}{\bar{x}^2} = \frac{S^2\bar{x}+\bar{x}^3-\bar{x}^2}{\bar{x}^2}$$

$$\alpha\bar{x}^2-\alpha S^2-\alpha\bar{x}^2 = S^2\bar{x}+\bar{x}^3-\bar{x}^2 \Rightarrow -\alpha S^2 = S^2\bar{x}+\bar{x}^3-\bar{x}^2$$

$$\alpha = \frac{\bar{x}^2-\bar{x}^3-S^2\bar{x}}{S^2} \Rightarrow \alpha = \frac{\bar{x}^2-\bar{x}^3}{S^2} - \bar{x}$$

$$\alpha = \bar{x}\left[\frac{\bar{x}-\bar{x}^2}{S^2} - 1\right]$$

e portanto o estimador de α pelo método dos momentos é dado por

$$\hat{\alpha} = \bar{x}\left[\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{S^2} - 1\right]$$

Assim, é possível encontrar o estimador de β substituindo o estimador de α na seguinte equação

$$E(X) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} = \bar{x},$$

logo,

$$\beta = \frac{\alpha}{\bar{x}} - \alpha \Rightarrow \beta = \frac{\bar{x}\left[\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{S^2}-1\right]}{\bar{x}} - \bar{x}\left[\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{S^2} - 1\right]$$

$$\beta = \left[\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{S^2} - 1\right] - \bar{x}\left[\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{S^2} - 1\right].$$

Colocando a expressão $\left[\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{S^2}-1\right]$ em evidência, tem-se o estimador do parâmetro β dado por

$$\hat{\beta}=(1-\bar{x})\left[\bar{x}\frac{(1-\bar{x})}{S^2}-1\right].$$

2.3.6 Família de Distribuições Beta

O fato da família de distribuições Beta poder representar tantos comportamentos diferentes para variáveis aleatórias de suporte limitado a torna muito atrativa em diversos problemas reais. Outras das suas características a colocam como uma das principais distribuições da Estatística Bayesiana.

2.3.7 Propriedades relacionadas aos comportamentos modais

Segundo Gneri et. al (2002), nos gráficos da Figura 2.3, nota-se que elementos da família de distribuição Beta têm um entre os seguintes possíveis comportamentos modais:

a) quando $\alpha=\beta>1$, a distribuição é unimodal, sendo este ponto sempre $\frac{1}{2}$;

b) quando $1>\alpha<\beta$, a distribuição é unimodal, sendo a sua moda estritamente menor do que $\frac{1}{2}$;

c) quando $1>\beta<\alpha$, a distribuição é unimodal, sendo a sua moda estritamente maior do que $\frac{1}{2}$; e

d) quando $min(\alpha,\beta)\leq 1$, o comportamento modal não representa um verdadeiro valor-padrão da respectiva distribuição.

Portanto, a Figura 2.3 ilustra que valores pequenos de α ou β (menores que 1) geram assíntotas ilimitadas em 0 ou 1, respectivamente, sendo uma de suas conseqüências a inexistência de moda para distribuições baseadas nesses parâmetros. Problemas sérios para a simulação também ocorrem para as distribuições cujo $min(\alpha,\beta)<1$. Quando o $min(\alpha,\beta)\geq 1$, nota-se que não existem problemas assintóticos e os parâmetros definem as condições de assimetria e o valor máximo da densidade.

Observação: Os comportamentos modais são propriedades interessantes e fáceis de enxergar graficamente, mas não tão simples de demonstrar. Essas demonstrações devem ser feitas estudando os pontos críticos da função (os que se obtem derivando e igualando a zero).

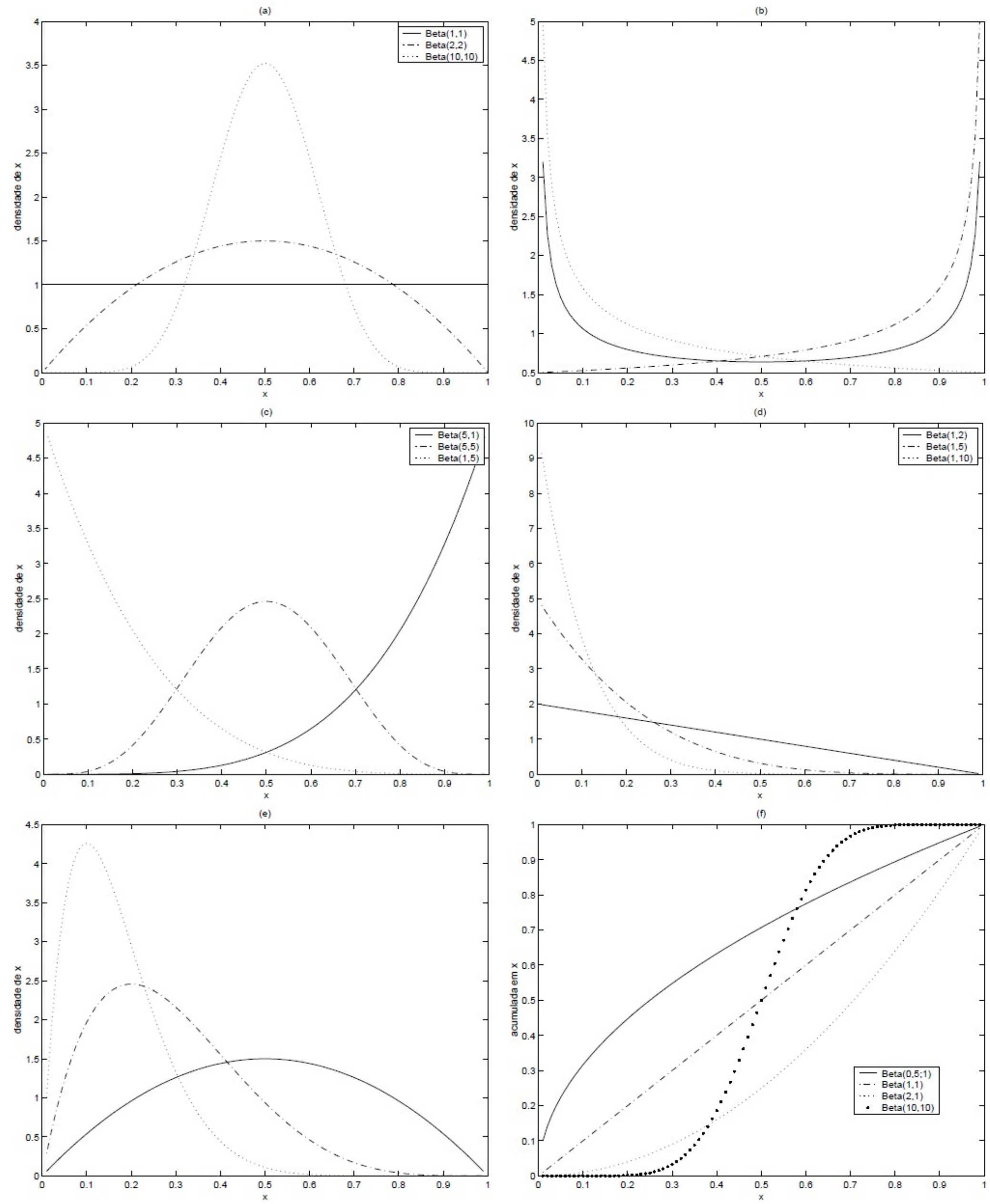

Figura 2.3: Família de Distribuição Beta.

2.4 Distribuição uniforme

2.4.1 Descrição

A distribuição uniforme é uma distribuição contínua, utilizada para modelar a ocorrência de eventos cuja probabilidade é constante em intervalos de mesma dimensão. Os trabalhos de Bayes e Laplace já continham referências a essa distribuição, mas é muito provável que o seu uso seja anterior a essas épocas. Por ter a probabilidade constante para intervalos de mesma amplitude, pode servir como referência ou modelo aproximado nos casos onde a verdadeira distribuição não é conhecida. Outra aplicação de grande importância é servir de base para muitos processos de geração de valores de variáveis aleatórias em estudos de simulação (GALILEU, 2011). A simulação tem sido, desde o advento dos computadores digitais, uma importante ferramenta de pesquisa: faz-se fundamental em problemas inferenciais complexos ou em análise de sistemas avançados. Não é, nem pretende ser, substituto para resultados teóricos. Pretende, na realidade, indicar possíveis caminhos para as soluções teóricas quando essas são por demais caras ou inviáveis (GNERI et. al, 2002).

2.4.2 Definição Matemática

Uma variável aleatória X tem distribuição Uniforme-Padrão no intervalo $(0,1)$ se sua função de densidade de probabilidade é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

Notação : $X \sim U(0,1)$.

O termo uniforme padrão se justifica pela proposição a seguir:

Proposição (Transformação Linear da Uniforme): Seja X uma variável aleatória $U(0,1)$. Defina uma outra v.a. $Y = (\beta - \alpha)X + \alpha$, onde $\alpha < \beta, \alpha, \beta \in R$. Então, Y também tem distribuição uniforme, no intervalo (α, β). Segundo Gneri et. al (2002), o mais importante na proposição é o fato de que uma transformação linear em uma variável aleatória uniforme mantém a característica principal (uniformidade) da distribuição, isto é, podemos dizer que a classe de variáveis uniformes é fechada com relação a transformações lineares.

Demonstração: Para que seja uma f.d.p provaremos que:

(i) $f(x) \geq 0$.

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

Note que, $f(x)$ é uma função de densidade de probabilidade, já que,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{0}^{1} 1dx = 1.$$

Segundo Ross (2010), como $f(x) > 0$ somente quando $x \in (0,1)$, tem-se como consequência que X deve assumir um valor no intervalo $(0,1)$. Também, como $f(x)$ é constante para $x \in (0,1), X$ tem a mesma probabilidade de estar na vizinhança de qualquer valor em $(0,1)$. Para verificar essa afirmação, observe que, para $0 < \alpha < \beta < 1$,

$$P(\alpha \leq x \leq \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \beta - \alpha..$$

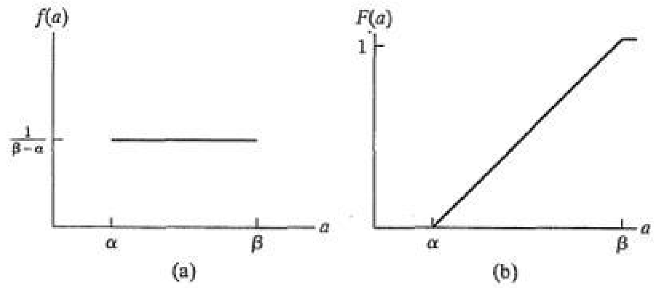

Figura 2.4: Gráfico de (a) $f(a)$ e (b)$F(a)$ para uma variável aleatória uniforme (α, β).

Em outras palavras, a probabilidade de que X esteja em qualquer subintervalo particular de $(0,1)$ é igual ao comprimento desse subintervalo (ROSS, 2010).

Segundo Ross (2010), diz-se que X é uma variável aleatória uniforme no intervalo (α, β) se a função de densidade de probabilidade de X é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta-\alpha}, & \alpha < x < \beta \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

Demonstração

Analogamente a Uniforme-Padrão temos que, $f(x)$ no intervalo (α, β) é uma f.d.p se:

(i) $f(x) \geq 0$.

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

Então, $f(x)$ é uma função de densidade de probabilidade, pois,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\beta - \alpha} dx = \frac{1}{\beta - \alpha} x|_{\alpha}^{\beta} = \frac{\beta - \alpha}{\beta - \alpha} = 1.$$

Na Figura 2.4 é possível ver o comportamento dos gráficos da função densidade de probabilidade e da função de distribuição acumulada de uma distribuição uniforme.

2.4.3 Função de Distribuição

Como $F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$, segundo Ross (2010) a função de distribuição de uma variável aleatória uniforme no intervalo (α, β) é dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq \alpha \\ \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}, & \alpha < x < \beta \\ 1, & x \geq \beta \end{cases}$$

No caso da $U(0,1)$, temos que

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x, & 0 < x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

2.4.4 Momentos da Uniforme

Seja X uma variável aleatória contínua com distribuição Uniforme $(0,1)$. Segundo Farias (2008), a esperança e variância são dadas respectivamente por:

(i) $E(X) = \frac{\alpha+\beta}{2}$.

(ii) $Var(X) = \frac{(\beta-\alpha)^2}{12}$.

A seguir as demonstrações da esperança (1^0 momento), da esperança de X^2 (2^0 momento) e da variância. As mesmas podem ser encontradas em Farias (2008).

(i) Das propriedades da esperança e das características da densidade uniforme, sabemos que $E(X)$ é o ponto médio do intervalo (α, β), ou seja,

$$E(X) = \alpha + \frac{\beta - \alpha}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Usando a integral, tem-se que:

$$E(X) = \int_{\alpha}^{\beta} x \frac{1}{\beta - \alpha} dx = \frac{1}{\beta - \alpha} \frac{x^2}{2} |_{\alpha}^{\beta} = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2(\beta - \alpha)} = \frac{(\beta - \alpha)(\beta + \alpha)}{2(\beta - \alpha)} = \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Logo,

$$E(X) = \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

(ii) Por definição,

$$Var(X) = E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

Vamos calcular a $E(X^2)$. Temos que:

$$E(X^2)=\int_{\alpha}^{\beta}x^2\frac{1}{(\beta-\alpha)}dx=\frac{1}{(\beta-\alpha)}\frac{x^3}{3}|_{\alpha}^{\beta}=\frac{\beta^3-\alpha^3}{3(\beta-\alpha)}$$

$$E(X^2)=\frac{(\beta-\alpha)(\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2)}{3(\beta-\alpha)}=\frac{(\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2)}{3}.$$

Logo,

$$Var(X)=\frac{(\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2)}{3}-\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2=\frac{(\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2)}{3}-\frac{\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2}{4}$$

$$Var(X)=\frac{4\beta^2+4\alpha\beta+4\alpha^2-3\alpha^2-6\alpha\beta-3\beta^2}{12}=\frac{\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2}{12}=\frac{(\alpha-\beta)^2}{12}.$$

$$Var(X)=\frac{(\alpha-\beta)^2}{12}.$$

2.5 Relação entre a distribuição beta e a uniforme padrão

Teorema: Sejam $X_1,X_2,...,X_n$ variáveis aleatórias independentes com densidade $U_C(0,1)$. Seja $X_{(k)}$ a k-ésima estatística de ordem da amostra. Então $X_{(k)}$ tem densidade Beta com parâmetros k e $n-k+1$ (BARROS, 2009). A demonstração do teorema acima pode ser encontrada na referência da mesma autora.

Demonstração

Tomando uma amostra de tamanho n da Uniforme $(0,1)$ e derivando analiticamente as densidades do mínimo e do máximo obtemos o seguinte resultado: Seja $X_{(1)}=min(X_1,X_2,...,X_n)$ e $X_{(n)}=max(X_1,X_2,...,X_n)$ encontraremos a densidade e $X_{(1)}$ e $X_{(n)}$ através do método da função de distribuição. Seja U tem densidade $U(0,1)$ então sua função de distribuição é:

$$F(u)=P(U\leq u)=\begin{cases}0, & u\leq 0\\ u, & 0<u<1\\ 1, & u\geq 1\end{cases}$$

A função de distribuição de $X_{(1)}$ é:

$$G_1(U)=P(X_{(1)}\leq u)=1-P(X_{(1)}>u)=1-P(min(X_1,\cdots,X_n)>u)$$

$$G_1(U)=1-P(X_1>u,X_2>u,\cdots,X_n>u).$$

Pela independência dos $X_{i's}$, esta última probabilidade pode ser escrita como o produto das probabilidades individuais e então:

$$G_1(U) = P(X_{(1)} \leq u) = 1 - P(X_1 > u, X_2 > u, \cdots, X_n > u)$$

$$G_1(U) == 1 - [P(X_1 > u)P(X_2 > u) \cdots P(X_n > u)].$$

Mas, os $X_{i's}$ são identicamente distribuídos, e então todos os termos no produto acima são iguais. Logo:

$$G_1(U) = P(X_{(1)} \leq u) = 1 - [P(X_1 > u)P(X_2 > u) \cdots P(X_n > u)] = 1 - \{P(X_{(1)} > u)\}^n.$$

Como os $X_{i's}$ são $U(0,1)$, segue que $P(X_{(1)} > u) = 1 - u$. Logo,

$$G_1(U) = P(X_{(1)} \leq u) = 1 - \{1 - u\}^n.$$

A densidade de $X_{(1)}$ é apenas a derivada da função de distribuição:

$$g_1(U) = \frac{dG_1(U)}{du} = \frac{d\{1 - \{1-u\}^n\}}{du} = -(-1)n\{1-u\}^{n-1} = n(1-u)^{n-1}$$

$$g_1(U) = nu^{1-1}(1-u)^{n-1} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n)\Gamma(1)} u^{1-1}(1-u)^{n-1}, \quad para \quad 0 < u < 1.$$

Portanto, $X_{(1)}$ tem função de densidade de probabilidade Beta$(1,n)$. Em particular, sua média é $1/(n+1)$. Analogamente para $X_{(n)}$ tem-se que a função de distribuição é:

$$G_n(U) = P(X_{(n)} \leq u) = P(max(X_1, \cdots, X_n) \leq u) = P(X_1 \leq u, X_2 \leq u, \cdots, X_n \leq u)$$

$$G_n(U) = P(X_1 \leq u), P(X_2 \leq u) \cdots P(X_n \leq u) = \{P(X_n \leq u)\}^n = \{F(u)\}^n = u^n.$$

Logo,

$$g_n(U) = \frac{dG_n(U)}{du} = \frac{d\{u\}^n}{du} = nu^{n-1} = n(u)^{n-1}(1-u)^{1-1}$$

$$g_n(U) = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n)\Gamma(1)} u^{n-1}(1-u)^{1-1}, \quad para \quad 0 < u < 1.$$

Ou seja, $X_{(n)}$ tem função de densidade de probabilidade Beta$(n,1)$. Em particular, $E(X_{(n)}) = n/(n+1)$.

Observações:

1. Se tomarmos uma amostra de tamanho n ”grande”, a média dos $X_{(1)}$ se aproxima de zero e a média dos $X_{(n)}$ se aproxima de 1.

2. Os resultados encontrados para o mínimo e o máximo de uma amostra Uniforme $(0,1)$ podem ser facilmente generalizados para uma amostra de uma densidade $f(x)$ qualquer.

3 Aplicações

3.1 Sobre os testes estatísticos

Existem diversas funções de distribuições de probabilidade para variáveis aleatórias discretas e contínuas. Entre as que se ajustam a dados discretos estão a bernoulli, binomial, binomial negativa, hipergeométrica, geométrica e poisson. Já as distribuições uniforme, normal, log-normal, gama, valores extremos ou gumbel, weibull, exponencial, beta, qui-quadrado, t de Student, F de Snedecor, entre outras, podem ser ajustadas a série de dados amostrais de variáveis aleatórias contínuas (FILHO et al., 2004).

Testes de aderência, como o qui-quadrado, Kolmogorov-Smirnov, Lilliefors, Shapiro-Wilk, Cramervon Mises (Campos, 1983; Assis et al., 1996; Bussab & Morettin, 2004), servem para comparar as probabilidades empíricas de uma variável com as probabilidades teóricas estimadas pela função de distribuição em teste, verificando se os valores da amostra podem razoavelmente ser considerados como provenientes de uma população com aquela distribuição teórica (FILHO et al., 2004).

Nos testes de aderência, a hipótese nula (H_0) admite que a distribuição seja a especificada (normal, log-normal, gama e outras), com os seus parâmetros estimados com base nos dados amostrais (ASSIS et al., 1996; CATALUNHA et al., 2002).

3.2 Material e Métodos

Para a materialização do presente estudo trabalhou-se com dados do Índice de Desenvolvimento Humano (IDH) dos 26 estados do Brasil mais o Distrito Federal, onde a mesma foi obtida no banco de dados do Programa das Nações Unidas para o Desenvolvimento (PNUD). Os dados do estudo podem ser observados na Tabela 1.

Os dados do IDH apresentados no referido trabalho são referentes aos anos de 1991, 2000, 2004, 2005 e 2008, tal restrição se deve ao difícil acesso aos mesmos, visto que algumas bases de dados também apresentavam-se incompletas.

Tabela 3.1: Índice de Desenvolvimento Humano para os 26 Estados brasileiros mais o Distrito Federal, para os anos de 1991, 2000, 2004, 2005 e 2008.

Estado	IDH 1991	IDH 2000	IDH 2004	IDH 2005	IDH 2008
Distrito Federal	0,799	0,844	0,874	0,874	0,874
Santa Catarina	0,748	0,822	0,840	0,840	0,840
São Paulo	0,778	0,820	0,825	0,833	0,833
Rio de Janeiro	0,753	0,807	0,826	0,832	0,832
Rio Grande do Sul	0,753	0,814	0,829	0,832	0,832
Paraná	0,711	0,787	0,816	0,820	0,820
Espírito Santo	0,690	0,765	0,794	0,802	0,802
Mato Grosso do Sul	0,716	0,778	0,793	0,802	0,802
Goiás	0,700	0,776	0,794	0,800	0,800
Minas Gerais	0,697	0,773	0,795	0,800	0,800
Mato Grosso	0,685	0,773	0,793	0,796	0,796
Amapá	0,691	0,753	0,762	0,780	0,780
Amazonas	0,664	0,713	0,766	0,780	0,780
Rondônia	0,660	0,735	0,768	0,776	0,756
Tocantins	0,611	0,710	0,751	0,756	0,756
Pará	0,650	0,723	0,749	0,755	0,755
Acre	0,624	0,697	0,748	0,751	0,751
Roraima	0,692	0,746	0,741	0,750	0,750
Bahia	0,590	0,688	0,732	0,742	0,742
Sergipe	0,597	0,682	0,741	0,742	0,742
Rio Grande do Norte	0,604	0,705	0,724	0,738	0,738
Ceará	0,593	0,700	0,717	0,723	0,723
Pernambuco	0,620	0,705	0,710	0,718	0,718
Paraíba	0,561	0,661	0,709	0,718	0,718
Piauí	0,566	0,656	0,698	0,703	0,703
Maranhão	0,543	0,636	0,676	0,683	0,683
Alagoas	0,548	0,649	0,670	0,677	0,677

Fonte: Programa das Nações Unidas para o Desenvolvimento (PNUD).

Após a organização desses dados, deram-se início as análises a partir das distribuições de probabilidades Beta e Uniforme com o intuito de verificar o ajuste dos dados as respectivas distribuições visto que o mesmo admite valores apenas no intervalo (0, 1). Para a organização dos dados e aplicação dos testes estatísticos foi utilizado o software R, versão 2.13.0 (http://www.R-project.org).

Na verificação do ajuste dos dados as distribuições Beta e Uniforme obteve-se os parâmetros das respectivas distribuições e aplicou-se o teste de aderência de Kolmogorov-Smirnov. Como os dados são contínuos e pertencem ao intervalo (0;1), os mesmos poderiam ser modelados tanto por uma distribuição Beta quanto por uma distribuição Uniforme. A seguir serão discutidos mais detalhes em relação ao uso das distribuições expostas, bem como as conclusões e restrições para cada uma delas.

4 Resultados

O IDH (Índice de Desenvolvimento Humano) é um índice de caráter universal utilizado para se medir o desenvolvimento humano de países ou regiões. A aplicação dessa metodologia na escala municipal recebe o nome de IDHM (Índice de Desenvolvimento Humano Municipal) (BATELLA e DINIZ, 2006).

O PNUD divulga o Índice de Desenvolvimento Humano desde 1990. Algumas nações, no entanto, possuem estatísticas com até 25 anos de retroatividade, desde 1975. Em sua mais recente publicação, divulgada em 27 de novembro de 2007 e válida para os anos de 2007 e 2008, o Brasil figura pela primeira vez entre as nações com alto desenvolvimento humano, atingindo a pontuação mínima do novo grupo, de 0,800. (DHnet, 2011).

De acordo com o Relatório publicado pela ONU em 2009, o Brasil ocupa a 75ª posição no IDH entre os 182 países do mundo, com índice de 0,813. Na América Latina, o Brasil detém o 6º lugar. Entre os estados brasileiros, Minas Gerais aparece na 8ª posição, com IDHM de 0,812 (FJP; IPEA; PNUD, 2011).

Para o referido trabalho, como já citado, fez-se uso do teste de Kolmogorov-Smirnov, onde o valor da estatística D máximo do teste de aderência de Kolmogorov-Smirnov (Campos, 1983; Assis et al., 1996; Bussab & Morettin, 2004) informa a máxima distância entre as probabilidades empíricas e as teóricas obtidas sob a função de distribuição de probabilidade em teste. Assim, quanto menores os valores da estatística D, maiores serão fornecidos os valores do p-valor e, consequentemente, maior evidência de não-rejeição da hipótese nula (H_0), ou seja, maior aderência dos dados à distribuição em teste (FILHO et al., 2004).

Na Figura 4.1, pode-se observar os histogramas dos dados para seus respectivos anos. Observe que, visualmente apenas o ano de 2000 lembra de certa forma, uma distribuição Uniforme.

Anterior ao teste de aderência realizou-se a obtenção dos parâmetros da distribuição beta, para cada distribuição em cada referido ano, bem como outras sugestões para os parâmetros com o objetivo de verificar se haveriam ganhos significativos com o ajuste para diferentes parâmetros. E posteriormente o ajuste às distribuições Uniforme e Beta. Dentre as distribuições

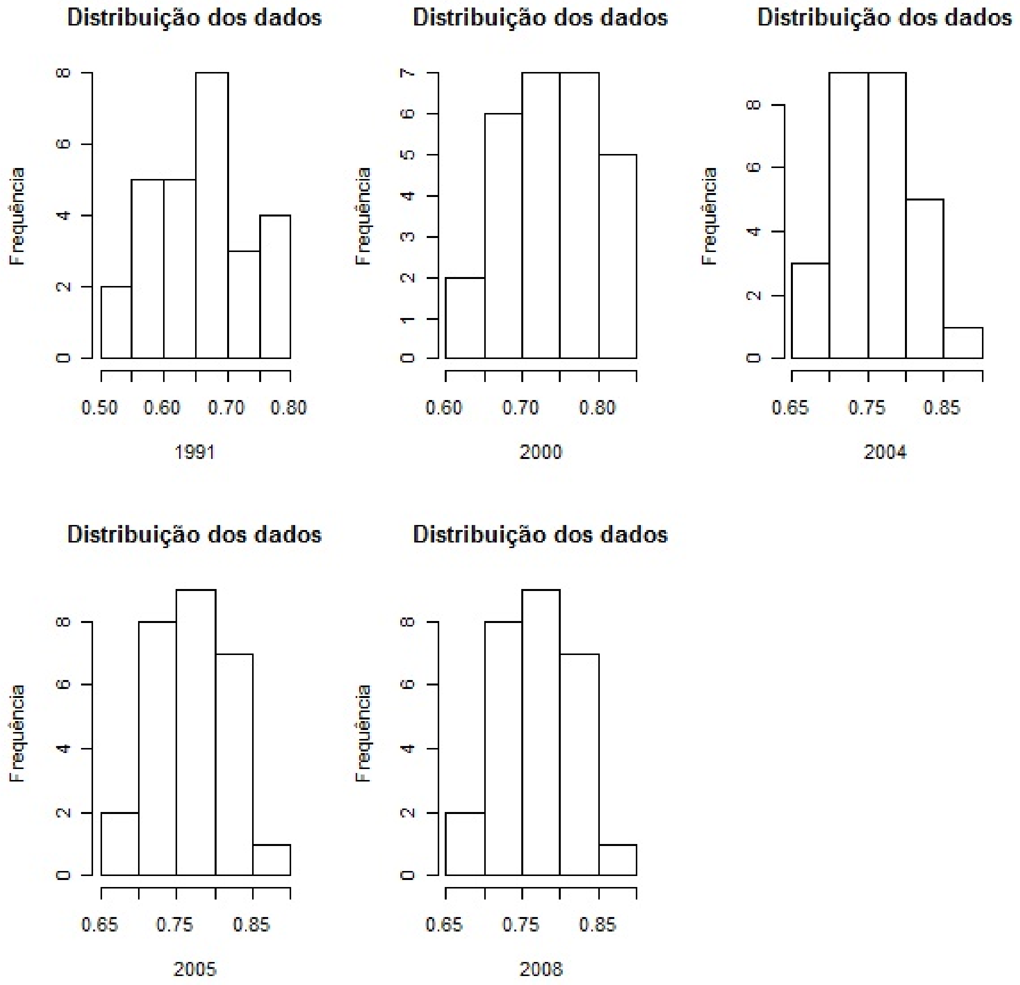

Figura 4.1: Distribuição dos dados para os respectivos anos.

estudadas para os anos de 1991, 2000, 2004, 2005 e 2008, todas se ajustaram a distribuição Beta de probabilidade, como pode ser observado pela Tabela 4.1, vale salientar que o nível de significância adotado foi de $\alpha = 0.05$.

Tabela 4.1: Teste de Kolmogorov-Smirnov para distribuição Beta com os parâmetros estimados.

Ano	Parâmetros da Distribuição Beta		Teste Kolmogorov-Smirnov	
	Alfa	**Beta**	**Estatística D**	**p-valor**
1991	27,39555	14,05703	0,1080	0,9113
2000	41,42517	14,72904	0,1214	0,8214
2004	50,17961	15,45914	0,1014	0,9440
2005	52,27827	15,50799	0,1165	0,8574
2008	52,19445	15,54819	0,1480	0,5953

Fonte: Dados da pesquisa.

Note pela Tabela4.2 , que após a realização do teste de Kolmogorov-Smirnov, para outros parâmetros da distribuição Beta, houve um aumento no p-valor para todos os anos, ou seja, não há evidências estatísticas que nos leve a rejeição da hipótese de que os dados da pesquisa seguem distribuição Beta.

Tabela 4.2: Teste de Kolmogorov-Smirnov para distribuição Beta com os parâmetros estimados.

Ano	**Parâmetros da Distribuição Beta**		**Teste Kolmogorov-Smirnov**	
	Alfa	**Beta**	**Estatística D**	**p-valor**
1991	27,156	14,00	0,1024	0,9397
2000	42,126	15,20	0,1049	0,9275
2004	50,160	15,45	0,1013	0,9444
2005	52,920	15,92	0,0986	0,9556
2008	52,400	16,00	0,1163	0,8583

Fonte: Dados da pesquisa.

Na Tabela 4.3 pode-se observar os valores da estatística D do teste de Kolmogorov-Smirnov, bem como os respectivos p-valores do teste para a distribuição Uniforme (0,1). Note que, em nenhum caso a distribuição em questão se adequa a uma distribuição Uniforme, ou seja, não há evidências estatísticas que nos leve a não rejeição de que a distribuição dos dados, para os respectivos anos, seguem um distribuição Uniforme.

Tabela 4.3: Teste de Kolmogorov-Smirnov para distribuição Beta com os parâmetros estimados.

Ano	**Teste Kolmogorov-Smirnov**	
	Estatística D	**p-valor**
1991	0,543	0,00024340
2000	0,636	0,00000065
2004	0,6700	0,00000006
2005	0,677	0,00000004
2008	0,677	0,00000004

Fonte: Dados da pesquisa.

Portanto, o teste de aderência de Kolmogorov-Smirnov revelou a distribuição Beta como a mais adequada ao estudo para representar a distribuição dos Índices de desenvolvimento Humano, quando comparada com a distribuição Uniforme, bastando estimar os parâmetros desta distribuição, e não aceitando a distribuição Uniforme como um possível ajuste, mesmo sendo esta uma distribuição que modela variáveis com domínio no intervalo (0,1).

5 Considerações finais

Considerando as estimativas dos parâmetros da distribuição Beta referentes aos dados do Índice de Desenvolvimento Humano (IDH) dos 26 Estados brasileiros, mais o Distrito Federal, para os anos de 1991, 2000, 2004, 2005 e 2008, destaca-se o ajuste à referida distribuição, onde o mesmo também é confirmado ao utilizar-se outras estimativas para os dados em estudo.

Através do teste de aderência de Kolmogorov-Smirnov, e adotando um nível de significância igual a 5%, verificou-se que os mesmos confirmam o melhor ajuste à distribuição de probabilidade Beta. Quando ajustados os dados à distribuição Uniforme, foi verificado que os mesmos não se adequaram a tal distribuição, apesar de a distribuição Uniforme Padrão modelar variáveis que geram resultados no intervalo (0,1).

Nos trabalhos científicos nos dias atuais existe uma larga utilização de modelos probabilísticos para análise de informações restritas no intervalo (0,1). Vale destacar que os modelos probabilísticos mais utilizados com o objetivo de modelar estes tipos de dados, são a distribuição Uniforme e a distribuição Beta. Esta última por sua vez possui uma escassez de material bibliográfico na língua portuguesa, bem como a falta de clareza em definições e aplicações matemáticas.

Tendo em vista os fatos mencionados, em geral, este trabalho alcançou seus objetivos no sentido de tratar de maneira mais detalhada e coesa as propriedades da referida distribuição e por fim a realização de uma aplicação a uma base de dados reais.

Referências Bibliográficas

ÁVILA, Geraldo, Cálculo das Funções de Múltiplas Variáveis, 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

ASSIS, F.N.; ARRUDA, H.V.; PEREIRA, A.R. Aplicações de estatística à climatologia: teoria e prática. Pelotas: UFPEL, 1996.161p.

BARROS, M. Probabilidade II. Rio de Janeiro: ENCE (55 slides), 2009.

BATELLA, W. B.; DINIZ, A. M. A. Desenvolvimento humano e hierarquia urbana: uma análise do IDH-M entre as cidades mineiras. Revista de Biologia e Ciências da Terra, v. 6, n. 2, p. 367- 372, 2º Semestre 2006.

BRITO, R. S., Estudo de expansões assintóticas, avaliação numérica de momentos das distribuições beta generalizadas, aplicações em modelos de regressão e análise discriminante. 105 f. Dissertação (Mestrado em Biometria e Estatística). Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2009.

BURY, K. Statistical Distributions in Engineering. [S.I.]: New York, 1999.

BUSSAB, W.O.; MORETTIN, P.A. Estatística básica. 5.ed. São Paulo: Saraiva, 2004. 526p.

CAMPOS, H. Estatística experimental não-paramétrica. 4 ed. Piracicaba: Departamento de Matemática e Estatística - ESALQ,1983. 349p.

CASELLA, G., BERGER, R.L. Inferência Estatística. Cengage Learning, 2010. (Versão em português da 2nd edição em inglês).

CATALUNHA, M.J.; SEDIYAMA, G.C.; LEAL, B.G.; SOARES, C.P.B.; RIBEIRO, A. Aplicação de cinco funções densidade de probabilidade a séries de precipitação pluvial no Estado de Minas Gerais. Revista Brasileira de Agrometeorologia, v.10, p.153-162,2002.

DHnet - REDE DIREITOS HUMANOS E CULTURA. Idh: Como funciona. Disponível em: www.dhnet.org.br/dados/idh/idh/idh_como_funciona.pdf

FARIAS, A. M. L. Variáveis Aleatórias Contínuas. Rio de Janeiro: universidade federal fluminense (Notas de aula), 2008.

FERRARI, S. L. P. E CRIBARI-NETO, F. Beta regression for modeling rates and proportions. Journal of Applied Statistics, 31, 7, 799-815, 2004.

FILHO, A.C.; MATZENAUER, R.; TRINDADE. J.K. Ajustes de funções de distribuição de probabilidade à radiação solar global no Estado do Rio Grande do Sul Pesquisa agropecuária brasileira, v.39, n.12, p. 1157-1166, 2004.

FUNDAÇÃO JOÃO PINHEIRO - FJP, INSTITUTO DE PESQUISA ECONÔMICA APLICADA - IPEA, PROGRAMA DAS NAÇÕES UNIDAS PARA O DESENVOLVIMENTO - PNUD. Índice de desenvolvimento Humano dos Municípios Brasileiros-IDH. Disponível em: http://www.fjp.gov.br

GALILEU. Tópico: Distribuição Uniforme. Sistema Galileu de Educação, ESALQ - USP. Disponível em:

http://www.galileu.esalq.usp.br/mostra-topico.php?cod=308. Acesso em: 20 de junho de 2011.

GAUTSCHI, W., Leonhard Euler: His Life, the Man, and HisWorks, SIAM REVIEW, v.50, No. I, pp. 3 - 33, 2008.

GNERI, M.A., GUIOL, H.J.F., PINHEIRO, A.S. Probabilidade. São Paulo: Unicamp, 2002.

GRAHAM, V. A.; HOLLANDS, K. G. T. Method to generate synthetic hourly solar radiation globally. Solar Energy, v. 44, p. 333-341, 1990.

JANARDAN, H. G.; PADMANABHAN, G. Double bounded beta distribution for hydrologic variables. In: Proc. 17th Annual Pittsburg Conference (parte 3). [S.I.: s.n.], v. 17, p. 1107-1111, 1986.

JOHNSON, N. L.; KOTZ, S.; BALAKRISHNAN, N. Continuous Univariate Distribution, v. 2. [S.l.]: A Wiley-Interscience Publication, 1995b.

KIESCHNICK, R. McCULLOUGH, B. D. Regression analysis of variates observed on (0, 1): percentages, proportions and fractions. Statistical Modelling, 3. 193-213, 2003.

LEBENSZTAYN, E.; COLETTI, C.F. Probabilidade: Teoria e Exercícios (Notas de aula), 2010.

MAFFET, A. L.; WACKERMAN, C. C. The modified beta density function as a model for synthetic aperture radar clutter statistics. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, v. 29, p. 277-283, 1991.

MCNALLY, R. J. Maximum likelihood estimation of the parameters of the prior distribution of three variables that strongly influence reproductive performance in cows. Biometrics, v. 46, n. 2, p. 501-514, 1990.

MILYUTIN, E. R.; YAROMENKO, Y. L. Statistical characteristics of atmospheric transparency index over tilted routes. Meteorologiya in Gidrologiya, v. 12, p. 72-76, 1991.

MIYASHIRO, E. S. Modelos de regressão beta e simplex para análise de proporções. Dissertação de Mestrado. IME - Universidade de São Paulo, 2008.

REITMAN, D. P. Uso de Métodos Clássicos e Bayesianos em Modelos de Regressão Beta. Dissertação de Mestrado. UFSCar - Universidade de Federal de São Carlos, 2007.

ROSS, S. Probabilidade: um curso moderno com aplicações. Tradutor: Alberto Resende De Conti. - 8 ed. Porto Alegre, Bookman, 2010.

VIALI,L. Estatística Computacional - Variáveia Aleatórias Contínuas, Rio Grande do Sul: UFRGS (125 slides), 2011.

WIKIPÉDIA[1].; Distribuição Beta. Wikipédia, a enciclopédia livre, 14 de junho de 2011. Disponível em:

http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Beta_distribution&oldid=439499365. Acesso em 15 de junho de 2011.

WIKIPÉDIA[2].; Inferência Bayesiana. Wikipédia, a enciclopédia livre, 13 de junho de 2011. Disponível em:

http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Bayesian_inference&oldid=439200670. Acesso em 15 de junho de 2011.

WIKIPÉDIA[3].; Função Beta. Wikipédia, a enciclopédia livre, 11 de junho de 2011. Disponível em:

http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Beta_function&oldid=438994738. Acesso em 15 de junho de 2011.

WILEY, J. A.; HERSCHOKORU, S. J.; PADIAU, N. S. Heterogeneity in the probability of HIV transmission per sexual contact: the case of male-to-female transmission in penile vaginal intercourse. Statistics in Medicine, v. 8, p. 93-102, 1989.

APÊNDICE A – Mudança de variáveis em integrais duplas

Segundo Farias (2010), No cálculo de integrais simples, podemos usar mudança de variável para simplificar os cálculos. Assim, se queremos calcular $\int_a^b f(x)dx$, sob condições adequadas, podemos definir $x = g(u)$ e então $dx = g'(u)du$ e

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(g(u))g'(u)du.$$

O resultado análogo para funções de duas variáveis é o seguinte: $x = f(u,v)$ e $y = g(u,v)$ é uma transformação de variáveis, então

$$\int\int_R F(x,y)dxdy = \int\int_R F(f(u,v),g(u,v))|J|dudv$$

onde —J— represente o valor absoluto do determinante da matriz jacobiana

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}$$

Considere, como exemplo, as coordenadas polares defenidas anteriormente: $x = r(cos\theta)$ e $y = r(sen\theta)$:

$$J = \left| \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} \right| = \begin{bmatrix} cos\theta & -rsen\theta \\ sen\theta & rcos\theta \end{bmatrix}$$

$$J = rcos^2\theta + rsen^2\theta = r(cos^2\theta + sen^2\theta) = r$$

e, portanto, $dxdy = rdrd\theta$.

APÊNDICE B – Estatísticas de ordem

Sejam $X_1, X_2, \cdots X_n$ variáveis aleatórias i.i.d., contínuas com função densidade comum f e função de distribuição F. Defina Y_i a i-ésima menor de $X_1, X_2, \cdots X_n$. As variáveis aleatórias $Y_1 \leq Y_2 \leq \cdots \leq Y_n$ são denominadas as estatísticas de ordem associadas a $X_1, X_2, \cdots X_n$ (LEBENSZTAYN, 2010).

A densidade conjunta de $Y_1, \cdots, Y_n$ é dada por

$$f_{Y_1,\cdots,Y_n}(y_1,\cdots,y_n) = n! f(y_1)\cdots f(y_n), \quad y_1 < y_2 < \cdots < y_n.$$

Para $i < j$, a densidade conjunta de Y_i e Y_j é dada por

$$f_{Y_i,Y_j}(x,y) = \frac{n!}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!}[F(x)]^{i-1}[F(y)-F(x)]^{j-i-1}[1-F(y)]^{n-j} f(x) f(y)$$

para $x < y$.

A densidade de Y_i é dada por

$$f_{Y_i}(x) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}[F(x)]^{i-1}[1-F(x)]^{n-i} f(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Em particular, as densidades de $Y_1 = min\{X_1, \cdots, X_n\}$ e $Y_n = max\{X_1, \cdots, X_n\}$ são, respectivamente

$$f_{Y_1}(x) = n f(x)[1-F(x)]^{n-1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

e

$$f_{Y_n}(x) = n f(x)[F(x)]^{n-1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$