



UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA  
PURA E APLICADA

**Séries de Fourier e Aplicações**

**ANDRÉ GALDINO PEREIRA**

Campina Grande - PB

Abril de 2011

André Galdino Pereira

## **Séries de Fourier e Aplicações**

Trabalho de Conclusão do Curso de Especialização em Matemática Pura e Aplicada do Departamento de Matemática e Estatística do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba em cumprimento às exigências legais para obtenção do título de Especialista em Matemática Pura e Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Manuel Antolino Milla Miranda

Campina Grande-PB

Abril de 2011

André Galdino Pereira

## Séries de Fourier e Aplicações

Aprovado em: 28/04/2011

### COMISSÃO EXAMINADORA



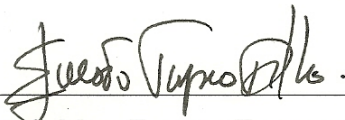
---

Prof. Dr. Manuel Antolino Milla Miranda  
Departamento de Matemática - CCT/UEPB  
Orientador



---

Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo  
Departamento de Matemática - CCT/UEPB  
Examinador



---

Prof. Msc. Ernesto Trajano de Lima Filho  
Departamento de Matemática - CCT/UEPB  
Examinador

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL-UEPB

P436s Pereira, André Galdino.

Séries de Fourier e Aplicações. [manuscrito] / André Galdino Pereira. - 2011.  
47 f. il. color.

Monografia (Especialização em Matemática Pura e Aplicada) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Tecnologias, 2011.

"Orientação: Prof. Dr. Manuel Antolino Milla Miranda, Departamento de Matemática".

1. Análise de Fourier. 2. Função periódica. 3. Matemática.  
I. Título.

22. ed. CDD 515.9

# Sumário

<b>Agradecimentos</b>	<b>6</b>
<b>Prefácio</b>	<b>7</b>
<b>Resumo</b>	<b>8</b>
<b>Abstract</b>	<b>9</b>
<b>1 Fatos Históricos</b>	<b>10</b>
<b>2 Séries de Fourier</b>	<b>14</b>
2.1 Produto Escalar e Norma . . . . .	14
2.2 Séries de Fourier . . . . .	19
2.3 Fórmulas Especiais . . . . .	20
<b>3 Aplicações às Equações Diferenciais Parciais</b>	<b>29</b>
3.1 Equação do Calor em uma Barra . . . . .	29
3.2 Dedução da Equação do Fluxo de Calor em um Fio . . . . .	30
3.3 Extremidades a Temperaturas Fixas . . . . .	31
3.4 Barra Isolada nos Extremos . . . . .	35
3.5 Equação da Onda . . . . .	37
3.6 Dedução da Equação da Onda . . . . .	38

3.7 Corda elástica com extremidades presas . . . . . 41

**Referências Bibliográficas** . . . . . **46**

# Agradecimentos

À Deus a meus pais, irmãos, familiares, professores, colegas de turma e amigos.

# Prefácio

Nesta monografia faremos um estudo bibliográfico referentes a relevantes resultados relativos as séries de Fourier e faremos algumas aplicações das séries de Fourier no estudo das equações da onda e calor.

As equações da onda e calor são importantes modelos de equações da física matemática. Nesta monografia faremos a dedução destes modelos e apresentaremos um método de solução via séries de Fourier.



# Resumo

As séries de Fourier são modelos matemáticos utilizados para desenvolver estudos relacionados a processos físicos, de tal modo que formam representações de uma função periódica (muitas vezes, nos casos mais simples, tidas como tendo período  $2\pi$ ) ou como uma soma de funções periódicas.

Segundo Fourier, qualquer função periódica, por mais complicada que seja, pode ser representada como a soma de várias funções seno e cosseno com amplitudes, fases e períodos escolhidos convenientemente. E mais, tais séries de funções podem ser infinitas, de tal forma que a convergência destas séries dependem apenas da diferenciabilidade da função  $f$  que é contínua por partes.

Em resumo, qualquer função  $f(x)$  pode, segundo Fourier, ser escrita na forma da soma de uma série de funções seno e cosseno da seguinte forma geral:

$$f(x) = a_0 + a_1 \text{sen}(x) + a_2 \text{sen}(2x) + a_3 \text{sen}(3x) + \dots + b_1 \text{cos}(x) + b_2 \text{cos}(2x) + b_3 \text{cos}(3x) + \dots$$

Os pontinhos nessa equação indicam que os termos tipo seno e cosseno podem se estender indefinidamente, se necessário, para melhor representação da função original  $f(x)$ .

Restava então, achar uma forma de calcular os coeficientes  $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, b_1, b_2, b_3, \dots$ , etc., de cada termo da série. Esses coeficientes, como vemos, são as amplitudes de cada onda componente do desenvolvimento em série.

Pois foi isso que Fourier conseguiu fazer: achou uma forma simples e elegante de calcular esses coeficientes, coisa que escapara de gigantes como Euler e Bernoulli.

# Abstract

The Fourier series are mathematical models used to develop studies related to physical processes, so that form representations of a periodic function (often in the simplest cases, believed to have period  $2\pi$ ) or as a sum of periodic functions.

According to Fourier, any periodic function however complicated, can be represented as the sum of several sine and cosine functions with amplitudes, phases and periods chosen conveniently. Moreover, such a series of functions may be infinite, so that the convergence of these series depend only on the differentiability of the function  $f$  is piecewise continuous.

In summary, any function  $f$  according to Fourier, can be written as the sum of a series of sine and cosine of the following form:

$$f(x) = a_0 + a_1 \sin(x) + a_2 \sin(2x) + a_3 \sin(3x) + \dots + b_1 \cos(x) + b_2 \cos(2x) + b_3 \cos(3x) + \dots$$

The dots in this equation indicate that the sine and cosine terms can, be extended indefinitely, if necessary to better representation of the original function  $f(x)$ .

It remained then to find a way to compute the coefficients  $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, b_1, b_2, b_3, \dots$ , etc., in each term of the serie. These rates, as we see, are the amplitudes of each wave component of the series development.

That is exactly what Fourier was able to do: he found a simple and an elegant path to calculate these coefficients, something that escaped from giants such as Euler and Bernoulli.

# Capítulo 1

## Fatos Históricos

### JEAN BAPTISTE JOSEPH FOURIER (1768 - 1830)

Fourier nasceu em 21 de março de 1768 em Auxerre, França, cidade localizada às margens do rio Yonne. Aos oito anos, já órfão do pai que era alfaiate, foi recomendado pelo bispo da cidade para ser admitido na escola militar, que era dirigida pelos beneditinos. Aos 12 anos começou a mostrar talento literário e com isso seus mestres o incentivaram a redigir sermões para sacerdotes de várias cidades, chegando alguns desses sermões a se destacar em Paris.

Considerado um menino prodígio e tendo manifestado sua vocação para a ciência já aos 13 anos, mais especificamente para álgebra, Fourier aproveitava todo o tempo de descanso na leitura de trabalhos de matemática e de física.

Em 1784, com 16 anos, foi convidado para ser professor na escola da sua cidade, Auxerre. Em virtude de sua origem modesta, foi impedido de ingressar na artilharia apesar de ter havido a recomendação de Legendre, que reconheceu em Fourier um grande talento para as ciências físicas e matemáticas. Nesta época, ainda muito atraído pela religião, Fourier iniciou sua preparação para o sacerdócio.

Em 1789 aderiu com entusiasmo à causa da Revolução Francesa, renunciando os seus votos no mosteiro beneditino de Saint-Benoit-Sur-Loire. Teve como professores Lagrange e Laplace e em 1795 tornou-se professor na recém-criada École Normale. Com a fundação da École Polytechnique foi convidado por Gaspard Monge para lecionar na cadeira de fortificações em 1796 e, depois, na de análise matemática. Chegou a ser conferencista da École e mais tarde desenvolveu trabalhos matemáticos como sua teoria para calcular raízes irracionais das

equações algébricas, o qual havia sido iniciado por Newton.

Em 1798 foi convidado por Napoleão para participar de uma expedição no Egito em companhia de Gaspard Monge e Berthollet, chamada Legião da Cultura, cujo objetivo seria desenvolver estudos arqueológicos.

À parte da expedição cultural, Napoleão obviamente executava seus planos militares no Egito, tendo, porém, um resultado desastroso. Sua armada francesa foi destruída na batalha do Nilo, o que também destruiu a passagem de volta para a França e fez com que o exército francês permanecesse no Egito por três anos.

Este tempo fez com que Fourier se tornasse um especialista em egiptologia, e também auxiliasse no estabelecimento de instituições de ensino. No período em que esteve no Egito trabalhou como engenheiro, dirigindo uma fábrica de armamentos do exército francês. Neste mesmo ano foi nomeado secretário do Institut d’Egypte, fundado por Napoleão no Cairo.

Em 1802 regressou à França tendo sido designado por Napoleão para ser prefeito de Grenoble, cargo que exerceu até 1815, e período em que começou a escrever enfaticamente sobre matemática. Com a queda de Napoleão, deixou a política e limitou-se à vida acadêmica em Paris, como membro de várias sociedades científicas. Foi condecorado com o título de barão em 1809, e em 1812 ganhou um prêmio da Académie por um ensaio sobre a teoria matemática da condução do calor. Também formulou um importante método para análise de funções periódicas.

Em 1816 foi eleito para Académie des Sciences, mas o rei da França Luís XVIII recusou-se a confirmar a sua eleição, o que acabou impedindo seu ingresso nesta academia. No entanto foi novamente eleito no ano seguinte, sendo aceito no reinado de Luís XVIII e ingressando na academia. Nesta ocasião Fourier foi nomeado secretário perpétuo das seções de matemática e física.

Em 1822, Fourier lança sua obra mais notável, "Théorie Analytique de la Chaleur" (Teoria Analítica do Calor) cujas investigações começaram em 1807, onde demonstrou que a condução do calor em corpos sólidos poderia ser expressa por séries matemáticas infinitas. Além desta obra ele escreve inúmeras memórias científicas que foram publicadas em atas da Académie des Sciences e em revistas especializadas.

Neste livro, ele dedica toda uma seção à solução do "desenvolvimento de uma função

qualquer, em série de senos e cossenos de arcos múltiplos”. Generaliza o procedimento, partindo de um caso específico para empregá-lo em qualquer caso. Fourier daria um passo decisivo, usando indiferentemente os símbolos de integração e de somatória infinita, o que conduz às chamadas séries de Fourier.

Estas séries são oriundas dos diversos problemas de valor de contorno com expansões em termos de funções trigonométricas e aplicam-se a grande número de problemas físicos e matemáticos. A análise de Fourier é muito importante na matemática moderna, e suas idéias são a base para descrever funções de ondas em sistemas complexos. É uma matéria importantíssima para comunicação de dados e telecomunicações, inclusive servindo de base para operações em mecânica quântica.

Foi de Fourier o mérito de ter criado esse novo instrumento matemático, de extraordinária engenhosidade, com o qual as funções periódicas descontínuas pudessem ser apresentadas por meio de funções contínuas. Porém este assunto já havia sido estudado antes por Euler, D’Alembert, Daniel Bernoulli e Lagrange.

Fourier faleceu em Paris vítima de um aneurisma cerebral no dia 16 de maio de 1830. Hoje a análise de Fourier é uma das técnicas matemáticas com maior número de aplicações práticas. Além de ser utilizada extensivamente em cálculo numérico nas áreas mais diversas das ciências aplicadas e engenharias, a análise de Fourier constitui ainda a base do processamento de sinais. Tem por isso um papel central nas telecomunicações modernas e também no processamento de imagens digitais. Como curiosidades: é utilizando análise de Fourier que se retira a voz das canções para fazer karaoke e também que se faz a compressão de imagens em formato JPEG.

Um dos trabalhos mais importantes que Fourier desenvolveu, no início do século 19, foi sobre as séries de funções. Segundo ele, qualquer função periódica, por mais complicada que seja, pode ser representada como a soma de várias funções seno e cosseno com amplitudes, fases e períodos escolhidos convenientemente.

Em resumo, qualquer função  $f(x)$  pode ser escrita na forma da soma de uma série de funções seno e cosseno da seguinte forma geral:

$$f(x) = a_0 + a_1 \text{sen}(x) + a_2 \text{sen}(2x) + a_3 \text{sen}(3x) + \dots + b_0 + b_1 \cos(x) + b_2 \cos(2x) + b_3 \cos(3x) + \dots$$

Restava, então, achar uma forma de calcular os coeficientes  $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, b_0, b_1, b_2, \text{etc}$ , de cada termo da série. Esses coeficientes são as amplitudes de cada onda componente do

desenvolvimento em série. Pois foi isso que Fourier conseguiu fazer: achou uma forma simples e elegante de calcular esses coeficientes, coisa que escapara de gigantes como **Euler**, **D'Alembert** e **Bernoulli**.

# Capítulo 2

## Séries de Fourier

Inicialmente, iremos abordar os principais conceitos envolvendo as Séries de Fourier e os pré-requisitos necessários para introduzir estes conceitos de forma clara e breve.

### 2.1 Produto Escalar e Norma

Os conceitos de produto escalar e norma no  $\mathbb{R}^n$  podem ser estendidos a certos espaços de funções.

**Definição 2.1** *Seja  $\mathcal{CP}[a, b]$  o espaço das funções reais contínuas por partes*

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R},$$

*considerando idênticas duas funções que diferem uma da outra apenas em um número finito de pontos.*

a) *Definimos o produto escalar ou interno das funções  $f$  e  $g$  pertencentes a  $\mathcal{CP}[a, b]$ , como*

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt. \quad (2.1)$$

b) *Para todo vetor  $f \in \mathcal{CP}[a, b]$ , definimos a norma de  $f$ , denotada por  $\|f\|$ , como sendo*

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} \quad (2.2)$$

**Exemplo 2.1** Consideremos as funções  $f(t) = t, g(t) = e^t \in \mathcal{CP}[0, 1]$ , então

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 te^t dt = te^t \Big|_0^1 - \int_0^1 e^t dt = 1 \quad (2.3)$$

Além disso,  $\|f\|^2 = \langle f, f \rangle = \int_0^1 t^2 dt = \frac{t^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$ . Assim,  $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

O produto interno satisfaz as seguintes propriedades, que são análogas às do produto escalar no  $\mathbb{R}^n$ :

- Proposição 2.1**
- a) Para todos os  $f, g \in \mathcal{CP}[a, b]$ ,  $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$ ;
  - b) Para todos os  $f_1, f_2, g \in \mathcal{CP}[a, b]$ ,  $\langle f_1 + f_2, g \rangle = \langle f_1, g \rangle + \langle f_2, g \rangle$ ;
  - c) Para todos os  $f, g \in \mathcal{CP}[a, b]$  e todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\langle \alpha f, g \rangle = \alpha \langle f, g \rangle$ ;
  - d) Para todos os  $f \in \mathcal{CP}[a, b]$ ,  $\|f\| \geq 0$  e  $f = 0$  se, e somente se,  $\|f\| = 0$ ;
  - e) Para todo vetor  $f \in \mathcal{CP}[a, b]$  e para todo escalar  $\alpha$ ,  $\|\alpha f\| = |\alpha| \|f\|$ ;

- Demonstração:**
- a)  $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt = \int_a^b g(t)f(t)dt = \langle g, f \rangle$ ;
  - b)  $\langle f + g, h \rangle = \int_a^b (f(t) + g(t))h(t)dt = \int_a^b [f(t)h(t) + g(t)h(t)]dt = \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle$ ;
  - c)  $\langle \alpha f, g \rangle = \int_a^b \alpha f(t)g(t)dt = \alpha \int_a^b f(t)g(t)dt = \alpha \langle f, g \rangle$ ;
  - d) Se  $f \neq \bar{0}$ , então existe um subintervalo de  $[a, b]$ , onde  $f^2$  é limitada inferiormente por um número positivo. Assim,  $\langle f, f \rangle = \int_a^b (f(t))^2 dt > 0$ ;
  - e)  $\|\alpha f\| = \sqrt{\langle \alpha f, \alpha f \rangle} = \sqrt{|\alpha|^2 \langle f, f \rangle} = |\alpha| \|f\|$ . ■

A seguir vamos enunciar e provar duas importantes desigualdades.

**Proposição 2.2 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)** Se  $f, g \in \mathcal{CP}[a, b]$  então

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \|g\|.$$

**Demonstração:** A norma de  $f + \lambda g$  é maior ou igual a zero, para qualquer escalar  $\lambda$ . Assim,

$$0 \leq \|f + \lambda g\|^2 = \langle f + \lambda g, f + \lambda g \rangle = \|f\|^2 + 2\lambda \langle f, g \rangle + \lambda^2 \|g\|^2 = p(\lambda). \quad (2.4)$$

Temos um polinômio do segundo grau que é maior ou igual a 0 para todo  $\lambda$ . Isto implica que

$$\Delta = 4(\langle f, g \rangle)^2 - 4\|f\|^2 \|g\|^2 \leq 0. \quad (2.5)$$



Logo,

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \|g\|.$$

■

**Proposição 2.3 (Desigualdade triangular)** *Se  $f, g \in \mathcal{CP}[a, b]$  então*

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|.$$

**Demonstração:** De fato, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos que

$$\begin{aligned} \|f + g\|^2 &= \langle f + g, f + g \rangle = \langle f, f \rangle + \langle f, g \rangle + \langle g, f \rangle + \langle g, g \rangle \\ &= \|f\|^2 + 2\langle f, g \rangle + \|g\|^2 \\ &\leq \|f\|^2 + 2|\langle f, g \rangle| + \|g\|^2 \\ &\leq \|f\|^2 + 2\|f\| \|g\| + \|g\|^2 \\ &\leq (\|f\| + \|g\|)^2 \end{aligned}$$

Tomado-se a raiz quadrada na última desigualdade, obtemos

$$\sqrt{\|f + g\|^2} \leq \sqrt{(\|f\| + \|g\|)^2}.$$

Portanto, desta desigualdade obtemos

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|.$$

■

## Ortogonalidade

Agora, vamos estender ao espaço  $\mathcal{CP}[a, b]$  o conceito de ortogonalidade.

**Definição 2.2** *Seja  $\mathcal{CP}[a, b]$ . Dizemos que um subconjunto não vazio  $X$  de  $\mathcal{CP}[a, b]$  é ortogonal se para todo par  $f$  e  $g$  de elementos distintos de  $X$ ,  $\langle f, g \rangle = 0$ . Neste caso dizemos que os elementos de  $X$  são ortogonais.*

Seja  $L$  um número real maior que zero. Seja  $\mathcal{CP}[-L, L]$  o conjunto das funções contínuas por partes do intervalo  $[-L, L]$  em  $\mathbb{R}$  com o produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-L}^L f(t)g(t)dt \tag{2.6}$$

Vamos mostrar que em relação ao produto interno  $\langle f, g \rangle = \int_{-L}^L f(t)g(t)dt$ , temos o seguinte resultado.

**Proposição 2.4** *O conjunto*

$$\mathfrak{B} = \left\{ 1, \cos \frac{\pi t}{L}, \sin \frac{\pi t}{L}, \cos \frac{2\pi t}{L}, \sin \frac{2\pi t}{L}, \dots, \cos \frac{n\pi t}{L}, \sin \frac{n\pi t}{L}, \dots \right\}$$

*é ortogonal.*

**Demonstração:** Como as funções do conjunto  $\mathfrak{B}$ , exceto a primeira, são funções cujas primitivas são periódicas de período igual a  $\frac{2L}{n}$ , então a integral de  $-L$  a  $L$  destas funções é igual a zero e portanto elas são ortogonais à função constante 1.

$$\begin{aligned} \left\langle \cos \frac{n\pi t}{L}, \sin \frac{m\pi t}{L} \right\rangle &= \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi t}{L} \sin \frac{m\pi t}{L} dt = \frac{L}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos ns \sin ms ds \\ &= \frac{L}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\sin(m+n)s + \sin(m-n)s] ds = 0 \end{aligned}$$

Para  $m \neq n$ , temos que

$$\begin{aligned} \left\langle \cos \frac{n\pi t}{L}, \cos \frac{m\pi t}{L} \right\rangle &= \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi t}{L} \cos \frac{m\pi t}{L} dt = \frac{L}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos ns \cos ms ds \\ &= \frac{L}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m+n)s + \cos(m-n)s] ds = 0 \\ &= \frac{L}{2\pi(m+n)} \sin(m+n)s \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{L}{2\pi(m-n)} \sin(m-n)s \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\langle \sin \frac{n\pi t}{L}, \sin \frac{m\pi t}{L} \right\rangle &= \int_{-L}^L \sin \frac{n\pi t}{L} \sin \frac{m\pi t}{L} dt = \frac{L}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin ns \sin ms ds \\ &= \frac{L}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [-\cos(m+n)s + \cos(m-n)s] ds = 0 \end{aligned}$$

■

**Convergência**

Podemos estender a  $\mathcal{CP}[a, b]$  o conceito de convergência de sequência de números reais.

**Definição 2.3** a) Uma sequência de funções  $f_m = f_1, f_2, \dots, f_m, \dots$  de  $\mathcal{CP}[a, b]$  converge para uma função  $f$  de  $\mathcal{CP}[a, b]$  se

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|f_m - f\| = 0.$$

Neste caso, escrevemos  $\lim_{m \rightarrow \infty} f_m = f$ .

b) Uma série de funções  $\sum_{m=0}^{\infty} f_m$  de  $\mathcal{CP}[a, b]$  converge para uma função  $f$  de  $\mathcal{CP}[a, b]$  se o limite da sequência das somas parciais converge para  $f$ , ou seja,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m f_n = f.$$

**Proposição 2.5** Se uma sequência de funções  $f_m$  de  $\mathcal{CP}[a, b]$  converge para uma função  $f$  de  $\mathcal{CP}[a, b]$ , então esta função é única a menos dos seus valores em um número finito de pontos.

**Demonstração:** Vamos supor que existam duas funções  $f$  e  $g$  tais que  $\lim_{m \rightarrow \infty} f_m = f$  e  $\lim_{m \rightarrow \infty} f_m = g$ , então pela desigualdade triangular (Proposição 2.1 na página 11) temos que

$$\|f - g\| \leq \|f - f_m\| + \|g - f_m\|.$$

Passando ao limite obtemos que  $\|f - g\| = 0$  o que implica que  $f = g$  a menos de um número finito de pontos. ■

**Proposição 2.6** a) Se uma sequência de funções  $f_m$  de  $\mathcal{CP}[a, b]$  converge para uma função  $f$  de  $\mathcal{CP}[a, b]$ , então para todo vetor  $g$  em  $\mathcal{CP}[a, b]$  a sequência de números reais  $\langle f_m, g \rangle$  converge para  $\langle f, g \rangle$ . Ou seja, se  $\lim_{m \rightarrow \infty} f_m = f$ , então

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \langle f_m, g \rangle = \left\langle \lim_{m \rightarrow \infty} f_m, g \right\rangle.$$

b) Se uma série de funções  $\sum_{m=0}^{\infty} f_m$  de  $\mathcal{CP}[a, b]$  converge para uma função  $f$  de  $\mathcal{CP}[a, b]$ , então, para toda função  $g$  de  $\mathcal{CP}[a, b]$ ,

$$\sum_{m=0}^{\infty} \langle f_m, g \rangle = \left\langle \sum_{m=0}^{\infty} f_m, g \right\rangle.$$

**Demonstração:** a) Seja  $f = \lim_{m \rightarrow \infty} f_m$ . Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos que

$$|\langle f_m, g \rangle - \langle f, g \rangle| = |\langle f_m - f, g \rangle| \leq \|f_m - f\| \|g\|.$$

Passando ao limite obtemos que  $\lim_{m \rightarrow \infty} |\langle f_m, g \rangle - \langle f, g \rangle| = 0$ . O que implica que  $\lim_{m \rightarrow \infty} \langle f_m, g \rangle = \langle f, g \rangle$ .

b) É uma consequência imediata do item anterior. ■

## 2.2 Séries de Fourier

**Proposição 2.7** *Seja  $\mathcal{CP}[a, b]$ , o espaço das funções contínuas por partes do intervalo  $[a, b]$ .*

*Seja  $g_0, g_1, g_2, \dots, g_n, \dots$  um subconjunto de  $\mathcal{CP}[a, b]$  de vetores ortogonais não nulos. Se*

$$f = \sum_{m=0}^{\infty} c_m g_m$$

então

$$c_m = \frac{\langle f, g_m \rangle}{\|g_m\|^2}, \text{ para } m = 0, 1, 2, \dots$$

**Demonstração:** Seja  $f = \sum_{m=0}^{\infty} c_m g_m$ . Fazendo o produto escalar de  $f$  com  $g_n$ , para  $n = 0, 1, 2, \dots$  obtemos que

$$f = \sum_{m=0}^{\infty} c_m g_m$$

$$\langle f, g_n \rangle = \left\langle \sum_{m=0}^{\infty} c_m g_m, g_n \right\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \langle g_m, g_n \rangle = c_n \|g_n\|^2,$$

pois como os vetores  $g_m$  são ortogonais  $\langle g_m, g_n \rangle = 0$ , se  $m \neq n$ . Assim,

$$c_n = \frac{\langle f, g_n \rangle}{\|g_n\|^2}, \text{ para } n = 0, 1, 2, \dots$$

■

**Exemplo 2.2** *Seja  $L$  um número real maior que zero. Seja  $\mathcal{CP}[-L, L]$  o conjunto das funções contínuas por partes do intervalo  $[-L, L]$  em  $\mathbb{R}$  com o produto interno definido por*

$$\langle f, g \rangle = \int_{-L}^L f(t)g(t)dt.$$

Já mostramos no Exemplo 2.1 que o conjunto

$$\mathfrak{B} = \left\{ 1, \cos \frac{\pi t}{L}, \sin \frac{\pi t}{L}, \cos \frac{2\pi t}{L}, \sin \frac{2\pi t}{L}, \dots, \cos \frac{n\pi t}{L}, \sin \frac{n\pi t}{L}, \dots \right\}$$

é ortogonal.

Vamos aplicar a Proposição 2.5 a este exemplo. Para tanto, vamos calcular as normas dos seus elementos.

$$\begin{aligned} \langle 1, 1 \rangle &= \int_{-L}^L dt = 2L \\ \left\langle \cos \frac{n\pi t}{L}, \cos \frac{n\pi t}{L} \right\rangle &= \int_{-L}^L \cos^2 \frac{n\pi t}{L} dt = \frac{L}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 ns ds = \frac{L}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [1 + \cos 2ns] ds = L \\ \left\langle \sin \frac{n\pi t}{L}, \sin \frac{n\pi t}{L} \right\rangle &= \int_{-L}^L \sin^2 \frac{n\pi t}{L} dt = \frac{L}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 ns ds = \frac{L}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [1 - \cos 2ns] ds = L \end{aligned}$$

Assim, para toda função  $f \in \mathcal{CP}[-L, L]$  que possa ser escrita como a série

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos \frac{m\pi t}{L} + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin \frac{m\pi t}{L}, \quad (2.7)$$

teremos que os coeficientes da série serão dados por

$$a_m = \frac{\langle f, \cos \frac{m\pi t}{L} \rangle}{\|\cos \frac{m\pi t}{L}\|^2} = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{m\pi t}{L} dt, \text{ para } m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.8)$$

$$b_m = \frac{\langle f, \sin \frac{m\pi t}{L} \rangle}{\|\sin \frac{m\pi t}{L}\|^2} = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sin \frac{m\pi t}{L} dt, \text{ para } m = 1, 2, \dots \quad (2.9)$$

A série (2.7) com os coeficientes dados acima é chamada Séries de Fourier.

## 2.3 Fórmulas Especiais

**Definição 2.4** Uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é periódica, se existe um número real  $p \in \mathbb{R}$  tal que, para todo  $x \in \mathbb{R}$ :

$$f(x + p) = f(x),$$

o número  $p$  é chamado de período fundamental de  $f$ , ou simplesmente período de  $f$ .

Se uma função tem período  $p$ , dizemos que esta função é  $p$ -periódica e denotamos este fato por  $f(x) = f(x + p)$ .

**O núcleo de Dirichlet**

O núcleo de Dirichlet de ordem  $n$ , é o polinômio trigonométrico

$$D_n(t) = \frac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + \dots + \cos nt. \tag{2.10}$$

Obviamente,  $D_n(t)$  é uma função  $2\pi$ -periódica que satisfaz a fórmula

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) dt = \pi$$

Como  $D_n(t)$  é par, segue-se as fórmulas:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} D_n(t) dt = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 D_n(t) dt = \frac{1}{2} \tag{2.11}$$

Sendo

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt \quad \text{e} \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sen kt dt, \text{ com } f \in \mathcal{CP}[-L, L]$$

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sen kx)$$

**Proposição 2.8 (Fórmula de Dirichlet)**

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t) dt, \quad f \in \mathcal{CP}[-L, L], \quad 2\pi - \text{periódica} \tag{2.12}$$

**Demonstração:** Por construção

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + \sen kx) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \sum_{k=1}^n \left[ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \cos kx dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sen kt \sen kx dt \right] = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n (\cos kt \cos kx + \sen kt \sen kx) \right] dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(t-x) \right] dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(t-x) dt. \end{aligned}$$

Fazendo a substituição  $t-x = u$  devemos ter:

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+u) D_n(u) du \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u) D_n(u) du \end{aligned}$$

$f = 2\pi$ -periódica. ■



Por outro lado,

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= \int_a^b f(u) \operatorname{sen} \lambda u \, du = \\ &= \int_a^{b-\frac{\pi}{\lambda}} f(u) \operatorname{sen} \lambda u \, du + \int_{b-\frac{\pi}{\lambda}}^b f(u) \operatorname{sen} \lambda u \, du. \end{aligned}$$

Somando membro a membro, teremos:

$$\begin{aligned} 2I(\lambda) &= - \int_{a-\frac{\pi}{\lambda}}^a f\left(u + \frac{\pi}{\lambda}\right) \operatorname{sen} \lambda u \, du + \int_{b-\frac{\pi}{\lambda}}^b f(u) \operatorname{sen} \lambda u \, du + \\ &+ \int_a^{b-\frac{\pi}{\lambda}} \left[ f(u) - f\left(u + \frac{\pi}{\lambda}\right) \right] \operatorname{sen} \lambda u \, du \rightarrow 0, \quad \text{se } \lambda \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

que é evidente no caso das duas primeiras integrais, já que  $f$  é limitada. E no caso da última integral, é devida a continuidade uniforme de  $f$  em  $[a, b]$ . ■

Na Proposição 2.5 fizemos a suposição de que a série  $\sum_{m=0}^{\infty} c_m g_m$  convergia para a função  $f$ . Vamos considerar o problema inverso. Dada uma função  $f \in \mathcal{CP}[-L, L]$  podemos calcular os coeficientes  $a_m$  e  $b_m$  usando (1.9) e (1.10) e nos perguntar se a série obtida converge ou não. O teorema seguinte, afirma que para toda função  $f$  contínua por partes em  $[-L, L]$ , a série de Fourier de  $f$  converge.

**Teorema 2.1 (Teorema de Convergência de Fourier)** *Seja  $L$  um número real maior que zero. Para toda função  $f$  pertencente ao espaço das funções contínuas por partes,  $\mathcal{CP}[-L, L]$ , a série de Fourier de  $f$*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos \frac{m\pi t}{L} + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \operatorname{sen} \frac{m\pi t}{L},$$

em que

$$a_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{m\pi t}{L} dt, \text{ para } m = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \operatorname{sen} \frac{m\pi t}{L} dt, \text{ para } m = 1, 2, \dots$$

converge para  $f$  na norma  $\|f\| = \left( \int_{-L}^L (f(t))^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$ . Ou seja, podemos escrever

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos \frac{m\pi t}{L} + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \operatorname{sen} \frac{m\pi t}{L}$$



Agora, provaremos o Teorema 2.1 que representa um dos principais resultados sobre as Séries de Fourier.

**Definição 2.6 (Limites laterais)** Usaremos a notação

$$\lim_{x \rightarrow b} f(x),$$

para nos referirmos ao limite, quando  $x \rightarrow b$ , da restrição de  $f$  aos pontos do seu domínio que estão em  $[a, b]$ .

Nos termos desta notação, introduziremos o limite pela esquerda,  $f(b-)$ , e o limite pela direita,  $f(b+)$ , de  $f$  em  $b$ , como se segue:

$$f(b-) = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x), \text{ quando } x < b, x \text{ tende a } b \text{ pela esquerda}$$

e

$$f(b+) = \lim_{x \rightarrow b^+} f(x), \text{ quando } x > b, x \text{ tende a } b \text{ pela direita}$$

Se ambos limites  $f(b-)$  e  $f(b+)$ , existem e são finitos e diferentes, dizemos que  $b$  é um ponto de descontinuidade de salto de  $f$ .

**Definição 2.7 (Valor médio de uma função em um ponto)** Quando a função não está definida no ponto  $x = b$  mas existem os limites laterais à esquerda e à direita de  $b$ , podemos definir a função neste ponto como sendo o valor médio (média aritmética) dos limites laterais à esquerda e à direita no ponto  $b$ , isto é:

$$\bar{f}(b) = \frac{1}{2}f(b+) + \frac{1}{2}f(b-)$$

Se  $f = f(x)$  é uma função contínua no ponto  $x = b$ , então  $f(b+) = f(b-) = \bar{f}(b) = f(b)$

Daqui em diante iremos nos referir apenas a *funções contínuas por partes* que satisfaçam a seguinte condição

$$f(x) = \frac{1}{2}[f(x-) + f(x+)], \quad x \in \text{Dom}f \quad (2.15)$$

A condição (2.15) se satisfaz automaticamente nos pontos de continuidade de  $f$ , então basta-nos prová-la nos pontos de descontinuidade.

Para que a igualdade no Teorema 2.1 seja satisfeita, basta que  $f$  seja derivável por partes e  $2\pi$ -periódica. A seguir passaremos a provar o teorema 2.1.

**Demonstração:** Suponhamos que  $f$  seja derivável por partes e  $2\pi$ -periódica. Segundo a fórmula de Dirichlet (2.12), válida para funções contínuas por partes e  $2\pi$ -periódicas, teremos:

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(x+t)D_n(t)dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x+t)D_n(t)dt.$$

Como  $f(x) = \frac{1}{2}f(x-) + \frac{1}{2}f(x+)$ , temos que, de acordo com as fórmulas (2.11)

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(x-)D_n(t)dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x-)D_n(t)dt.$$

subtraindo estas duas igualdades, temos:

$$\begin{aligned} S_n(x) - f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 [f(x+t) - f(x-)]D_n(t)dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x+t) - f(x+)]D_n(t)dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \frac{f(x+t) - f(x-)}{2\text{sen } \frac{t}{2}} \text{sen} \left( n + \frac{1}{2} \right) t dt + \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x+t) - f(x+)}{2\text{sen } \frac{t}{2}} \text{sen} \left( n + \frac{1}{2} \right) t dt \rightarrow 0 + 0 = 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

pela fórmula de Riemann-Lebesgue, uma vez que as funções

$$\phi_x : t \rightarrow \frac{f(x+t) - f(x-)}{2\text{sen } \frac{t}{2}}, \quad \psi_x : t \rightarrow \frac{f(x+t) - f(x+)}{2\text{sen } \frac{t}{2}},$$

são contínuas por partes nos intervalos  $-\pi \leq t \leq 0$  e  $0 \leq t \leq \pi$ , respectivamente.

De fato, as descontinuidades de  $\phi_x$  no intervalo semiaberto  $-\pi \leq t < 0$  coincide com as de  $f(x+t)$ , enquanto que  $\phi_x$  é contínua em  $t = 0$ , já que

$$\frac{f(x+t) - f(x-)}{2\text{sen } \frac{t}{2}} = \frac{f(x+t) - f(x-)}{t} \cdot \frac{t}{2\text{sen } \frac{t}{2}} \rightarrow f'(x-),$$

quando  $t \rightarrow 0, t < 0$ .

Do mesmo modo, as descontinuidades de  $\psi_x$  no intervalo semiaberto  $0 < t \leq \pi$  coincide com as de  $f(x+t)$ , enquanto que  $\psi_x$  é contínua em  $t = 0$ , já que

$$\frac{f(x+t) - f(x+)}{2\text{sen } \frac{t}{2}} = \frac{f(x+t) - f(x+)}{t} \cdot \frac{t}{2\text{sen } \frac{t}{2}} \rightarrow f'(x+),$$

quando  $t \rightarrow 0, t > 0$ .

Concluimos então, que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [S_n(x) - f(x)] = 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.16)$$

Mas, para demonstrar o Teorema, temos que provar a convergência da Séries de Fourier para a função  $f$  no intervalo  $-\pi < x < \pi$ . Para tanto, definiremos uma função  $2\pi$ -periódica  $\phi$  tal que

$$\phi(x) = f(x), \quad -\pi < x < \pi,$$

e, analogamente, demonstra-se a convergência da série para a função  $\phi$ . Pois, ao restringir a  $\phi$  ao intervalo  $-\pi < x < \pi$  podemos escrever

$$\phi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \text{sen } nx), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Logo, como por definição  $\phi(x) = f(x)$ , teremos

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \text{sen } nx), \quad -\pi < x < \pi,$$

o que prova o Teorema. ■

**Observação 2.1** *A partir da série de Fourier para funções  $2\pi$ -periódicas podemos obter a série de Fourier para funções periódicas com período  $2L$ . Basta tomar a mudança de variável  $x = \frac{\pi t}{L}$  para obter a nova função, agora dependente da variável  $t$ , que será  $2L$ -periódica e integrável no intervalo simétrico  $[-L, L]$ .*

### Paridade das funções

Se uma função  $f \in \mathcal{CP}[-L, L]$  é par, isto é,  $f(-t) = f(t)$ , para todo  $t \in [-L, L]$ , e pode ser escrita com a série

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos \frac{m\pi t}{L} + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \text{sen} \frac{m\pi t}{L},$$

então os coeficientes do Exemplo 2.2 são dados por:

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{m\pi t}{L} dt = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \cos \frac{m\pi t}{L} dt, \text{ para } m = 0, 1, 2, \dots \\ b_m &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \text{sen} \frac{m\pi t}{L} dt = 0, \text{ para } m = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Analogamente, se uma função  $f \in \mathcal{CP}[-L, L]$  é ímpar, ou melhor,  $f(-t) = -f(t)$ , para todo  $t \in [-L, L]$ , e pode ser escrita como a série

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos \frac{m\pi t}{L} + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \text{sen} \frac{m\pi t}{L},$$

então os coeficientes obtidos no Exemplo 2.2 são dados por:

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{m\pi t}{L} dt = 0, \text{ para } m = 0, 1, 2, \dots \\ b_m &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \text{sen} \frac{m\pi t}{L} dt = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \text{sen} \frac{m\pi t}{L} dt, \text{ para } m = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Para funções  $f$  que são contínuas por partes em  $[0, L]$  podemos prolongá-las de forma que elas se tornem par ou ímpar no intervalo  $[-L, L]$ .

**Corolário 2.1** *Seja  $L$  um número real maior que zero. Para toda função  $f$  pertencente ao espaço das funções contínuas por partes,  $\mathcal{CP}[0, L]$ ,*

*a série de Fourier de cossenos de  $f$*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos \frac{m\pi t}{L},$$

*a série de Fourier de senos de  $f$*

$$\sum_{m=1}^{\infty} b_m \text{sen} \frac{m\pi t}{L},$$

em que

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \cos \frac{m\pi t}{L} dt, \text{ para } m = 0, 1, 2, \dots \\ b_m &= \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \text{sen} \frac{m\pi t}{L} dt, \text{ para } m = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

convergem para  $f$  na norma  $\|f\| = \left( \int_0^L (f(t))^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$ . Ou seja, podemos escrever

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos \frac{m\pi t}{L} = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \text{sen} \frac{m\pi t}{L}.$$

**Exemplo 2.3** Seja  $L$  um número real maior que zero. Considere a função  $f_{c,d}^{(0)} : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f_{c,d}^{(0)} = \begin{cases} 1, & \text{se } cL \leq t \leq dL \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

para  $c$  e  $d$  fixos satisfazendo,  $0 \leq c < d \leq 1$ .

Vamos calcular as séries de Fourier de senos e cossenos de  $f_{c,d}^{(0)}$ . Para a série de cossenos temos que

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{L} \int_{cL}^{dL} f(t) dt = \frac{2}{L} \int_{cL}^{dL} dt = 2(d - c), \\ a_m &= \frac{2}{L} \int_{cL}^{dL} f(t) \cos \frac{m\pi t}{L} dt = \frac{2}{L} \int_{cL}^{dL} \cos \frac{m\pi t}{L} dt = \frac{2}{m\pi} \operatorname{sen} s \Big|_{m\pi c}^{m\pi d}, \text{ para } m = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Assim, a série de Fourier de cossenos de  $f$  é

$$f_{c,d}^{(0)}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos \frac{m\pi t}{L} = (d - c) + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} m\pi d - \operatorname{sen} m\pi c}{m} \cos \frac{m\pi t}{L}.$$

Observe que a série de Fourier de cossenos da função constante igual a 1,  $f_{0,1}^{(0)}$ , tem somente o primeiro termo diferente de zero que é igual a 1. Para a série de senos temos que para  $m = 1, 2, \dots$ ,

$$b_m = \frac{2}{L} \int_{cL}^{dL} f(t) \operatorname{sen} \frac{m\pi t}{L} dt = \frac{2}{L} \int_{cL}^{dL} \operatorname{sen} \frac{m\pi t}{L} dt = -\frac{2}{m\pi} \operatorname{cos} s \Big|_{m\pi c}^{m\pi d}$$

Assim, a série de Fourier de senos de  $f_{c,d}^{(0)}$  é dada por

$$f_{c,d}^{(0)}(t) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \operatorname{sen} \frac{m\pi t}{L} = \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\operatorname{cos} m\pi c - \operatorname{cos} m\pi d}{m} \operatorname{sen} \frac{m\pi t}{L}$$

Observe que para a função constante igual a 1,  $f_{0,1}^{(0)}$  os termos de índice par são iguais a zero e neste caso a série de senos de  $f_{0,1}^{(0)}$  é dada por

$$f_{0,1}^{(0)} f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m-1} \operatorname{sen} \frac{(2m-1)\pi t}{L}$$

# Capítulo 3

## Aplicações às Equações Diferenciais Parciais

### 3.1 Equação do Calor em uma Barra

Em física, a equação do calor é um modelo matemático para a difusão de calor em sólidos. Este modelo consiste em uma equação de derivadas parciais que muitas vezes é também chamada de equação da difusão (térmica).

Suponha que tendo-se uma função  $u$  a qual descreve a temperatura em uma determinada posição  $(x, y, z)$ . Esta função irá alterar-se com o tempo na medida em que o calor se dissipa através do espaço. A equação do calor é usada para determinar a alteração na função  $u$  no tempo. Outra interessante propriedade é que se  $u$  tem uma descontinuidade em um tempo inicial  $t = t_0$ , a temperatura torna-se de perfil suave (derivável) assim que  $t > t_0$ . Por exemplo, se uma barra de metal tem temperatura 0 e outra tem temperatura 100 e elas estão colocadas juntas uma na ponta da outra, então muito rapidamente a temperatura no ponto de conexão é 50 e o gráfico da temperatura é suavizado ao longo de 0 a 100.

Apesar da equação do calor ser denotada em várias dimensões, vamos nos concentrar em deduzir e solucionar o problema do calor no modelo unidimensional, de modo que esses procedimentos estarão baseados num sistema de coordenadas cartesianas  $t0x$ .

## 3.2 Dedução da Equação do Fluxo de Calor em um Fio

Considere-se um fio metálico, cilíndrico, com área da seção reta transversal constante igual a  $\sigma$ . Suponha-se que o fio coincida com o eixo dos  $x$  de um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais  $tOx$ . Seja  $\rho$  a densidade do material, constante, sendo o fio suficientemente fino.

A quantidade de calor necessária para aumentar de um grau a temperatura de uma unidade de massa do material do fio denomina-se calor específico  $c$  do material. Suponha-se o fio completamente isolado do meio ambiente, de modo a não haver trocas de calor com o exterior. Admita-se um fluxo de calor no fio; deseja-se estudar a variação da temperatura ao longo do fio. Seja  $x$  um ponto do fio e represente-se por  $u(x, t)$  a temperatura de sua seção no ponto  $x$ , no instante  $t$ . Calcula-se a quantidade de calor em um segmento  $[x, x + \Delta x]$  do fio. Faça-se uma decomposição desse segmento através dos pontos  $x = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = x + \Delta x$ . A quantidade de calor no segmento  $[x_{i-1}, x_i]$  dessa composição é aproximadamente, no instante  $t$ , isto é,

$$\sigma \rho c (x_i - x_{i-1}) u(\xi_i, t),$$

sendo  $\xi_i$ , um ponto do intervalo  $(x_{i-1}, x_i)$ . Está se supondo que a temperatura  $u(x, t)$  seja duas vezes continuamente derivável em relação a  $x$  e uma vez continuamente derivável em relação a  $t$ . A quantidade de calor no segmento  $[x, x + \Delta x]$  será, aproximadamente,

$$\sum_{i=1}^n \sigma \rho c (x_i - x_{i-1}) u(\xi_i, t),$$

no instante  $t$ . Logo, obter-se-á uma melhor aproximação quando se fizer a amplitude máxima dos intervalos  $(x_{i-1}, x_i)$  tender para zero. Representando-se por  $Q(t)$  a quantidade de calor no instante  $t$ , no segmento  $[x, x + \Delta x]$ , o limite do somatório, quando máximo  $(x_i - x_{i-1})$  tende a zero, existe, devido às hipóteses sobre  $u(x, t)$ , obtendo-se

$$Q(t) = \int_x^{x+\Delta x} \sigma \rho c u(\xi, t) d\xi,$$

A lei de Fourier sobre transferência de calor diz que a variação do fluxo de calor através da seção reta do fio é proporcional ao gradiente da temperatura  $u(x, t)$  no ponto  $x$  considerado. O gradiente neste caso unidimensional, é  $\frac{\partial u}{\partial x}$ . O calor flui das temperaturas altas para as baixas e o gradiente tem a direção apontando para o intervalo dos valores maiores da função. Portanto,

pela Lei de Fourier, pode-se concluir que o calor flui através da seção reta em  $x$ , na proporção de

$$-k\sigma \frac{\partial u}{\partial x}(x, t),$$

sendo  $k$  uma constante própria do material, denominada condutividade térmica. Analogamente, a proporção em que o calor flui no ponto  $x + \Delta x$  é

$$-k\sigma \frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t).$$

A quantidade de calor no segmento  $[x, x + \Delta x]$  é a diferença entre o que flui em  $x + \Delta x$  e o que flui em  $x$ , devendo ser igual à variação da quantidade de calor no segmento inteiro  $[x, x + \Delta x]$ . Formalmente, tem-se

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = k\sigma \left[ \frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right],$$

isto é,

$$\int_x^{x+\Delta x} \rho\sigma c \frac{\partial u}{\partial x}(\xi, t) d\xi = k\sigma \left[ \frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right].$$

Dividindo-se ambos os membros por  $\Delta x$ , tomando-se o limite quando  $\Delta x$  tende a zero, observando-se que o integrando é uma função contínua de  $\xi$ , obtém-se

$$\rho\sigma c \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = k\sigma \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2},$$

em cada ponto  $x$  do fio. Fazendo-se  $\alpha^2 = \frac{k}{\rho c}$ , obtém-se

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

para todo ponto  $x$  do fio.

### 3.3 Extremidades a Temperaturas Fixas

Nesta seção trataremos problemas com temperaturas fixas nas extremidades.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = f(x), 0 < x < L \\ u(0, t) = T_1, u(L, t) = T_2 \end{array} \right. \quad (3.1)$$



Vamos analisar e resolver o problema inicialmente com  $T_1 = T_2 = 0$ , que chamamos de *condições homogêneas*.

### Condições Homogêneas

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = f(x), 0 < x < L \\ u(0, t) = 0, u(L, t) = 0 \end{array} \right. \quad (3.2)$$

Utilizaremos agora, um método chamado de *separação de variáveis*, que consiste em procurar uma solução na forma de um produto de uma função de  $x$  por uma função de  $t$ , ou melhor,

$$u(x, t) = X(x)T(t) \quad (3.3)$$

Derivando e substituindo-se na equação inicial obtemos

$$\alpha^2 X''(x)T(t) = X(x)T'(t) \quad (3.4)$$

que podemos reescreve-la como

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{T'(t)}{T(t)} \quad (3.5)$$

Observemos que o primeiro membro depende apenas de  $x$ , enquanto o segundo membro depende apenas de  $t$ . Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante.

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda \quad (3.6)$$

Obtemos assim, duas equações diferenciais ordinárias

$$\left\{ \begin{array}{l} X''(x) - \lambda X(x) = 0, X(0) = 0, X(L) = 0 \\ T'(t) - \alpha^2 \lambda T(t) = 0 \end{array} \right. \quad (3.7)$$

A primeira equação pode ter as seguintes soluções:

Se  $\lambda > 0$  então  $X(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$ ;

Se  $\lambda = 0$  então  $X(x) = C_1 + C_2 x$ ;

Se  $\lambda < 0$  então  $X(x) = C_1 (\text{sen } \sqrt{-\lambda}x) + C_2 (\text{cos } \sqrt{-\lambda}x)$ .

As condições de fronteira  $X(0) = 0$  e  $X(L) = 0$  implicam que  $\lambda < 0$ , mais que isso  $\lambda$  tem que ter valores dados por

$$\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}, n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.8)$$

ou seja, a primeira equação com as condições de fronteira tem solução

$$X(x) = C_1 \text{sen} \frac{n\pi x}{L}, n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.9)$$

Assim, a segunda equação diferencial tem solução

$$T(t) = C_2 e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t}, n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.10)$$

Portanto, o problema formado pela equação diferencial parcial e as condições de fronteira possui soluções da forma

$$u_n(x, t) = X(x)T(t) = c_n \text{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t} \quad (3.11)$$

Além disso, combinações lineares dessas soluções, são também soluções

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^N u_n(x, t) = \sum_{n=1}^N c_n \text{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t} \quad (3.12)$$

Mais que isso, pode-se provar que também séries

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t} \quad (3.13)$$

são soluções.

Mas, para satisfazer a condição inicial  $u(x, 0) = f(x)$ , temos que ter

$$f(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \quad (3.14)$$

Esta é a série de Fourier de senos de  $f(x)$ . Assim, pelo Corolário 2.1 se a função  $f(x)$  pertencente ao espaço das funções contínuas por partes,  $\mathcal{CP}[0, L]$ , então os coeficientes são dados por

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \text{sen} \frac{n\pi x}{L} dx, n = 1, 2, 3, \dots$$

## Condições Não Homogêneas

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = f(x), 0 < x < L \\ u(0, t) = T_1, u(L, t) = T_2 \end{array} \right. \quad (3.15)$$

Observe que uma função somente de  $x$  tal que a segunda derivada é igual a zero satisfaz a equação do calor. Assim,

$$u(x, t) = T_1 + \frac{(T_2 - T_1)}{L}x$$

satisfaz a equação do calor e as condições de fronteira  $u(0, t) = T_1$  e  $u(L, t) = T_2$ . O que sugere como solução do problema inicial

$$u(x, t) = T_1 + \frac{(T_2 - T_1)}{L}x + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t}$$

Agora, nestas condições, analisemos o comportamento da função para  $0 < x < L$  no problema.

Para satisfazer a condição inicial  $u(x, 0) = f(x)$ , temos que ter

$$f(x) = T_1 + \frac{(T_2 - T_1)}{L}x + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

ou

$$f(x) - T_1 - \frac{(T_2 - T_1)}{L}x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

Esta é a série de Fourier de senos de  $f(x) - T_1 - \frac{(T_2 - T_1)}{L}x$ . Assim, pelo colorário 2.1 na página 13, se a função  $f(x)$  pertence ao espaço das funções contínuas por partes,  $\mathcal{CP}[0, L]$ , então os coeficientes são dados por

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L \left[ f(x) - T_1 - \frac{(T_2 - T_1)}{L}x \right] \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx, n = 1, 2, 3, \dots$$

Observe que quando  $t$  tende a mais infinito a solução do problema tende à seguinte solução

$$v(x, t) = T_1 - \frac{(T_2 - T_1)}{L}x$$

chamada *solução estacionária*.

**Exemplo 3.1** Vamos considerar uma barra de 40 cm de comprimento, isolada nos lados, com coeficiente  $\alpha = 1$ , com as extremidades mantidas a temperaturas de  $10^\circ C$  e  $30^\circ C$  e tal que a temperatura inicial é dada por

$$f(x) = \begin{cases} 10 + 2x, & \text{se } 0 \leq x < 20 \\ 70 - x, & \text{se } 20 \leq x \leq 40 \end{cases}$$

Temos que resolver o problema

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < 40 \\ u(0, t) = 10, \quad u(40, t) = 30 \end{array} \right.$$

A solução é então

$$u(x, t) = 10 + \frac{x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} e^{-\frac{n^2\pi^2}{1600}t}$$

### 3.4 Barra Isolada nos Extremos

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0 \end{array} \right. \quad (3.16)$$

Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de  $x$  por uma função de  $t$ , ou seja,

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

Derivando e substituindo-se na equação obtemos

$$\alpha^2 X''(x)T(t) = X(x)T'(t)$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{T'(t)}{T(t)}$$

O primeiro membro depende apenas de  $x$ , enquanto o segundo depende apenas de  $t$ . Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, & X'(0) = 0, & X'(L) = 0 \\ T'(t) - \alpha^2 \lambda T(t) = 0 \end{cases}$$

A primeira equação pode ter como soluções,

$$\text{Se } \lambda > 0 : X(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}.$$

$$\text{Se } \lambda = 0 : X(x) = C_1 + C_2 x.$$

$$\text{Se } \lambda < 0 : X(x) = C_1 \text{sen}(\sqrt{-\lambda}x) + C_2 \text{cos}(\sqrt{-\lambda}x).$$

As condições de fronteira  $X'(0) = 0$  e  $X'(L) = 0$  implicam que  $\lambda \leq 0$ , mais que isso,  $\lambda$  tem que ter valores dados por

$$\lambda = -\frac{n^2 \pi^2}{L^2}, n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

ou seja, a solução da primeira equação com as condições de fronteiras tem solução

$$X(x) = C_1 \cos \frac{n\pi x}{L}, n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Assim a segunda equação diferencial tem solução

$$T(t) = C_2 e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t}, \text{ para } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Logo o problema formado pela equação diferencial parcial e as condições de fronteira tem soluções da forma

$$u_n(x, t) = X(x)T(t) = c_n \cos \frac{n\pi x}{L} e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t}$$

Além disso, combinações lineares dessas soluções são também solução

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^N u_n(x, t) = \sum_{n=0}^N c_n \cos \frac{n\pi x}{L} e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t}$$

Mais que isso, pode-se provar que também séries de 0 até o infinito, ou seja,

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos \frac{n\pi x}{L} e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t}$$

são soluções.

Mas para satisfazer a condição inicial  $u(x, 0) = f(x)$ , temos que ter

$$f(x) = u(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos \frac{n\pi x}{L}$$

Esta é a série de Fourier de cossenos de  $f(x)$ . Assim pelo Corolário 2.1 na página 13 se a função  $f(x)$  pertencente ao espaço das funções contínuas por partes,  $\mathcal{CP}[0, L]$ , então os coeficientes são dados por

$$c_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx, c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, n = 1, 2, 3, \dots$$

Observe que a solução tende a  $v(x, t) = c_0$ , quando  $t$  tende a mais infinito, ou seja, a temperatura da barra vai tender a ficar constante e igual ao valor médio da temperatura inicial.

### 3.5 Equação da Onda

Em física, uma onda é uma perturbação oscilante de alguma grandeza física no espaço e periódica no tempo. A oscilação espacial é caracterizada pelo comprimento de onda e a periodicidade no tempo é medida pela frequência da onda, que é o inverso do seu período. Estas duas grandezas estão relacionadas pela velocidade de propagação da onda.

Ondas podem ser descritas usando um número de variáveis, incluindo: frequência, comprimento de onda, amplitude e período.

A amplitude de uma onda é a medida da magnitude de um distúrbio em um meio durante um ciclo de onda. Por exemplo, ondas em uma corda têm sua amplitude expressada como uma distância (metros), ondas de som como pressão (pascals) e ondas eletromagnéticas como a amplitude de um campo elétrico (volts por metro). A amplitude pode ser constante (neste caso a onda é uma onda contínua), ou pode variar com tempo e/ou posição. A forma desta variação é o envelope da onda.

O período é o tempo  $T$  de um ciclo completo de uma oscilação de uma onda. A frequência  $f$  é o período dividido por uma unidade de tempo (exemplo: um segundo), e é expressa em hertz. Veja abaixo:

$$f = \frac{1}{T}.$$

Quando ondas são expressas matematicamente, a frequência angular (ômega; radianos por segundo) é constantemente usada, relacionada com frequência  $f$  em:

$$f = \frac{\omega}{2\pi}.$$

Quando uma corda é deformada, a perturbação propaga-se por toda a corda, refletindo-se nas suas extremidades fixas. Da interferência das várias ondas pode resultar uma onda estacionária, ou seja, um padrão de oscilação caracterizado por sítios (os nodos) onde não há movimento. As frequências de vibração variam com o comprimento da corda e com as suas características (material, tensão, espessura), que determinam a velocidade de propagação das ondas. À frequência mais baixa a que a corda vibra chama-se frequência fundamental.

### A equação universal da onda

A forma mais simples desta equação é:

$$v = \lambda f$$

em que:

$v$ : Velocidade da onda

$\lambda$ : Comprimento de onda

$f$ : Frequência de onda

## 3.6 Dedução da Equação da Onda

Por corda entende-se um fio fino e flexível. Supondo-se que, em estado de equilíbrio, a corda coincida com o eixo dos  $x$  de um sistema de coordenadas cartesianas com origem num ponto 0 do plano  $\mathbb{R}^2$ ; limitar-se-à, aqui, ao estudo de pequenas oscilações transversais. Por transversal entende-se a oscilação que se realiza em um plano que contém o eixo dos  $x$  e em que cada elemento da corda se desloca perpendicularmente a esse eixo.

Representa-se por  $u(x, t)$  o deslocamento de cada ponto de  $x$  da corda no instante  $t$ , a partir de sua posição de equilíbrio. As hipóteses que se seguem são necessárias para a fundamentação das considerações posteriores.

- a) Todas as forças de atrito, tanto internas como externas, não serão consideradas.
- b) A intensidade das forças gravitacionais é pequena quando comparada com as tensões na corda.
- c) As amplitudes  $u(x, t)$  das oscilações e suas derivadas são pequenas, de modo que seus quadrados e produtos não são considerados nos cálculos quando comparados com a unidade.

Num instante  $t$  fixo, suponha-se que o perfil da corda seja o representado na Figura 1,

onde o segmento  $\overline{x_1x_2}$  se deformou, ao movimento, no arco de curva  $\widehat{M_1M_2}$ .

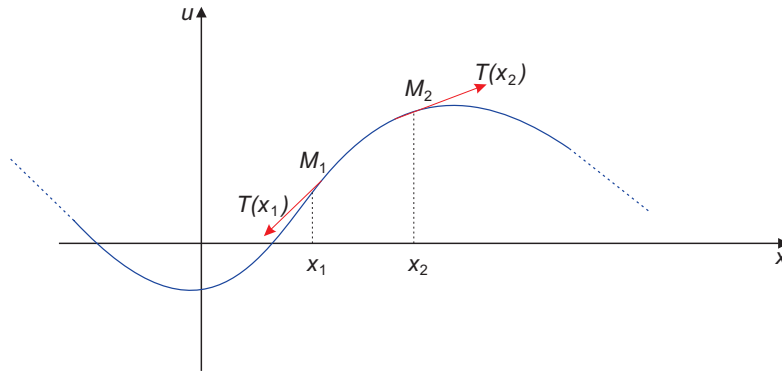


Figura 1: Segmento deformado.

O comprimento do arco  $\widehat{M_1M_2}$ , no instante  $t$ , é dado por

$$s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} dx.$$

Em virtude da hipótese (c) de pequenas oscilações, obtém-se

$$s_2 \approx x_2 - x_1,$$

isto é, considera-se  $s$  igual a  $x_2 - x_1$ . Desse modo, quando se estudam pequenas oscilações, não há variação do comprimento do segmento  $\overline{x_1x_2}$ . Daí, pela Lei de Hooke, pode-se concluir que a intensidade da tensão  $T$ , em cada ponto, não varia com o tempo, ou seja, que a variação da tensão durante o movimento não é levada em conta em presença da tensão de equilíbrio  $T_0$ . Aqui,  $T_0$  é a tensão a que está submetido o segmento  $\overline{x_1x_2}$  na posição de equilíbrio.

Como por hipótese, o movimento é na direção perpendicular ao eixo dos  $x$  e as forças externas e de inércia têm direção também perpendicular a esse eixo, deduz-se que o arco  $\widehat{M_1M_2}$  não possui aceleração na direção  $x$ , isto é, a resultante das forças na direção  $x$  é nula. Então, representando-se por  $\alpha$  o ângulo agudo que a direção  $T$  faz com o eixo dos  $x$ , no instante  $t$ , tem-se

$$T(x_2) \cos \alpha(x_2) - T(x_1) \cos \alpha(x_1) = 0.$$

Da hipótese de serem pequenas as oscilações vem

$$\cos \alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}} \approx 1,$$



resultando que  $T(x_2) \approx T(x_1)$  quaisquer que sejam  $x_1$  e  $x_2$  da corda. Assim,  $T$  não depende de  $x$  e será identificada com  $T_0$  para todo  $x$  e  $t$ . Vale a pena lembrar o Princípio de d'Alembert:

### Princípio de d'Alembert:

”Num sistema material em movimento, as forças nele aplicadas e as forças de inércia se equilibram”.

A equação diferencial de pequenas oscilações de uma corda está deduzida como aplicação desse princípio. Para tanto, serão explicitadas as forças que atuam na corda. Viu-se que, devido às condições impostas, as forças responsáveis pelo movimento são as componentes das tensões na direção dos deslocamentos  $u$ , as forças externas e as forças de inércia. Calculando-se essas forças, obtém-se:

a) **resultante das tensões na direção  $u$ :**

$$F_1 = T_0[\text{sen } \alpha(x_2) - \text{sen } \alpha(x_1)];$$

sendo:

$$\text{sen } \alpha(x) = \frac{\text{tg } \alpha(x)}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \alpha(x)}} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}} \approx \frac{\partial u}{\partial x},$$

conclui-se que

$$F_1 = T_0 \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=x_2} - \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=x_1} \right] = T_0 \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx.$$

Portanto, a componente das tensões na direção de  $u$  é dada por

$$F_1 = T_0 \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx;$$

b) **forças externas** represente-se por  $p(x, t)$  a distribuição de forças externas por unidade de comprimento atuando sobre a corda, na direção  $u$ . Resulta que a força  $F_2$  que atua sobre o arco  $\widehat{M_1 M_2}$  será

$$F_2 = \int_{x_1}^{x_2} p(x, t) dx;$$

c) **forças de inércia** seja  $\rho(x)$  a densidade linear da corda. A massa do segmento  $\Delta x$  da

corda é  $\rho(x)\Delta x$  e a força de inércia sobre esse segmento será

$$-\rho(x)\Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Portanto, a força  $F_3$  sobre o arco  $\widehat{M_1 M_2}$  será dada por

$$F_3 = - \int_{x_1}^{x_2} \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx.$$

Finalmente do Princípio de d'Alembert obtém-se

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[ T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + p(x, t) \right] dx = 0,$$

quaisquer que sejam  $x_1, x_2$  e  $t \geq 0$ . Supondo-se o integrando uma função contínua, segue-se que

$$T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + p(x, t) = 0.$$

Esta última é a equação diferencial de pequenas oscilações de uma corda flexível, sob a ação de uma força externa  $p(x, t)$ . Quando  $\rho(x)$  é constante (corda uniforme), obtém-se

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t), \tag{3.17}$$

sendo

$$a = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}, F(x, t) = \frac{p(x, t)}{\rho}.$$

Quando não há força externa atuando na corda, a equação se reduz à seguinte:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{3.18}$$

### 3.7 Corda elástica com extremidades presas

A equação (3.18) da seção anterior é chamada de *Equação diferencial de pequenas oscilações de uma corda flexível*, sem influência de forças externas.

Nesta seção, nosso objetivo é desenvolver a solução deste problema com as condições dadas a seguir:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(x, 0) = f(x), \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), 0 < x < L \\ u(0, t) = 0, u(L, t) = 0 \end{array} \right.$$

A solução deste problema é a soma das soluções dos problemas com apenas uma das funções  $f(x)$  e  $g(x)$  não nulas.

### Com Velocidade Inicial Nula

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(x, 0) = f(x), \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, 0 < x < L \\ u(0, t) = 0, u(L, t) = 0 \end{array} \right.$$

Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de  $x$  por uma função de  $t$ , ou seja,

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

Derivando e substituindo-se na equação obtemos

$$a^2 X''(x)T(t) = X(x)T''(t)$$

que pode ser escrita como

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)}$$

O primeiro membro depende apenas de  $x$ , enquanto o segundo depende apenas de  $t$ . Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = \lambda$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias

$$\left\{ \begin{array}{l} X''(x) - \lambda X(x) = 0, X(0) = 0, X(L) = 0 \\ T''(t) - a^2 \lambda T(t) = 0, T'(0) = 0 \end{array} \right.$$

A primeira equação com as condições de fronteira foi resolvida no problema do calor em uma barra e tem solução somente se

$$\lambda = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}, n = 1, 2, 3, \dots$$

ou seja, a solução da primeira equação com as condições de fronteiras tem solução

$$X(x) = C_1 \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}.$$

A segunda equação diferencial com a condição inicial tem solução

$$T(t) = C_2 \cos \frac{an\pi t}{L}.$$

Logo o problema formado pela equação diferencial parcial e as condições de fronteira tem soluções da forma

$$u_n(x, t) = X(x)T(t) = c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{an\pi t}{L}.$$

Além disso, pode-se provar que também séries

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{an\pi t}{L}$$

são soluções.

Mas, para satisfazer a condição inicial de  $u(x, 0) = f(x)$ , temos que ter

$$f(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}.$$

Esta é a série de Fourier de senos de  $f(x)$ . Assim pelo Corolário 2.1 na página 13 se a função  $f(x)$  pertencente ao espaço das funções contínuas por partes,  $\mathcal{CP}[0, L]$ , então os coeficientes são dados por

$$c_n = \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx, n = 1, 2, 3, \dots$$

Observe que a solução  $u(x, t)$  para cada  $x$  é periódica com período  $\frac{2L}{a}$ .

As soluções

$$u_n(n, t) = \left[ \cos \frac{an\pi t}{L} \right] \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

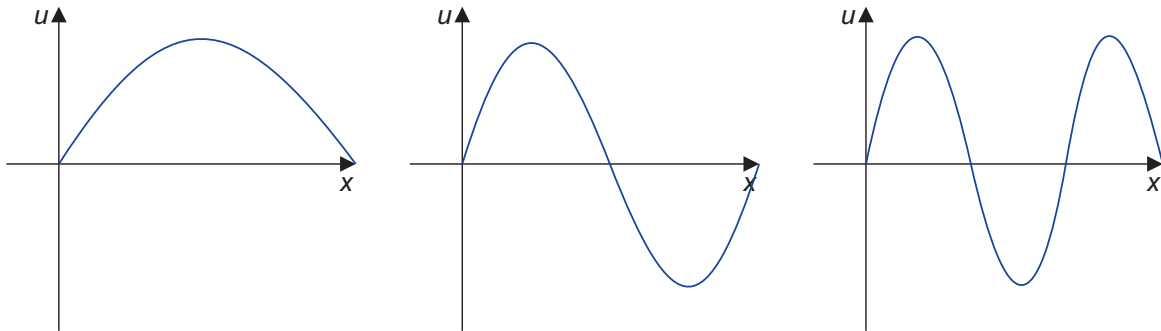


Figura 2: Modos naturais de vibração  $\operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$ , para  $n = 1, 2, 3$

podem ser vistas como senos com amplitude variando de forma cossenoidal  $An(t) = \cos \frac{an\pi t}{L}$  com frequências  $\frac{an\pi}{L}$  chamadas frequências naturais da corda. Para cada  $n$  a função  $\operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$  é chamada modo natural de vibração e o período  $\frac{n\pi}{L}$  é chamado comprimento de onda do modo natural.

**Com Deslocamento Inicial Nulo**

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(x, 0) = 0, \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), 0 < x < L \\ u(0, t) = 0, u(L, t) = 0 \end{array} \right.$$

Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de  $x$  por uma função de  $t$ , ou seja,

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

Derivando e substituindo-se na equação obtemos

$$a^2 X''(x)T(t) = X(x)T''(t)$$

que pode ser escrita como

$$\frac{X''(x)}{x(x)} = \frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)}$$

O primeiro membro depende apenas de  $x$ , enquanto o segundo depende apenas de  $t$ . Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante

$$\frac{X''(x)}{x(x)} = \frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = \lambda$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias

$$\left\{ \begin{array}{l} X''(x) - \lambda X(x) = 0, X(0) = 0, X(L) = 0 \\ T''(t) - a^2 \lambda T(t) = 0, T(0) = 0 \end{array} \right.$$

A primeira equação com as condições de fronteira foi resolvida no problema do calor em uma barra e tem solução somente se

$$\lambda = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}, n = 1, 2, 3, \dots$$

ou seja, a solução da primeira equação com as condições de fronteiras tem solução

$$X(x) = C_1 \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}, \text{ para } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

A segunda equação diferencial com a condição inicial tem solução

$$T(t) = C_2 \operatorname{sen} \frac{an\pi t}{L}, \text{ para } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Logo o problema formado pela equação diferencial parcial e as condições de fronteira tem soluções da forma

$$u_n(x, t) = X(x)T(t) = c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{an\pi t}{L}.$$

Além disso, pode-se provar que também séries

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{an\pi t}{L}$$

são soluções.

Mas para satisfazer a condição inicial  $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x)$ , temos que ter

$$g(x) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{an\pi}{L} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

Esta é a série de Fourier de senos de  $g(x)$ . Assim pelo Corolário 2.1 na página 13 se a função  $g(x)$  pertencente ao espaço das funções contínuas por partes,  $\mathcal{CP}[0, L]$ , então os coeficientes são dados por

$$\frac{an\pi}{L} c_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx, n = 1, 2, 3, \dots$$

Observe que a solução  $u(x, t)$  para cada  $x$  é periódica com período  $\frac{2L}{a}$ .

### Caso Geral

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(x, 0) = f(x), \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), 0 < x < L \\ u(0, t) = 0, u(L, t) = 0 \end{array} \right.$$

Como dissemos antes a solução deste problema é a soma das soluções dos problemas com apenas uma das funções  $f(x)$  e  $g(x)$  não nulas, ou seja,

$$u(x, t) = u^{(f)}(x, t) + u^{(g)}(x, t)$$

**Exemplo 3.2** Vamos considerar uma corda de 40 cm de comprimento, presa nos lados, com coeficiente  $a = 2$ , com deslocamento inicial  $f(x)$  e com uma velocidade inicial  $g(x)$  dados por

$$f(x) = g(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 \leq x < 20 \\ 40 - x, & \text{se } 20 \leq x \leq 40 \end{cases}$$

Temos que resolver o problema

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(x, 0) = f(x), \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), 0 < x < 40 \\ u(0, t) = 0, u(40, t) = 0 \end{array} \right.$$

A solução é então

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} \cos \frac{n\pi t}{20} + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{20}$$

em que  $c_n$  e  $\frac{n\pi}{20} d_n$  são os coeficientes da série de senos de  $f(x)$  e de  $g(x)$ , respectivamente, ou seja,

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{20} \int_0^{40} f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} dx \\ &= \frac{160 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^2 \pi^2}, n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{n\pi}{20} d_n &= \frac{1}{20} \int_0^{40} g(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} dx \\ &= \frac{160 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^2 \pi^2}, n = 1, 2, 3, \dots \\ d_n &= \frac{3200 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^3 \pi^3}, n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Portanto, a solução é dada por

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{160}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} \cos \frac{n\pi t}{20} + \frac{3200}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^3} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{20} \\ &= \frac{160}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{40} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi t}{20} + \\ &\quad + \frac{3200}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{40} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi t}{20} \end{aligned}$$

# Referências Bibliográficas

- [1] EVES, H., **Introdução à história da matemática**; tradução: Hygino H. Domingues, 3. ed. Editora da Unicamp, Campinas, SP, 2004.
- [2] HALLIDAY, D., RESNICK R., MERRILL, J., **Fundamentos de Física**, vol. 2, Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro, 1994.
- [3] FIGUEIREDO, D. G. de, **Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais**, 4. ed. Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2003.
- [4] LIMA, E. L., **Curso de Análise v.2**, 10. ed. IMPA, Rio de Janeiro, 2008.
- [5] MEDEIROS, L.A e ANDRADE, N. G., **Iniciação às Equações Diferenciais Parciais**, Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro, 1978.
- [6] RUSSI, G. Z., **Calculo Avanzado**, Fundo Educativo Interamericano, México, 1986.
- [7] SANTOS, R. J., **Séries de Fourier e Equações Diferenciais Parciais**, 1. ed. UFMG, Belo Horizonte, MG, 2007.
- [8] SODRÉ, U., **Séries de Fourier**, 1. ed. <http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/>, São Paulo, 2003.
- [9] Wikipédia, **Jean Baptist Joseph Fourier**, [http://pt.wikipedia.org/wiki/Joseph\\_fourier](http://pt.wikipedia.org/wiki/Joseph_fourier), 15/03/2011, 20:30 hs.