UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA
PURA E APLICADA

# O Problema de Sturm-Liouville e Aplicações

CARLOS ANTONIO PEREIRA DA SILVA

Campina Grande - PB
Abril de 2011

Carlos Antonio Pereira da Silva

# O Problema de Sturm-Liouville e Aplicações

Monografia apresentado ao curso de Especialização em Matemática Pura e Aplicada do Departamento de Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba em cumprimento às exigências legais para obtenção do título de Especialista em Matemática Pura e Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo

Campina Grande-PB

Abril de 2011

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL – UEPB

S586p Silva, Carlos Antonio Pereira da.

O Problema de Sturm-Liouville e aplicações [manuscrito] / Carlos Antonio Pereira da Silva. – 2011.

46 f. : il.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2011.

"Orientação: Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo, Departamento de Matemática".

1. Matemática - Problemas. 2. Problema de Sturm-Liouville. 3. Equação da corda vibrante. I. Título.

21. ed. CDD 510

Carlos Antonio Pereira da Silva

**Problemas de Sturm-Liouville e Aplicações**

Aprovado em: 29/04/2011

COMISSÃO EXAMINADORA

Aldo Trajano Lourêdo

Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo
Departamento de Matemática - CCT/UEPB
Orientador

Angelo Roncalli F. de Holanda

Prof. Dr. Angelo Roncalli Furtado de Holanda
Departamento de Matemática e Estatítica - CCT/UFCG
Examinador

Joselma Soares dos Santos

Profa. Ms. Joselma Soares dos Santos
Campus VI - CCHE/UEPB
Examinadora

# Dedicatória

Ao meu senhor Jesus Cristo, aos meus pais, meu irmão e todos aqueles que me apoiaram e ajudaram a superar os momentos de dificuldades.

# Agradecimentos

A Jesus Cristo, aos meus pais, meu irmão e amigos mais próximos pelo constante incentivo e apoio. Agradeço, de forma significativa, ao meu orientador, Prof. Aldo Trajano, ao qual sou grato, pela paciência, ajuda, e dedicação durante todo desenvolvimento deste trabalho, ao professor Angelo Roncalli Furtado de Holanda e a professora Joselma Soares dos Santos por participar da banca e pelas sugestões dadas a nossa monografia. A todos os meus professores do Curso de Especialização pela dedicação na sua profissão. A todos os meus colegas pelos momentos de dificuldades superados juntos, durante todo o curso.

# Epígrafe

" ...não há outra questão, quando se é cristão não se para de lutar... "

Padre Fábio de Melo

# Resumo

Nesta monografia fazemos um estudo bibliográfico relativos ao problema de Sturm-Liouville, seguindo as referências [2], [3], [4], [5] e [6]. Também daremos um exemplo que ilustra a maneira como as equações de Sturm-Liouville aparecem na Física Matemática. Para isso usaremos a descrição das oscilacões de uma corda com extremidades fixas em dois pontos $a$ e $b$. Apesar de sua simplicidade este problema levanta uma série de questões fundamentais da teoria de Sturm-Liouville, como a existência de autovalores e a possibilidade de expansão de uma função em série de autofunções.

**Palavras chave:** Problema de Sturm-Liouville; construção da sequência de autovetores; equação da corda vibrante.

# Abstract

In this monograph we make a relative bibliographical study to the problem of Sturm - Liouville, following the references [2], [3], [4], [5] and [6]. We will also give an example that illustrates the way as the Sturm-Liouville equations appear in the Mathematical Physics. For that we will use the description of the oscillations of a string with fixed extremities in two points $a$ and $b$. In spite of her simplicity this problem lifts a series of fundamental subjects of the theory of Sturm-Liouville, as the existence of eigenvalues and the possibility of expansion of a function in eigenfunctions series.



**Key word:** Problem of Sturm-Liouville, construction of the eigenvalues sequence, equation of the vibrant string.

# Sumário

# Introdução

Nesta monografia estudaremos algumas propriedades da equação de Sturm-Liouville

$$(p(t)x')' + (\lambda r(t) + q(t))x = 0, \tag{1}$$

definida em um intervalo $[a, b]$ onde $p(x) > 0$, e $\lambda \in \mathbb{R}$.

Mostraremos o teorema da separação de Sturm, que afirma que duas soluções linearmente independente de (1) tem zeros alternados e o teorema da comparação de Sturm que diz intuitivamente que quanto maior for $q$ em (1) mais rapidamente as soluções de (1) oscilarão. Também sabemos que o complemento ortogonal de conjuntos de funções em $L^2(a, b)$ surgem naturalmente como soluções de certas equações diferenciais lineares de segunda ordem sob apropriadas condições de fronteira, comumente referidas aos problemas de Sturm-Liouville de valor de fronteira, após o matemático suiço Jacques Sturm 1803-1855 e o matemático francês Joseph Liouville 1809-1882, terem estudado esses problemas e as propriedades de suas soluções. As equações diferenciais consideradas aqui surgem diretamente como modelos matemáticos de movimento de acordo com a lei de Newton, mas frequentemente como resultado de uso do método de separação de variáveis para resolver as equações diferenciais parciais clássicas da física, como equação de Laplace, a equação de calor, e a equação de onda.

# Capítulo 1

# Fatos históricos

## 1.1 Jacques Charles François Sturm

Jacques Charles François Sturm nasceu em 29 de setembro de 1803, em Genebra, na Suíça. Seu pai era um professor de matemática. Quando Sturm tinha 16 anos, seu pai morreu e sua família caiu em uma situação financeira difícil.

Na Academia de Genebra, a forte capacidade em matemática de Sturm foi reconhecida por seus instrutores, de modo que, um dos seus professores, Jean-Jacques Schaub, se dispôs apoiá-lo financeiramente para que ele pudesse frequentar a escola em tempo integral. Na Academia de Genebra, Sturm conheceu Daniel Colladon, cuja amizade e colaboração foi importante no desenvolvimento de seus primeiros trabalhos em matemática.

Quando Sturm se formou na Academia, ele aceitou um cargo como tutor para o filho mais novo de Madame de Staël, em 1823. Madame de Staël foi um escritor muito bem sucedido e famoso francês que morreu em 1817.

Antes do final de 1823 a família de Madame de Staël se mudou para passar seis meses em Paris e Sturm, como tutor, naturalmente os acompanhou. A família passava seis meses de cada ano em Paris e Sturm foi capaz de se juntar a eles. Através da família, ele foi capaz de encontrar muitos dos luminares intelectuais da sociedade francesa, incluindo Dominique François, Jean Arago, Pierre-Simon de Laplace, Denis Simeon Poisson, Jean Baptiste Joseph Fourier, Louis Joseph Gay-Lussac, e Marie Andre Ampères, entre outros.

Em 1824, Sturm e Colladon tentaram ganhar um prêmio oferecido pela Academia de Paris sobre a compressibilidade da água. Os resultados não foram os esperados e Colladon gravemente feriu a mão. Tentaram novamente em 1825. Neste tempo Sturm começou um trabalho de tutoria ao filho de Arago e consequentemente, tinha acesso ao laboratório de Ampère e recebeu apoio e conselhos de Fourier. Com toda essa ajuda, mesmo não sendo remunerado, eles fizeram uma melhoria significativa face ao ano anterior.

No ano seguinte, ambos Sturm e Colladon trabalharam como assistentes de Fourier. Além disso, eles continuaram seus experimentos sobre a compressabilidade da água e, desta vez, eles ganharam o Grande Prémio da Academia de Ciências. O dinheiro do prêmio foi o suficiente para que eles pudessem permanecer em Paris e se dedicarem a sua pesquisa.

Um dos trabalhos mais famoso de Sturm foi publicado em 1929: Memorial sobre a resolução das equações numéricas. Nele é considerado o problema de determinar o número de raízes reais de uma equação em um determinado intervalo. O problema era famoso com uma longa história, por ter sido considerado por Descartes , Rolle , Lagrange e Fourier. O primeiro a dar uma solução completa foi Cauchy, mas seu método era pesado e pouco prático. Sturm alcançou a fama com seu trabalho, que, usando idéias de Fourier, deu uma solução simples. A respeito deste trabalho Hermite escreveu:

"O Teorema de Sturm teve a sorte de tornar-se imediatamente um clássico e de encontrar um lugar no ensino que iria realizar para sempre. Sua demonstração, utiliza apenas considerações elementares, e é um raro exemplo de simplicidade e elegância."

Apesar do trabalho ter sido bem recebido, Sturm teve dificuldade para encontrar trabalho até a revolução de 1830. Com a ajuda de Arago, Sturm se tornou professor de matemática no Colégio Rollin. Três anos mais tarde, tornou-se um cidadão francês e três anos depois é que ele foi admitido na Académie des Sciences.

Ele iria fazer contribuições significativas para equações diferenciais relacionadas com a teoria de Poisson do Calor. Hoje, esse trabalho junto com o trabalho feito por Liouville forma o que é conhecido como Teoria de Sturm-Liouville. Mais tarde em sua carreira, ele foi professor na Ecole Polytechnique. Ele fez contribuições à geometria infinitesimal, geometria projetiva, geometria diferencial e óptica geométrica.

Em 1851 sua saúde começou a falhar. Ele foi capaz de voltar a lecionar durante sua longa enfermidade, mas ele faleceu em 18 de Dezembro de 1855, em Paris. O nome de Sturm faz parte da lista de 72 nomes gravada na Torre Eiffel .

## 1.2 Joseph Liouville

Joseph Liouville nasceu em 24 março de 1809 em Saint-Omer na França. Seu pai era um oficial do exército de Napoleão, assim, seus primeiros anos, ele viveu com seu tio. Somente quando Napoleão foi derrotado, seu pai retornou e a família viveu juntos em Toul na França.

Em Paris, Liouville estudou matemática na Faculdade de St. Louis. Já nesta época, ele mostrou interesse e talento em tópicos avançados de matemática.

Em 1825, quando tinha 16 anos, entrou para a École Polytechnique. Na École Polytechnique, ele assistiu a palestras de André Marie Ampere e François Jean Dominique Arago. Mesmo não assistindo nenhuma palestra de Augustin Louis Cauchy, ele foi muito influenciado por ele. Dentre seus examinadores, quando ele se graduou, podemos citar Gaspard de Pônei e Simeon Denis Poisson.

Ele se formou em 1827 e entrou na École des Ponts et Chaussées, com a intenção de se tornar um engenheiro. Os projetos de engenharia naqueles tempos eram fisicamente exigentes e Liouville encontrou sua saúde seriamente afetada. Ele teve algum tempo de folga e retornou a Toul. Ele casou-se com Marie-Louise Balland e decidiu pedir demissão em 1830 da École des Ponts et Chaussées.

Em 1831, ele aceitou uma posição acadêmica na Escola Politécnica. Foi assistente de Claude Louis Mathieu. Ao fazer isso, Liouville desenvolveu uma reputação enfocada em temas avançados.

Muitas vezes, Liouville tentou melhorar sua posição na Ecole Polytechnique, sem sucesso. Ele também estava frustrado com a qualidade dos periódicos de Matemática na França na época. Em 1836, começou a sua própria revista de matemática, Jornal de Mathematiques Pures et Appliquées, que também era conhecido como o Journal de Liouville. Por essa época, ele tinha desenvolvido uma reputação internacional baseada em seus trabalhos que publicou no Jornal de Crelle. A revista foi um sucesso e publicou muitos trabalhos significativos de matemáticos franceses.

Em 1838, tornou-se Professor de Análise e Mecânica da Escola Politécnica. Em 1840, ele foi eleito para a Académie des Sciences em Astronomia e ele também foi eleito para o Bureau des Longitudes.

Liouville tornou-se amigo íntimo de Arago e chefe do Partido Republicano na França. Liouville foi encorajado a concorrer a um cargo. Em 1848, Liouville foi eleito para a Assembléia de Organização, infelizmente, sua carreira política não durou muito tempo. Isto teve um grande impacto sobre seu espírito como foi observado por um de seus biógrafos.

Lioville teve uma produção matemática fenomenal escreveu mais de 400 trabalhos matemáticos. Mais de 200 trabalhos, foram sobre a teoria dos números. Outros trabalhos abrangeram uma série de tópicos, incluindo a física matemática, a astronomia, assim como a matemática pura.

Ele introduziu o cálculo fracionado como parte de sua análise do eletromagnetismo, foi também o primeiro a provar a existência de números transcendentes, números que não é algébrico (isto é, não pode ser uma solução para uma equação polinominal não constante com coeficientes racionais). Fez um trabalho muito importante sobre os problemas de valor de contorno com equações diferenciais, no que hoje é chamado de Teoria de Sturm-Liouville e um trabalho importante em mecânica estatística e teoria da medida.

Talvez, o seu impacto mais importante na matemática foi a descoberta das memórias por Evariste Galois. Em 1843, ele anunciou a Academia de Paris que tinha descoberto muito "insights"brilhantes por Galois. A Memória de Galois foi então publicada em 1846 que iria introduzir a teoria dos grupos e Galois teria o lugar entre os matemáticos mais célebres da história.

Liouville morreu em 08 de Setembro de 1882. Muitos historiadores o consideraram o maior matemático de seu tempo. A cratera de Liouville na Lua é nomeado em sua honra.

# Capítulo 2

# Fundamentação Teórica

Neste capítulo descreveremos os pré-requisitos necessários para provarmos o problema se Sturm-Louville.

## 2.1 A Equação diferencial auto-adjunta de segunda ordem

Nesta seção, estamos preocupados (formalmente)com a equação diferencial auto-adjunto de segunda ordem

$$(p(t)x')' + q(t)x = h(t)$$

Suponhamos que $p$, $q$ e $h$ são contínuas em um dado intervalo $I$ e $p(t) > 0$ em $I$.

Seja

$$\mathbb{D} := \{x : x \ e \ px' \ são \ continuamente \ diferenciáveis \ em \ I\}.$$

Definimos, então o operador linear $L$ em $\mathbb{D}$ por

$$Lx(t) = (p(t)x'(t))' + q(t)x(t),$$

para todo $t \in I$. Então, a equação auto-adjunta pode ser escrita resumidamente como $Lx = h(t)$. Se $h(t) \equiv 0$, obtemos a equação diferencial auto-adjunta homogênea $Lx = 0$, caso contrário, dizemos que a equação diferencial $Lx = h(t)$ é não-homogênea.

**Definição 2.1.1** *Se $x \in \mathbb{D}$ e $Lx(t) = h(t)$ para todo $t \in I$, dizemos que $x$ é uma solução de $Lx = h(t)$ em $I$.*

**Exemplo 2.1.1** *Neste exemplo, mostraremos que as equações diferenciais lineares de segunda ordem da forma*

$$p_2(t)x''(t) + p_1(t)x'(t) + p_0(t)x(t) = g(t), \tag{2.1}$$

*onde suponhamos $p_2(t) \neq 0$ em $I$ e $p_i$, $i = 0, 1, 2$, e $g$ são funções contínuas em um intervalo $I$, pode ser escrita na forma de uma equação auto-adjunta.*

**Solução:** Com efeito, seja $x$ uma solução de (2.1). Então

$$p_2(t)x'' + p_1(t)x' + p_0(t)x = g(t).$$

Como $p_2(t) \neq 0$,

$$x''(t) + \frac{p_1(t)}{p_2(t)}x'(t) + \frac{p_0(t)}{p_2(t)}x(t) = \frac{g(t)}{p_2(t)},$$

para todo $t \in I$. Multiplicando os dois membros da equação acima pelo fator integrante $e^{\int \frac{p_1(t)}{p_2(t)}dt}$, obtemos

$$e^{\int \frac{p_1(t)}{p_2(t)}dt}x''(t) + \frac{p_1(t)}{p_2(t)}e^{\int \frac{p_1(t)}{p_2(t)}dt}x'(t) + \frac{p_0(t)}{p_2(t)}e^{\int \frac{p_1(t)}{p_2(t)}dt}x(t) = e^{\int \frac{p_1(t)}{p_2(t)}dt}\frac{g(t)}{p_2(t)},$$

isto é,

$$\left[e^{\int \frac{p_1(t)}{p_2(t)}dt}x'(t)\right]' + \frac{p_0(t)}{p_2(t)}e^{\int \frac{p_1(t)}{p_2(t)}dt}x(t) = \frac{g(t)}{p_2(t)}e^{\int \frac{p_1(t)}{p_2(t)}dt}.$$

Assim, obtemos que $x$ é uma solução da equação auto-adjunta

$$\Big(p(t)x'\Big)' + q(t)x = h(t),$$

onde

$$p(t) = e^{\int \frac{p_1(t)}{p_2(t)}dt} > 0, \ q(t) = \frac{p_0(t)}{p_2(t)}e^{\int \frac{p_1(t)}{p_2(t)}dt}, \ h(t) = \frac{g(t)}{p_2(t)}e^{\int \frac{p_1(t)}{p_2(t)}dt},$$

para todo $t \in I$. Note que $p, q$ e $h$ são contínuas em $I$. Na verdade $p$ é continuamente diferenciável em $I$. Em muitos estudos sobre equação diferencial auto-adjunta, supõe-se que $p$ é continuamente diferenciável em $I$, mas vamos supor que $p$ é apenas contínua em $I$. Neste caso a equação auto-adjunta $Lx = h(t)$ é mais geral que a equação diferencial linear (2.1).

**Exemplo 2.1.2** *Escreva a equação diferencial*

$$t^2x'' + 3tx' + 6x = t^4,$$

*para $t \in I := (0, \infty)$ na forma auto-adjunta.*

**Solução:** Dividindo os dois membros por $t^2$, obtemos

$$x'' + \frac{3}{t}x' + \frac{6}{t^2}x = t^2.$$

Assim,

$$e^{\int \frac{3}{t}dt} = e^{3\int \frac{1}{t}dt} = e^{3\ln t} = e^{\ln t^3} = t^3$$

é um fator de integração para os dois termos da equação acima. Multiplicando a última equação pelo fator integrante $t^3$, obtemos a equação auto-adjunta

$$t^3x'' + 3t^2x' + 6tx = t^5,$$

isto é,

$$[t^3x']' + 6tx = t^5.$$

**Teorema 1** *Suponha que a função matriz $A$ de ordem $n \times n$ e a função vetor $b$ de ordem $n \times 1$ são contínuas em um intervalo $I$. Então, o PVI*

$$\left| \begin{array}{l} x' = A(t)x + b(t) \\ x(t_0) = x_0, \end{array} \right.$$

*onde $t_0 \in I$ e $x_0$ é um vetor constante de ordem $n \times 1$ dado, tem uma única solução e essa solução existe em todo intervalo $I$.*

**Teorema 2 (Existência e Unicidade)** *Suponha que $p$, $q$ e $h$ são contínuas em $I$ e $p(t) > 0$ em $I$. Se $a \in I$, então o problema de valor inicial (PVI)*

$$\left| \begin{array}{l} Lx = h(t), \\ x(a) = x_0, \\ x'(a) = x_1, \end{array} \right.$$

*onde $x_0$ e $x_1$ são constantes dadas, tem uma única solução no intervalo $I$.*

**Demonstração:** Primeiro escreva $Lx = h(t)$ como uma equação de vetores equivalentes. Seja $x$ uma solução de $Lx = h(t)$ e defina

$$y(t) := p(t)x'(t).$$

Então

$$x'(t) = \frac{1}{p(t)}y(t) = 0x(t) + \frac{1}{p(t)}y(t).$$

Além disso, como $x$ é uma solução de $Lx = h(t)$, isto é,

$$L\left(x(t)\right) = (p(t)x'(t))' + q(t)x(t) = h(t).$$

Assim,

$$y'(t) = (p(t)x'(t))' = -q(t)x(t) + h(t) = -q(t)x(t) + 0y(t) + h(t).$$

Portanto, se considerarmos

$$z(t) := \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix},$$

então $z$ é uma solução da equação matricial

$$z' = A(t)z + b(t),$$

onde

$$A(t) := \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{p(t)} \\ -q(t) & 0 \end{bmatrix}, \quad b(t) := \begin{bmatrix} 0 \\ h(t) \end{bmatrix}.$$

Na forma vetorial

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{p(t)} \\ -q(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ h(t) \end{bmatrix}.$$

Note que a função matriz $A$ e a função vetor $b$ são contínuas em $I$. Por outro lado, é fácil ver que se

$$z(t) := \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

define uma solução da equação vetorial

$$z' = A(t)z + b(t),$$

então, $x$ é uma solução da equação escalar $Lx = h(t)$ e $y(t) = p(t)x'(t)$. Pelo Teorema 1 existe uma única solução $z$ do problema de valor inicial

$$\left| \begin{array}{l} z' = A(t)z + b(t), \\ z(a) := \begin{bmatrix} x_0 \\ y_1 \end{bmatrix} = z_0 \end{array} \right. ,$$

em $I$. Mas, isto implica que existe uma única solução de $Lx = h(t)$ satisfazendo

$$x(a) = x_0, \quad p(a)x'(a) = y_1 \quad \Rightarrow \quad x'(a) = \frac{y_1}{p(a)} = x_1,$$

e esta solução existe em todo intervalo $I$. Daqui, segue que o problema de valor inicial

$$\left| \begin{array}{l} L\left(x(t)\right) = (p(t)x'(t))' + q(t)x(t) = h(t), \\ x(a) = x_0, \\ x'(a) = x_1, \end{array} \right.$$

tem uma única solução em $I$.

■

**Observação 1** *Alguns autores preferem chamar as condições* $x(a) = x_0,\ p(a)x'(a) = y_1$ *de condições iniciais, mas para nós, as condições iniciais serão* $x(a) = x_0,\ x'(a) = x_1$.

**Definição 2.1.2** *Suponha que $x$, $y$ são funções diferenciáveis em um intervalo $I$, então definimos o Wronskiano de $x$ e $y$ por*

$$w[x(t), y(t)] = \begin{vmatrix} x(t) & y(t) \\ x'(t) & y'(t) \end{vmatrix} := x(t)y'(t) - y(t)x'(t),$$

*para todo $t \in I$.*

**Teorema 3 (Identidade de Lagrange)** *Se $x, y \in \mathbb{D}$, então*

$$y(t)Lx(t) - x(t)Ly(t) = \{y(t); x(t)\}',$$

*para todo $t \in I$, onde $\{y(t); x(t)\}$ é a chave de Lagrange de $y$ e $x$ que é definida por*

$$\{y(t); x(t)\} := p(t)w[y(t), x(t)],$$

*para todo $t \in I$, onde $w[y(t), x(t)]$ é o wronskiano de $y$ e $x$.*

**Demonstração:** Sejam $x, y \in \mathbb{D}$ e considere

$$\begin{aligned} \{y(t); x(t)\}' &= \{p(t)w[y(t), x(t)]\}' \\ &= \{y(t)p(t)x'(t) - x(t)p(t)y'(t)\}' \\ &= y(t)(p(t)x'(t))' + y'(t)p(t)x'(t) - x(t)(p(t)y'(t))' - x'(t)p(t)y'(t) \\ &= y(t)(p(t)x'(t))' - x(t)(p(t)y'(t))' \\ &= y(t)(p(t)x'(t))' + y(t)q(t)x(t) - y(t)q(t)x(t) - x(t)(p(t)y'(t))' \\ &= y(t)[(p(t)x'(t))' + q(t)x(t)] - x(t)[(p(t)y'(t))' + q(t)y(t)] \\ &= y(t)Lx(t) - x(t)Ly(t), \end{aligned}$$

para todo $t \in I$ que é o que queríamos provar. ■

**Corolário 1 (Fórmula de Abel)** *Se $x$ e $y$ são soluções de $Lx = 0$ em $I$, então*

$$w[x(t), y(t)] = \frac{C}{p(t)},$$

*para todo $t \in I$, onde $C$ é uma constante.*

**Demonstração:** Suponha que $x$ e $y$ são soluções de $Lx = 0$ em $I$. Pela Identidade de Lagrange,

$$x(t)Ly(t) - y(t)Lx(t) = \{x(t); y(t)\}',$$

para todo $t \in I$. Como $x$ e $y$ são soluções de $Lx = 0$ em $I$, obtemos

$$\{x(t); y(t)\}' = 0,$$

para todo $t \in I$. Assim,

$$\{x(t); y(t)\} = C,$$

onde $C$ é uma constante. Daí e da definição de $\{x(t), y(t)\}$, segue que

$$p(t)w[x(t), y(t)] = C,$$

isto é,

$$w[x(t), y(t)] = \frac{C}{p(t)},$$

para todo $t \in I$, o que mostra a fórmula de Abel. ∎

**Definição 2.1.3** *Se $x$ e $y$ são contínuas em $[a, b]$, definimos o produto escalar de $x$ e $y$ por*

$$\langle x, y \rangle = \int_a^b x(t)y(t)dt.$$

**Corolário 2 (Fórmula de Green)** *Se $[a, b] \subset I$ e $x, y \in \mathbb{D}$, então*

$$\langle y, Lx \rangle - \langle Ly, x \rangle = \{y(t); x(t)\}_a^b,$$

*onde $\{F(t)\}_a^b := F(b) - F(a)$.*

**Demonstração:** Sejam $x, y \in \mathbb{D}$, então pela identidade de Lagrange,

$$y(t)Lx(t) - x(t)Ly(t) = \{y(t); x(t)\}',$$

para todo $t \in I$. Integrando os dois lados da igualdade acima de $a$ até $b$, obtemos o resultado desejado

$$\langle y, Lx \rangle - \langle Ly, x \rangle = \{y(t); x(t)\}_a^b.$$

∎

**Corolário 3** *Se $u, v$ são soluções de $Lx = 0$, então*

**(a)** $w[u(t), v(t)] \neq 0$ *para todo* $t \in I$, *ou*

**(b)** $w[u(t), v(t)] = 0$ *para todo* $t \in I$.

**Demonstração:** Suponha que $u, v$ são soluções de $Lx = 0$. Então pela fórmula de Abel (Corolário 1), tem-se que $w[u(t), v(t)] = \frac{C}{p(t)}$, para todo $t \in I$, onde $C$ é uma constante. Se $C \neq 0$, então a parte (a) deste teorema é válida, entretanto se $C = 0$, a parte (b) deste teorema é válida. ■

**Observação 2** *O caso (a) ocorre se $u, v$ são soluções linearmente independentes em $I$, e o caso (b) ocorre se $u, v$ são soluções linearmente dependentes em $I$.*

Mostraremos que a equação diferencial $Lx = 0$ tem duas soluções linearmente independentes em $I$. Para ver isto, basta considerar $a \in I$ e admitir que $u$ seja solução do PVI

$$\left| \begin{array}{l} Lu = 0, \\ u(a) = 1, \\ u'(a) = 0, \end{array} \right.$$

e admitir que $v$ seja solução do PVI

$$\left| \begin{array}{l} Lv = 0, \\ v(a) = 0, \\ v'(a) = 1. \end{array} \right.$$

Como o Wronskiano destas duas soluções em $a$ é diferente de zero, segue que, estas duas soluções são LI em $I$, pelo Corolário 3.

**Teorema 4** *Se $x_1, x_2$ são soluções linearmente independentes de $Lx = 0$ em $I$, então*

$$x = c_1 x_1 + c_2 x_2 \tag{2.2}$$

*é a solução geral da equação $Lx = 0$.*

**Demonstração:** Suponha que $x_1, x_2$ são soluções linearmente independentes de $Lx = 0$ em $I$. Seja $x$ da forma de (2.2). Então

$$Lx = L(c_1 x_1 + c_2 x_2) = Lc_1 x_1 + Lc_2 x_2 = c_1 Lx_1 + c_2 Lx_2 = 0,$$

logo, $x$ é uma solução de $Lx = 0$. Por outro lado, suponha que $x$ é solução de $Lx = 0$ em $I$. Seja $t_0 \in I$ e consideremos

$$x_0 := x(t_0) \ \ e \ \ x_1 := x'(t_0).$$

Seja

$$y(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t).$$

Mostraremos agora que podemos escolher constantes $c_1, c_2$ tais que

$$y(t_0) = x_0, \quad y'(t_0) = x_1.$$

Estas duas equações são equivalentes as equações

$$c_1 x_1(t_0) + c_2 x_2(t_0) = x_0,$$

$$c_1 x_1'(t_0) + c_2 x_2'(t_0) = x_1.$$

O determinante dos coeficientes para este sistema é

$$w[x_1, x_2](t_0) \neq 0,$$

pelo Corolário 3, uma vez que, $x_1$ e $x_2$ são LI. Sejam $c_1, c_2$ as únicas soluções deste sistema. Então

$$y = c_1 x_1 + c_2 x_2,$$

é a solução de $Lx = 0$ satisfazendo as mesmas condições iniciais de $x$ em $t_0$. Pela unicidade de soluções do PVI, $x$ e $y$ são as mesmas soluções. Assim, obtemos

$$x = c_1 x_1 + c_2 x_2,$$

que é o resultado desejado. ∎

**Observação 3** *Por isto dizemos que toda função desta forma é uma solução de $Lx = 0$. Reciprocamente, toda solução de $Lx = 0$ é de forma (2.2).*

## 2.2 Um Exemplo Interessante

Nesta seção indicamos como o Teorema 2 pode ser usado para definir funções e como podemos usar isto para derivar as propriedades destas funções.

**Definição 2.2.1** *Definimos s e c como sendo as soluções dos PVI,*

$$\left| \begin{array}{l} s'' + s = 0, \\ s(0) = 0, \\ s'(0) = 1, \end{array} \right. \qquad \left| \begin{array}{l} c'' + c = 0, \\ c(0) = 1, \\ c'(0) = 0, \end{array} \right.$$

*respectivamente.*

**Teorema 5** *Sejam s e c soluções dos PVI acima. Então:*

**i)** $s'(t) = c(t), \quad c'(t) = -s(t);$

**ii)** $s^2(t) + c^2(t) = 1;$

**iii)** $s(-t) = -s(t), \quad c(-t) = c(t)$

**iv)** $s(t+\alpha) = s(t)c(\alpha) + s(\alpha)c(t), \quad c(t+\alpha) = c(t)c(\alpha) - s(t)s(\alpha);$

**v)** $s(t-\alpha) = s(t)c(\alpha) - s(\alpha)c(t), \quad c(t-\alpha) = c(t)c(\alpha) + s(t)s(\alpha),$

*para todo* $t, \alpha \in \mathbb{R}$.

**Demonstração: i)** Como $c$ e $s'$ são soluções do mesmo PVI

$$\left| \begin{array}{l} x'' + x = 0, \\ x(0) = 1, \\ x'(0) = 0, \end{array} \right.$$

temos pelo Teorema de unicidade das soluções que

$$s'(t) = c(t),$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Analogamente, $-s$ e $c'$ são soluções do mesmo PVI

$$\left| \begin{array}{l} x'' + x = 0, \\ x(0) = 0, \\ x'(0) = -1. \end{array} \right.$$

Pelo Teorema de unicidade das soluções, temos

$$c'(t) = -s(t),$$

para $t \in \mathbb{R}$.

**ii)** Pelo Teorema de Abel o Wronskiano de $c$ e $s$ é uma constante, isto é,

$$\begin{vmatrix} c(t) & s(t) \\ c'(t) & s'(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c(0) & s(0) \\ c'(0) & s'(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Do item **i)**, tem-se que $s'(t) = c(t)$ e $c'(t) = -s(t)$. Daí e da igualdade acima, obtemos:

$$\begin{vmatrix} c(t) & s(t) \\ -s(t) & c(t) \end{vmatrix} = 1,$$

o que implica

$$s^2(t) + c^2(t) = 1.$$

**iii)** Como $s(-t)$ e $-s(t)$ são soluções do mesmo PVI

$$\left| \begin{array}{l} x'' + x = 0, \\ x(0) = 0, \\ x'(0) = -1, \end{array} \right.$$

temos pelo Teorema de unicidade das soluções que

$$s(-t) = -s(t),$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Analogamente, como $c(-t)$ e $c(t)$ são soluções do mesmo PVI

$$\left| \begin{array}{l} x'' + x = 0, \\ x(0) = 1, \\ x'(0) = 0, \end{array} \right.$$

temos pelo Teorema de unicidade das soluções que

$$c(-t) = c(t).$$

**iv)** Como $s(t + \alpha)$ e $s(t)c(\alpha) + s(\alpha)c(t)$ são soluções do mesmo PVI

$$\left| \begin{array}{l} x'' + x = 0, \\ x(0) = s(\alpha), \\ x'(0) = c(\alpha), \end{array} \right.$$

temos pelo Teorema de unicidade das soluções que

$$s(t + \alpha) = s(t)c(\alpha) + s(\alpha)c(t),$$

para $t \in \mathbb{R}$. Analogamente, como $c(t+\alpha)$ e $c(t)c(\alpha) - s(\alpha)s(t)$ são soluções do mesmo PVI

$$\left| \begin{array}{l} x'' + x = 0, \\ x(0) = c(\alpha), \\ x'(0) = -s(\alpha), \end{array} \right.$$

temos pelo Teorema de unicidade das soluções que

$$c(t+\alpha) = c(t)c(\alpha) - s(\alpha)s(t),$$

para $t \in \mathbb{R}$. Finalmente, usando os itens **(iii)** e **(iv)**, podemos provar a parte **(v)**. ∎

## 2.3 Função de Cauchy e Fórmula da Variação das Constantes

Nesta seção iremos obter a fórmula da variação das constante para equações diferenciais auto-adjunta de segunda ordem não-homogêneas.

$$Lx = (p(t)x')' + q(t)x = h(t), \tag{2.3}$$

onde supomos que $h$ é uma função contínua em $I$.

**Teorema 6** *Se $u$ e $v$ são soluções linearmente independentes da equação diferencial homogênea $Lx = 0$ em $I$ e $z$ é uma solução da equação diferencial não-homogênea $Lx = h(t)$ em $I$, então*

$$x = c_1 u + c_2 v + z,$$

*onde $c_1$ e $c_2$ são constantes, é a solução geral da equação diferencial não-homogênea $Lx = h(t)$.*

**Demonstração:** Sejam $u$ e $v$ soluções linearmente independentes da equação diferencial homogênea $Lx = 0$ e seja $z$ uma solução da equação diferencial não-homogênea $Lx = h(t)$. Defina

$$x := c_1 u + c_2 v + z,$$

onde $c_1$ e $c_2$ são constantes. Então

$$Lx = c_1 Lu + c_2 Lv + Lz = c_1 0 + c_2 0 + Lz = Lz = h.$$

Assim, para quaisquer constantes $c_1$ e $c_2$, $x := c_1u+c_2v+z$, é uma solução da equação diferencial não-homogênea, $Lx = h(t)$. Por outro lado, seja $x_0$ uma solução da equação diferencial não-homogênea $Lx = h(t)$ e defina

$$x := x_0 - z.$$

Então

$$Lx = Lx_0 - Lz = h - h = 0.$$

Como $x$ é uma solução da equação diferencial homogênea $Lx = 0$ e pelo Teorema 3 existem constantes $c_1$ e $c_2$ tal que

$$x = c_1u + c_2v.$$

Portanto, usando o fato que $x = x_0 - z$, obtemos

$$x_0 = c_1u + c_2v + z.$$

■

**Definição 2.3.1** *Define-se a função de Cauchy $x(\cdot,\cdot)$ para $Lx = 0$ como sendo a função $x : I \times I \to \mathbb{R}$ tal que para cada $s \in I$ fixo, $x(\cdot, s)$ é a solução do problema de valor inicial*

$$\left| \begin{array}{l} Lx = 0, \\ x(s) = 0, \\ x'(s) = \frac{1}{p(s)}, \end{array} \right.$$

**Exemplo 2.3.1** *Encontre a função de Cauchy para $(p(t)x')' = 0$.*

**Solução:** Para cada $s$ fixo, temos:

$$(p(t)x'(t,s))' = 0, \quad t \in I.$$

Daquí,

$$p(t)x'(t,s) = \alpha(s).$$

A condição $x'(s,s) = \frac{1}{p(s)}$ implica $\alpha(s) = 1$. Implicando que

$$x'(t,s) = \frac{1}{p(t)}.$$

Integrando de $s$ até $t$ e usando a condição $x(s,s) = 0$, obtemos

$$x(t,s) = \int_s^t \frac{1}{p(r)}dr.$$

**Exemplo 2.3.2** *Encontre a função de Cauchy para*

$$(e^{-5t}x')' + 6e^{-5t}x = 0.$$

**Solução:** Desenvolvendo essa equação e simplificando, obtemos a equação equivalente

$$x'' - 5x' + 6x = 0.$$

Daqui resulta que a função de Cauchy é da forma

$$x(t,s) = \alpha(s)e^{2t} + \beta(s)e^{3t}.$$

Usando o fato que $p(t) = e^{-5t}$ e as condições

$$x(s,s) = 0, \quad x'(s,s) = \frac{1}{p(s)} = e^{5s},$$

obtemos o sistema

$$\left| \begin{array}{l} \alpha(s)e^{2s} + \beta(s)e^{3s} = 0 \\ 2\alpha(s)e^{2s} + 3\beta(s)e^{3s} = e^{5s}. \end{array} \right.$$

Resolvendo, o sistema temos

$$\alpha(s) = -e^{3s} \ \ e \ \ \beta(s) = e^{2s}.$$

Portanto,

$$x(t,s) = e^{3t}e^{2s} - e^{2t}e^{3s}.$$

**Teorema 7** *Se $u, v$ são soluções linearmente independentes de $Lx = 0$, então a função de Cauchy para $Lx = 0$ é dada por*

$$x(t,s) = \frac{\begin{vmatrix} u(s) & v(s) \\ u(t) & v(t) \end{vmatrix}}{p(s)\begin{vmatrix} u(s) & v(s) \\ u'(s) & v'(s) \end{vmatrix}},$$

*para $t, s \in I$.*

**Demonstração:** Como $u, v$ são soluções linearmente independentes de $Lx = 0$, o Wronskiano destas duas soluções é sempre diferente de zero, pelo Corolário 3, por isso, podemos definir

$$y(t,s) := \frac{\begin{vmatrix} u(s) & v(s) \\ u(t) & v(t) \end{vmatrix}}{p(s)\begin{vmatrix} u(s) & v(s) \\ u'(s) & v'(s) \end{vmatrix}},$$

para $t, s \in I$. Como para cada $s$ fixo em $I$, a função $y(\cdot, s)$ é uma combinação linear de $u$ e $v$, logo, pelo Teorema 4 a função $y(t,s)$ é uma solução de $Lx = 0$. Além disso, $y(s,s) = 0$ e $y'(s,s) = \frac{1}{p(s)}$. Assim, temos pela unicidade de soluções do problema de valor inicial que $y(t,s)$=$x(t,s)$ para $t \in I$ e para cada $s$ fixo em $I$, o qual da o resultado desejado. ∎

**Exemplo 2.3.3** *Use o Teorema 7 para encontrar a função de Cauchy para*

$$(p(t)x')' = 0.$$

**Solução:** Seja $a \in I$, então $u(t) := 1$, $v(t) = \int_a^t \frac{1}{p(r)} dr$ definem soluções linearmente independentes de $(p(t)x')' = 0$. Assim, pelo Teorema 7, a função de Cauchy é dada por

$$x(t,s) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \int_a^s \frac{1}{p(r)} dr \\ 1 & \int_a^t \frac{1}{p(r)} dr \end{vmatrix}}{p(s)\begin{vmatrix} 1 & \int_a^s \frac{1}{p(r)} dr \\ 0 & \frac{1}{p(s)} \end{vmatrix}} = \int_s^t \frac{1}{p(r)} dr.$$

**Exemplo 2.3.4** *Use o Teorema 7 para encontrar a função de Cauchy para*

$$(e^{-5t}x')' + 6e^{-5t}x = 0.$$

**Solução:** Do Exemplo 2.3.2,

$$u(t) = e^{2t}, \quad v(t) = e^{3t}, \quad t \in \mathbb{R}$$

definem soluções linearmente independentes da equação

$$(e^{-5t}x')' + 6e^{-5t}x = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Assim, pelo Teorema 7, a função de Cauchy é dada por

$$x(t,s) = \frac{\begin{vmatrix} e^{2s} & e^{3s} \\ e^{2t} & e^{3t} \end{vmatrix}}{e^{-5s}\begin{vmatrix} e^{2s} & e^{3s} \\ 2e^{2s} & 3e^{3s} \end{vmatrix}} = \frac{e^{3t}e^{2s} - e^{2t}e^{3s}}{e^{-5s}(3e^{5s} - 2e^{5s})} = e^{3t}e^{2s} - e^{2t}e^{3s}.$$

Para o que segue necessitaremos do seguinte resultado.

**Lema 1** *Suponha que* $f(\cdot,\cdot)$ *e a sua derivada parcial* $f_t(\cdot,\cdot)$ *de primeira ordem são funções contínuas em* $I \times I$ *e* $a \in I$. *Então*

$$\frac{d}{dt}\int_a^t f(t,s)ds = \int_a^t f_t(t,s)ds + f(t,t),$$

*para* $t \in I$.

**Demonstração:** Considere a mudança de variáveis $r = r(t)$ e $u = u(t)$. Então, usando a regra da cadeia e a mudança de variáveis, obtemos:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\int_a^t f(t,s)ds = \frac{d}{dt}\int_a^r f(u,s)ds = \\
&= \frac{\partial}{\partial u}\left(\int_a^r f(u,s)ds\right)\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r}\left(\int_a^r f(u,s)ds\right)\frac{\partial r}{\partial t} = \\
&= \int_a^r f_u(u,s)ds\frac{\partial u}{\partial t} + f(u,r)\frac{\partial r}{\partial t}
\end{aligned}$$

Fazendo, $r(t) = t$ e $u(t) = t$, obtemos

$$\frac{d}{dt}\int_a^t f(t,s)ds = \int_a^t f_t(t,s)ds + f(t,t), \ \forall t \in I.$$

$\blacksquare$

**Teorema 8 (Fórmula da variação das constantes)** *Suponha* $h$ *contínua em* $I$ *e* $a \in I$. *Então a solução do problema de valor inicial*

$$\left|\begin{array}{l} Lx = h(t), \\ x(a) = 0, \\ x'(a) = 0, \end{array}\right.$$

*é dada por*

$$x(t) = \int_a^t x(t,s)h(s)ds, \quad t \in I,$$

*onde* $x(\cdot,\cdot)$ *é a função de Cauchy para* $Lx = 0$.

**Demonstração:** Seja

$$x(t) := \int_a^t x(t,s)h(s)ds,$$

para $t \in I$. Note que $x(a) = 0$. Suponhamos

$$x'(t,s) := x_t(t,s).$$

Então, pelo Lema 1 e do fato que $x(t,t) = 0$ temos:

$$\begin{aligned} x'(t) &= \int_a^t x'(t,s)h(s)ds + x(t,t)h(t) \\ &= \int_a^t x'(t,s)h(s)ds. \end{aligned}$$

Portanto, $x'(a) = 0$ e

$$p(t)x'(t) = \int_a^t p(t)x'(t,s)h(s)ds.$$

Daí, segue-se novamente do Lema 1 e do fato que $x'(t,t) = \frac{1}{p(t)}$,

$$\begin{aligned} (p(t)x'(t))' &= \int_a^t (p(t)x'(t,s))'h(s)ds + p(t)x'(t,t)h(t) \\ &= \int_a^t (p(t)x'(t,s))'h(s)ds + h(t). \end{aligned}$$

Portanto, da última igualdade e da definição de $x$, obtemos

$$\begin{aligned} Lx(t) &= (p(t)x'(t))' + q(t)x(t) \\ &= \int_a^t \left\{(p(t)x'(t,s))' + q(t)x(t,s)\right\} h(s)ds + h(t) \\ &= \int_a^t Lx(t,s)h(s)ds + h(t) \\ &= h(t), \end{aligned}$$

para todo $t \in I$, uma vez que $x(\cdot,\cdot)$ é a função de Cauchy para $Lx = 0$. A unicidade segue do Teorema 1. ■

**Corolário 4** *Suponha $h$ contínua em $I$ e $a \in I$. A solução do problema de valor inicial*

$$\left| \begin{array}{l} Lx = h(t), \\ x(a) = \alpha, \\ x'(a) = \beta, \end{array} \right.$$

*onde $\alpha$ e $\beta$ são constantes, é dada por*

$$x(t) = u(t) + \int_a^t x(t,s)h(s)ds,$$

*para $t \in I$, onde $u$ é a solução do PVI*

$$\left| \begin{array}{l} Lu = 0, \\ u(a) = \alpha, \\ u'(a) = \beta, \end{array} \right.$$

*e, $x(\cdot,\cdot)$ é a função de Cauchy para $Lx = 0$.*

**Demonstração:** Seja

$$x(t) := u(t) + \int_a^t x(t,s)h(s)ds,$$

onde $u, x(\cdot,\cdot)$, e $h$ estão definidas no enunciado do teorema. Então

$$x(t) = u(t) + v(t),$$

onde

$$v(t) := \int_a^t x(t,s)h(s)ds,$$

Então pelo Teorema 8, tem-se:

$$\left| \begin{array}{l} Lv(t) = h(t), \quad t \in I \\ v(a) = 0, \\ v'(a) = 0. \end{array} \right.$$

Daí, segue que

$$x(a) = u(a) + v(a) = \alpha,$$

e

$$x'(a) = u'(a) + v'(a) = \beta.$$

Portanto,

$$Lx(t) = Lu(t) + Lv(t) = h(t),$$

para $t \in I$. ∎

**Exemplo 2.3.5** *Use a fórmula da variação de constantes para resolver o PVI*

$$\left| \begin{array}{l} (e^{-5t}x')' + 6e^{-5t}x = e^t, \\ x(0) = 0, \\ x'(0) = 0, \end{array} \right.$$

**Solução:** Pelo Exemplo 2.3.2, temos que a função de Cauchy para $(e^{-5t}x')' + 6e^{-5t}x = 0$ é dada por

$$x(t,s) = e^{3t}e^{2s} - e^{2t}e^{3s},$$

para $t, s \in I$. Assim, a solução desejada é dada por

$$\begin{aligned}
x(t) &= \int_0^t x(t,s)h(s)ds \\
&= \int_0^t \Big(e^{3t}e^{2s} - e^{2t}e^{3s}\Big)e^s ds \\
&= e^{3t}\int_0^t e^{3s}ds - e^{2t}\int_0^t e^{4s}ds \\
&= e^{3t}\left(\frac{1}{3}e^{3t} - \frac{1}{3}\right) - e^{2t}\left(\frac{1}{4}e^{4t} - \frac{1}{4}\right) \\
&= \frac{1}{3}e^{6t} - \frac{1}{3}e^{3t} - \frac{1}{4}e^{6t} + \frac{1}{4}e^{2t} \\
&= \frac{1}{12}e^{6t} - \frac{1}{3}e^{3t} + \frac{1}{4}e^{2t}.
\end{aligned}$$

# Capítulo 3

# Problema de Sturm-Liouville

## 3.1 Problema de Sturm-Liouville

Nesta seção estaremos preocupados com a equação diferencial de Sturm-Liouville

$$(p(t)x')' + (\lambda r(t) + q(t))x = 0 \tag{3.1}$$

Além das hipóteses já citadas sobre as funções $p$ e $q$, suponhamos também que $\lambda$ é um parâmetro real e $r(t) > 0$ em $I$. Note-se que a equação (3.1) pode ser escrita na forma

$$Lx = -\lambda r(t)x.$$

Nesta seção estamos preocupados com o problema de Sturm-Liouville (PSL)

$$\left| \begin{array}{l} Lx = -\lambda r(t)x, \\ \alpha x(a) - \beta x'(a) = 0, \\ \gamma x(b) + \delta x'(b) = 0, \end{array} \right. \tag{3.2}$$

onde $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ são constantes satisfazendo

$$\alpha^2 + \beta^2 > 0, \quad \gamma^2 + \delta^2 > 0.$$

No que segue apresentaremos alguns definições que serão importante para compreenssão do que segue.

**Definição 3.1.1** *Dizemos que $\lambda_0$ é um autovalor para o PSL (3.2) quando o mesmo tem uma solução não-trivial $x_0$ com $\lambda = \lambda_0$. Sendo assim, dizemos que $x_0$ é uma autofunção correspondente a $\lambda_0$ e que $\lambda_0, x_0$ é um auto par para o problema PSL (3.2).*

**Definição 3.1.2** *Dizemos que $\lambda_0$ é um autovalor simples quando existe apenas uma autofunção linearmente independente correspondente a $\lambda_0$.*

**Observação 4** *Note que se $\lambda_0, x_0$ é um autopar para o problema PSL (3.2) e, $k$ é qualquer constante diferente de zero, tem-se que $\lambda_0, kx_0$ também é um autopar para o problema PSL (3.2).*
*De fato,*

$$L(kx_0) = kL(x_0) = k(-\lambda_0 r(t)x_0) = -\lambda_0 r(t)(kx_0)$$

**Exemplo 3.1.1** *Encontre autopares para o problema de Sturm-Liouville*

$$\left| \begin{array}{l} x'' = -\lambda x, \\ x(0) = 0, \\ x(\pi) = 0. \end{array} \right. \tag{3.3}$$

**Solução:** A forma para uma solução geral de (3.3) é diferente para os casos $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ e $\lambda > 0$, por isso, no intuito de encontrar autopares para o PSL (3.3) consideraremos três casos separadamente.
**1º Caso:** Suponha $\lambda < 0$. Neste caso, seja $\lambda = -\mu^2$, onde $\mu > 0$. Então a solução geral de (3.3) é definida por

$$x(t) = c_1 \cosh(\mu t) + c_2 \text{senh}(\mu t), \quad t \in [0, \pi].$$

Para satisfazer a primeira condição de contorno $x(0) = 0$, somos obrigado a tomar $c_1 = 0$. A segunda condição de contorno da

$$x(\pi) = c_2 \text{senh}(\mu\pi) = 0,$$

o que implica $c_2 = 0$, e portanto, quando $\lambda < 0$ o PSL (3.3) possui apenas a solução trivial. Logo, o PSL (3.3) não possui autovalores negativos.

**2º Caso:** Quando $\lambda = 0$ a solução geral de (3.3) é dada por

$$x(t) = c_1 t + c_2.$$

Como $x(0) = 0$, temos $c_2 = 0$. Então a segunda condição de contorno nos dar

$$x(\pi) = c_1 \pi = 0,$$

o que implica $c_1 = 0$. Assim, quando $\lambda = 0$ a única solução do PSL (3.3) é a solução trivial, e portanto, $\lambda = 0$ não é um autovalor.

**3º Caso:** Suponha que $\lambda > 0$, então $\lambda = \mu^2 > 0$, onde $\mu > 0$. Assim, a solução geral de (3.3) é dada por

$$x(t) = c_1 \cos(\mu t) + c_2 \text{sen}(\mu t), \quad t \in [0, \pi].$$

Daí, a condição de contorno $x(0) = 0$ implica que $c_1 = 0$. A condição de contorno $x(\pi) = 0$, implica

$$c_2 \text{sen}(\mu \pi) = 0.$$

Esta útima equação é verdadeira para $\mu = \mu_n := n = 1, 2, 3, \cdots$. Daí resulta que os autovalores do PSL (3.3) são

$$\lambda_n = n^2, \quad n = 1, 2, 3, \cdots,$$

pois $\lambda = \mu^2$. Assim, as autofunções correspondentes são definidas por

$$x_n(t) = \text{sen}(nt), \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

para $t \in [0, \pi]$. Portanto,

$$\lambda_n = n^2, \quad x_n(t) = \text{sen}(nt), \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

são autopares para o PSL (3.3).

**Definição 3.1.3** *Suponha que $r : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua e $r(t) \geq 0$, mas não identicamente nula em $[a, b]$. Definimos o produto interno com respeito a função peso $r$ das funções continuas $x$ e $y$ em $[a, b]$ por*

$$\langle x, y \rangle_r = \int_a^b r(t)x(t)y(t)dt.$$

*Dizemos que $x$ e $y$ são ortogonais com respeito a função peso $r$ no intervalo $[a, b]$, quando*

$$\langle x, y \rangle_r = \int_a^b r(t)x(t)y(t)dt = 0.$$

**Exemplo 3.1.2** *As funções definidas por $x(t) = t^2$, $y(t) = 4-5t$, para $t \in [0, 1]$ são ortogonais com respeito a função peso defenida por $r(t) = t$ em $[0, 1]$.*

**Solução:** De fato,

$$\langle x, y \rangle_r = \int_a^b r(t)x(t)y(t)dt = \int_0^1 tt^2(4-5t)dt = \int_0^1 4t^3 dt - \int_0^1 5t^4 dt = 4\frac{t^4}{4}\bigg|_0^1 - 5\frac{t^5}{5}\bigg|_0^1 = 0.$$

**Lema 2** *Se $\lambda_0, x_0$ é um autopar do PSL (3.2), então $\overline{\lambda}_0, \overline{x}_0$ também é um autopar do PSL (3.2).*

**Demonstração:** Seja $\lambda_0, x_0$ um autopar do PSL (3.2). Suponha que $\lambda_0 = \alpha + \beta i$, onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $x_0 = u + vi$ com $u(t), v(t)$ funções reais. Como $\lambda_0, x_0$ um autopar do PSL (3.2), tem-se $Lx_0 = -\lambda_0 r(t) x_0$, ou seja,

$$
\begin{aligned}
L(u + vi) &= Lu + Lvi \\
&= -(\alpha + \beta i) r(t)(u + vi) \\
&= -r(t)[\alpha u + \alpha v i + \beta u i - \beta v] \\
&= -r(t)[\alpha u - \beta v] - r(t)[\alpha v + \beta u] i.
\end{aligned}
$$

Daí, $Lu = -r(t)[\alpha u - \beta v]$ e $Lv = -r(t)[\alpha v + \beta u]$. Mostremos que $\overline{\lambda}_0 = \alpha - \beta i$, $\overline{x}_0 = u - vi$ também é um autopar do PSL (3.2). Com efeito, da linearidade de $L$ e das expressões definidas de $Lu$ e $Lv$, obtemos:

$$
\begin{aligned}
L\overline{x}_0 &= L(u - vi) \\
&= Lu - Lvi \\
&= Lu + Lu - (Lu + Lvi) \\
&= 2Lu - (Lu + Lvi) \\
&= 2\{-r(t)[\alpha u - \beta v]\} - \{-r(t)[\alpha u - \beta v] - r(t)[\alpha v + \beta u] i\} \\
&= -r(t)[\alpha u - \beta v] + r(t)[\alpha v + \beta u] i \\
&= -r(t)[(\alpha u - \beta v) - (\alpha v + \beta u) i] \\
&= -r(t)[\alpha - \beta i][u - vi] \\
&= -\overline{\lambda}_0 r(t) \overline{x}_0.
\end{aligned}
$$

Portanto, $\overline{\lambda}_0, \overline{x}_0$ é um autopar do PSL (3.2). ∎

**Teorema 9** **i)** *Autofunções correspondentes a autovalores distintos do PSL (3.2) são ortogonais com respeito a uma função peso $r$ em $[a, b]$;*

**ii)** *Todos os autovalores do PSL (3.2) são reais e simples;*

**iii)** *Para cada autovalor, existe uma autofunção de valor real correspondente.*

**Demonstração: i)** Suponha que $\lambda_1, x_1$ e $\lambda_2, x_2$ são autopares do PSL (3.2). Pela identidade de Lagrange (Teorema 3),temos:

$$x_1(t)Lx_2(t) - x_2(t)Lx_1(t) = \{p(t)w[x_1(t), x_2(t)]\}',$$

para todo $t \in [a, b]$. Assim, por (3.2), obtemos

$$\begin{aligned} -x_1(t)\lambda_2 r(t)x_2(t) + x_2(t)\lambda_1 r(t)x_1(t) &= (\lambda_1 - \lambda_2)r(t)x_1(t)x_2(t) \\ &= \{p(t)w[x_1(t), x_2(t)]\}', \end{aligned}$$

para todo $t \in [a, b]$. Integrando ambos os lados de $a$ até $b$ e usando a definição de produto interno com respeito a função peso $r$, obtemos

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\langle x_1, x_2\rangle_r = \{p(t)w[x_1(t), x_2(t)]\}_a^b.$$

Usando o fato de que $x_1$ e $x_2$ satisfazem as condições de contorno do PSL (3.2), segue que

$$\alpha x_1(a) - \beta x_1'(a) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1(a) = \frac{\beta}{\alpha}x_1'(a)$$

e

$$\alpha x_2(a) - \beta x_2'(a) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2(a) = \frac{\beta}{\alpha}x_2'(a).$$

Assim,

$$w[x_1(t), x_2(t)](a) = x_1(a)x_2'(a) - x_2(a)x_1'(a) = \frac{\beta}{\alpha}x_1'(a)x_2'(a) - \frac{\beta}{\alpha}x_1'(a)x_2'(a) = 0.$$

Analogamente,

$$w[x_1(t), x_2(t)](b) = 0.$$

Daí, temos que

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\langle x_1, x_2\rangle_r = p(a)\left\{w[x_1(t), x_2(t)](b) - w[x_1(t), x_2(t)](a)\right\} = 0,$$

isto é,

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\langle x_1, x_2\rangle_r = 0. \tag{3.4}$$

Como $\lambda_1 \neq \lambda_2$, por hipótese, obtemos $\langle x_1, x_2\rangle_r = 0$. Portanto, $x_1$ e $x_2$ são ortogonais com respeito a função peso $r$ em $[a, b]$.

**ii)** Suponha que $\lambda_0$ e $x_0$ é um autopar do PSL (3.2). Do Lema 2, obtemos que $\overline{\lambda}_0, \overline{x}_0$ é um autopar do PSL (3.2). Podemos, supor que $\lambda_0 = a + bi$ e $\overline{\lambda}_0 = a - bi$, com $a, b$ reais e $i$ a unidade imaginária. Do item **i)** e de (3.4), para os autopares $\lambda_0, x_0$ e $\overline{\lambda}_0, \overline{x}_0$, obtemos

$$(\lambda_0 - \overline{\lambda}_0)\langle x_0, \overline{x}_0\rangle_r = 0.$$

Como $\langle x_0, \overline{x}_0\rangle_r > 0$, segue que $\lambda_0 - \overline{\lambda}_0 = 0$, isto é, $a + bi - (a - bi) = 2bi = 0$ o que acarreta $b = 0$. Logo, $\lambda_0$ é real. Agora, suponha que $\lambda_0$ é um autovalor e $x_1, x_2$ são autofunções correspondentes. Desde que $x_1, x_2$ satisfazem a condição de contorno $\alpha x(a) - \beta x'(a) = 0$ , temos

$$w[x_1(t), x_2(t)](a) = 0.$$

Como $x_1$ e $x_2$ satisfazem a mesma equação diferencial $Lx = \lambda_0 r(t)x$, obtemos que $x_1$ e $x_2$ são linearmente dependentes em $[a, b]$, isto é, $x_1 = kx_2$, onde $k$ é uma constante. Assim, todos os autovalores do PSL (3.2) são simples.

**iii)** Sejam $\lambda_0, x_0$, um autopar do PSL (3.2), com $x_0 = u + iv$, onde $u, v$ são funções reais sobre $[a, b]$. Provamos anteriormente que se todos autovalores do PSL (3.2) são reais, então $\lambda_0$ é real. Então, pelo Lema 2, $\overline{\lambda}_0, \overline{x}_0$ também é um autopar do PSL (3.2). Assim,

$$Lx_0 = -\lambda_0 r(t)x_0 = -\lambda_0 r(t)[u(t) + iv(t)]$$

e

$$L\overline{x}_0 = -\overline{\lambda}_0 r(t)\overline{x}_0 = -\overline{\lambda}_0 r(t)[u(t) - iv(t)].$$

Como $\lambda_0$ é real, obtemos:

$$Lx_0 = Lu(t) + iLv(t) = -\lambda_0 r(t)[u(t) + iv(t)]$$

e

$$L\overline{x}_0 = Lu(t) - iLv(t) = -\lambda_0 r(t)[u(t) - iv(t)].$$

Somando as duas últimas equações, obtemos:

$$2Lu(t) = -2\lambda_0 r(t)u(t) \quad \Rightarrow \quad Lu(t) = -\lambda_0 r(t)u(t),$$

isto é, $u$ é uma autofunção real correspondente a $\lambda_0$. ∎

**Exemplo 3.1.3 (Separação de variáveis)** *Neste exemplo, usaremos separação de variáveis para mostrar como podemos obter as soluções em duas dimensões para equação de Laplace,*

$$u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

**Solução:** Procuramos por soluções da forma

$$u(x,y) = X(x)Y(y).$$

A partir da equação de Laplace, obtemos

$$X''Y + XY'' = 0.$$

Separando as variáveis e supondo $X(x) \neq 0, Y(y) \neq 0$, obtemos

$$\frac{X''}{-X} = \frac{Y''}{Y}.$$

Como o lado esquerdo desta equação depende apenas de $x$ e o lado direito depende apenas de $y$, temos que

$$\frac{X''(x)}{-X(x)} = \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda,$$

onde $\lambda$ é uma constante. Donde, obtemos as equações de Sturm-Liouville

$$X'' = -\lambda X \tag{3.5}$$

e

$$Y'' = \lambda Y. \tag{3.6}$$

Daí, segue que se $X$ é uma solução da equação diferencial (3.5) e $Y$ é uma solução da equação diferencial (3.6), então

$$u(x,y) = X(x)Y(y)$$

é uma solução da equação diferencial parcial de Laplace. Notemos que, se considerarmos

$$u(x,y) = X(x)Y(y),$$

não trivial e satisfazendo as condições de contorno

$$\alpha u(a,y) - \beta u_x(a,y) = 0, \quad \gamma u(b,y) + \delta u_x(b,y) = 0,$$

então, basta considerarmos $X$ satisfazendo a condição de contorno

$$\alpha X(a) - \beta X'(a) = 0, \quad \gamma X(b) + \delta X'(b) = 0.$$

**Teorema 10** *Se $q(t) \leq 0$ em $[a,b]$, $\alpha\beta \geq 0$ e $\gamma\delta \geq 0$, então todos os autovalores do PSL (3.2) são não negativos.*

**Demonstração:** Suponha que $\lambda_0$ é um autovalor do PSL (3.2). Pelo Teorema 9, existe uma autofunção $x_0$ de valor real correspondente a $\lambda_0$. Então

$$(p(t)x_0'(t))' + (\lambda_0 r(t) + q(t))x_0(t) = 0,$$

para $t \in [a, b]$. Multiplicando ambos os lados por $x_0(t)$ e integrando de $a$ até $b$, temos

$$\int_a^b x_0(t)(p(t)x_0'(t))'dt + \lambda_0 \int_a^b r(t)x_0^2(t)dt + \int_a^b q(t)x_0^2(t)dt = 0,$$

isto é,

$$\lambda_0 \int_a^b r(t)x_0^2(t)dt + \int_a^b q(t)x_0^2(t)dt = -\int_a^b x_0(t)(p(t)x_0'(t))'dt.$$

Como $q(t) \leq 0$ em $[a, b]$, obtemos

$$\lambda_0 \int_a^b r(t)x_0^2(t)dt \geq -\int_a^b x_0(t)(p(t)x_0'(t))'dt.$$

Integrando por partes, resulta

$$\lambda_0 \int_a^b r(t)x_0^2(t)dt \geq -\Big\{p(t)x_0(t)x_0'(t)\Big\}_a^b + \int_a^b p(t)[x_0'(t)]^2 dt.$$

Daí, temos

$$\lambda_0 \int_a^b r(t)x_0^2(t)dt \geq -\Big\{p(t)x_0(t)x_0'(t)\Big\}_a^b = -[p(b)x_0(b)x_0'(b) - p(a)x_0(a)x_0'(a)]. \qquad (3.7)$$

Agora, usaremos o fato que $x_0$ satisfaz a condição de contorno $\alpha x(a) - \beta x'(a) = 0$ do PSL (3.2) para mostrar que

$$p(a)x_0(a)x_0'(a) \geq 0.$$

Se $\beta = 0$, então $x_0(a) = 0$ e consequentemente

$$p(a)x_0(a)x_0'(a) = 0.$$

Por outro lado, se $\beta \neq 0$, então

$$p(a)x_0(a)x_0'(a) = \frac{\alpha}{\beta}p(a)[x_0(a)]^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad -p(a)x_0(a)x_0'(a) \leq 0.$$

Analogamente, usando o fato que $x_0$ satisfaz a condição de contorno $\gamma x(b) + \delta x'(b) = 0$ do PSL (3.2) e o fato que $\gamma\delta \geq 0$, segue-se que

$$p(b)x_0(b)x_0'(b) \leq 0.$$

Destas duas últimas desigualdades e de (3.7), obtemos

$$\int_a^b r(t)x_0^2(t)dt \geq 0.$$

■

O exemplo a seguir é importante nos estudos das temperaturas na placa infinita, $0 \leq x \leq 1$, $-\infty < y < \infty$, onde a margem esquerda em $x = 0$ é isolado e ocorre transferência de calor na margem direita da superfície em $x = 1$ em um meio com temperatura zero.

**Exemplo 3.1.4** *Encontre autopares para o PSL,*

$$\left| \begin{array}{l} X'' = -\lambda X, \\ X'(0) = 0, \\ hX(1) + X'(1) = 0, \end{array} \right. \tag{3.8}$$

*onde $h$ é constante positiva.*

**Solução:** Como $q(t) = 0 \leq 0$ em $[0, 1]$, $\alpha\beta = 0 \geq 0$ e $\gamma\delta = h \geq 0$, temos pelo Teorema 10 que todos os autovalores do PSL (3.8) são não negativos. Se $\lambda = 0$, então $X(x) = c_1 x + c_2$. Daí, $X'(0) = 0$,implica, $c_1 = 0$. Além disso,

$$hX(1) + X'(1) = c_2 h = 0$$

implica que $c_2 = 0$ e assim $X$ é uma solução trivial. Logo, zero não é um autovalor do PSL (3.8). Em seguida suponha que $\lambda = \mu^2 > 0$, onde $\mu > 0$. Então a solução geral da equação $X'' = -\lambda X$ do PSL (3.8) é dada por

$$X(x) = c_1 \cos(\mu x) + c_2 \text{sen}(\mu x), \quad x \in [0, 1].$$

Então

$$X'(0) = c_2 \mu = 0,$$

implica que $c_2 = 0$,pois $\mu > 0$ e assim

$$X(x) = c_1 \cos(\mu x), \quad x \in [0, 1].$$

Daí, segue que

$$hX(1) + X'(1) = hc_1 \cos(\mu) - \mu c_1 \text{sen}(\mu) = 0. \tag{3.9}$$

Para termos uma solução não-trivial $X$ devemos ter $c_1 \neq 0$ e daí $\mu$ deve obedecer a equação

$$c_1[h \cos(\mu) - \mu \text{sen}(\mu)] = 0.$$

Se, porém, $\cos(\mu) = 0$, então $\operatorname{sen}(\mu) \neq 0$ e (3.9) não se satisfaz. Portanto, podemos admitir $\cos(\mu) \neq 0$. Assim,

$$\frac{h}{\mu} = \frac{\operatorname{sen}(\mu)}{\cos(\mu)}.$$

Por isso, podemos escolher $\mu > 0$ tal que

$$\operatorname{tg}(\mu) = \frac{h}{\mu}.$$

Sejam $0 < \mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < \cdots$ números positivos satisfazendo

$$\operatorname{tg}(\mu_n) = \frac{h}{\mu_n}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots.$$

Então

$$\lambda_n = \mu_n^2$$

são os autovalores e

$$X_n(x) = \cos(\mu_n x)$$

são as autofunções correspondentes.

## 3.2 Construção da sequência de autovalores

Nesta seção estudaremos o comportamento das ocilações das soluções não-triviais da equação diferencial

$$y'' + q(x)y = 0, \tag{3.10}$$

onde $q(x)$ é uma função positiva. Iniciamos com alguns resultados importantes, entre eles, um teorema que, em geral, descarta a possibilidade de uma solução não-trivial oscilar infinitas vezes num intervalo fechado. Apresentaremos também, o Teorema da Separação de Sturm e o Teorema da Comparação de Sturm.

A seguir mostraremos que se $q(x) < 0$ em (3.10), então as soluções desta equação não oscilam.

**Lema 3** *Cosidere a equação*

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x), \tag{3.11}$$

*onde $P(x), Q(x)$ e $R(x)$ são funções contínuas sobre $[a, b]$. Se $x_0$ é qualquer ponto em $[a, b]$ e se $y_0$ e $y'_0$ são números quaisquer, a equação (3.11) tem uma única solução $y(x)$ no intervalo tal que $y(x_0) = y_0$ e $y'(x_0) = y'_0$.*

**Teorema 11** *Se* $q(x) < 0$ *e* $y(x)$ *é uma solução não trivial de* (3.10), *então* $y(x)$ *tem no máximo um zero.*

**Demonstração:** Seja $x_0$ um zero de $y(x)$, isto é, $y(x_0) = 0$. Como $y \not\equiv 0$ então $y'(x_0) \neq 0$, pelo Lema 3. Sem perda de generalidade, podemos supor que $y'(x_0) > 0$, de modo que $y(x)$ é positiva sobre algum intervalo a direita de $x_0$. Como $q(x) < 0$, então $y''(x) = -q(x)y(x) > 0$ sobre o mesmo intervalo. Isto implica que $y'(x)$ é uma função crescente, assim $y(x)$ não pode ter um zero a direita de $x_0$, e usando argumentos similar mostra-se que $y(x)$ não tem um zero a esquerda de $x_0$, o que completa a prova. ∎

**Teorema 12** *Seja* $y(x)$ *uma solução não trivial da equação (3.10) sobre o intervalo* $[a, b]$. *Então,* $y(x)$ *tem no máximo um número finito de zeros neste intervalo.*

**Demonstração:** Suponhamos o contrário, a saber que $y(x)$ tem um número infinito de zeros em $[a, b]$. Segue-se a partir daí e do Teorema de Bolzano-Weierstrass que existem em $[a, b]$ um ponto $x_0$ e uma sequência de zeros $x_n \neq x_0$ tal que $x_n \longrightarrow x_0$. Como $y(x)$ é contínua e diferenciável em $x_0$, temos

$$y(x_0) = \lim_{x_n \to x_0} y(x_n) = 0$$

e

$$y'(x_0) = \lim_{x_n \to x_0} \frac{y(x_n) - y(x_0)}{x_n - x_0} = 0.$$

Pelo Lema 3, segue que $y(x)$ é uma solução trivial da equação (3.10), o que é uma contradição, e esta condição completa a prova. ∎

A seguir, o Teorema da Separação de Sturm nos informa que os zeros de duas soluções não-triviais de (3.12) quaisquer coincidem ou ocorrem alternadamente, dependendo apenas se estas soluções são linearmente dependente ou independente. Assim, todas as soluções de (3.12) oscilam com essencialmente a mesma rapidez, no sentido que num dado intervalo o números de zeros de qualquer solução não pode ser diferente do número de zeros de qualquer outra solução.

**Teorema 13 (Teorema da Separação de Sturm)** *Sejam* $y_1(x)$ *e* $y_2(x)$ *são duas soluções linearmente independentes de*

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0, \tag{3.12}$$

*onde* $P(x), Q(x)$ *e* $R(x)$ *são funções contínuas, então os zeros destas funções são distintos e ocorrem alternadamente, no sentido que* $y_1(x)$ *é igual a zero uma vez entre quaisquer dois zeros sucessivos de* $y_2(x)$, *e reciprocamente.*

**Demonstração:** Como $y_1$ e $y_2$ são LI, então o Wronskiano

$$W = W[y_1, y_2](x) = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x) \neq 0$$

e portanto, como a função $W$ é contínua, tem sinal constante. Afirmação: $y_1(x)$ e $y_2(x)$ não tem zero comum. De fato, se $y_1$ e $y_2$ possuísse um zero comum então $W[y_1, y_2] = 0$, o que é impossível. Assumimos agora que $x_1$ e $x_2$ são zeros sucessivos de $y_2$ e mostraremos que $y_1$ tem um zero entre $x_1$ e $x_2$. Para tanto, basta mostrar que $y_1$ tem sinais opostos entre $x_1$ e $x_2$. Se $x_1 < x_2$ são zeros sucessivos de $y_2$, então $W(x_1) = y_1(x_1)y_2'(x_1)$ e $W(x_2) = y_1(x_2)y_2'(x_2)$. Além disso, $y_2'(x_1)$ e $y_2'(x_2)$ tem sinais opostos, pois se supormos $y_2$ crescente em $x_1$, segue que $y_2$ será decrescente em $x_2$, e vice versa. Como o Wronskiano tem sinal constante, $y_1(x_1)$ e $y_1(x_2)$ tem sinais opostos, e portanto por continuidade, $y_1(x)$ anula-se em algum ponto do intervalo $(x_1, x_2)$. Note que $y_1$ não pode se anular em mais do que um ponto entre $x_1$ e $x_2$, pois se fosse, então usando o mesmo argumento mostra-se que $y_2$ se anula entre os zeros de $y_1$, o que contradiz a hipótese original que $x_1$ e $x_2$ são zeros sucessivos de $y_2$. $\blacksquare$

**Lema 4** *Sejam $y(x)$ e $z(x)$ duas soluções não-triviais de $y'' + q(x)y = 0$ e $z'' + r(x)z = 0$ onde $q(x)$ e $r(x)$ são funções positivas. Se $x_1 < x_2$ são zeros sucessivos de $z(x)$, isto é, $z(x_1) = z(x_2) = 0$ e $z(x)$ é diferente de zero em $(x_1, x_2)$, então*

$$W[y, z](x_1) = y(x_1)z'(x_1) \geq 0$$

*e*

$$W[y, z](x_2) = y(x_2)z'(x_2) \leq 0.$$

**Demonstração:** Suponha que $y(x), z(x) > 0$ em $(x_1, x_2)$ e seja

$$W[y(x), z(x)] = y(x)z'(x) - y'(x)z(x).$$

Como $y$ é contínua em $(x_1, x_2)$, existe uma sequência $(x_n) \subset (x_1, x_2)$ tal que $x_n \longrightarrow x_1$ e pela continuidade de $y$, temos

$$y(x_1) = \lim_{n\to\infty} y(x_n) \geq \lim_{n\to\infty} 0 \geq 0.$$

Por outro lado, $z'(x_1) \geq 0$, pois se $z'(x_1) < 0$, como $z'$ é contínua em $x_1$, existe $\delta > 0$ tal que $z'(x) < 0$ em $I_\delta = (x_1 - \delta, x_1 + \delta)$ e daí, $z$ é decrescente em $I_\delta$ e como $z(x_1) = 0$ existe $\overline{x_2}$ com $\overline{x}_2 > x_1$ com $\overline{x}_2 \in I_\delta \subset (x_1, x_2)$ e $z(\overline{x}_2) < z(x_1) = 0$, o que contradiz o fato de $z$ ser positiva em $(x_1, x_2)$. Portanto, $z'(x_1) \geq 0$ e, consequentemente,

$$W[y, z](x_1) = y(x_1)z'(x_1) \geq 0.$$

Analogamente, mostra-se que $y(x_2) \geq 0$. Mostremos agora que $z'(x_2) \leq 0$. Se não fosse, isto é, $z'(x_2) > 0$, como $z'$ é contínua em $x_2$ e $z \neq 0$, existe $\delta > 0$ tal que $z'(x) > 0$ em $I_\delta = (x_2-\delta, x_2+\delta)$ e daí, $z$ é crescente em $I_\delta$. Como $z(x_2) = 0$, podemos escolher $\overline{x}_2 \in I_\delta \subset (x_1, x_2)$ com $\overline{x}_2 < x_2$ tal que $z(\overline{x}_2) < z(x_1) = 0$, o que contradiz o fato de $z$ ser positiva em $(x_1, x_2)$. Portanto, $z'(x_2) \leq 0$ e, consequentemente,

$$W[y, z](x_2) = y(x_2)z'(x_2) \leq 0.$$

■

O seguinte resultado, o qual é conhecido como Teorema da Comparação de Sturm, diz que quanto maior for $q(x)$ em (3.10) mais rapidamente as soluções de (3.10) oscilarão.

**Teorema 14 (Teorema da comparação de Sturm)** *Sejam $y(x)$ e $z(x)$ duas soluções não-triviais de*

$$y'' + q(x)y = 0$$

*e*

$$z'' + r(x)z = 0$$

*onde $q(x)$ e $r(x)$ são funções positivas tal que $q(x) > r(x)$. Então $y(x)$ se anula pelo menos uma vez entre dois zeros sucessivos de $z(x)$.*

**Demonstração:** Sejam $x_1 < x_2$ zeros sucessivos de $z(x)$, isto é, $z(x_1) = z(x_2) = 0$ e $z(x)$ é diferente de zero em $(x_1, x_2)$. Suponha que $y(x)$ não pode ser zero sobre $(x_1, x_2)$, e provaremos o teorema por contradição. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $y(x)$ e $z(x)$ são positivas sobre $(x_1, x_2)$. Note que o Wronskiano

$$W[y(x), z(x)] = y(x)z'(x) - z(x)y'(x)$$

é uma função de $x$ e escrevendo $W(x)$ em vez de $W[y(x), z(x)]$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{dW(x)}{dx} &= yz'' - zy'' \\ &= y(-rz) - z(-qy) \\ &= (q - r)yz > 0 \end{aligned}$$

sobre $(x_1, x_2)$. Agora integrando ambos os lados da desigualdade acima de $x_1$ a $x_2$, obtemos

$$W(x_2) - W(x_1) > 0,$$

isto é,

$$W(x_2) > W(x_1). \tag{3.13}$$

Por outro lado, pelo Lema 4,

$$W(x_1) \geq 0$$

e

$$W(x_2) \leq 0.$$

Portanto,

$$W(x_2) \leq 0 \leq W(x_1),$$

o que contraria (3.13). ■

## 3.3 Aplicação do Teorema da Comparação de Sturm

Nesta seção faremos uma aplicação do Teorema da Comparação de Sturm.

Considere a equação,

$$y'' + q(x)y = 0, \tag{3.14}$$

onde $q(x) > k^2 > 0$. Segue-se a partir do Teorema da Comparação de Sturm, que se tivermos $q(x) > k^2 > 0$ na equação (3.14), então qualquer solução não-trivial $y_1$ de (3.14) se anulará pelo menos uma vez entre qualquer dois zeros sucessivos da solução

$$y(x) = \operatorname{sen}(k(x - x_0)),$$

da equação $y'' + k^2 y = 0$, ou seja, $y_1$ será nula pelo menos uma vez em qualquer intervalo de comprimento $\frac{\pi}{k}$.
Com efeito, $y$ tem um zero em $x_1 = x_0$ e o próximo zero é em $x_2 = x_0 + \frac{\pi}{k}$. Portanto, $x_2 - x_1 = \frac{\pi}{k}$.

Existem várias consequências importante do Teorema da Comparação de Sturm. Como veremos a seguir,

**Lema 5** *Sejam $y(x)$ e $z(x)$ soluções não triviais das equações*

$$y'' + q(x)y = 0$$

*e*

$$z'' + r(x)z = 0,$$

*respectivamente, onde $q(x)$ e $r(x)$ são funções contínuas e positivas tais que $q(x) > r(x)$. Suponha que $y(x)$ e $z(x)$ são ambas nulas em um ponto $b_0$, e que $z(x)$ tenha um número finito ou infinito de zeros sucessivos $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ a direita de $b_0$. Então, a solução $y(x)$ tem pelo menos tantos zeros como $z(x)$ sobre todo intervalo fechado $[b_0, b_n]$, e se os zeros sucessivos de $y(x)$ a direita de $b_0$ são $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, então $a_n < b_n$ para todo $n$.*

**Demonstração:** Pelo Teorema da comparação de Sturm, $y(x)$ tem pelo menos um zero em cada intervalo aberto $(b_0, b_1), (b_1, b_2), \ldots (b_{n-1}, b_n)$. Portanto, se denotarmos estes zeros por $a_1, a_2, \ldots, a_n$, temos: $a_1 < b_1, a_2 < b_2, \ldots, a_n < b_n$, o que demonstra o teorema. ∎

**Lema 6** *Seja $q(x)$ uma função contínua que satisfaz as desigualdades*

$$0 < m^2 < q(x) < M^2$$

*sobre o intervalo $[a, b]$. Se $y(x)$ é uma solução não trivial da equação*

$$y'' + q(x)y = 0$$

*sobre $[a, b]$ e se $x_1, x_2$ são dois zeros sucessivos de $y(x)$, então*

$$\frac{\pi}{M} < x_2 - x_1 < \frac{\pi}{m} \tag{3.15}$$

*Além disso, se $y(x)$ é nula em $a$ e $b$, e em $(n-1)$ pontos do intervalo $(a, b)$, então*

$$\frac{m(b-a)}{\pi} < n < \frac{M(b-a)}{\pi}. \tag{3.16}$$

**Demonstração:** Para mostrar (3.15), comparamos a equação dada com a equação

$$z'' + m^2 z = 0.$$

Uma solução não trivial desta equação que se anula em $x_1$ é

$$z(x) = \operatorname{sen}[m(x - x_1)].$$

Como o próximo zero é $x_1 + \frac{\pi}{m}$, o Teorema da Comparação de Sturm garante que $x_2$ ocorrerá antes deste, isto é, $x_2 < x_1 + \frac{\pi}{m}$, ou seja,

$$x_2 - x_1 < \frac{\pi}{m}.$$

Para provar a outra desigualdade em (3.15), comparamos a equação dada com a equação

$$z'' + M^2 z = 0.$$

Observe que $z(x) = sen[M(x - x_1)]$ é uma solução não-trivial desta equação que tem um zero em $z_1 = x_1$ e o próximo em $z_2 = x_1 + \frac{\pi}{M}$. Como $x_1$ e $x_2$ são zeros sucessivos de $y'' + q(x)y = 0$, e por hipótese $M^2 > q(x)$, pelo Teorema da Comparação de Sturm, $z_2$ deve ocorrer antes de $x_2$. Daí, temos

$$x_1 + \frac{\pi}{M} < x_2,$$

isto é,

$$\frac{\pi}{M} < x_2 - x_1.$$

Portanto,

$$\frac{\pi}{M} < x_2 - x_1 < \frac{\pi}{m}.$$

Para provar (3.16), primeiro observe que existem $n$ subintervalos entre $n + 1$ zeros, assim por (3.15), temos

$$b - a = \sum_{j=2}^{n+1} (x_j - x_{j-1}) < n\left(\frac{\pi}{m}\right),$$

pois,

$$x_j - x_{j-1} < \frac{\pi}{m}, \ \ j = 2, 3, \ldots, n + 1.$$

Logo,

$$\frac{m(b-a)}{\pi} < n.$$

Utilizando um raciocínio análogo, e utilizando a primeira desigualdade de (3.15), obtemos

$$b - a > n\left(\frac{\pi}{M}\right),$$

isto é,

$$n < \frac{M(b-a)}{\pi}.$$

Portanto,

$$\frac{m(b-a)}{\pi} < n < \frac{M(b-a)}{\pi}.$$

■

**Teorema 15** *Seja $q(x)$ uma função contínua positiva e considere a equação diferencial*

$$y'' + \lambda q(x)y = 0, \tag{3.17}$$

*sobre o intervalo $[a, b]$. Para cada $\lambda$, seja $y_\lambda(x)$ a única solução da equação (3.17) as quais satisfazem as condições iniciais $y_\lambda(a) = 0$ e $y'_\lambda(a) = 1$. Então, existe uma sequência crescente de números positivos*

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots$$

*tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty,$$

*e tem a propriedade de que $y_\lambda(a) = 0$ se, e somente se, $\lambda$ é igual a um dos $\lambda_n$. Além disso, a função $y_{\lambda_n}(x)$ tem exatamente $(n-1)$ zeros no intervalo aberto $(a,b)$.*

**Demonstração:** Pelo Teorema 11, temos que $y_\lambda(x)$ não tem zeros à direita de $a$ quando $\lambda \leq 0$. Nosso objetivo é observar o comportamento das oscilações de $y_\lambda(x)$ com $\lambda$ crescente a partir do 0. Pela continuidade de $q$ em $[a,b]$ existem números positivos $m$ e $M$ tais que

$$0 < m^2 < q(x) < M^2, \quad \forall x \in [a,b].$$

O que implica

$$0 < \lambda m^2 < \lambda q(x) < \lambda M^2, \quad \forall x \in [a,b].$$

Assim, $y_\lambda(x)$ oscila mais rapidamente do que as soluções de

$$y'' + \lambda m^2 y = 0,$$

e menos rapidamente do que as soluções de

$$y'' + \lambda M^2 y = 0.$$

Pelo Lema 6, quando $\lambda$ é positivo e pequeno (de modo que $\frac{\pi}{\sqrt{\lambda M}} \geq b-a$) a função $y_\lambda(x)$ não tem zeros em $[a,b]$ à direita de $a$ e quando $\lambda$ cresce para o ponto onde $\frac{\pi}{\sqrt{\lambda m}} \leq b-a$, então $y_\lambda(x)$ tem pelo menos um tal zero. Analogamente, quando $\lambda$ cresce para $\infty$, o número de zeros de $y_\lambda(x)$ em $[a,b]$ tende para $\infty$. Segue-se a partir do Lema 5 que os $n$ zeros de $y_\lambda(x)$ à direita de $a$ movem-se para à esquerda quando $\lambda$ cresce, e tomamos ele para admitir (e pode ser provado) que este zero move-se continuamente. Consequentemente, como $\lambda$ inicia em 0 e cresce ao infinito, existem infinitos valores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ para o qual um zero de $y_\lambda(x)$ atinge $b$ e posteriormente entre seus intervalos, de modo que $y_{\lambda_n}(x)$ anula-se em $a$ e $b$ e tem $(n-1)$ zeros em $(a,b)$. Para mostrar que a sequência $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tende para $\infty$, recorremos as desigualdades em (3.16), as quais, neste caso, tornam-se:

$$\frac{\sqrt{\lambda_n} m(b-a)}{\pi} < n < \frac{\sqrt{\lambda_n} M(b-a)}{\pi},$$

ou seja,

$$\frac{\lambda_n m^2 (b-a)^2}{\pi^2} < n^2 < \frac{\lambda_n M^2 (b-a)^2}{\pi 2},$$

isto é,

$$\frac{m^2(b-a)^2}{n^2\pi^2} < \frac{1}{\lambda_n} < \frac{M^2(b-a)^2}{n^2\pi 2}.$$

Portanto,

$$\frac{n^2\pi^2}{M^2(b-a)^2} < \lambda_n < \frac{n^2\pi^2}{m^2(b-a)^2}.$$

Agora quando $n \longrightarrow \infty$, decorre desta desigualdade que

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty.$$

■

A equação (3.17) é o caso especial da equação de Sturm-Liouville

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] + \lambda q(x)y = 0 \tag{3.18}$$

com $p(x) \equiv 1$. Assumimos aquí que $p(x)$ e $q(x)$ são funções contínuas positivas sobre $[a,b]$, e que $p(x)$ tem derivada contínua sobre $[a,b]$. Se mudarmos a variável independente em (3.18) a partir de $x$ para a nova variável $w$ definida por

$$w(x) = \int_a^x \frac{dt}{p(t)},$$

temos

$$\frac{dw}{dx} = \frac{1}{p(x)}$$

e

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dw}\frac{dw}{dx} = \frac{1}{p(x)}\frac{dy}{dw},$$

o que implica

$$\frac{dy}{dw} = p(x)\frac{dy}{dx}.$$

Então (3.18) toma a forma

$$\frac{d^2y}{dw^2} + \lambda q_1(w)y = 0 \tag{3.19}$$

onde $q_1(w)$ é positiva e contínua sobre o intervalo transformado

$$0 \leq w \leq c = w(b).$$

Agora aplicando o Teorema 15 a equação (3.19), obtemos a seguinte afirmação sobre a equação (3.18).

**Teorema 16** *Considere o problema de fronteira*

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{d}{dx}\left[p(x)\dfrac{dy}{dx}\right] + \lambda q(x) y = 0, \\ y(a) = 0, \\ y(b) = 0, \end{array}\right. \tag{3.20}$$

*onde* $p(x)$ *e* $q(x)$ *satisfaz as condições estabelecidas acima. Então existe uma sequência crescente de números positivos*

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$$

*tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$$

*e tem a propriedade de que* (3.20) *tem uma solução não trivial se, e somente se,* $\lambda$ *é igual a um dos* $\lambda_n$*. A solução correspondente a* $\lambda = \lambda_n$ *é única exceto por um fator constante arbitrário, e tem exatamente* $(n-1)$ *zeros no intervalo aberto* $(a, b)$*.*

# Capítulo 4

# O Problema da Corda Vibrante

Neste capítulo daremos um exemplo que ilustra a maneira como as equações de Sturm-Liouville aparecem na Física Matemática. Para isso usaremos a descrição das oscilacões de uma corda com extremidades fixas em dois pontos $a$ e $b$. Apesar de sua simplicidade este problema levanta uma série de questões fundamentais da teoria de Sturm-Liouville, como a existência de autovalores e a possibilidade de expansão de uma função em série de autofunções.

Se as oscilações são suficientemente pequenas, elas podem ser descritas por meio de uma função $y(x,t), t \geq 0, a \leq x \leq b$, pois nesse caso é rasoável supor que o movimento de cada ponto da corda é vertical, ou seja, as oscilações são transversais.

Figura 4.1: Corda Vibrante

Consideremos agora um elemento $\Delta l$ da corda correspondentes aos pontos entre $x$ e $x+\Delta x$. Como as oscilações são transversais, a resultante $F$ de todas as forças que agem sobre $\Delta l$ é vertical. Pela segunda lei de Newton $F$ é dada por

$$F = \rho(x)\Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{4.1}$$

onde $\rho(x) \geq 0, a \leq x \leq b$, é densidade linear de massa da corda. Suponhamos agora que a oscilação da corda é devido unicamente à tensão que atua sobre ela pelo fato de suas extremidades estarem fixas e que esta seja constante, digamos $T$. Em cada ponto, $T$ age segundo a tangente à corda (pois esta é flexível), daí

$$F = T \operatorname{sen}\theta_2 - T \operatorname{sen}\theta_1.$$

Como as oscilações são muito pequenas podemos fazer as aproximações

$$\operatorname{sen}\theta_1 \simeq \operatorname{tg}\theta_1 = \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_x$$

e

$$\operatorname{sen}\theta_2 \simeq \operatorname{tg}\theta_2 = \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{x+\Delta x},$$

donde segue que

$$F = T\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{x+\Delta x} - T\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_x,$$

daí

$$F = T\Delta\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right).$$

Usando (4.1) obtemos

$$T\frac{\Delta}{\Delta x}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \rho(x)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

que por passagem ao limite nos dá a equação da corda vibrante

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\rho(x)}{T}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \tag{4.2}$$

Se no instante $t = 0$ a corda está em repouso na posição descrita por uma função $f(x)$ de classe $C^2$ então o seu movimento para $t > 0$ é obtido resolvendo-se (4.2) com as condições

$$\left| \begin{array}{ll} y(a,t) = y(b,t) = 0 & t \geq 0 \\ \dfrac{\partial y}{\partial t}(x,0) = 0 & a \leq x \leq b \\ y(x,0) = f(x) & a \leq x \leq b \end{array} \right. \tag{4.3}$$

Deixemos de lado, por enquanto, a condição $y(x,0) = f(x)$ e apliquemos o método das variáveis separáveis, isto é, procuremos soluções de (4.2) da forma

$$y(x,t) = u(x)v(x).$$

Agora, substituindo em (4.2) obtemos

$$\frac{1}{\rho(x)}\frac{u''(x)}{u(x)} = \frac{1}{T}\frac{v''(t)}{v(t)}.$$

Como cada um dos lados é função de uma variável diferente, segue-se que ambos devem ser iguais a uma constante que denotaremos por $-\lambda$.

Daí, $u$ e $v$ devem satisfazer

$$\left| \begin{array}{l} u'' + \lambda\rho(x)u = 0 \\ u(a) = 0 \\ u(b) = 0 \end{array} \right. \tag{4.4}$$

e

$$\left| \begin{array}{l} v'' + \lambda T v = 0 \\ v'(0) = 0. \end{array} \right. \tag{4.5}$$

Pelo Teorema 15 o problema de Sturm-liouville (4.4) admite uma sequência crescente infinita de autovalores $0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n < \ldots$ (mostramos no capítulo anterior que $\lambda_0 > 0$). Sabemos também que as autofunções correspondentes $u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots$ satisfazem

$$\int_a^b u_m(x) u_n(x) \rho(x) dx = 0,$$

isto é, $u_m$ e $u_n$ são ortogonais com relação a função $\rho(x)$ e podemos supor que elas são ortonormais, ou seja,

$$\int_a^b [u_n(x)]^2 \rho(x) dx = 1.$$

Para cada $n$ a solução de (4.5) com $\lambda = \lambda_n$ é multiplo de $v_n(t) = \cos(\sqrt{\lambda_n T} t)$. Daí, segue-se que as funções

$$y_n(t) = u_n(x) \cos(\sqrt{\lambda_n T} t)$$

são soluções da equação (4.2) e verificam as duas primeiras condições em (4.3). Como isso também é válido para as combinações lineares dessas funções, procuramos uma solução de (4.2) que satisfaça todas as condições em (4.3) na forma de uma série

$$y(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n(x) \cos(\sqrt{\lambda_n T} t) \tag{4.6}$$

onde $a_n \in \mathbb{R}$. Se isso é possível, da condição $f(x) = y(x, 0)$ resulta

$$y(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n(x) \tag{4.7}$$

e como a sequência $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ é ortonormal em $[a, b]$ em relação ao peso $\rho(x)$ devemos ter

$$a_n = \int_a^b f(x) u_n(x) \rho(x) dx. \tag{4.8}$$

# Referências Bibliográficas

[1] Boyce, E.W and Diprima, C. R., *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno,* $8^a$ edição, LTC, Rio de Janeiro, 2006.

[2] Birkhoff, G., and Rota, G.C., *Ordinary Differential Equations* 4 th ed.,Wiley, New York, 1989.

[3] Simmons, F.G., *Differential Equations with Applications and Historical Notas,* 2 nd ed. McGraw-Hill, New York, 1991.

[4] Sotomayor, J., *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias,* Rio de Janeiro, IMPA, 1979.

[5] M.A. Al-Gwaiz *Sturm-Liouville Theory and its Applications*, Springer-Verlag, London, 2008.

[6] Kelley, G. W and Peterson, C. A., *The Theory of Differential Equations: Classical and Qualitative* Second Edition, Springer, New York, 2010.

[7] http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Sturm.html

[8] http://fermatslasttheorem.blogspot.com/2009/09/joseph-liouville.html