UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

A FUNÇÃO ZETA DE RIEMANN

RAFAEL NASCIMENTO SANTOS

CAMPINA GRANDE - PB
Fevereiro de 2015

RAFAEL NASCIMENTO SANTOS

A FUNÇÃO ZETA DE RIEMANN

Trabalho de conclusão de curso apresentado à Coordenação do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências legais para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Dr. Davis Matias de Oliveira

CAMPINA GRANDE-PB
Fevereiro de 2015

S237f Santos, Rafael Nascimento.
A Função Zeta de Riemann [manuscrito] / Rafael Nascimento Santos. - 2015.
34 p. nao

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2015.
"Orientação: Prof. Dr. Davis Matias de Oliveira, Departamento de Matemática".

1. Função Zeta de Riemann. 2. Limites. 3. Séries. 4. Números Complexos. 5. Teoria dos Números. 6. Hipótese de Riemann. I. Título.
21. ed. CDD 510

RAFAEL NASCIMENTO SANTOS

A FUNÇÃO ZETA DE RIEMANN

Aprovado em: 18/02/ 2015

COMISSÃO EXAMINADORA

Davis Matias de Oliveira

Prof. Dr. Davis Matias de Oliveira
Dpto. Matemática - CCT/UEPB
Orientador

Aldo Trajano Lourêdo

Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo
Dpto. Matemática - CCT/UEPB
Examinador

Luciana Freitas

Prof^{a}. Dra. Luciana Roze de Freitas
Dpto. Matemática - CCT/UEPB
Examinadora

Dedicatória

À Deus em primeiro lugar, pois do momento da matrícula até este trabalho de conclusão de curso Ele sempre me ajudou; aos meus pais Mª de Fátima Nascimento Santos e Carlos Antônio Cavalcanti dos Santos (in memorian); à minha esposa Juliana de Araujo Tavares Santos e filha Ana Beatriz de Araujo Santos que foram parte fundamental para a conclusão deste curso.

Agradecimentos

Ao Senhor dos senhores, ao único Deus, o todo Poderoso, o meu Salvador, a saber **JESUS CRISTO!**.

Aos meus pais, Mª de Fátima e Carlos Antônio pelos ensinamentos que me deram e pela observância em ser honesto, trabalhador, justo e por todo seu amor que sem sombra de dúvida é baluarte para a família, aos meus irmãos Mª Cristina, Daniel e Israel.

A minha digníssima esposa Juliana por ter me apoiado durante todo o curso e por ter entendido que o estudo é um caminho importante não só para quem estuda, mas para todos que estão em volta, e ter segurado a barra criando nossa filha, Ana beatriz, que dou graças à Deus por ela ser uma menina carinhosa e obediente.

Aos professores que ministraram suas disciplinas com compromisso e sempre me deram incentivos para que conclui-se o curso em especial ao meu orientador prof. Dr. Davis Matias de Oliveira, que soube me entender em muitos momentos.

A todos os meus familiares que compreederam a minha ausência e se sentiram felizes pela minha escolha em estudar.

Aos meus amigos de curso que de forma direta ou indireta me ajudaram, em especial Maxwell e Eliasibe que juntos comigo formamos um grupo de estudo e isto foi fundamental para o sucesso em algumas disciplinas.

Epígrafe

A vida do homem é guiada através de suas escolhas. Eu escolhi o Senhor Jesus como o meu Salvador e, nos estudos, escolhi a matemática, esta grandiosa ciência criada, com toda certeza, por Deus.

Rafael Nascimento Santos

Resumo

Neste trabalho apresentamos a definição da Função Zeta de Riemann e algumas de suas propriedades que são demonstradas com o auxílio de limites de funções, séries e números complexos cujas definições serão abordadas resumidamente. Também são apresentados alguns tipos de séries bem como alguns critérios que possibilitem saber se uma determinada série é convergente ou divergente e noções básicas sobre o conjunto dos números complexos. Definimos a Função Zeta de Riemann para os números complexos, e demonstramos sua convergência. Aplicamos a Função Zeta aos Números Primos. Destacamos sua relação com a Teoria dos Números e a famosa hipótese de Riemann. No fim, verifica-se que a Função Zeta de Riemann ainda apresenta problemas em aberto, por exemplo, nenhuma soma de Zeta é conhecida para valores ímpares, exceto, o resultado já provado da irracionalidade de $\zeta(3)$ pelo matemático francês Roger Apéry.

PALAVRAS CHAVE: Função Zeta de Riemann, Limites, Séries, Números Complexos, Teoria dos Números, Hipótese de Riemann.

Abstract

This work presents the definition on The Riemann Zeta Function and some of its properties that are demonstrated with the aid of limits functions, series and complex numbers whose definitions will be addressed briefly. It also presents a few types of series as well as some criteria that enables to know whether a given series is convergent or divergent and the basics about complex numbers. We defined The Riemann Zeta Function for complex numbers, and demonstrated their convergence. We applied the Zeta Function to Prime Numbers. We emphasized its relation to The Number Theory and the famous Riemann Hypothesis. In the end, it turns out that The Riemann Zeta Function still has open problems, for example, no amount of Zeta is known for odd values, except the result already proved the irrationality of $\zeta(3)$ by the French mathematician Roger Apéry.

KEYWORDS: Riemann Zeta Function , Limits, Series , Complex Numbers , Number Theory, Riemann Hypothesis

Sumário

Introdução

No ano de 1826 na cidade de Breselenz, Hanover, Alemanha, nasceu Georg Friedrich Bernhard Riemann. De família pobre, desde sua infância teve problemas de saúde. Seu pai, mesmo sem boas condições financeiras, conseguiu com que Riemann tivesse uma boa educação. Riemann, já no ensino secundário, estudou as obras de Euler e Legendre.

Foi para a Universidade de Götiggem aos 19 anos com a finalidade de estudar Teologia, por influência de seu pai, pastor luterano, mas logo mudou de ideia e passou a concentrar seus estudos na matemática. Insatisfeito com o ambiente em Götiggem foi para a universidade em Berlin, onde conheceu Dirichlet professor desta universidade.

Tendo visto em Riemann um grande potencial, Dirichlet passou a acompanhá-lo. No ano de 1849 Riemann retornou a Götiggem onde obteve seu título de doutorado apresentando sua tese em funções de variáveis complexas. Nesta tese encontram-se as chamadas equações diferenciais de Cauchy-Riemann.

No ano de 1854 Riemann apresentou uma palestra como requisito para ser nomeado "Privatdozent"(conferencista não-remunerado). Gauss, já considerado um dos mais brilhantes matemáticos, participou da banca examinadora e ficou impressionado com o que Riemann apresentou a respeito do tema de geometria, a qual anos depois ficaria conhecida como Geometria-Riemanniana e contribuiria para a Teoria da Relatividade de Einstein. Bertrand Russell descreve-o como "logicamente o predecessor de Einsten"(BOYER). No ano de 1855 Gauss morre e Dirichlet assume o seu lugar que logo promoveu Riemann a professor assistente. Outro fato que marcara a vida de Riemann foi a morte do seu grande incentivador Dirichlet, no ano de 1859. Riemann assume o seu lugar se tornando professor titular da Universidade de Gütiggem.

No ano de 1859 Riemann publicou um artigo sobre a Teoria dos Números Primos. Em sua pesquisa Riemann partiu de uma identidade, descoberta por Euler, e chegou a **Função Zeta de Riemann**. A Função Zeta de Riemann, ou simplismente, Função Zeta tem aplicações na Física Teórica, em Teoria dos Números e algumas vezes aparece em trabalhos sobre o fenômeno da supercondutividade, mas é na matemática que ela exerce uma maior importância, isso também devido à famosa conjectura de Reimann. Anos depois, Riemann foi a cidade de Selasca, Itália, fugindo do clima frio da Alemanha. Morreu em 1866 aos 39 anos de idade devido à tuberculose.

Este presente trabalho tem como objetivo principal apresentar a definição da Função Zeta de Riemann bem como sua relação com a Teoria dos Números, em especial com os números primos e, para uma maior organização, vizando facilitar o entendimento do leitor, este trabalho dividi-se em três capítulos: No primeiro capítulo apresentamos as definições de limite de funções e séries, e algumas propriedades do conjunto dos números complexos. Essas definições são dadas de forma mais geral possível exigindo do leitor um pouco de conhecimento em Análise Matemática. Bem como também é mostrado alguns exemplos; no segundo capítulo, apresentamos a definição da Função Zeta de Riemann, sua convergência, sua aplicação na Teoria dos Números e sua forte relação com os Números Primos e; por fim, concluímos o trabalho destacando os resultados obtidos e incentivando o leitor interessado ao aprofundamento em outros trabalhos.

1 Limites de Funções e Séries

Neste capítulo serão apresentadas definições, de forma mais geral, do limite de funções e séries, bem como, também serão mostradas algumas propriedades e exemplos, com o objetivo de usarmos alguns resultados aqui apresentados para um encadeamento com os próximos capítulos.

1.1 Limite de Funções

Definição 1.1 *Seja $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função real, onde X é um subconjunto não-vazio de $\mathbb{R}$ e, seja a um ponto de acumulução de X. Dizemos que a função f tem limite L, em a, quando para dado $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $x \in X$ e $0 < |x - a| < \delta$. Em símbolos tem-se*

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0; x \in X, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Exemplo 1.1 *Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 4x - 2$. Então $\lim_{x \to 4} f(x) = 14$. De fato, dado $\varepsilon > 0$, devemos exibir um $\delta > 0$, tal que $0 < |x - 4| < \delta$ implica que $|f(x) - 14| < \varepsilon$.*

Solução: Dado $\varepsilon > 0$, tomando $\delta = \dfrac{\varepsilon}{4}$, temos que se

$$0 < |x - 4| < \delta$$

então

$$\begin{aligned} |f(x) - 14| &= |4x - 2 - 14| \\ &= |4x - 16| \\ &= 4|x - 4| < 4\delta = \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto

$$|f(x) - 14| < \varepsilon.$$

Definição 1.2 *Seja $X \subset \mathbb{R}$ ilimitado superiormente. Dada $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, escreve-se*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L,$$

quando, dado $\varepsilon > 0$, existe $A > 0$ tal que

$$x > A \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

.

Ou seja, dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, existe um número real tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $x > A$.

De maneira análoga defini-se $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$, quando o subconjunto X de $\mathbb{R}$ é ilimitado inferiormente: para todo $\varepsilon > 0$ dado, deve existir um número real $A > 0$ tal que $x < -A \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

Os limites para $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$ são, de certa forma, limites laterais. Logo vale o seguinte resultado: se $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é monótona limitada então existe $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ se o domínio X for ilimitado superiormente e existe $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ se o domínio de f for ilimitado inferiormente.

Observação 1.1 *O limite de uma sequência de números reais pode ser considerada como o limite de uma função cujo o domínio é o conjunto dos números naturais e, assim, limite de sequências de números reais pode ser interpretada como limite de funções no infinito, ou seja, onde $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função definida no conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais.*

Exemplo 1.2 *Seja $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{-1}{1+x}$. Dado $\varepsilon > 0$ e tomando $A = \dfrac{1}{\varepsilon}$ obtemos, para $x > A$,*

$$\begin{aligned} |f(x) - 0| &= \left| -\frac{1}{1+x} \right| \\ &= \frac{1}{1+x} \\ &< \frac{1}{x} < \frac{1}{A} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

1.2 Séries

Observe o seguinte problema: Considere um quadrado de área igual a $2u.a$. Traçando uma de suas diagonais obtemos dois triângulos retângulos de área igual a $1u.a$ cada. Dividindo um dos triângulos, traçando a bissetriz do seu ângulo reto, obtemos mais dois triângulos retângulos de áreas iguais a $\frac{1}{2}u.a$ cada um. Fazendo essas divisões sucessivamente obteremos uma infinidade de triângulos com área igual à metade do triângulo anterior, de modo que,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots = 2.$$

Seja (a_n) uma sequência de números reais, da soma infinita

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + ..., \tag{1.1}$$

considere as somas finitas

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1; \\ S_2 &= a_1 + a_2; \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3; \\ &\vdots \\ S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n. \end{aligned}$$

A soma em (1.1) é chamada de série numérica e é denotada da seguinte forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Se o limite da sequência S_n existe, dizemos que a série é **convergente**. Caso contrário, a série é **divergente**, isto é, se

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n) = S \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{série converge}$$

e

$$\lim_{n\to\infty} S_n \nexists \quad \text{ou} \lim_{n\to\infty} = \pm\infty \Rightarrow \text{série diverge.}$$

Observação 1.2 *Por simplicidade na notação, os índices do somatório podem ser suprimidos; ou seja:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum a_n \text{ e } \lim_{n\to\infty} a_n = \lim a_n.$$

Teorema 1.1 *Toda sequência convergente é limitada.*

Demonstração: Seja $a = \lim x_n$. Tomando $\varepsilon = 1$, vemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n \in (a-1, a+1)$. Sejam b o menor e c o maior elemento do conjunto finito $x_1, \cdots, x_{n_0}, a-1, a+1$. Todos os termos x_n da sequência estão contidos no intervalo $[b, c]$, logo ela é limitada.

■

Teorema 1.2 *Toda sequência monótona limitada é convergente.*

Demonstração: Seja (x_n) monótona, digamos não decrescente, limitada. Escrevamos $X = \{x_1, \cdots, x_n, \cdots\}$ e $a = supX$. Afirmamos que $a = \lim x_n$. com efeito, dado $\varepsilon > 0$, o número $a - \varepsilon$ não é cota superior de X. Logo existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a - \varepsilon < x_{n_0} \leq a$. Assim, $n > n_0 \Rightarrow a - \varepsilon < x_{n_0} \leq x_n < a + \varepsilon$ e daí $\lim x_n = a$.

■

Semelhantemente, se (x_n) é não-crescente, limitada, então $\lim x_n$ é o ínfimo do conjunto dos valores x_n.

1.2.1 Operações com Limites

A seguinte proposição relaciona a definição de limite com uma formulação de termos de sequências de números reais convergentes.

Proposição 1.1 *Sejam (a_n) e (b_n) duas sequências de números reais, com $a_n \to a$ e $b_n \to b$. Então $(a_n + b_n)$ é convegente e*

$$a_n + b_n \to a + b. \tag{1.2}$$

***D**emonstração: Seja $\varepsilon > 0$ dado. Então existem N_1 e N_2 em $\mathbb{N}$ tais que $n \geq N_1$ acarreta $|a_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ e $n \geq N_2$ acarreta $|b_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Agora, se $N \geq \max\{N_1, N_2\}$, da desigualdade triângular, temos que*

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \forall n \geq N$$

■

Teorema 1.3 *Se $\sum a_n$ converge, então $\lim a_n = 0$*

Demonstração: Seja

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

e

$$S_{n-1} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{n-1}.$$

Tem-se, usando a expressão (1.2), que

$$\begin{aligned} S_n - S_{n-1} &= a_n \\ \Rightarrow \lim a_n &= \lim (S_n - S_{n-1}) \\ &= \lim S_n - \lim S_{n-1} \\ &= S - S = 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim a_n = 0\cdot$$

■

Observação 1.3 *Não vale a recíproca, isto é, se*

$$\lim a_n = 0 \not\Rightarrow \sum a_n \text{ converge.}$$

Exemplo 1.3 $\sum \dfrac{1}{n}$ ***(Série Harmônica)***

Note que $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n}\right) = 0$ mas a série diverge como veremos em seguida. Existem outros critérios para saber se uma série é convergente ou divergente. Estes critérios são de extrema importância, pois existem muitos tipos de séries, fazendo-se necessário outros tipos de técnicas para caracterizar as suas convergências ou divergências.

1.2.2 A Série Harmônica

A série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ é chamada de série harmônica. Observe que $a_n = \frac{1}{n}$ e que $\lim \frac{1}{n} = 0$, mas a série diverge. De fato, seja S_{2^n} sua reduzida de ordem 2^n então:

$$S_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) >$$

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{2^n} = 1 + n\frac{1}{2}.$$

Como $(S_{2^n}) \subset (S_n)$ é uma subsequência de (S_n), resulta que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = +\infty\cdot$$

.

Portanto, diverge.

1.2.3 Séries Geométricas

A série geométrica é uma série da seguinte forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_0 r^n,\ a_0 \neq 0 \text{ e } r \neq 0.$$

Teorema 1.4 *A série geométrica* $\sum_{n=0}^{\infty} a_0 r^n$, $(a_0 \neq 0)$ *converge se, e somente se,* $|r| < 1$. *Neste caso,*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_0 r^n = \frac{a_0}{1-r}\cdot$$

Demonstração: A prova consiste em aplicar limite na soma parcial que é uma soma de P.G.(progressão geométrica). Seja

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_0 r^n,\ a_0 \neq 0 \text{ e } r \neq 0$$

então $a_n = a_{n-1}r$ para $n > 0$. Multiplicando r na seguinte soma parcial S_n

$$S_n = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

temos que

$$\begin{aligned} rS_n &= a_0 r + a_1 r + a_2 r + a_3 r + \cdots + a_{n-1} r + a_n r \\ &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + a_{n+1} \end{aligned}$$

subtraíndo $S_n - rS_n$, temos

$$S_n - rS_n = a_0 - a_{n+1}\cdot$$

Observe que $a_i = a_0 r^i$, então

$$\begin{aligned}
(1-r)S_n &= a_0 - a_{n+1} \\
&= a_0 - a_0 r^{n+1} \\
&= a_0(1 - r^{n+1})
\end{aligned}$$

e, consequentemente,

$$S_n = \frac{a_0(1-r^{n+1})}{1-r},\ r \neq 1\cdot$$

Quando $|r| < 1$, temos que $\lim_{n\to\infty} |r^n| = 0$, de modo que, $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$. Assim,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} a_0 r^n &= \lim_{n\to\infty} S_n \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{a_0(1-r^{n+1})}{1-r} \\
&= \frac{a_0}{1-r},
\end{aligned}$$

pois (r^{n+1}) é uma subsequência de (r^n).

Portanto,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_0 r^n = \frac{a_0}{1-r}\cdot \tag{1.3}$$

No caso $|r| \geq 1$, observemos que

$$\lim_{n\to\infty} |a_0 r^n| \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_0 r^n \neq 0\cdot$$

Portanto, pelo Teorema (1.3) a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_0 r^n \text{ diverge .}$$

■

Aplicando a expressão (1.3) ao problema da soma da área do quadrado, obtém-se

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

1.2.4 Séries de Termos Positivos

Uma série de termos positivos é uma série do tipo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n; a_n \geq 0.$$

Proposição 1.2 *(**Critério da Comparação**) Se* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *são séries de termos positivos e se existe uma constante* $c > 0$ *tal que* $0 \leq a_n \leq cb_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. *Então:*

(i) Se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge;

(ii) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, então $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge.

Demonstração: Para a prova de *(i)* notemos que sendo $a_n \geq 0$ e $b_n \geq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então as reduzidas (s_n) e (t_n) de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, respectivamente, são sequências monótonas não decrescentes e, além disso, sem perda de generalidade, podemos supor $s_n \leq ct_n$, para todo $n \in \mathbb{N}, c > 0$. Se (t_n) for convergente, em particular é limitada e, assim, (s_n) é limitada e monótona não decrescente, portanto, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergente. Por outro lado, se (s_n) não for convergente, sendo monótona não decrescente, é necessariamente não limitada, o que implica na não limitação de (t_n) e, portanto na divergência de $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ o que prova *(ii)*.

■

1.2.5 A p-série

Vejamos agora um outro tipo de série: a **p-série**. Assim denotada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \quad p \in \mathbb{R}.$$

(i) Se $p > 1$ então $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ é convergente.

Demonstração: De fato, para $n = 2^{m-1}$ temos

$$\begin{aligned}
1 \; &+ \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{(2^{m-1})^p} + \cdots + \frac{1}{(2^{m-1})^p}\right) < \\
1 \; &+ \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p}\right) + \cdots + \underbrace{\left(\frac{1}{2^{p(m-1)}} + \cdots + \frac{1}{2^{p(m-1)}}\right)}_{2^{m-1}\text{parcelas}} = \\
1 \; &+ \frac{2}{2^p} + \cdots + \frac{2^{m-1}}{2^{(m-1)p}} = 1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^{m-1}.
\end{aligned}$$

A desigualdade acima foi obtida substituíndo todos os termos pelo maior deles em cada parênteses. Se $p - 1 > 0$, então $\frac{1}{2^{p-1}} < 1$. Note que $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^n$ é uma série geométrica convergente. Em particular a sequência de suas somas parciais é limitada. Portanto, a sequência das somas parciais (s_n), da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, a qual é monótona não decrescente, é convergente. Assim $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ é convergente.

■

(ii) Se $p \leq 1$ então$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ é divergente.

Demonstração: Temos que $n^p \leq n$ e, assim, $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^p}$. Como a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ é divergente, segue da proposição (1.2) que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ é divergente.

■

Exemplo 1.4 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *é convergente, pois é uma p-série com* $p = 2 > 1$.

Exemplo 1.5 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ *é divergente, pois é uma p-série com* $p = \frac{1}{2} < 1$.

1.3 O Conjunto dos números complexos

O conjunto $\mathbb{C}$ é um conjunto cujos elementos(os números complexos), devem ser tais que possam ser somados e multiplicados, e também possibilitem a extração da raiz quadrada de um número negativo. Mostra-se os números reais precisam ser elementos desse conjunto $\mathbb{C}$, e as operações de adição e multiplicação definidas em $\mathbb{R}$ devem ser as mesmas já conhecidas. Caso contrario,

$$\mathbb{R} \not\subset \mathbb{C}$$

Uma boa maneira de definir esse conjunto é a proposta por Gauss em 1831 e reforçada por Hamilton em 1837, segundo a qual o conjunto dos números complexos é um conjunto de pares ordenados de números reais, em que estão definidas:

- Igualdade: $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c$ e $b = d$;
- Adição: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$;
- Multiplicação:
$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc). \tag{1.4}$$

As operações de adição e multiplicação assim definidas sastifazem as seguintes propriedades (para quaisquer z, v e w, pertecentes a $\mathbb{C}$):

Adição

- Comutativa: $z + v = v + z$;
- Associativa: $(z + v) + w = z + (v + w)$;
- Elemento Neutro: $\exists\, z_0 \in \mathbb{C}$, $z_0 = (0, 0)$ tal que:

$$z + z_0 = z_0 + z = z;$$

- Inverso aditivo ou oposto: Para $z \in \mathbb{C}$, $\exists\, z' \in \mathbb{C}$ tal que:

$$z + z' = z' + z = z_0 = (0, 0).$$

Multiplição

- Comutativa: $zv = vz$;
- Associativa: $(zv)w = z(vw)$;
- Elemento Neutro: $\exists\, z_1 \in \mathbb{C}$, $z_1 = (1, 0)$ tal que:

$$zz_1 = z_1 z = z;$$

- Inverso multiplicativo: Para $z \neq (0, 0)$, $\exists\, z' \in \mathbb{C}$ tal que:

$$zz' = z'z = z_1 = (1, 0);$$

- A multiplicação é distributiva em relação à adição: $z(v + w) = zv + zw$.

Como os números complexos z, v e w são pares de números reais, as demonstrações de cada propriedade são feitas usando as propriedades da adição e da multiplicação de números reais.

1.3.1 A forma algébrica dos números complexos

Identificamos o número complexo $(a, 0)$ com o número real a:

$$(a, 0) \Leftrightarrow a$$

Ao fazer essa identificação ver ([6]), constatamos que $\mathbb{R}$ é subconjunto de $\mathbb{C}$, ou seja:

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Assim, por exemplo, temos: $(1, 0)$ identifica-se como o número real 1; $(-3, 0)$ com -3; $(0, 0)$ com 0; e assim por diante.

A unidade imaginária

O número complexo $(0,1)$ é chamdo de unidade imaginária e é indicado por i, ou seja, o número i identifica-se com o número complexo $(0,1)$. Observemos que:

$$i^2 = i \cdot i = (0,1)(0,1),$$

de (1.4), temos

$$(0,1)(0,1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1,0) = -1$$

portanto:

$$i^2 = -1$$

que é a característica fundamental da unidade imaginária. A unidade imaginária i é um número complexo não real.

Um número complexo qualquer $z = (a,b)$ pode ser escrito da seguinte forma:

$$z = (a,b) = (a+0, b+0) = (a,0) + (0,b) \tag{1.5}$$

também, temos

$$(0,b) = (b,0)(0,1) \tag{1.6}$$

de (1.4)

$$(b,0)(0,1) = (b \cdot 0 - 0 \cdot 1, b \cdot 1 + 0 \cdot 0) = (0,b)$$

e

$$(a,0) = a \text{ e } (b,0) = b \tag{1.7}$$

substituindo (1.6) e (1.7) em (1.5), temos:

$$\begin{aligned} z = (a,b) &= (a,0) + (0,b) \\ &= \underbrace{(a,0)}_{a} + \underbrace{(b,0)}_{b} \cdot \underbrace{(0,1)}_{i} \\ &\Rightarrow z = a + bi. \end{aligned}$$

Logo mostra-se que todo número complexo $z = (a,b)$ pode ser escrito de maneira única:

$$z = a + bi \ (a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \text{ e } i^2 = -1).$$

Essa é a *forma algébrica* ou *forma binomial* de descrever um número complexo. Observe que um número complexo escrito nessa forma tem duas partes:

$$z = a + bi,$$

onde $a = Re(z)$ e $b = Im(z)$. Podemos dizer que (a,b) e $a+bi$ são representações diferentes de um número complexo. Devemos observar também que, se $b = 0$, temos $z = a$ (número real); e se $a = 0$ e $b \neq 0$, temos $z = bi$, que é um número imaginário puro.

Exemplos

1. Em z = 2 + 3i, temos Re(z) = 2 e Im(z) = 3.
2. Em z = 3, temos Re(z) = 3 e Im(z) = 0. Portanto, **z** é real.
3. Em z = - 2i, temos Re(z) = 0 e Im(z) = -2. Portanto, **z** é um número imaginário puro.

Módulo de um Número Complexo

Geometricamente, o módulo de um número complexo é a distância da origem do sistema de coordenadas O ao afixo de z. Usando o Teorema de Pitágoras definimos o módulo de um número complexo da seguinte forma:

$$|z|^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

1.3.2 Potenciação de números complexos na forma trigonométrica - a 1° fórmula de De Moivre

Definição 1.3 *A formula de Euler é uma fórmula especifica da área da análse complexa, que mostra uma relação entre as funções trigonométricas e a função exponencial. (A identidade de Euler é um caso especial da fórmula de Euler). A fórmula é dada por:*

$$e^{ix} = \cos\,(x) + i\text{sen}\,(x), \tag{1.8}$$

em que: x é o argumento real (em radianos); e é a base do logaritmo natural; $i = \sqrt{-1}$ é a unidade imaginária (número complexo); sen e cos são funções trigonométricas.

A relação entre exponencial complexa e funções trigonométricas foi primeiro provada pelo matemático inglês Roger Cotes em 1714, na forma $\ln(\cos\,(x) + i\text{sen}\,(x)) = ix$ em que ln é o logaritmo natural.

Em trigonometria temos que:

$$\cos\,\theta = \frac{a}{|z|} \text{ e sen } \theta = \frac{b}{|z|}, 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Essas igualdades levam a:

$$\cos\,\theta = \frac{a}{|z|} \Rightarrow a = |z|\cos\,\theta \text{ e sen } \theta = \frac{b}{|z|} \Rightarrow b = |z|\text{sen}\,\theta$$

Substituindo esses valores em $z = a + bi$, temos:

$$z = a + bi = |z|\cos\,\theta + |z|\text{sen}\,\theta i = |z|(\cos\,\theta + i\text{sen}\,\theta)$$

Portanto:

$$z = |z|(\cos\,\theta + i\text{sen}\,\theta)$$

que é chamada de forma trigonométrica ou polar de z.

A potência de z^n, $n \in \mathbb{N}^*$, é dada por $z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \quad \cdots \quad \cdot z}_{n \text{ fatores}}$.

Assim, se um número complexo z está escrito na forma trigonométrica,

$$z = |z|(\cos\,\theta + i\text{sen}\,\theta)$$

temos:

$$\begin{aligned}
z^n &= \underbrace{z \cdot z \cdot \quad \cdots \quad \cdot z}_{\text{multiplicação de } n \text{ fatores}} \\
&= \underbrace{|z| \cdot |z| \cdot \quad \cdots \quad \cdot |z|}_{\text{produto de } n \text{ fatores}} \cdot [\cos\,\underbrace{(\theta + \theta + \cdots + \theta)}_{\text{soma de } n \text{ argumentos}} + i\text{sen}\,\underbrace{(\theta + \theta + \cdots + \theta)}_{\text{soma de } n \text{ argumentos}}] \\
&\Rightarrow\ z^n = |z|^n[\cos\,(n\theta) + i\text{sen}\,(n\theta)] \quad \text{(fórmula de De Moivre)}
\end{aligned}$$

Para $n = 0$, temos:

$$z^0 = |z|^0[\cos\,(0 \cdot \theta) + i\text{sen}\,(0 \cdot \theta)] = 1(\cos\,0 + i\text{sen}\,0) = 1(1 + 0) = 1.$$

Assim, podemos dizer que a potência de ordem n de um número complexo escrito na forma trigonométrica é o número complexo cujo módulo é igual ao módulo do número elevado a n e cujo argumento é igual ao argumento do número multiplicado por n, reduzido à primeira volta $(0 \leq arg(z^n) < 2\pi)$.

2 Função Zeta de Riemann

2.1 Definição

A série harmônica tem dispertado o interesse de muitos matemáticos e, como vimos na seção (1.2.2), a série harmônica diverge apesar de os termos $\frac{1}{n}$ tenderem para zero. Assim, substituindo cada parcela $\frac{1}{n}$ por uma parcela ligeiramente menor $\frac{1}{n^z}$, onde $z > 1$ é um número real, a série passa a ser convergente. Este resultado foi descoberto por Euler, Riemann por sua vez considerou z como sendo uma variável complexa. A Função Zeta de Riemann é uma função especial de variável complexa, definida para $Re(z) > 1$, pela série:

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}; \tag{2.1}$$

com $z \in \mathbb{C}$, ou seja, $z = a + bi$; $a, b \in \mathbb{R}$ e i é a parte imaginária ($i = \sqrt{-1}$). Na realidade, a Função Zeta tem como domínio $\mathbb{C} - \{1\}$, ou seja, z pode ser qualquer número complexo exceto o próprio 1. Fora do conjunto dos números complexos com parte real maior do que a unidade a função de Riemann pode ser definida por continuação analítica da expressão anterior. O resultado é uma função meromorfa com um pólo em $z = 1$ de resíduo 1. Esta função é fundamental para a teoria dos números e em particular devido à hipótese de Riemann.

Vamos demonstrar a convergência da série $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$, com $\mathrm{Re}(z) \geq 1 + \varepsilon$.

Demonstração: Seja n um número inteiro positivo. Então vale as seguintes igualdades

$$\begin{aligned} |n^z| = \left|e^{ln(n^z)}\right| &= \left|e^{zln(n)}\right| \\ &= \left|e^{(Re(z)+iIm(z))ln(n)}\right| \\ &= \left|e^{Re(z)ln(n)}e^{iIm(z)ln(n)}\right| \\ &= e^{Re(z)ln(n)} \\ &= e^{ln(n^{Re(z)})} \\ &= n^{Re(z)}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{n^z}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{n^{\mathrm{Re}(z)}}\right|.$$

Se $Re(z) \geq 1 + \varepsilon$, onde $\varepsilon > 0$, tem-se

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{n^z}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{n^{\mathrm{Re}(z)}}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$$

ou seja, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$ é uma p-série, com $p = 1 + \varepsilon > 1$. Portanto, pelo exemplo (1.4), a série é convergente.

A Função Zeta de Riemann é bastante usada em Teoria dos Números, principalmente em relação aos números primos e, estes são de extrema importância na computação pois os números primos são utilizados, por exemplo, na segurança computacional.

Exemplo 2.1 ***(Problema dos três Gênios)*** *Um jovem está andando na rua quando, de repente, encontra um gênio da lâmpada que subitamente fala com ele: - Amo! Dobro o dinheiro que você tem no bolso se, depois disso, você me devolver R$ 20,00.- Aceito, disse o jovem. E assim aconteceu, o gênio dobrou o dinheiro que ele tinha no bolso e, em seguida, recebeu R$ 20,00. Andando mais um pouco a frente o jovem encontra outro gênio que o faz a mesma proposta: - Amo! Dobro o dinheiro que você tem no bolso se, depois disso, você me devolver R$ 20,00. - Aceito, disse o jovem, e assim aconteceu, o gênio dobrou o dinheiro que ele tinha no bolso e, em seguida, recebeu R$ 20,00. O jovem continuou a sua caminhada quando, mais uma vez, encontra um terceiro gênio que repete a proposta: Amo! Amo! Dobro o dinheiro que você tem no bolso se, depois disso, você me devolver R$ 20,00. -Aceito, disse o jovem sem pensar muito. E assim aconteceu. Ora, dessa vez não foi bom negócio para o jovem, pois, ao aceitar a proposta, ele verificou que não tinha mais nada no bolso.*
Pergunta-se: Quantos Reais o jovem tinha no bolso antes de encontrar com o primeiro gênio?

Resolução: Seja x o valor do dinheiro que o jovem tinha no bolso, com $x > 10$. Daí,

1º Gênio: $(2x - 20)$
2º Gênio: $2(2x - 20) - 20$
3º Gênio: $2[2(2x - 20) - 20] - 20$

Fazendo $a = 2x - 20$, tem-se

1º Gênio: a
2º Gênio: $2a - 20$
3º Gênio: $2(2a - 20) - 20$

Como a partir do terceiro gênio o valor fica nulo, então

$2(2a - 20) - 20 = 0$
$4a - 40 - 20 = 0$

$4a - 60 = 0$
$a = 15$

Como $a = 2x - 20$, resulta

$2x - 20 = 15$
$2x = 35$
$x = 17,50$

Então o valor que o jovem tinha no bolso era $17,50$ reais.

Para generalizar o problema temos

1º Gênio: $(ax - b)$, com $a, b \in \mathbb{R}$
2º Gênio: $a(ax - b) - b \Rightarrow a^2x - ab - b$
3º Gênio: $a[a(ax - b) - b] - b \Rightarrow a^3x - a^2b - ab - b$
$\vdots$
n-ésimo Gênio: $a^nx - a^{n-1}b - \cdots - ab - b$, com $n \geq 1$.

Como a n-ésima parcela é nula, temos

$$\begin{aligned} a^n x \quad & -a^{n-1}b - \cdots - ab - b = 0 \\ a^n x \quad & -b\underbrace{(a^{n-1} + \cdots + a + 1)}_{A} = 0. \end{aligned}$$

Somando bA a ambos os membros e dividindo por a^n, temos

$$\begin{aligned} x &= \frac{b(a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a + 1)}{a^n} \Rightarrow \\ x &= b(a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a + 1) \cdot a^{-n} \Rightarrow \\ x &= b(a^{-1} + a^{-2} + \cdots + a^{1-n} + a^{-n}). \end{aligned}$$

Usando outra notação,

$$x = b\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a^k}. \tag{2.2}$$

Quando n cresce de maneira indefinida, pode-se substituir n por infinito e, fazendo $b = 1$ e substituíndo as letras a por n e, n por z, com $z > 1$, obtemos a definição da Função Zeta de Riemann $\zeta(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$.

Usando (2.2) e considerando os dados do exemplo (2.1), temos $b = 20$ (valor devolvido pelo jovem), $a = 2$ (dobro do dinheiro) e $n = 3$ (o número de gênios). Para encontrar o valor x em reais observa-se que

$$\begin{aligned}
x &= 20\sum_{n=1}^{3}\frac{1}{2^n}\\
x &= 20\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}\right)\\
x &= 20\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)\\
x &= 20(0,875)\\
x &= 17,50.
\end{aligned}$$

Considermos agora o número de gênios igual a quatro. Daí

$$\begin{aligned}
x &= 20\sum_{n=1}^{4}\frac{1}{2^n}\\
x &= 20\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}\right)\\
x &= 20\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\right)\\
x &= 20(0,9375)\\
x &= 18,75.
\end{aligned}$$

Efetuando o mesmo cálculo para o número de gênios igual a cinco, iremos obter o valor x acrescido da diferença do valor encontrado para quatro gênios com o valor encontrado para três gênios, ou seja,

$$x = 18,75 + \frac{(18,75 - 17,5)}{2} = 19,375.$$

Notemos que, à medida que o número de gênios aumenta, a diferença entre o valor x encontrado para (n) gênios e o valor x encontrado para $(n-1)$ gênios, fica cada vez menor e se aproxima de zero. Usando limite, tem-se:

$$\lim_{n\to\infty} b\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a^j} = b\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^n}.$$

Daí, considerando as condições do problema anterior, obtem-se

$$\lim_{n\to\infty} 20\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2^j}.$$

Como

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2^j} \longrightarrow 1,$$

logo,

$$\lim_{n\to\infty} 20\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2^j} = 20.$$

Podemos concluir que o valor máximo que o jovem pode ter, em reais, de modo que no último gênio o jovem fique com zero reais é próximo de vinte reais. De fato, com o valor de vinte reais o jovem nunca vai ficar sem dinheiro no bolso. Isso quer dizer que o crescimento, nesta taxa, nunca excederá os vinte reais, pois, se o valor descontado for b, o limite será o prórpio b.

2.2 Propriedades da Função Zeta de Riemann

Nesta seção vamos apresentar algumas propriedades da Função Zeta de Riemann com o objetivo de fazer com que o leitor conheça sua **representação integral, equação funcional de Riemann e alguns valores especiais em pontos particulares.**

Em 1859, Riemann encontrou a equação funcional para a função $\zeta(z)$. Como nessa equação intervem a função $\Gamma(z)$, vamos defini-la em primeiro lugar. Para $\mathrm{Re}(z) > 0$, uma definição conviniente utiliza a integral euleriana

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-u}u^{z-1}du.$$

Equação Funcional de Riemann

$$\zeta(z) = 2(2\pi)^{z-1}\zeta(1-z)\Gamma(1-z)z\,\mathrm{sen}\,\left(\frac{\pi z}{2}\right), z \neq 1.$$

Representação Integral

$$\zeta(z) = \frac{1}{\Gamma(z)}\int_0^\infty \left(e^t - 1\right)^{-1} t^{z-1}dt, Re(z) > 1.$$

Alguns Valores Especiais

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2};$$

$$\zeta(1) = \infty;$$

$$\zeta(-2n) = 0, n = 1, 2, \cdots;$$

$$\zeta(1-2n) = -\frac{B_{2n}}{2n}, n = 1, 2, \cdots;$$

$$\zeta(2n) = \frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!}|B_{2n}|, n = 1, 2, \cdots; \tag{2.3}$$

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6};$$

$$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90};$$

onde B_k são os números de Bernoulli, definidos como os coeficientes da expansão de Taylor da função $\dfrac{t}{e^t - 1}$, isto é

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} t^k.$$

Euler foi o primeiro a mostrar que a soma dos recíprocos dos quadrados dos inteiros positivos, isto é $\zeta(2)$, vale $\dfrac{\pi^2}{6}$(esse valor pode ser verificado a partir do resulado (2.3)). A equação (2.3) mostra que o valor da função ζ para argumentos inteiros positivos $2n$ é proporcional à potência $2n$ de π.

Uma descoberta importante sobre a Função Zeta de Riemann foi a prova de que $\zeta(3)$ não pertence aos racionais, ou seja, $\zeta(3)$ é um número irracional, Roger Apéry foi o matemático que conseguiu fazer esta prova, apresentada no ano de 1978 em um congresso de matemática na França, ocasionando um grande espanto na academia e acabando por despertar o interesse dos matemáticos em estudar sua demonstração. Um desses matemáticos presentes na palestra de Apéry, Beukers, matemático holandês, estudou a demonstração de Apéry e em 1979 conseguiu demonstrar a irracionalidade de $\zeta(3)$ de forma mais "simples" usando a ideia central da demonstração de Apéry.

Até o momento, ninguém conseguiu provar que $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \ldots$ são irracionais, mas, o matemático Zudilin, em 1997, conseguiu chegar no resultado que afirma que o conjunto

$$\{\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11), ..., \zeta(19)\} \not\subset \mathbb{Q}$$

ou seja, pelo menos um elemento desse conjunto é irracional. No ano de 2000, Zudilin conseguiu melhorar esse resultado reduzindo o conjunto acima,

$$\{\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11)\} \not\subset \mathbb{Q}.$$

Este é o melhor resultado conhecido em torno de algum ζ de argumento ímpar ser irracional, $\zeta(3)$ já foi provado. Isto pode até não parecer muita coisa, mas para Teoria dos Números é um avanço muito grande.

2.3 Aplicações

Nesta seção, vamos usar alguns resultados mostrados neste trabalho para provar que existem infinitos números primos demonstrando o seguinte teorema:

2.3.1 Aplicações aos números primos

Teorema 2.1 *Seja p_n o n-ésimo número primo. Então,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots$$

diverge.

Demonstração: Se $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$ convergisse para $L \in \mathbb{R}$, então as somas parciais,

$$\left| \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{p_n} - L \right| < \frac{1}{2},$$

para N suficientemente grande. Assim $\sum_{n>N} \frac{1}{p_n} \leq \frac{1}{2}$ e então:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{n>N} \frac{1}{p_n} \right)^k \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^k = 1$$

Seja $n \in \mathbb{N}$. Todo inteiro $N \leq n$ é o produto, que se obtém de modo único, de potências de números primos $p \leq N$. Dado um inteiro q considere sua decomposição em números primos, ou seja, $q = p_1 \cdots p_N$. Logo todo número da forma $qr + 1 = p_{n_1} \cdots p_{n_k}, r \geq 1$ tem todos os primos que o dividem maiores que p_n e $\frac{1}{p_{n_1} \cdots p_{n_k}}$ aparece em $\left(\sum_{n>N} \frac{1}{p_n} \right)^k$ e portanto, a soma de todos esses números é menor do que 1. Por outro lado, tem-se

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{qr+1} > \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{qr+q} = \frac{1}{q} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r+1} = \frac{1}{q} \sum_{r=2}^{\infty} \frac{1}{r}.$$

Como vimos na seção (1.3), a última série do lado direito é uma série harmônica e portanto diverge. O que é uma contradição. Assim, a soma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$ diverge. Desse modo pode-se concluir que existem infinitos números primos.

2.3.2 Teorema de Euler

Teorema 2.2 *Se* $Re(z) > 1$ *então*

$$\zeta(z) = \prod_{\mathcal{P}} \frac{1}{1 - p^{-z}}, \tag{2.4}$$

onde $\mathcal{P}$ é o conjunto infinito de números primos.
Demonstração: Esta fórmula vem de que se $Re(z) > 1$, então $|p^{-z}| < 1$ e assim

$$\frac{1}{1 - p^{-z}} = 1 + p^{-z} + p^{-2z} + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} p^{-jz}.$$

Note, primeiramente, que a série

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{p^{jz}},$$

é convergente para qualquer número primo p. Vejamos

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{p^{jz}} = 1 + \left(\frac{1}{p}\right)^{z} + \left(\frac{1}{p}\right)^{2z} + \cdots . \tag{2.5}$$

Trata-se de uma série geométrica, onde o primeiro termo é igual a 1 e a razão é $q = \dfrac{1}{p^z}$. Logo $|q| < 1$, e por (1.3), segue que $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{p^{jz}} = \frac{1}{1-p^{-z}}$. Denotemos por p_k o k-ésimo número primo, e consideremos o seguinte produto

$$\prod_{k=1}^{m} \frac{1}{1-p_k^{-z}},$$

onde o produtório é sobre todos os primos. Para $m = 2$, usando a fórmula do produto de Cauchy, temos

$$\left(\frac{1}{1-p_1^{-z}}\right)\left(\frac{1}{1-p_2^{-z}}\right) = \sum_{k_1,k_2}^{2} \frac{1}{\left(p_1^{k_1} p_2^{k_2}\right)^{z}}, \tag{2.6}$$

onde k_1, k_2 são inteiros não negativos. Por indução, obtemos o seguinte produto

$$\prod_{k=1}^{m} \frac{1}{1-p_k^{-z}} = \sum_{k_1,k_2,\cdots,k_m}^{m} \frac{1}{\left(p_1^{k_1} p_2^{k_2} ... p_k^{k_m}\right)^{z}} \tag{2.7}$$

com $k_1, k_2, ..., k_m$ inteiros não negativos.

Como todo número inteiro positivo maior que 2 pode ser decomposto em produto de fatores primos, de maneira única, a menos de um rearranjo de seus termos, podemos reescrever (2.7) da seguinte forma

$$\prod_{k=1}^{m} \frac{1}{1-p_k^{-z}} = \sum_{n=1}^{p_m} \frac{1}{n^z}, \tag{2.8}$$

onde n assume qualquer valor inteiro positivo que não possui fator primo maior que p_m em sua decomposição em fatores primos.

De (2.1), vemos que o produto em (2.8) é menor do que $\zeta(z)$, pois não possui todos os termos da série que representa $\zeta(z)$. Por outro lado, o somatório que aparece em (2.8) contém os termos $1, \dfrac{1}{2^z}, \dfrac{1}{3^z}, ..., \dfrac{1}{p_m^z}$. Logo vale o seguinte

$$\sum_{n=1}^{p_m} \left|\frac{1}{n^z}\right| = \prod_{k=1}^{m} \left|\frac{1}{1-p_k^{-z}}\right| < \zeta(z) \tag{2.9}$$

para todo m. Quando $m \to \infty, p_m \to \infty$ também, e assim $\displaystyle\sum_{n=1}^{p_m} \frac{1}{n^z} \to \zeta(z)$.

Portanto,

$$\zeta(z) = \prod_{\mathcal{P}} \frac{1}{1-p^{-z}}. \tag{2.10}$$

Como podemos ver neste capítulo, a Função Zeta de Riemann tem grande importância na Teoria dos Números, em especial, tem uma relação muito forte com os números primos. Também não podemos deixar de citar a fomosa conjectura ou hipótese de Riemann que está relacionada com os zeros não-triviais da Função Zeta de Riemann. A hipótese de Riemann estabelece que todos os infinitos zeros da função ζ, pertencentes à faixa crítica $0 \leq Re(z) \leq 1$, estão sobre a reta $Re(z) = \frac{1}{2}$, que é chamada de *reta crítica.* Desta forma, de acordo com a hipótese de Riemann, os zeros não-triviais da função ζ, são infinitos e são da forma $z = \frac{1}{2} + i\sigma$, com $\sigma \in \mathbb{R}$. Vale então salientar, haja vista um prêmio milionário em questão, que já há mais de um século não foi apresentada, até o momento, nenhuma prova para essa conjectura.

Considerações Finais

O referencial teórico sobre a Função Zeta de Riemann ainda é incipiente e escasso na literatura portuguesa, o que dificulta a realização de qualquer pesquisa, a nível de graduação, sobre o tema.

O presente trabalho procurou apresentar a importância da Função Zeta de Riemann com a Teoria dos números produzindo conhecimentos que possibilitem auxiliar aqueles que tenham interesse, ou até mesmo curiosidade sobre tal função, e não tenham acesso à literatura estrangeira.

Primeiramente procuramos estruturar o trabalho num referencial teórico a fim de apresentar alguns conceitos em Análise Matemática. Tendo em vista que alguns requisitos para a compreensão de alguns conteúdos matemáticos são de fundamental importância para a elaboração de demonstrações e o entendimento de definições, não sendo diferente para a Função Zeta de Riemann. A partir dos conceitos de limites e séries apresentamos a definição da Função Zeta. Posteriormente foi feita algumas aplicações aos números primos. Assim foi mostrado sua relação com a Teoria dos Números. Contudo, deve-se ter em mente que além desta relação existem outras relações especiais que lhe reserva uma posição importante na Teoria das Funções.

Por fim, ressaltamos a importância de se estudar a Função Zeta de Riemann pelo fato de que ainda há problemas em aberto a serem solucionados e que possam trazer um grande avanço para a Teoria dos Números.

Referências

[1] BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática. 2 ed.** Merzbach, Uta C. / EDGARD BLUCHER, 2012.

[2] LIMA, Elon Lages. **Análise Real: funções de uma variável; v.1 10.ed.** Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2013.

[3] LIMA, Osmundo Alves e MACIEL,Aldo Bezerra. **Introdução à Análise Real.** Campina Grande: EDUEP, 2005.

[4] DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: Contexto e aplicações.** São Paulo: Ática, 2010.

[5] RIBENBOIM, Paulo. **Números Primos: Velhos mistérios e Novos Recordes; 1.ed.** Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2012.

[6] WALTER, Rudin. **Principles of Mathematical Analysis.** McGraw-Hill International Editions, 1976.