UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA
PURA E APLICADA

Equações Diferenciais Ordinárias e Aplicações

MARCELO PEREIRA BALTAZAR

Campina Grande - PB

Maio de 2011

Marcelo Pereira Baltazar

Equações Diferenciais Ordinárias e Aplicações

Monografia apresentada ao curso de Especialização em Matemática Pura e Aplicada do Departamento de Matemática e Estatística do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba em cumprimento às exigências legais para obtenção do título de Especialista em Matemática Pura e Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo

Campina Grande-PB

Maio de 2011

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL-UEPB

B197e Baltazar, Marcelo Pereira.

Equações diferenciais ordinárias e aplicações [manuscrito] / Marcelo Pereira Baltazar. 2011.

39 f.

Monografia (Especialização em Matemática Pura e Aplicada) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologias, 2011.

“Orientação: Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo, Departamento de Matemática, Estatística e Computação”.

1. Equações Diferenciais. 2. Aplicações Matemáticas. 3. Espaços Métricos. I. Título.

22. ed. CDD 515.35

Marcelo Pereira Baltazar

Equações Diferenciais Ordinárias e Aplicações

Aprovado em: 26 / 05 / 11

COMISSÃO EXAMINADORA

Aldo Trajano Lourêdo

Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo

Departamento de Matemática - CCT/UEPB

Orientador

Célia Maria Rufino Franco

Profa. Ms. Célia Maria Rufino Franco

CES - UFCG

Examinadora

Maria de Jesus Rodrigues da Silva.

Profa. Ms. Maria de Jesus R. da Silva

CES - UFCG

Examinadora

Dedicatória

Ao meu avô Enok

Agradecimentos

Aos meus familiares, professores e companheiros de estudo.

Epígrafe

"O único homem que está isento de erros, é aquele que não arrisca acertar"

Albert Einstein

Resumo

Nesta monografia faremos um estudo bibliográfico de alguns resultados referentes aos espaços métricos, a topologia e as equações diferenciais ordinárias.

Palavras Chave: Espaços métricos, existência de soluções, soluções maximais.

Abstract

This monograph will make a bibliographic study in orde to results for metric spaces, topology and ordinary differential equations.

Keywords: Metric spaces, existence of solution, maximal solutions

Sumário

Introdução

Nesta monografia faremos um estudo bibliográfico referentes a resultados relativos aos espaços métricos, a topologia e as equações diferenciais ordinárias.

No primeiro capítulo, procuramos apresentar alguns conceitos, notações básicas e demonstrar os principais resultados utilizados no desenvolvimento do trabalho.

No segundo capítulo, enunciamos e demonstramos o Problema de Cauchy para um Sistema de EDO, nesse caso o Sistema por ser Lipsitchitziana existe solução e que ela é única.

E no terceiro capítulo abordamos abordaremos o Problema de Cauchy para f Contínua, nesse caso veremos apenas que existe solução.

Capítulo 1

Resultados Preliminares

Neste Capítulo apresentaremos alguns resultados que serão usados nesta monografia. Alguns deles serão demonstrados e outros só enunciados. Contudo, indicaremos as referências bibliográficas onde as demonstrações podem ser encontradas.

1.1 Espaços Métricos

Nesta seção apresentaremos alguns resultados referentes aos espaços métricos.

Definição 1.1 *Uma métrica num conjunto M não vazio é uma função $d : M \times M \to \mathbb{R}$, que associa a cada par ordenado $(x, y) \in M$ um número real $d(x, y)$, chamado a distancia de x a y, de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições para quaisquer $x, y, z \in M$:*

i) $d(x, x) = 0$*;*

ii) *Se $x \neq y$ então $d(x, y) > 0$;*

iii) $d(x, y) = d(y, x)$*;*

iv) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$*.*

Definição 1.2 *Um espaço métrico é um par (M, d), onde M é um conjunto não vazio e d é uma métrica em M.*

Observação 1.1 *Os elementos de um espaço métrico podem ser de natureza bastante arbitrária: números, pontos, vetores, matrizes, funções, conjuntos, etc.*

Definição 1.3 *Uma sequência* (x_n) *de pontos em um espaço métrico* (M, d) *converge para um ponto* $x \in M$ *se:*

$$(*)\ d(x_n, x) \to 0 \text{ quando } n \to \infty$$

Escreve-se: $\lim x_n = x$.

Observação 1.2 *A condição (*) significa que:*

$$\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ n_0\ \in \mathbb{N} \text{ tal que } n >\ n_0 \to d(x_n, x) < \epsilon.$$

Definição 1.4 (Sequências de Cauchy) *Uma sequência* (x_n) *num espaço métrico* M *chama-se uma sequência de Cauchy quando, para todo* $\varepsilon > 0$ *dado, existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$m, n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Proposição 1.1 *Toda sequência convergente é de Cauchy.*

Demonstração: Se $\lim x_n = a$ no espaço métrico M então, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Se tomarmos $m, n > n_0$ teremos

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, a) + d(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Logo, (x_n) é de Cauchy. ∎

Proposição 1.2 *Toda sequência de Cauchy é limitada.*

Demonstração: Seja (x_n) uma sequência de Cauchy no espaço métrico M. Dado um $\varepsilon = 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < 1.$$

Logo, o conjunto $\{x_{n_{0+1}}, x_{n_{0+2}}, ...\}$ é limitado e tem diâmetro menor ou igual a 1. Segue-se que

$$\{x_1, x_2, ..., x_n, ...\} = \{x_1, ..., x_{n_0}\} \cup \{x_{n_{0+1}}, x_{n_{0+2}}, ...\}$$

é limitado. ∎

Proposição 1.3 *Uma sequência de Cauchy que possui uma subsequência convergente é convergente.*

Demonstração: Sejam (x_n) uma sequência de Cauchy no espaço métrico M e (x_{n_k}) uma subsequência que converge para o ponto $a \in M$. Afirmamos que

$$\lim x_n = a.$$

Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $n_k > p \Rightarrow d(x_{n_k}, a) < \frac{\varepsilon}{2}$. Existe também $q \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > q \Rightarrow d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$. Seja,

$$n_0 = max\{p, q\}.$$

Para todo $n > n_0$ existe $n_k > n_0$ e então

$$d(x_n, a) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Logo,

$$\lim x_n = a.$$

$\blacksquare$

Observação 1.3 *Foi mostrado que toda sequência convergente num espaço métrico é uma sequência de Cauchy. A reciproca não é verdadeira, como veremos no exemplo abaixo.*

Exemplo 1.1 *A sequência (x_n) de pontos de $\mathbb{Q}$ definida por*

$$x_n = \begin{cases} 2, & se, \; n = 1 \\ \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{2}{x_n}\right), & se, \; n \geq 1 \end{cases}$$

Mostra-se que (x_n) é de Cauchy em $\mathbb{Q}$, mas, $\lim x_n = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Definição 1.5 *Dizemos que o espaço métrico M é completo quando toda sequência de Cauchy em M é convergente.*

1.2 Teorema do Ponto Fixo de Banach

Nesta seção provaremos o Teorema do Ponto Fixo de Banach e algumas de suas consequências.

Definição 1.6 *Um ponto fixo de uma aplicação* $f : M \to M$ *é um ponto* $x \in M$ *tal que* $f(x) = x$.

Definição 1.7 *Sejam* (X, d) *um espaço métrico. Uma aplicação* $F : X \to X$ *é dita uma contração, se existe* $0 \leq K < 1$*, tal que,*

$$d(F(x), F(y)) \leq Kd(x, y), \ \forall x, y \in X.$$

Teorema 1.1 *(Teorema do Ponto Fixo de Banach) Seja* M *é um espaço métrico completo, toda contração* $f : M \longrightarrow M$ *possui um único ponto fixo em* M*. Mais precisamente, se escolhermos um ponto qualquer* $x_0 \in M$*. e preservarmos* $x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), ..., x_{n+1} = f(x_n), ...$ *a sequência* (x_n) *converge em* M *e* $a = \lim x_n$ *é o único ponto fixo de* f*.*

Demonstração: Admitamos, por enquanto, que a sequência (x_n) convirja para um ponto $a \in M$. Então, como f é contínua, temos

$$f(a) = f(\lim x_n) = \lim x_{n+1} = a,$$

logo a é ponto fixo de f.

Agora vamos mostrar que f não admite dois pontos fixos distintos. De fato, se

$$f(a) = a \ \ e \ \ f(b) = b,$$

e vale

$$d(f(x), f(y)) \leq c.d(x, y),$$

com $0 \leq c < 1$, para $x, y \in M$ quaiquer, então,

$$d(a, b) = d(f(a), f(b)) \leq c.d(a, b),$$

donde,

$$(1 - c).d(a, b) \leq 0.$$

Como, $1-c>0$, concluímos que $d(a,b)=0,$ *ou seja,* $a=b$

Para terminar a demonstração vamos verificar que (x_n) é uma sequência de Cauchy em M. Ora,

$$d((x_1),(x_2)) = d(f(x_0),f(x_1)) \leq c.d((x_0,x_1))$$

$$d((x_2)),(x_3)) = d(f(x_1),f(x_2)) \leq c.d(x_1,x_2) \leq c^2.d(x_0,x_1)$$

E, em geral, temos:

$$d(x_n,x_{n+1}) \leq c^n.d(x_0,x_1)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Segue-se que, para $n,p \in \mathbb{N}$ quaisquer:

$$d(x_n,x_{n+p}) \leq d(x_n,x_{n+1}) + d(x_{n+1},x_{n+2}) + ... + d(x_{n+p-1},x_{n+p}) \leq$$

$$\leq [c^n + c^{n+1} + ... + c^{n+p-1}].d(x_0,x_1) = c^n[1+c+...+c^{p-1}].d(x_0,x_1) \leq$$

$$\leq c^n \sum_{p=1}^{\infty} c^{p-1} d(x_0,x_1) = \frac{c^n}{1-c} d(x_0,x_1).$$

Como $\lim\limits_{n\ +\infty} c^n = 0$, concluímos que (x_n) é uma sequência de Cauchy em M, o que completa a demonstração. ■

Observação 1.4 *Fazendo $p \to \infty$ na desigualdade*

$$d(x_n,x_{n+p}) \leq \frac{c^n}{1-c} d(x_0,x_1),$$

obtemos

$$d(x_n,a) \leq \frac{c^n}{1-c} d(x_0,x_1),$$

o que nos fornece um limite superior para o erro que cometemos ao tomar o n-ésimo iterado x_n como um valor aproximado para o ponto fixo a.

Proposição 1.4 *Seja $f : M \longrightarrow M$ tal que*

$$d(f(x),f(y)) \leq c.d(x,y),$$

com $0 \leq c < 1$. Dado qualquer $a \in M$, se

$$r \geq \frac{d(a,f(a))}{1-c}$$

então, a bola fechada $B = B[a,r]$ é invariante por f, isto é, $f(B) \subset B$. Em particular se M for completo, o ponto fixo de f está na bola B.

Demonstração: Temos

$$x \in B \Rightarrow d(x,a) \leq r \Rightarrow d(f(x),a) \leq d(f(x),f(a)) + d(f(a),a) \leq$$

$$\leq c.d(x,a) + (1-c)r \leq cr + (1-c)r = r \Rightarrow f(x) \in B$$

■

Definição 1.8 *Um espaço vetorial normado completo chama-se Espaço de Banach.*

Definição 1.9 *Sejam M e N espaços métricos. Um homeomorfismo de M em N é uma bijeção contínua $f : M \to N$ cuja inversa $f^{-1} : N \to M$ também é contínua.*

Proposição 1.5 *Seja $\varphi : U \to E$ uma contração definida num subconjunto aberto U do espaço de Banach E. A aplicação $f : U \longrightarrow E$, dada por $f(x) = x + \varphi(x)$, é um homeomorfismo de U sobre um subconjunto aberto de E.*

Demonstração: Suponha que, para $x, y \in U$ quaisquer, se tenha

$$\mid \varphi(x) - \varphi(y) \mid \leq \ c \mid (x-y) \mid,$$

com $0 \leq c < 1$. Utilizando a desigualdade $\mid a+b \mid \geq \mid a \mid - \mid b \mid$, obtemos,

$$\mid f(x) - f(y) \mid = \mid (x-y) + \varphi(x) - \varphi(y) \mid \geq$$

$$\geq \mid (x-y) \mid - \mid \varphi(x) - \varphi(y) \mid \geq$$

$$\geq \mid (x-y) \mid -c \mid (x-y) \mid,$$

Ou seja,

$$\mid f(x) - f(y) \mid \geq (1-c) \geq \mid (x-y) \mid .$$

Isto mostra que f é injetiva e que sua inversa $f^{-1} : f(U) \longrightarrow U$ é lipschitziana, com constante $(1-c)^{-1}$. Logo, f é um homeomorfismo de U sobre $f(U)$.

Aqui usamos a existência do ponto fixo para contrações.

Seja então $b = f(a)$, $a \in U$ um ponto qualquer de $f(U)$. Como U é aberto em E, existe um número $r > 0$ tal que $B = B[a,r] \subset U$. Afirmamos que a bola aberta de centro b e raio $(1-c)r$ está contido em $f(U)$. Ou seja, dado $y \in E$ tal que $\mid (y-b) \mid < (1-c)r$, devemos mostrar que a equação $f(x) = y$ possui uma solução $x \in U$. Para isto consideremos a contração $\xi_y(B) \subset B$. Ora,

$$| a - \xi_y(a) |=| a + \varphi((a) - y) |=| (y - f(a)) |=| (y - b) |< (1 - c)r$$

Logo B é invariante por ξ_y, em virtude da proporsição anterior. ∎

Definição 1.10 *Uma aplicação $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ chama-se Lipschitziana em Ω relativamente à segunda variável ou, simplesmente, Lipschitziana, se existe uma constante K tal que:*

$$| f(t, x) - f(t, y) |\leq K | x - y |$$

para todos $(t, x), (t, y) \in \Omega$; K chama-se constante de Lipschitz de f.

Exemplo 1.2 *Se f admite derivada parcial em relação à segunda variável, $D_2 f$, com $\|D_2 f\| \leq K$ em Ω e $\Omega_t = \{x : (t, x) \in \Omega\}$ é um conjunto convexo para todo t, então f é lipschitziana em Ω e K é sua constante de Lipschitz.*

De fato, pelo teorema do valor médio,

$$| f(t, x) - f(t, y) |\leq \sup | D_2 f(t, \theta x + (1 - \theta)y) | \; | (x - y) | \leq K | x - y |$$

Definição 1.11 *A aplicação f diz-se localmente lipschitziana em Ω se cada (t_0, x_0) tem uma vizinhança $V = V(t_0, x_0)$ tal que $f_{|V}$ é lipschitziana em V.*

Por exemplo, se f admite derivada parcial em relação à segunda variável, $D_2 f$, continua, em Ω, então f é localmente lipschitziana em Ω. Isto resulta da aplicação do argumento anterior às vizinhanças convexas V onde $D_2 f$ é limitada.

Lema 1.1 (Lema da Contração) *Sejam (X, d) um espaço métrico completo e $F : X \to X$ uma contração, isto é,*

$$d(F(x), F(y)) \leq K d(x, y),$$

$0 \leq K < 1$. *Existe um único ponto fixo p, por F, isto é $F(p) = p$. Mais ainda, p é um atrator de F, isto é, $F^n(x) \to p$ quando $n \to \infty$, para todo $x \in X$. $F^n(x)$ é definida por $F(F^{n-1}(x))$.*

Demonstração: Unicidade: Sejam p e p_1 dois pontos fixos.

$$d(p,p_1) = d(F(p),F(p_1)) \leq Kd(p_1,p)$$

o que implica que $d(p,p_1) = 0$ donde $p_1 = p$.

Existência: Sejam $x \in X$ e $x_n = F^n(x)$. Provaremos que x_n é uma sequência de Cauchy. Realmente,

$$d(x_{n+p},x_n) \leq K^n d(x,x_r)$$

e

$$d(x,x_r) \leq d(x,F(x)) + d(F(x),F^2(x)) + ... + d(F^{r-1}(x),F^r(x)) \leq$$

$$\leq (1 + K + K^2 + ... + K^{r-1})d(x,F(x)).$$

Portanto,

$$d(x_{n+r},x_n) \leq \frac{K^n}{1-K}d(x,F(x)).$$

Logo, x_n é convergente. Agora provemos que $\lim x_n = p$ é um ponto fixo de F. De fato:

$$p = \lim_{n\to\infty} F^n(x) = \lim F(F^{n-1}(x)) = F(\lim F^{n-1}(x)) = F(p)$$

■

Corolário 1.1 *Seja X um espaço métrico completo. Se $F : X \to X$ é contínua e para algum m, F^m é uma contração, então existe um único ponto p fixo por F. Mais ainda, p é um atrator de F.*

Demonstração: Seja p o ponto fixo atrator de F^m dado pelo Lema da Contração. Seja

$$n = mk + l,\ com\ 0 \leq l < m.$$

Dado $x \in X, F^l(x)$ é um ponto de X. Como p é atrator de F^m, temos,

$$[F^m]^k(F^l(x)) \to p,\ quando\ k \to \infty.$$

Da relação:

$$F^n(x) = [F^m]^k(F^l(x))$$

e do fato de que $n \to \infty \Leftrightarrow K \to \infty$, segue que p é um atrator de F. Provaremos agora que $F(p) = p$. Com efeito,

$$p = \lim F^n(x) = \lim F(F^{n+1}(x)) = F(\lim F^{n-1}(x)) = F(p)$$

■

Teorema 1.2 (Teorema de Picard) *Seja f contínua e lipschitziana em $\Omega = I_\alpha \times B_b$, onde $I_\alpha = \{t; \mid (t - t_0) \mid \leq \alpha\}$, $B_b = \{x; \mid (x - x_0) \mid \leq b\}$. Se $\mid f \mid \leq M$ em Ω, existe uma única solução do problema*

$$\left| \begin{array}{l} x' = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0. \end{array} \right.$$

$\alpha = min\{\alpha, \frac{b}{M}\}$ em I_α

Demonstração: Seja $X = C(I_\alpha, B_b)$ o espaço métrico completo das funções contínuas $\varphi : I_\alpha \to B_b$, com a métrica uniforme

$$d(\varphi_1, \varphi_2) = \sup_{t \in I_\alpha} \mid \varphi_1(t) - \varphi_2(t) \mid$$

o supremo existe, pois φ é contínua num compacto e portanto, limitada.

Para $\varphi \in X$, seja $F(\varphi) : \ I_a \to E$ definida por:

$F : X \to C(I_a, B_b)$

$\varphi \ \mapsto F(\varphi) : I_a \to E$

$$t \mapsto F(\varphi)(t) = x_0 + \textstyle\int_t^{t_0} f((s), \varphi(s))ds$$

$t \in I_a$. Destacamos as seguintes propriedades de F:

(1) $F(X) \subseteq X$

(2) F^n é uma contração, para n suficientemente grande.

De fato, para todo $t \in I_a$, temos

$$\mid F(\varphi)(t) - x_0 \mid = \left| \int_t^{t_0} f(s, \varphi(s))ds \right| \leq Ma \leq b \Rightarrow F(\varphi) \in B_b \subset X$$

Isto prova (1). Quanto a (2), para todo par $\varphi_1, \varphi_2 \in X$ e todo $n \geq 0$

$$(*) \mid F^n(\varphi_1(t)) - F^n(\varphi_2(t)) \mid \leq \ \frac{K^n \mid t - t_0 \mid^n}{n!} \ d(\varphi_1, \varphi_2), \ t \in I_\alpha,$$

onde K é uma constante de Lipschitz de f. Verificamos esta desigualdade por indução sobre n. Para $n = 0$ ela é óbvia. Suponhamos que ela é valida para k. Então,

$$(*) \mid F^{k+1}(\varphi_1)(t) - F^{k+1}(\varphi_2)(t) \mid = \mid F(F^k(\varphi_1(t)) - F(F^k(\varphi_2(t)) \mid \leq$$

$$\leq \mid \int_{t_0}^{t} f(s, F(F^k(\varphi_1(s)) - f(s, F(F^k(\varphi_2(s))ds \mid \leq$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} K \mid F^k(\varphi_1(s) - F^k(\varphi_2)(s) \mid ds \mid \leq$$

$$\leq K \mid \int_{t_0}^{t} \frac{K^k(t_0 - s)^k}{k!} \, d(\varphi_1, \varphi_2)ds \mid =$$

$$= \frac{K^{k+1} \mid t - t_0 \mid^{k+1}}{(K+1)!} \, d(\varphi_1, \varphi_2).$$

portanto, $d(F^n(\varphi_1), F^n(\varphi_2)) \leq \frac{K^n \alpha^n}{n!} \, d(\varphi_1, \varphi_2)$ e, para n grande, $\frac{K^n \alpha^n}{n!} < 1$, pois este é o termo geral de série cuja soma é $e^{K\alpha}$, donde F^n é uma contração de X. Pelo corólario do Lema da Contração, existe uma única φ tal que $F(\varphi) = \varphi$, e isto prova o Teorema de Picard. ■

Corolário 1.2 *Seja Ω aberto em $\mathbb{R} \times \mathbb{E}$ e seja $f : \Omega \to \mathbb{E}$ continua com $D_2 f$ também contínua. Para todo ponto (t_0, x_0) em Ω existe uma vizinhança*

$$V = I(t_0) \times B(x_0)$$

tal que

$$\left| \begin{array}{l} x' = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0 \end{array} \right.$$

tem uma única solução em $I(t_0)$. Além disso, o gráfico desta solução está contido em V.

Demonstração: Seja U uma vizinhança de (t_0, x_0) tal que $f \mid U$ é lipschitziana e $\mid f \mid \leq M$ em U. Seja $\alpha > 0$ suficientemente pequeno para que

$$V = I_a(t_0) \times B_b(x_0) \subseteq U,$$

onde $b = \alpha M$. Conclui-se o argumento aplicando ao teorema de Picard. ■

Proposição 1.6 *Seja f contínua e lipschitziana em $\Omega = [a, b] \times E$. Então, para todo $(t_0, x_0) \in \Omega$ existe uma única solução em $I = [a, b]$.*

Demonstração: Considere $X = C(I, E)$ e $F : X \to X$ definida como na demonstração do teorema de Picard.

$$F(\varphi)(t) \; = x_0 \; + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s)) \; ds.$$

F tem um único ponto fixo pois, para n grande, F^n é uma contração. Basta observar que a desigualdade (*) da demonstração do teorema de Picard é verificada. ■

Corolário 1.3 (Equações Lineares) *Sejam $A(t)$ e $b(t)$ respectivamente matrizes $n \times n$ e $n \times 1$ de funções continuas num intervalo I. Para todo $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^{\ltimes}$ existe uma única solução de*

$$x' = A(t)x + b(t), \; x(t_0) = x_0$$

definida em I.

Demonstração: Seja $I = \bigcup_n I_n$ onde $I_n \subseteq I_{n+1}$ são intervalos compactos que contém t_0.

$$f(t,x) \;=\; A(t)x + b(t)$$

satisfaz as hipóteses da proposição anterior em cada intervalo I_n. Seja φ_n a única solução neste intervalo passando por (t_o, x_0). É claro que

$$\varphi_{n+1|I_n} = \varphi_n.$$

Logo,

$$\varphi(t) = \varphi_n(t), t \in I_n$$

está bem definido em I. É claro também que φ é a única solução em I passando pelo intervalo (t_0, x_0).

■

1.3 Aproximações por Funções Suaves

Um *multi-índice* α é um vetor consistindo de n inteiros não negativos, isto é,

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \; \alpha_i \in \mathbb{N}, \; 1 \leq i \leq n.$$

Escrevemos $|\alpha|$ para a soma destes inteiros,

$$|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n.$$

Para qualquer vetor $k = (k_1, \ldots, k_n)$, definimos k^α por

$$k^\alpha = k^{\alpha_1} \ldots k^{\alpha_n}.$$

Também escrevemos

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$$

onde D é o vetor $D = (D_1, \dots, D_n)$. Assim temos que

$$D^\alpha f = \frac{\partial^\alpha f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Se definirmos

$$\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$$

e

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{(\alpha-\beta)!\beta!} = \binom{\alpha_1}{\beta_1} \dots \binom{\alpha_n}{\beta_n},$$

podemos escrever a *fórmula de Leibniz* como

$$D^\alpha(fg) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta f D^{\alpha-\beta} g.$$

Fazendo uso de muti-índice podemos agora definir o espaço $C^r(\Omega)$, o qual consiste das funções f que têm todas as derivadas até a ordem r contínuas, isto é,

$$C^r(\Omega) = \{f : D^\alpha f \in C^0(\Omega) \text{ para todo } |\alpha| \leq r\}.$$

Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Definimos o *suporte* de uma função contínua f, o qual é denotado por *suppf* como sendo

$$suppf = \overline{\{x : f(x) \neq 0\}},$$

onde $\overline{X}$ denota o fecho de X em $\mathbb{R}^n$. O $suppf$, é o menor conjunto fechado tal que $f \equiv 0$ sobre $\mathbb{R}^n \setminus suppf$.

Definição 1.12 *O espaço $C_c^r(\Omega)$ consiste de todas as funções em $C^r(\Omega)$ cujo suporte é um subconjunto compacto de Ω.*

Proposição 1.7 *Seja $u \in C_c^0(\Omega)$. Então, $u_h \in C_c^\infty(\Omega)$ se $h < dist(supp\ u, \partial\Omega)$, e $u_h \to u$ uniformemente sobre Ω quando $h \to 0$.*

Demonstração: Ver Robinson, J.C [6] ■

1.4 O Teorema de Arzelà-Ascoli

No Capítulo 3, trataremos o problema de Cauchy quando a não linearidade é uma função contínua. E a nossa abordagem será aproximar o problema (3.1) por uma sequência (x_n) de problemas de Cauchy. Mostraremos que a partir desta sequência podemos extrair uma subsequência convergente em uma determinada topologia e que o limite desta subsequência satisfaz o problema (3.1).

O resultado usado para extrair esta subsequência é conhecido como o Teorema de Arzelà-Ascoli. Este teorema caracteriza os subconjuntos compactos de $C^0([0,T];\mathbb{R}^n)$ como conjuntos de funções equicontínuas limitadas. Se $\mathcal{K}$ é um tal subconjunto e $\{f_n\}$ é uma sequência em $\mathcal{K}$, então existe uma subsequência de $\{f_n\}$ que é uniformemente convergente.

Definição 1.13 *Dizemos que uma sequência de funções $\{f_n\}$ é equicontínua, se para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$, independente de n, tal que*

$$|x-y| \leq \delta \textit{ implica } |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon.$$

Seja X um subconjunto compacto do $\mathbb{R}^n$ e $\{f_n\}$ uma sequência de funções de X em $\mathbb{R}^m$, isto é, $f_n : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Definição 1.14 *Dizemos que f_n é uniformemente limitada, se*

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in X} \|f_n(x)\| \leq M, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Exemplo 1.3 *A sequência de funções $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f_n(x) = \frac{sen(nx)}{n}$ é uniformemente limitada e equicontínua.*

Lema 1.2 *Se X é compacto, então existe um conjunto contável de pontos $\{x_i\}$ de X e uma sequência crescente de inteiros $\{N_j\}$ tal que, para cada n,*

$$|x - x_i| \leq \frac{1}{2^n} \textit{ para algum } 1 \leq i \leq N_n.$$

Demonstração: Ver Robinson, J.C [6]. ■

Teorema 1.3 (Arzelà-Ascoli) *Seja X um subconjunto compacto do $\mathbb{R}^n$, e $\{f_n\}$ uma sequência de funções contínuas de X em $\mathbb{R}^m$. Se f_n é uniformemente limitada e equicontínua, então $\{f_n\}$ possui uma subsequência que converge uniformemente sobre X.*

Demonstração: Pelo Lema 1.2, usando o fato de X se compacto, então existe um conjunto contável de pontos $\{x_i\}$ de X e uma sequência crescente de inteiros $\{N_j\}$ tal que, para cada n,

$$|x - x_i| \leq \frac{1}{2^n} \text{ para algum } 1 \leq i \leq N_n.$$

Agora, como $\{f_n(x_1)\}$ é uma sequência uniformemente limitada, podemos aplicar o Teorema de Bolzano-Weierstrass para garantir que $\{f_n(x_1)\}$ tem uma subsequência $\{f_{n_{1j}}(x_1)\}$ tal que $f_{n_{1j}}(x_1)$ converge.

Como $f_{n_{1j}}(x_2)$ é uniformemente limitada, existe uma subsequência de $\{f_{n_{2j}}\}$ tal que $f_{n_{2j}}(x_2)$ também converge. Podemos continuar este processo até obter uma subsequência $\{f_{n_{kj}}\}$ tal que

$$f_{n_{kj}} \text{ converge para todo } 1 \leq i \leq k.$$

Considere agora a sequência diagonal $g_j = f_{n_{kj}}$. Para qualquer k, $\{g_j\}$ é uma subsequência de $\{f_{n_{kj}}\}$ a partir do k-ésimo termo e assim $g_j \to (x_k)$ converge quando $j \to \infty$ para todo x_k.

Agora usando esta convergência sobre o conjunto denso $\{x_k\}$ juntamente com a equicontinuidade das funções $\{f_n\}$ mostraremos que $\{g_j\}$ é de fato uma sequência de Cauchy na norma do supremo e portanto converge uniformemente sobre X. De fato, sabemos que dado $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que

$$|x - y| \leq \delta \text{ implica que } |g_j(x) - g_j(y)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Por construção dos x_i, existe um M tal que para todo $x \in X$ existe um x_i com $i \leq M$ tal que

$$|x - x_i| \leq \delta. \tag{1.1}$$

Agora considere $N \in \mathbb{N}$ grande tal que

$$|g_m(x_i) - g_n(x_i)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \text{ para } m, n > N,\ 1 \leq i \leq M.$$

Para qualquer $x \in X$ escolha um x_i que satisfaz (1.1), e então usando as duas últimas estimativas obtemos:

$$|g_m(x) - g_n(x)| \leq |g_m(x) - g_m(x_i)| + |g_m(x_i) - g_n(x_i)| +$$
$$+ |g_n(x_i) - g_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \text{ para } m, n > N,$$

o que implica

$$\|g_n - g_m\|_\infty = \sup_{x \in X} |g_n(x) - g_m(x)| \leq \varepsilon, \text{ para } m, n > N.$$

Assim, $\{g_n\}$ é uma sequência de Cauchy na norma do supremo e portanto é uniformemente convergente. ∎

Capítulo 2

O Problema de Cauchy para um Sistema de EDO

Consideremos o sitema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem:

$$x' = f(t, x) \tag{2.1}$$

onde, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função contínua e D um subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$.
Seja I um intervalo aberto de $\mathbb{R}$.

Definição 2.1 *Uma solução de* (2.1) *é uma função* $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *de classe* C^1*, tal que:*
i) $(t, \varphi(t)) \in D, \quad \forall t \in I$
ii) $\varphi'(x) = f\left(t, \varphi(t)\right), \quad \forall t \in I.$

O problema de Cauchy para (2.1) consiste em dados $(t_0, x_0) \in D$ fixo, saber se existe alguma solução de (2.1) que no ponto t_0 assume o valor x_0 e se essa solução é única.
Escreve-se

$$\left| \begin{array}{rcl} x' & = & f(t, x) \\ x(t_0) & = & x_0 \end{array} \right. \tag{2.2}$$

onde $(t_0, x_0) \in D$

Usando-se o Teorema Fundamental do Cálculo, deduzimos que o problema de Cauchy (2.2) é equivalente a equação integral.

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\left(s, x(s)\right) ds, \quad t \in I \tag{2.3}$$

De fato : Seja φ uma solução de (2.2), então:

$$\left| \begin{array}{rcl} \varphi'(t) & = & f(t, \varphi(t)) \\ \varphi(t_0) & = & x_0 \end{array} \right.$$

agora, integrando de t_0 até t a primeira igualdade, resulta:

$$\int_{t_0}^{t} \varphi'(s)ds = \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\, ds,$$

ou seja

$$\varphi(t) - \varphi(t_0) = \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\, ds \Longrightarrow \varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\, ds$$

portanto, φ é solução de (2.2). Reciprocamente, seja φ uma solução de (2.2), ou seja,

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\, ds$$

derivando a igualdade em relação a t, obtém-se:

$$\varphi'(t) = \frac{d}{dt} \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\, ds \Longrightarrow \varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$$

e

$$\varphi(t_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t_0} f(s, \varphi(s))\, ds \Longrightarrow \varphi(t_0) = x_0$$

Exemplos

A) Sejam $D = I \times R$ e $f(t, x) = g(t)$, onde $g(t)$ é uma função contínua em I. Temos que, φ é uma solução de $x' = g(t)$ em I se, e somente se:

$$\varphi(t) = c + \int_{t_0}^{t} g(s)\, ds \quad onde \quad t_0 \in I \quad e \quad c = \varphi(t_0)$$

B) Sejam $D = \mathbb{R}^2$ e $f(t, x) = 3x^{\frac{2}{3}}$. Temos que, $\forall c \in \mathbb{R}$ a função $\varphi_c : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$\varphi_c(t) = \begin{cases} (t - c)^3 & se \quad t \geq c \\ \quad 0 & se \quad t \leq c \end{cases}$$

é uma solução para a equação $x' = 3x^{\frac{2}{3}}$ em $\mathbb{R}$.

De fato,

$$\varphi_c'(t) = 3(t - c)^2 \quad se \quad t \geq c \quad e \quad \varphi_c'(t) = 0 \quad se \quad t \leq c$$

então:

$$\varphi_c'(t) - 3\left(\varphi_c(t)\right)^{\frac{2}{3}} = 3(t-c)^2 - 3(t-c)^{3.\frac{2}{3}} = 3(t-c)^2 - 3(t-c)^2 = 0 \quad se \quad t \geq c$$

se $t \leq c$, temos:

$$\varphi_c'(t) - 3\left(\varphi_c(t)\right)^{\frac{2}{3}} = 0$$

Também a função $\varphi \equiv 0$ é solução desta equação.

Em geral as equações diferenciais ordinárias possuem uma infinidade de soluções em cada ponto de seu domínio. Porém, no exemplo A em cada ponto de D passa uma única solução. O mesmo não acontece no exemplo B. Neste caso, em cada ponto da forma $(t_0, 0)$ passa uma infinidade de soluções.

Teorema 2.1 *Considere o sistema de equações diferenciáveis de 1ª ordem*

$$\left| \begin{array}{l} x' = f(t,x), \\ x(0) = x_0, \end{array} \right. \tag{2.4}$$

definida em D, onde D é o conjunto:

$$|t - t_0| \leq a \quad e \quad \|x - x_0\| \leq b.$$

Suponhamos que:

i) f é contínua em D

ii) $\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L\|x-y\| \quad \forall (t,x) \;\; e \;\; (t,y) \in D \;\; e \;\; para \;\; algum \;\; L > 0.$

Então existe uma única solução $\varphi(t)$ de (2.4) satisfazendo $\varphi(t_0) = x_0$ definida no intervalo

$$I : |t - t_0| \leq \delta$$

onde

$$\delta = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\} \quad e \quad M = \sup_{(t,x)\in D} \|f(t,x)\|$$

Demonstração (Existência)

Consideremos a sequência de funções

$$\begin{cases} \varphi_0(t) &= x_0 \\ \varphi_n(t) &= x_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_{n-1}(s))ds \end{cases} \tag{2.5}$$

onde $t \in [t_0 - a, t_0 + a]$ e $n \in \mathbb{N}$

Mostremos que (φ_n) é uma sequência de funções contínuas em

$$|t - t_0| \leq \delta \ \ e \ \ \|\varphi_n(t) - x_0\| \leq b, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

temos que

$$\varphi_0(t) = x_0 \ \ para \ \ t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$$

e portanto

$$\varphi_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_0) ds$$

de onde se deduz que φ_1 é contínua em $|t - t_0| \leq \delta$.

Além disso,

$$\|\varphi_1(t) - x_0\| \leq \left| \int_{t_0}^{t} \|f(s, x_0)\| ds \right| \leq M|t - t_0| \leq M\delta \leq b \ \ se \ \ |t - t_0| \leq \delta$$

Suponhamos agora que $\varphi_{n-1}(t)$ seja continua em

$$|t - t_0| \leq \delta \ \ e \ \ \|\varphi_{n-1}(t) - x_0\| \leq b$$

neste intervalo. De (2.5) deduz-se que $\varphi_n(t)$ é contínua em $|t - t_0| \leq \delta$ e

$$\|\varphi_n(t) - x_0\| \leq \left| \int_{t_0}^{t} \|f(s, \varphi_{n-1}(s)\| ds \right| \leq M|t - t_0| \leq M\delta \leq b$$

logo, φ_n é uma sequência de funções contínuas em

$$|t - t_0| \leq \delta \ \ e \ \ \|\varphi_n(t) - x_0\| \leq b, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

isto é,

$$(t, \varphi_n(t)) \in D \ \ se \ \ |t - t_0| \leq \delta \ \ e \ \ n \in \mathbb{N}.$$

Agora, mostremos que a sequência (φ_n) converge uniformemente em $|t - t_0| \leq \delta$. temos que

$$\|\varphi_1(t) - x_0\| \leq M|t - t_0|$$

Para $n = 2$, (2.5) torna-se:

$$\varphi_2(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\left(s, \varphi_1(s)\right) ds$$

logo,

$$\begin{aligned}
\|\varphi_2(t)-\varphi_1(t)\| &= \left\|\int_{t_0}^{t} f\left(s,\varphi_1(s)\right)ds-\int_{t_0}^{t} f\left(s,\varphi_0(s)\right)ds\right\| \\
&= \left\|\int_{t_0}^{t} \left[f\left(s,\varphi_1(s)\right)-f\left(s,\varphi_0(s)\right)\right]ds\right\| \\
&\leq \left|\int_{t_0}^{t} \|f\left(s,\varphi_1(s)\right)-f\left(s,\varphi_0(s)\right)\|ds\right| \\
&\leq \left|\int_{t_0}^{t} L\|\varphi_1(s)-\varphi_0(s)\|ds\right| \\
&\leq \int_{t_0}^{t} ML|s-t_0|ds = ML\frac{|t-t_0|^2}{2!} \quad em \quad |t-t_0|\leq\delta
\end{aligned}$$

Suponha que,

$$\|\varphi_n(t)-\varphi_{n-1}(t)\| = ML^{n-1}\frac{|t-t_0|^n}{n!} \quad em \quad |t-t_0|\leq\delta$$

de (2.5), temos que:

$$\varphi_{n+1}(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f\left(s,\varphi_n(s)\right)ds$$

logo,

$$\begin{aligned}
\|\varphi_{n+1}(t)-\varphi_n(t)\| &= \left\|\int_{t_0}^{t} f\left(s,\varphi_n(s)\right)ds-\int_{t_0}^{t} f\left(s,\varphi_{n-1}(s)\right)ds\right\| \\
&= \left\|\int_{t_0}^{t} \left[f\left(s,\varphi_n(s)\right)-f\left(s,\varphi_{n-1}(s)\right)\right]ds\right\| \\
&\leq \left|\int_{t_0}^{t} \|f\left(s,\varphi_n(s)\right)-f\left(s,\varphi_{n-1}(s)\right)\|ds\right| \\
&\leq \left|\int_{t_0}^{t} L\|\varphi_n(s)-\varphi_{n-1}(s)\|ds\right| \\
&\leq L\int_{t_0}^{t} ML^{n-1}\frac{|s-t_0|^n}{n!}ds = ML^n\frac{|t-t_0|^{n+1}}{(n+1)!} \quad em \quad |t-t_0|\leq\delta
\end{aligned}$$

portanto

$$\|\varphi_n(t)-\varphi_{n-1}(t)\| \leq ML^{n-1}\frac{|t-t_0|^n}{n!} \quad se \quad |t-t_0|\leq\delta \quad e \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

logo

$$\|\varphi_n(t)-\varphi_{n-1}(t)\| \leq \frac{M}{L}\frac{(L\delta)^n}{n!} \quad \forall n\in\mathbb{N} \quad e \quad \forall t\in[t_0-\delta,t_0+\delta]$$

Usando o critério de Weierstrass, a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|\varphi_n(t)-\varphi_{n-1}(t)\|$$

converge uniformemente em $|t-t_0| \leq \delta$, logo, a série

$$\varphi_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} [\varphi_n(t) - \varphi_{n-1}(t)]$$

converge uniformemente em $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$

$$S_n(t) = \varphi_0(t) + \varphi_1(t) - \varphi_0(t) + \varphi_2(t) - \varphi_1(t) + ... + \varphi_n(t) - \varphi_{n-1}(t) = \varphi_n(t)$$

Consequentemente, a sequencia $(\varphi_n(t))$ converge uniformemente para uma função $\varphi(t)$ em $|t-t_0| \leq \delta$.

Usando a condição ii) deduz-se que:

$$\lim_{n\to\infty} f(t, \varphi_n(t)) = f(t, \varphi(t)) \quad uniformemente \quad em \quad |t-t_0| \leq \delta$$

De fato,

$$\| f(t, \varphi_n(t)) - f(t, \varphi(t)) \| \leq L \|\varphi_n(t) - \varphi(t)\| \quad \forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \quad e \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Desde que

$$\varphi_n(t) \longrightarrow \varphi(t) \quad uniformemente \quad em \quad |t-t_0| \leq \delta$$

temos que:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N},$$

tal que

$$n \geq n_0 \Longrightarrow \|\varphi_n(t) - \varphi(t)\| < \frac{\epsilon}{L} \quad \forall t \quad em \quad |t-t_0| \leq \delta$$

portanto,

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N},$$

tal que

$$n \geq n_0 \Longrightarrow \|f(t, \varphi_n(t)) - f(t, \varphi(t)\| < L.\frac{\epsilon}{L} = \epsilon \quad \forall t \in |t-t_0| \leq \delta$$

Agora, tomando-se o limite em (2.5) quando $n \longrightarrow \infty$, obtém-se:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \lim_{n\to\infty} \left[x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_{n-1}(s)) ds \right]$$

ou seja

$$\varphi(t) = x_0 + \lim_{n\to\infty} \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_{n-1}(s)) ds = x_0 + \int_{t_0}^{t} \lim_{n\to\infty} f(s, \varphi_{n-1}(s)) ds$$

daí, temos que:

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds, \quad t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \tag{2.6}$$

e

$$\varphi(t_0) = x_0.$$

Agora, derivando (2.6) em relação a t, resulta que:

$$\varphi'(t) = f\left(t, \varphi(t)\right), \quad \forall t \in I$$

Logo $\varphi(t)$ é solução de (2.4), tal que $\varphi(t_0) = x_0$.

Unicidade

Suponhamos que existe uma outra solução $\psi(t)$ de (2.4) com $\psi(t_0) = x_0$. Então

$$\psi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \psi(s))ds, \quad \forall t \in I \tag{2.7}$$

Vamos mostrar que

$$\varphi(t) \equiv \psi(t), \quad \forall t \in I$$

Mostremos por indução que

$$\|\psi(t) - \varphi_n(t)\| \leq bL^n \frac{|t - t_0|^n}{n!} \quad \forall t \in I \quad e \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

temos,

$$\|\psi(t) - x_0\| \leq b, \quad \forall t \in I$$

suponhamos que

$$\|\psi(t) - \varphi_{n-1}(t)\| \leq bL^{n-1} \frac{|t - t_0|^{n-1}}{(n-1)!} \quad \forall t \in I \quad e \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

então

$$\begin{aligned}
\|\psi(t) - \varphi_n(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^{t} \|\psi(s) - \varphi_{n-1}(s)\| ds \right\| \\
&\leq bL^n \int_{t_0}^{t} \frac{|s - t_0|^{n-1}}{(n-1)!} = bL^n \frac{|s - t_0|^n}{(n-1)!n}\bigg|_{t_0}^{t} = bL^n \frac{|t - t_0|^n}{n!}
\end{aligned}$$

portanto, pelo Pincípio da Indução Finita

$$\|\psi(t) - \varphi_n(t)\| \leq bL^n \frac{|t-t_0|^n}{n!} \quad \forall t \in I \quad e \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

e assim,

$$\|\psi(t) - \varphi_n(t)\| \leq bL^n \frac{\delta^n}{n!} \longrightarrow 0 \quad se \quad n \longrightarrow \infty$$

ou seja

$$\|\psi(t) - \varphi(t)\| \leq 0 \quad \forall t \in I$$

donde concluímos que

$$\psi(t) = \varphi(t), \quad \forall t \in I$$

Exemplo Considere o problema de Cauchy

$$\left| \begin{array}{rcl} x' & = & x \\ x(0) & = & 1 \end{array} \right.$$

vamos resolvê-lo pelo método acima.

Cosideremos $\varphi_0(t) = 1$, então temos:

$$\varphi_1(t) = 1 + \int_0^t f(s,1)ds = 1 + \int_0^t 1ds = 1 + t.$$

$$\varphi_2(t) = 1 + \int_0^t f(s,\varphi_1(s))ds = 1 + \int_0^t \varphi_1(s)ds = 1 + \int_0^t (1+s)ds = 1 + \int_0^t 1ds + \int_0^t sds = 1 + t + \frac{t^2}{2!}.$$

$$\varphi_3(t) = 1 + \int_0^t f(s,\varphi_2(s))ds = 1 + \int_0^t \varphi_2(s)ds = 1 + \int_0^t (1 + s + \frac{s^2}{2!})ds = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!}.$$

continuando com este processo, na etapa n, obtém-se:

$$\varphi_n(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + ... + \frac{t^n}{n!} + ...$$

mas, sabemos que a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$ converge uniformemente em todo intervalo compacto da forma $[-a,a]$ para a função e^t, pelo critério de Weierstrass, assim

$$\varphi(t) = e^t = \lim_{n\to\infty} \left(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + ... + \frac{t^n}{n!} \right)$$

é a solução do problema proposto.

Corolário 2.1 *Se* $f(t,x)$ *e* $\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)$ *são contínuas no retângulo:*

$$D = (t,x), \quad |t - t_0| \leq a \quad e \quad |x - x_0| \leq b$$

e se (t_0, x_0) *é um ponto do intervalo de* D*, então: a equação diferencial*

$$x' = f(t,x) \tag{2.8}$$

possui uma única solução passando por (t_0, x_0)*.*

2.1 Soluções Maximais

O Teorema acima estabelece a existência local de solução. Uma pergunta é se a solução obtida no Teorema 1 pode ser estendida a um intervalo de maior definição e neste caso até onde. Nesta seção responderemos estas perguntas.

No que segue Ω é um aberto limitado do $\mathbb{R}^2$.

Lema 2.1 *Se* $K \subset \Omega$ *é compacto, então um mesmo "a" pode ser escolhido de modo a servir para todas as condições iniciais* $(x_0, y_0) \in K$*.*

Demonstração: Ver Djairo [3]. ∎

Lema 2.2 *Sejam* $\phi_1(x)$ *e* $\phi_2(x)$ *soluções do PVI (2.4) definidas nos intervalos abertos* I_1 *e* I_2 *contendo* x_0 *respectivamente. Então,* $\phi_1 = \phi_2$ *em* $I = I_1 \cap I_2$*.*

Demonstração: Temos que $I = I_1 \cap I_2$ é um intervalo aberto. O subconjunto J de I definido por

$$J = \{x \in I : \phi_1(x) = \phi_2(x)\}$$

é não vazio, pois $x \in I$, é fechado em I. Além disso J é aberto em I pela aplicação do Teorema (2.1). Como o intervalo é um conexo, como feito em [5], obtemos $J = I$. ∎

Teorema 2.2 *Nas hipóteses do Teorema (2.1), toda solução do PVI* (2.4) *pode ser estendida a um intervalo maximal, o qual é aberto.*

Demonstração: Ver Djairo [3]. ■

No que segue denotaremos o intervalo maximal da solução do PVI (2.4), o qual existe pelo Toerema 2.2, por $I = (w_-, w_+)$.

Observação 2.1 *Vamos mostrar que $(x, \phi(x))$ tende para a fronteira de Ω no sentido que a solução x do PVI (2.4) sai de qualquer compacto contido em Ω.*

Teorema 2.3 *Se $\phi(x)$ é solução do PVI (2.4) com intervalo maximal I, então $(x, \phi(x)) \to \partial\Omega$ quando $x \to w_+$ (o mesmo vale para $x \to w_-$), isto é, dado $K \subset \Omega$ compacto, existe $\tau < w_+$ tal que $(x, \phi(x)) \notin K$ para $x \in (\tau, w_+)$.*

Demonstração: A prova é feita em dois casos:
(**i**) **Caso** : Se $w_+ = +\infty$, dado um compacto K em Ω, considere

$$\tau = \sup_{(x,y)\in K} x$$

e portanto $(x, \phi(x)) \notin K$ se $x > \tau$.
(**ii**) **Caso** : Se $w_+ < \infty$, dado $K \subset \Omega$ temos pelo Lema 2.1 que o raio a pode ser escolhido o mesmo para todas as condições iniciais em K. Se $(x_1, \phi(x_1)) \in K$, então ϕ está definida em $(x_1 - a, x_1 + a)$. Considerando $\tau = w_+ - a$, temos que $(x, \phi(x)) \notin K$ se $x \in (\tau, w_+)$, porque se $x_1 \in (\tau, w_+)$ e $(x_1, \phi(x_1) \in K$, temos que $\phi(x)$ estaria definida em $(x_1 - a, x_1 + a)$. Mas,

$$x_1 + a > \tau + a = w_+,$$

o que contraria o fato de I ser um intervalo maximal. ■

Observação 2.2 *Quando Ω contém o semiplano $x \geq x_0$ e $w_+ < \infty$, decorre do Teorema 2.3 que $|\phi(x)| \to +\infty$ quando $x \to w_-$ ou $x \to w_+$. Dizemos nesse caso que temos um "low u"para x finito.*

Observação 2.3 *(i) Se $|\phi(x)|$ é limitada então ϕ é globalmente definida;*
(ii) Se $\phi'(x)$ é limitada, então $|\phi(x)|$ não pode tender a infinito para x em intervalos finitos.

Exemplo 2.1 *Considere o PVI*

$$\left| \begin{array}{l} y' = y^2, \\ y(1) = 1, \end{array} \right.$$

cuja a solução é a função

$$y(x) = \frac{1}{2-x},$$

cujo domínio de definição é $(-\infty, 2)$.

Observação 2.4 *O PVI acima com a condição inicial* $y(0) = 0$, *possui a solução* $y \equiv 0$ *definida para todo* x.

Exemplo 2.2 *Considere o PVI*

$$\left| \begin{array}{l} y' = -\dfrac{1}{x^2} cos \dfrac{1}{x}, \\ y\left(\frac{1}{\pi}\right) = 0, \end{array} \right.$$

cuja a solução é a função

$$y(x) = sen \frac{1}{x},$$

cujo domínio de definição é $(0, \infty)$.

Observação 2.5 *No exemplo acima temos*

$$y'(x) = -\frac{1}{x^2} cos \frac{1}{x}$$

a qual é limitada para $x \geq x_0 > 0$. *Portanto, todas as soluções deste PVI, com* $y(x_0) = y_0$ *possuem intervalos maximais com* $w_+ = +\infty$.

Capítulo 3

Problema de Cauchy com f contínua

O objetivo deste Capítulo é estudar o problema de Cauchy (3.1) quando a não linearidade $f(x)$ é apenas uma função contínua, ou seja, estudar o problema de Cauchy

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt} = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{array} \right. \tag{3.1}$$

Provaremos a existência de solução para o problema de Cauchy (3.1), mas não a unicidade.

Quando a não linearidade $f(x)$ é contínua, mas não Lipschitiziana, a nossa abordagem será aproximar o problema (3.1) por uma sequência (x_n) de problemas

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(x_n) \\ x(0) = x_0 \end{array} \right. \tag{3.2}$$

onde cada f_n é uma função lipschitiziana. E, pelo Teorema 1, para cada $n \in \mathbb{N}$ encontrar uma solução x_n. A idéia é mostrar que alguma subsequência destas soluções converge para uma solução do problema (3.1).

3.1 Existência de Solução Local

Teorema 3.1 *Seja $f(x)$ uma função contínua. Então, existe um $T > 0$ tal que o problema*

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt} = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{array} \right. \tag{3.3}$$

tem pelo menos uma solução sobre o intervalo $[0, T]$.

Demonstração: Aproximaremos a solução do Problema (3.3) por uma sequência soluções de problemas uniformemente lipschitizianos, para o qual o Teorema (2.1) garante uma solução. A única complicação é garantir que todas as soluções estão definidas sobre o mesmo intervalo de existência. Para este fim, note que para $|x - x_0| \leq R$, podemos garantir que $|f(x)| \leq M(R)$, pela continuidade de f, onde M é uma constante que depende de R. Escolha algum $R > 0$ e seja

$$T = \frac{R}{2M(R)}, \tag{3.4}$$

podemos escolher R que maximize o tempo T.

Agora, usando a Proposição 1.7, podemos aproximar $f(x)$ por uma sequência de funções lipschitizianas $\{f_n\}$ de modo que

$$\sup_{|x-x_0|\leq R} |f_n(x)| \leq 2M(R) \ \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Agora concidere as soluções $x_n(t)$ do problema

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(x_n) \\ x_n(0) = x_0 \end{array} \right. \tag{3.5}$$

Como f_n é uma função Lipschitiziana, existe uma solução local do problema (3.5) pelo Teorema (2.1).

Usando a formulação integral dado pelo Teorema 2.4, temos, dada nossa escolha de T em (3.4), temos

$$\sup_{|x_n-x_0|\leq R} |f_n(x)| \leq R,$$

e assim o Teorema 2.3 mostra que todas as soluções existem sobre $[0, T]$. De maneira análoga, podemos mostrar que

$$|x_n(s) - x_n(t)| \leq 2M(R)|s - t|,$$

a sequência $\{x_n\}$ é uma sequência de funções de $[0, T]$ em $\mathbb{R}^m$ uniformemente limitada e equicontínua. Portanto, pelo Teorema de Arzelà-Ascoli, garantimos que existe uma subsequência $\{x_{n_j}\}$ de $\{x_n\}$ a qual converge uniformemente para uma função contínua x, isto é,

$$\sup_{t\in[0,T]} |x_{n_j}(t) - x(t)| \to x \text{ quando } j \to \infty.$$

A função $x(t)$ é claramente uma candidata para a solução do problema (3.3). Para mostrar que $x(t)$ é uma solução, considere a forma integral de (3.4), isto é,

$$x_{n_j}(t) = x_0 + \int_0^t f_{n_j}(x_{n_j}(s))ds.$$

Como x_{n_j} converge uniformemente para x e f_{n_j} converge uniformemente para f, todos os termos converge uniformemente sobre $[0, T]$. Portanto, a partir da igualdade acima, obtemos

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(x(s))ds,$$

de modo que x é de fato uma solução do problema de Cauchy (3.3) sobre $[0, T]$. ■

Observação 3.1 *A falta de unicidade não é apenas um artefato da prova, como mostra o seguinte exemplo.*

Exemplo 3.1 *A equação*

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt} = x^{\frac{1}{2}} \\ x(0) = 0 \end{array} \right.$$

tem para todo $t \geq 0$, uma infinidade de soluções, dadas por

$$x_c(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq c, \\ \dfrac{(t-c)^2}{4}, & t > c, \end{cases}$$

onde $c \geq 0$.

3.2 Desigualdade de Gronwall

Lema 3.1 (Gronwall) *Sejam u e v funções contínuas não negativas em $[a, b]$ tais que, para $\alpha \geq 0$, satisfaz a desigualdade*

$$u(t) \leq \alpha + \int_a^t v(s)u(s)ds, \ \ t \in [a, b]. \tag{3.6}$$

Então,

$$u(t) \leq \alpha e^{\int_a^t v(s)ds}.$$

Em particular, se $\alpha = 0$ então $u \equiv 0$.

Demonstração: Se $\alpha > 0$, para todo $w(t) = \alpha + \int_\alpha^t v(s)u(s)ds$, temos $w(\alpha) = \alpha$, $w(t) \geq \alpha > 0$. De

$$w'(t) = v(t)u(t) \ \leq v(t)w(t),$$

temos

$$\frac{w'(t)}{w(t)} \ \leq \ v(t).$$

Integrando de α a t, obtemos

$$\frac{w(t)}{\alpha} \ \leq e^{\int_\alpha^t v(s)ds},$$

donde

$$u(t) \leq w(t) \leq \alpha e^{\int_\alpha^t v(s)ds}.$$

Se $\alpha = 0$, o caso anterior implica que, para todo $\alpha' > 0$,

$$u(t) \leq \alpha' e^{\int_\alpha^t v(s)ds}, \ para \ todo \ t \geq \alpha$$

donde $u(t) \equiv 0$. ■

Proposição 3.1 *Seja K a constante de Lipschitz de f. Então, para $t \in I(t_0, y_0) \bigcap I(t_0, y_0)$, temos*

$$\mid \varphi(t, t_0, x_0) - \varphi(t, t_0, y_0) \mid \leq e^{K|t-t_0} \mid x_0 - y_0 \mid$$

Demonstração: Sejam $\varphi(t) = \varphi(t, t_0, x_0)$, $\psi(t) = \varphi(t, t_0, x_0)$. Então

$$\varphi(t) - \psi(t) = x_0 - y_0 + \int_{t_0}^t [f(s, \varphi(s)) - f(s, \psi(s))]ds,$$

donde

$$\mid \varphi(t) - \psi(t) \mid \leq \mid x_0 - y_0 \mid + \mid \int_{t_0}^t K \mid \varphi(s) - \psi(s) \mid ds \mid .$$

Se $t \geq t_0$ a proposição decorre do lema anterior para $\alpha = \mid x_0 - y_0 \mid$, $u(t) = \mid \varphi(t) - \psi(t) \mid$ e $v(t) = K$.

Se $t \leq t_0$, a proposição resulta do caso anterior aplicado a $x' = -f(-t, x)$, cuja solução no intervalo $(-t_0, x_0)$ é $\psi(t, -t_0, x_0) = \varphi(-t, t_0, x_0)$. Se $t \leq t_0$, então $-t \geq -t_0$ e, pelo caso anterior,

$$\mid \varphi(t) - \psi(t) \mid = \mid \varphi(-t, -t_0, x_0) - \psi(-t, -t_0, y_0) \mid \leq e^{K|t-t_0|} \mid x_0 - y_0 \mid .$$

Logo,

$$\mid \varphi(t) - \psi(t) \mid \leq e^{K|t-t_0|} \mid x_0 - y_0 \mid .$$

■

Referências Bibliográficas

[1] Boyce, E.W and Diprima, C. R., *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno,* 8^a edição, LTC, Rio de Janeiro, 2006.

[2] Birkhoff, G., and Rota, G.C., *Ordinary Differential Equations* 4 th ed.,Wiley, New York, 1989.

[3] Figueiredo, D.G e Neves, A. F., *Equações Diferenciais Aplicadas* SBM, Rio de Janeiro, 1997.

[4] Lima, E. L., *Espaços Métricos,* Projeto Euclides, 3^a Edição, IMPA, Rio de Janeiro, 1993.

[5] Louredo, A. T e at al., *Cálculo Avançado*, Eduepb, Campina Grande, 2010.

[6] Robinson, J.C., *Infinite -Dimensional Dynamical System* First Edition, Cambridge University Press, London, 2001.

[7] Simmons, F.G., *Differential Equations with Applications and Historical Notas,* 2 nd ed. McGraw-Hill, New York, 1991.

[8] Sotomayor, J., *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias,* Rio de Janeiro, IMPA, 1979.