UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA

CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

“Construção de *Prismas* com Volumes Máximos à Partir de Polígonos Regulares”

Fabrício Donato Braz

Campina Grande – PB

2014

Fabrício Donato Braz

"Construção de *Prismas* com Volumes Máximos à Partir de Polígonos Regulares"

Trabalho de conclusão de curso Apresentado ao curso de Licenciatura Plena em matemática da Universidade Estadual da Paraíba. Em cumprimento ás exigências para obtenção do Título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Ms. Fernando Luiz Tavares da Silva

Campina Grande – PB

2014

B827c Braz, Fabrício Donato.
Construção de prismas com volumes máximos à partir de polígonos regulares [manuscrito] / Fabricio Donato Braz. - 2014.
44 p. : il. color.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2014.
"Orientação: Prof. Me. Fernando Luiz Tavares da Silva, Departamento de Matemática".

1. Geometria espacial. 2. Poliedros. 3. Máximos e sólidos. I. Título.

21. ed. CDD 516

Fabrício Donato Braz

"Construção de *Prismas* com Volumes Máximos

à Partir de Polígonos Regulares"

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao curso de licenciatura plena em matemática da Universidade Estadual da Paraíba. Em cumprimento ás exigências para obtenção do Título de Licenciado em Matemática.

Banca Examinadora:

Fernando Luiz Tavares da Silva

Prof. Ms. Fernando Luiz Tavares da Silva

Departamento de Matemática – CCT/UEPB

Orientador

Walber Santiago Colaço

Prof. Ms. Walber Colaço Santiago

Departamento de Matemática – CCT/UEPB

Núbia do Nascimento M.

Prof. Esp. Núbia Nascimento Martins

Departamento de Matemática – CCT/UEPB

Campina Grande

2014.

Dedico a minha Avó Joana do Amaral Donato

(in memorian).

AGRADECIMENTOS

Ao senhor Jesus Cristo que é meu refugio, fortaleza e socorro na angustia, me deu força para a concretização desse trabalho científico.

Aos meus queridos pais Rosildo Francisco e Lucila Ângela que são meu porto seguro em meio á adversidade da vida, e ainda pelo amor, cuidado, dedicação e apoio nos momentos difíceis e a minha querida Avó Joana do Amaral que já não se encontra entre nós, mas que participou no decorrer desses anos de graduação, me incentivando, apoiando e compartilhando dos momentos de aprendizado sempre estando presente com suas palavras sábias e motivadoras.

À minha irmã Izabelle Aline pela compreensão, apoio e dedicação quando precisei sanar minhas dúvidas.

Á Universidade Estadual pela oportunidade de desenvolvimento e também pelos grandes conhecimentos adquiridos no decorrer desses anos de estudos.

Ao professor Ms. Fernando Luiz Tavares da Silva por ter aceitado me apoiar, pelas experiências adquiridas, pelas orientações prestadas para a realização desse trabalho.

Aos meus colegas e amigos de graduação Luciana de Almeida, Gisele Alves, Fabiana Carlos, Daniela Guedes, Juscelino Araújo, José Valber, Gilvone Camilo, Jane Cleide, Rodrigo Andrade, Claudenor Silva, Michelly Henriques, Josenelle Cavalcante e Fátima Andrade, pelo estímulo, apoio, companheirismo e pelas experiências adquiridas e compartilhadas no decorrer dessa caminhada.

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo apresentar um relato histórico sobre aspectos relevantes sobre o surgimento, as principais características e definições sobre a matemática, a geometria espacial e os poliedros. Pensando nisso comentaremos um pouco sobre a história que é perspectiva importante de qualquer ciência, a necessidade, pontos essenciais e particularidades do desenho para a matemática, pois este é um dos pontos chaves para o aprendizado de um conteúdo na matemática e principalmente na geometria. Sabendo de tudo isso, apresentaremos no referencial teórico algumas definições e teoremas sobre a derivada, as regras de derivação, máximos e mínimos absolutos e estratégias para resolver problemas, os quais são pré-requisitos para o cálculo do volume máximos dos sólidos e são partes fundamentais desse. Por fim nas aplicações apresentaremos a maneira de como obter o volume máximo de um sólido através das demonstrações de cada poliedro e concluiremos que todos chegam a um mesmo resultado. O cálculo de volume máximo é imprescindível não apenas para a matemática, mas essas aplicações são indispensáveis para a engenharia e outras ciências exatas.

Palavras-Chave: Derivada, Geometria, Máximos e Sólidos.

ABSTRACT

This work aims to present a historical account of relevant issues on the rise, the main characteristics and definitions of the mathematical, spatial geometry and polyhedra. Thinking about this will comment a bit about the history that is important to any science perspective, the need, essentials and particulars of the design for mathematics because this is a key point for learning content in mathematics and especially geometry. Knowing all this, we will present the theoretical framework some definitions and theorems on the derivative, rules of derivation, maximum and minimum absolute and strategies to solve problems which are prerequisites for the calculation of the maximum volume of solids and are key parts of . Finally we present applications in the way of getting the maximum volume of a solid through the statements of each polyhedron and conclude that they all come to the same result. The calculation of maximum volume is indispensable not only for mathematics, but these applications are indispensable for engineering and other sciences.

Keywords: Derivative, Geometry, Maxima and Solids.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO..........09

1. ASPECTOS HISTÓRICOS..........11

1.1. UM POUCO DA HISTÓRIA DA GEOMETRIA ESPACIAL..........13

1.2. ALGUNS ASPECTOS RELATIVOS A POLIEDROS..........16

2. A IMPORTÂNCIA DO DESENHO GEOMÉTRICO NO ENSINO NA MATEMÁTICA......18

3. A DERIVADA..........20

3.1. REGRAS DE DERIVAÇÃO..........22

3.2. MÁXIMO ABSOLUTO MÍNIMO ABSOLUTO..........23

3.3. COMO DETERMINAR OS EXTREMOS ABSOLUTOS DE UMA FUNÇÃO CONTÍNUA f EM UM INTERVALO FECHADO E FINITO..........25

3.4. ESTRATÉGIAS PARA RESOLVER PROBLEMAS DE MÁXIMOS E MÍNIMOS..........26

4. CONEXÃO DE CONTEÚDOS..........27

4.1. TRIÂNGULO..........27

4.2. QUADRADO..........28

4.3. PENTÁGONO REGULAR..........30

4.4. HEXÁGONO REGULAR..........31

4.5. HEPTÁGONO REGULAR..........33

4.6. OCTÓGONO REGULAR..........34

4.7. ENEÁGONO REGULAR..........35

4.8 DECÁGONO REGULAR..........37

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS..........39

REFERÊNCIAS..........40

ANEXOS..........42

Introdução

Tendo em vista que a disciplina de matemática tem toda uma complexidade que requer dos estudantes uma prática de exercícios e atividades, a geometria que é uma corrente da matemática vai abordar dentro deste o cálculo de volume de sólidos**.** O interesse por esse assunto surgiu mediante a curiosidade de como obter o volume máximo de sólidos, ou seja, quais estratégias, formas e fórmulas utilizadas de encontra-los.

Nos primeiros capítulos mostraremos uma abordagem histórica sobre o surgimento do número qual a linguagem utilizada, quais aspectos foram salientes, quem foram os primeiros povos, quais as formas de medição, quem foram os primeiros matemáticos e quais as contribuições para aquele momento vivido e o que atualmente pode ser aplicado nos nossos estudos. A geometria também teve grande valor no conhecimento matemático, dentro deste comentaremos um pouco sobre o papiro de Rhind e o de Moscou que são sem dúvida o mais precioso documento egípcio relativo à matemática e ainda o porquê a geometria não era vista como um conhecimento importante. Relataremos um pouco sobre o conteúdo de poliedros o qual surgiu mediante a necessidade dos povos primitivos em obter figuras geométricas através de modelos diferentes, ou seja, figuras triangulares, quadrangulares, pentagonais e etc.

Continuando o nosso pensamento a geometria espacial é o estudo da geometria no espaço em que estudamos as figuras que possuem mais de duas dimensões. Essas figuras recebem o nome de sólidos geométricos ou figuras geométricas espaciais. A geometria teve origem provável na agrimensura ou medição de terrenos segundo o historiador grego Herotódo (séc. V a.C.) em tempos recuados a geometria era uma ciência empírica uma coleção de regras e práticas para obter resultados aproximados. Geometria é uma palavra que resulta dos termos gregos “geo.’’(terra) e “metron” (medir), o qual significa atribuir propriedades relacionadas com o lugar e forma de objetos no espaço.

O desenho é sem dúvida uma ferramenta essencial, pois foi através dele que tomamos conhecimento sobre o modo de vida e a forma de comunicação utilizada. Ele é imprescindível nas aulas de matemática, pois auxiliam na percepção e é um instrumento facilitador na aprendizagem.

Portanto, no referencial teórico comentaremos sobre algumas definições, regras de derivação, máximo absoluto e mínimo absoluto, ponto crítico e algumas estratégias para resolver problemas de máximo e mínimo.

Por fim teremos a conexão de conteúdos onde veremos como calcular o volume máximo dos sólidos a partir de fórmulas de áreas e volumes utilizando a derivada na obtenção do mesmo, no qual tentaremos mostrar de forma clara e objetiva quais as estratégias e maneiras utilizadas de como encontrar.

.

1. Apresentações históricas da matemática.

Neste capítulo abordaremos sobre a história da matemática e um pouco do surgimento da geometria. A palavra matemática origina-se do seguinte conceito: número, grandeza e forma. Esses três conceitos são localizados nos primeiros povos e essas informações matemáticas são observadas no seu modo de vida. Darwin observou que a capacidade de raciocínio e de seres pensantes são características não apenas dos seres humanos, mas de outros animais como os corvos e isso tem relação com a compreensão dos matemáticos com configuração e semelhança na observação e percepção das figuras geométricas.

No século XIX a matemática pura apresentou-se além dos obstáculos sugeridos por lembretes da natureza. A matemática apareceu da vida cotidiana do homem; a perseverança do homem pode ter relação com a ampliação dos conceitos matemáticos. As primeiras noções de número, grandeza e forma podiam estar ligadas com contrastes; (entre um animal e muitos) mais do que com similaridades. A partir dessas noções surgiu á matemática, isso não foi de repente, mas foram anos de dedicação e observação para que o conhecimento fosse aprimorado. Da mesma forma observa-se uma relação entre os pares que podem ser colocados numa correlação um a um. As mãos podem ser relacionadas com os pés, os olhos e as orelhas ou as narinas, isso apresenta uma grande conquista. Mesmo nos dias atuais muitos povos ainda contam elementos configurando-os em grupos de dois. (BOYER, 1996, p.1)

O pensamento de número, possivelmente difundiu-se na linguagem dos sinais, que foi o modo de expressar as suas precisões. Os dedos das mãos podem indicar elementos como um, dois, três, quatro ou cinco elementos; com as duas mãos podem ser simuladas coleções de até vinte elementos. Quando os dedos eram impróprios usavam pedras para mostrar uma ligação com elementos de outro conjunto. Como Aristóteles observou há muito tempo, o uso hoje difundido do sistema decimal é apenas o resultado do acidente anatômico de que quase todos nós nascemos com dez dedos nas mãos e nos pés. (BOYER, 1996, p. 2)

Para Boyer, Tais descobertas arqueológicas mostram simulações de que o pensamento de número é muito mais antigo do que progressos tecnológicos como o uso de metais ou de conduções com rodas.

O homem foi indispensável para que aparecesse a ideia de matemática abstrata. No entanto o pensamento de número surgiu pausadamente; se a dificuldade da linguagem não fosse algo tão complexo talvez sistemas adversários do decimal tivessem feitos maiores avanços; As linguagens modernas são edificadas quase sem exceção em volta da base dez. A intenção da língua de se ampliar do concreto para o abstrato pode ser observada em muitas das medidas de grandeza em uso atual. (BOYER, 1996 p. 3).

A matemática possivelmente apareceu em replica às precisões práticas, mas estudos antropológicos apresentam a possibilidade de outra origem. Foi indicado que o método de contar apareceu em vinculação com rituais religiosos antigos e que a aparência ordinal antecedeu o conceito quantitativo. Caso sejam corretas as hipóteses que dão procedência cerimonial á contagem, o conceito de número ordinal pode ter antecedido o de número cardinal. Esse ponto de vista, apesar de estar longe de ser confirmado, estaria em conformidade com a divisão cerimonial dos inteiros em ímpares e pares, os primeiros apresentados como masculinos e os últimos, como femininos. (BOYER, 1996 p. 4).

A definição de número inteiro é o mais remoto na matemática e sua ascendência se perde nas memorias da antiguidade pré-histórica; O conhecimento de fração racional, porém apresentou-se relativamente mais tarde. Para obrigações quantitativas a criatura experta pode indicar unidades satisfatoriamente pequenas para extinguir a necessidade de usar frações. (BOYER, 1996 p. 4)

O conhecimento a respeito das primeiras civilizações dependeu das explicações baseadas nos poucos itens que restaram de destaques fornecidos pela moderna antropologia, e de extrapolação retroativa, conjectural, a partir das informações que restaram. Existem duas proposições de Aristóteles e Heródoto em relação aos princípios da matemática: o primeiro da necessidade da prática e o segundo no descanso sacerdotal e cerimonial. A indicação de os geômetras egípcios serem ás vezes chamados de agrimensores pode ser tomado como apoio de qualquer um dos princípios. Não podemos contestar com segurança nem Heródoto nem Aristóteles em relação à motivação que causou a matemática, mas é claro que ambos desdenharam a idade do assunto. O indivíduo neolítico pode ter tido pouco repouso e pouca obrigação de medir terras, porém suas representações e pinturas sugerem uma inquietação com as relações espaciais que conduzem para o estudo da geometria; seus potes, acolchoados e balaios mostram exemplos de congruência e simetria. (BOYER, 1996 p. 4 e 5).

1.1. Um Pouco da História da Geometria Espacial

A ampliação da geometria pode ainda ter sido incentivada por necessidades práticas de construção e contorno de terras, ou por sentimentos estéticos em relação a formas e ordem. (BOYER, 1996 p. 5).

A geometria é um ramo milenar da matemática e tem grande relevância para a sociedade, pois é aplicado na construção de objetos, na engenharia na construção de peças, seu valor cultural e patrimonial nas grandes civilizações e ainda na agricultura e pecuária.

Compreendemos que a Matemática é a mais antiga das ciências e que a sua origem esconde-se nas areias das antigas culturas egípcias. O estudo da geometria espacial pelos povos da mesopotâmia (região situada no Oriente Médio, no vale dos rios Tigre e Eufrates) é datado desde, aproximadamente, dois mil anos antes de Cristo e todo o conhecimento que temos hoje se baseia em documentos que denominamos papiros. Dentre os principais podemos citar o "papiro de Rhind" e o "papiro de Moscou".

Conhece-se muito pouco sobre a intenção do papiro. Se há indicações de que poderia ser um documento com intenções pedagógicas ou mesmo um simples caderno de notas de um aluno, para outros historiadores representa um guia das matemáticas do antigo Egito, pois é o melhor texto de matemática.

O papiro de Rhind intitula-se como instruções para conhecer todas as coisas secretas e é, sem dúvida, o mais precioso documento de quantos existem relativos aos conhecimentos matemáticos dos egípcios.

Em 1855, um advogado e antiquário escocês, A. H. Rhind (1833 - 1863) viajou, por razões de saúde, ao Egito em busca de um clima mais ameno, e lá começou a estudar objetos da Antiguidade. Em 1858, adquiriu um papiro que continha textos matemáticos.

Este papiro é composto por problemas e suas respectivas soluções, ele ainda apresenta os seguintes conteúdos: regra de três, frações, equações, volumes, progressões aritmética, cálculo de área e trigonometria. Veremos a imagem do papiro de Rhind o qual é um grande documento que representa a história da matemática e que certamente mostra a ansiedade e o progresso do povo antigo egípcio por querer aprender e descobrir conteúdos novos e aplica-los às suas necessidades.

Imagem de Papiro de Rhind:

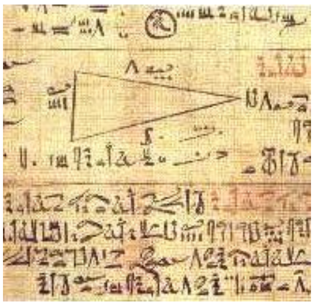


Figura 1 O papiro de Rhind.

Fonte: http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/rhind/inicio.htm

O Papiro de Golonishevou de Moscou é uma estreita tira de 5,5 m de comprimento por 8,0 cm de largura, com 25 problemas. Encontra-se atualmente em Moscou. Foi datado aproximadamente no ano 1850 a.C. e nada se sabe sobre o seu autor.

Imagem do papiro de Moscou:

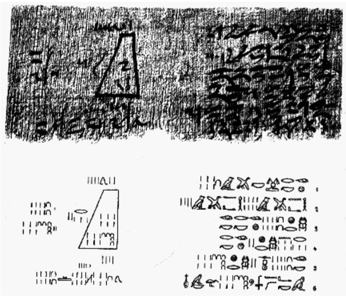


Figura 2 O papiro de Moscou

Fonte: http://jonasportal.blogspot.com.br/2010/02/o-papiro-de-moscou-ou-papiro golonishev.html

Segundo Boyer (1996), os documentos históricos revelam que os egípcios antigos já calculavam áreas geométricas. Para a constatação disso ele assegura que há exemplos de triângulos, trapézios, retângulos e quadriláteros. De acordo com ele, as pessoas calculavam a área de quadriláteros fazendo o produto das medidas aritméticas de seus lados opostos. Fundamentando em situações geométricas particulares, as pessoas buscavam soluções gerais que pudessem determinar todos os problemas de origens parecidas. A técnica utilizada era o que hoje chamamos de método indutivo.

Os pesquisadores acreditavam que a geometria era uma ciência de observação e exame feita pelos antigos incidindo na maneira como era vista o mundo que o cercava, seus objetos e as medidas de um deles. Apesar de sua importância esses conhecimentos não apresentavam veracidade cientifica, portanto a geometria apresentava-se com noções construídas intuitivamente e discordantes, ou seja, sem uma organização lógica.

As fórmulas e os métodos dos antigos pesquisadores já não eram suficientes para calcular as áreas e os volumes da grande quantidade de objetos que estavam sendo pesquisados, levando o homem a procurar um método que comprovasse e confirmasse as propriedades por meio de entendimentos matemáticos lógicos e coesivos.

Para Boyer (1996), os primeiros a utilizarem o método dedutivo, foram os gregos Tales de Mileto e Pitágoras de Samos que ofereceram uma nova forma de interpretar a Geometria. De acordo com ele, se atribui a Tales os teoremas de que, o diâmetro é a bissetriz de um círculo, em um triângulo isósceles os ângulos da base são iguais, na interceptação de duas retas os ângulos opostos formados são iguais e ainda, dois triângulos são congruentes se dois ângulos e o lado comum aos ângulos de ambos são iguais.

Pitágoras é considerado o grande inventor do teorema do triângulo retângulo, hoje enunciado, no triângulo retângulo o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.

Outro personagem de destaque na Geometria é Platão. Atribui-se a ele a descoberta dos poliedros regulares, que por tal motivo, também são conhecidos como poliedros de Platão. Com base no site (Wikipédia) Platão foi um filósofo e matemático do período clássico da Grécia Antiga, autor de diversos diálogos filosóficos e fundador da Academia em Atenas. Um de seus destaques na matemática e na ciência foi que ele ajudou a fazer a distinção entre a matemática pura e a matemática aplicada, ampliando o foco na "aritmética", agora chamada de teoria dos números e "logística". A matemática pura é, entretanto o que aparentemente é abstrato e não aplicável em algo, mas acaba por muitas vezes sendo útil às diversas disciplinas que "bebem dessa fonte". A Matemática aplicada trata da aplicação do conhecimento matemático em outros domínios tais como: Programação linear, cálculo numérico, biomatemática e dentre outros ramos de estudo.

A Geometria Espacial igualmente chamada de Euclidiana é uma área da matemática que estuda os componentes espaciais (componentes em três dimensões) e suas propriedades. È vista como uma ampliação da geometria plana que por sua vez estuda componente somente em duas dimensões.

Em 1669, Isaac Newton desenvolve o “Cálculo Diferencial e Integral” que possibilitava a obtenção da área e do volume de qualquer figura geométrica, sem importar o seu formato[1].

1.2. Alguns Aspectos Relativos a Poliedros

O homem adquiriu conhecimento que respostas retilíneas eram mais poupadas, logo, aprendeu a mexer com figuras regulares e fazer divisões que são simples de construir. Certos objetos regulares, como pirâmides e prismas, talvez por serem mais poupados, foram sendo mais utilizados. Já por volta de 1000 a.C. monumentos imensos como pirâmides já tinham sido erguidos. (ALLAN, 1997, p.301-3011).

Os poliedros regulares deslumbraram os povos primitivos como marco de perfeição da natureza. Os Pitagóricos já sabiam que existia três dos cinco poliedros regulares: o cubo, o tetraedro e o dodecaedro. Já eram conhecidos os cubos e os tetraedros pelos Egípcios e Babilônios. Os Etruscos por cerca do ano 1000 a.C. formaram um dado em formato de um dodecaedro. Estes poliedros foram bastante analisados pela Escola de Platão que formaram uma hipótese filosófica baseada neles, comparando-os com os cinco objetos da natureza. Um poliedro é invariável se todos os seus vértices tem o mesmo forma. (ALLAN, 1997, p. 301-311).

Um poliedro é a união de polígonos regulares tais que cada lado de um deles seja comum a dois desses polígonos. Estes polígonos regulares depois de unidos são formados por: vértices, faces e arestas. (ALLAN, 1997, p. 301-311).

Personagens como filósofos e matemáticos destinaram a sua vida terrena à pesquisa da geometria. Enquanto a escola pitagórica tinha como lema “Tudo são números”, a escola de Platão tinha escrito sobre a porta, “Não entre aqui ninguém que não seja geômetra”. Há

[1] Retirado de: http://oqueeh.com.br/geometria-espacial-conceito-e-origem. Acessado ás: 11h08min em 29/09/2014.

proeminências de que os povos neolíticos que existiram na Escócia tinham esculpidos alguns destes sólidos 1000 anos antes. Seguem abaixo alguns destes modelos conforme [2].

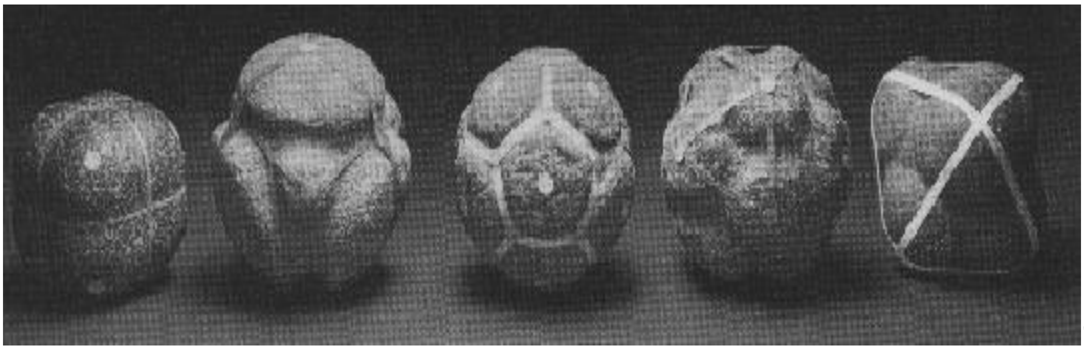
 [3]

FIG. 3- Modelo Neolítico dos Sólidos Platônicos.

Platão (350 a.C.) foi o primeiro a demonstrar que existem apenas cinco poliedros regulares: o cubo, o tetraedro, o octaedro, o icosaedro e o dodecaedro. Ele e seus seguidores estudaram esses sólidos com tal intensidade, que ficaram conhecidos como ‘‘Poliedros de Platão’’ [4].

---

[2] http://www.pucrs.br/edipucrs/erematsul/minicursos/descobrindoospoliedros.pdf. Acessado ás: 16h23min em 24/11/2014.
[3] http://www.math.ist.utl.pt/~ppinto/plato5.htm. Acessado ás 16h15 min. Em 07/10/2014.
[4] http://www.pucrs.br/edipucrs/erematsul/minicursos/descobrindoospoliedros.pdf. Acessado ás 17h20 min. Em 07/10/2014.

2. A importância do desenho geométrico no ensino da matemática

Vamos mostrar um pouco da importância do desenho geométrico na construção de figuras e alguns aspectos relativos sobre o seu surgimento nos primórdios e como chegou ao Brasil, bem como, sua importância para a “ciência matemática”.

O princípio do desenho inicia-se com a história da origem do homem. O desenho apareceu na pré-história construída pelos homens primitivos como forma de ilustrações para comunicar-se antes mesmo da linguagem, ou seja, o desenho foi uma ferramenta facilitadora para a comunicação. Com o decorrer dos anos foram sendo utilizados os desenhos geométricos, isto é, descrições e formas mais definidas (SOUZA, 2014 apud FARIA 2009).

O desenho foi importante para a civilização, assim como, o uso de instrumentos que o aperfeiçoaram, melhorando a qualidade das imagens. Entre os instrumentos utilizados por todas essas civilizações, podemos citar: os dedos, pedaços de madeiras e ossos, argila, tintura vegetal, carvão, penas até chegar às canetas esferográficas (SOUZA, 2014 apud FARIA, 2009).

Os desenhos no Renascimento receberam aspectos mais realistas tendo ênfase na anatomia humana valorizando mais a realidade dos mesmos. Na revolução industrial, os desenhos eram ligados á projeção de máquinas e equipamentos industriais ao contrário das reproduções feitas na pré-história (SOUZA, 2014 apud FARIA 2009).

Um acontecimento marcante para a história do desenho foi pelo meio da ideia das histórias em quadrinho (também conhecido como HQ), inventadas no fim do século passando por empresas jornalísticas norte-americanas. Logo, o primeiro quadrinho o Yellow Kid (moleque amarelo) apareceu para verificar a cor amarela nas impressões de jornais (SOUZA, 20014 apud LUYTEN, 1985).

Portanto o desenho foi aperfeiçoando-se através de novas técnicas, modelos e formas, com o decorrer dos tempos. Surgiram também novos instrumentos e materiais para que esses desenhos fossem tornando-se mais próximos do real.

Segundo o dicionário Ruth Rocha (1996) o desenho é a arte de representar objetos por meio de linhas e sombras ou delineamento ou traçado de um quadro. Desenho geométrico pode ser esclarecido como um conjunto de técnicas e processos utilizados para os mecanismos de formas geométricas.

Desenho geométrico: é o estudo dos padrões e normas do desenho em duas dimensões, voltado á representação plana dos elementos geométricos para exibição ou resolução geométrica de problemas de Matemática.

Os desenhos são ferramentas imprescindíveis nas aulas de Matemática, uma vez que, eles contribuem na ampliação do raciocínio, ajudando na conexão de concepções e argumentos para o entrosamento de enunciados, explicações, demonstrações, perspectiva (FILHO, 2007).

> ...usando desenhos, é possível auxiliar e muito, a demonstração de vários resultados; essa prática tem sido assim por milênios, entre as mais diversas civilizações que usaram ou desenvolveram a matemática (FILHO, 2007, p. 163).

O desenho é uma ferramenta essencial para o ensino da matemática principalmente no ramo da geometria, facilitando ou identificando a construção do conhecimento em uma quantidade significativa de conteúdos geométricos.

Vejamos alguns fatores que contribuíram para que a disciplina de desenho fosse extinta dos currículos escolares aqui no Brasil: um deles foi que ela deixaria de ser obrigatória e passaria a ser optativa e o outro foi a não obrigatoriedade dos desenhos geométricos com a utilização de régua e compasso nos vestibulares de engenharia e arquitetura da década de 70.

Na década de 70 como o desenho foi extinto dos currículos escolares, o ensino de geometria embora seja colocado nos livros por certas editoras, muitas instituições não abordaram o conteúdo aceito que se pautavam na lei 5692/71 da LDB, que estabelecia o desenho geométrico como disciplina optativa (SOUZA, 2014).

3. A Derivada

Consideremos algumas informações sobre derivadas. Definimos o coeficiente angular de uma curva $y = f(x)$ no ponto onde $x = x_0$ como:

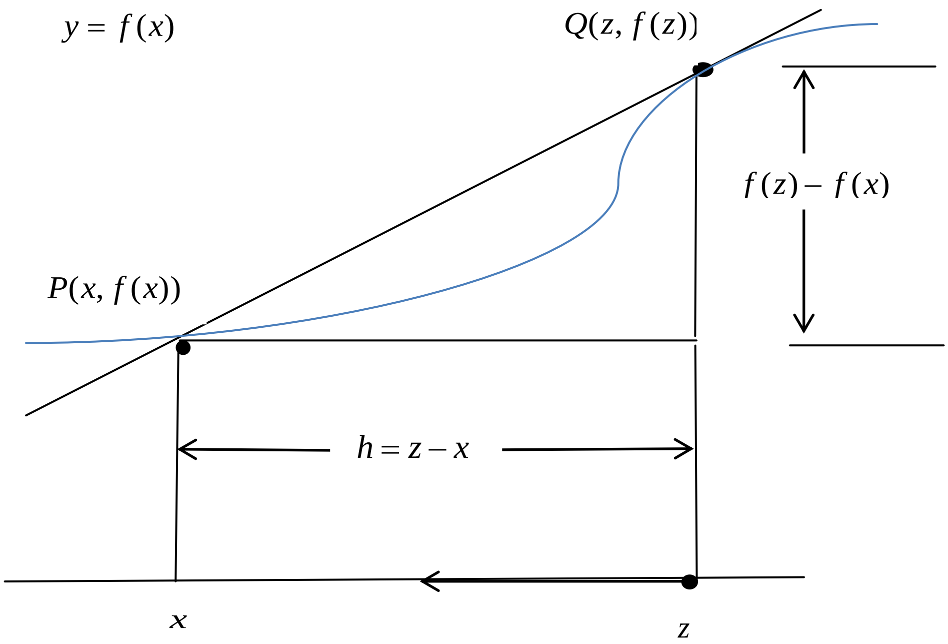
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Denominamos esse limite como sendo a de derivada de f no ponto x_0. Agora, estudaremos a derivada como uma função derivada de f, chamando o limite em cada ponto do domínio de f.

Na definição, usamos a notação f(x) para enfatizar a variável independente x á qual estamos derivando. O domínio de f ' é o conjunto de pontos no domínio de f para o qual o limite existe. Ele pode ser igual ou menor que o domínio de f. Se f ' existe para determinado valor de x, dizemos que f é **derivável** em x. Se f ' existe em qualquer ponto no domínio de f, chamamos f **derivável**.

Se escrevermos $z = x + h$, então $h = z - x$, e h tende a 0 se e somente se z tende a x. Logo, uma definição equivalente da derivada é a seguinte:

Coeficiente angular da secante; $\dfrac{f(z) - f(x)}{z - x}$



A Derivada de f em x é:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{z\to x} \frac{f(z)-f(x)}{z-x}$$

Calculando a derivada a partir de sua definição

O método para calcular uma derivada é chamado **derivação**. Para enfatizar a ideia de que a derivação é uma operação realizada na função $y = f(x)$, também usamos a notação:

$$\frac{d}{dx} f(x)$$

Para indicar a derivação f '(x).

Aplicando a definição:

Derive $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$

Temos que: $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$

$f(x+h) = \dfrac{(x+h)}{(x+h)-1}$ Daí,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{x+h}{x+h-1} - \dfrac{x}{x-1}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{(x+h)(x-1)-x(x+h-1)}{(x+h-1)(x-1)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{-h}{(x+h-1)(x-1)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{(x+h-1)(x-1)} = \frac{-1}{(x-1)^2}$$

3.1. Regras de Derivação

Vejamos alguns princípios de derivação, que nos possibilitará derivar uma multiplicidade de funções.

Princípio 1- Derivada de uma função constante

Se f tem o valor constante f(x) = c, logo:

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(c) = 0$$

Princípio 2- Potenciação para inteiros positivos

Se n for um inteiro positivo, logo:

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

Princípio 3- Multiplicação por constante

Se u é uma função derivável de x e c uma constante, logo:

$$\frac{d}{dx}(cu) = c\frac{du}{dx}$$

Principio 4 - Derivada da soma

Se u e v são funções deriváveis de x, então a soma das duas, u + v, é derivável em qualquer ponto onde ambas sejam deriváveis. Nesses pontos;

$$\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

Princípio 5 - Derivada do produto

Se u e v são deriváveis em x, logo o produto u.v também é, e,

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

Principio 6 - Derivada do quociente

Se u e v são deriváveis em x e se v(x) ≠ 0, logo o quociente u/v é derivável em x e,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

Em notação de função:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Principio 7- Potenciações para inteiros negativos

Se n é um inteiro negativo e x ≠ 0, logo:

$$\frac{d}{dx}\left(x^n\right)=nx^{n-1}$$

3.2. Máximo Absoluto e Mínimo Absoluto

Neste capítulo veremos como encontrar e identificar valores extremos de uma função a partir de sua derivada. Logo após essa primeira etapa, podemos resolver uma série de problemas de otimização. Máximo e mínimo são chamados de extremos absolutos.

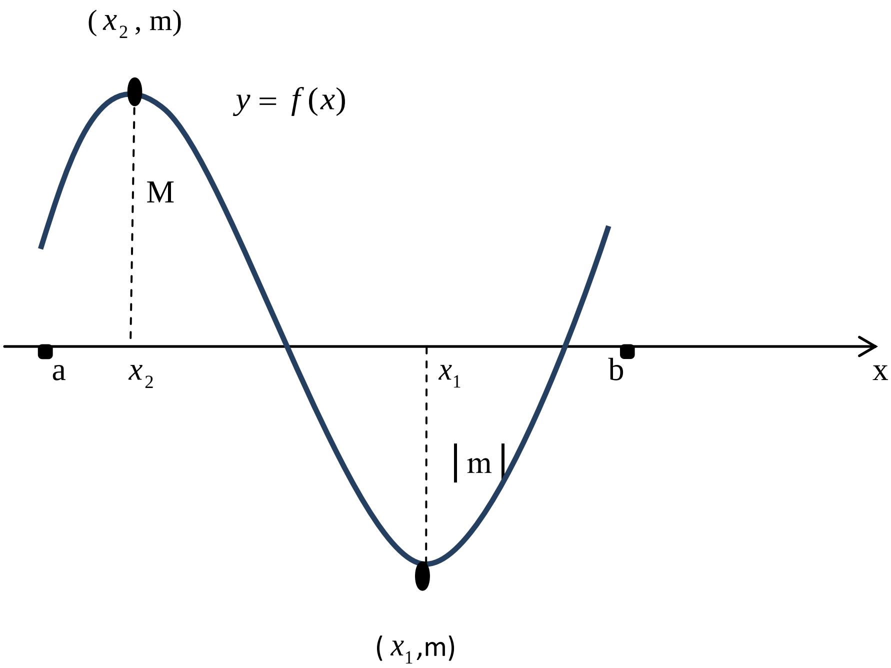
Definição 1- Máximo Absoluto e Mínimo Absoluto

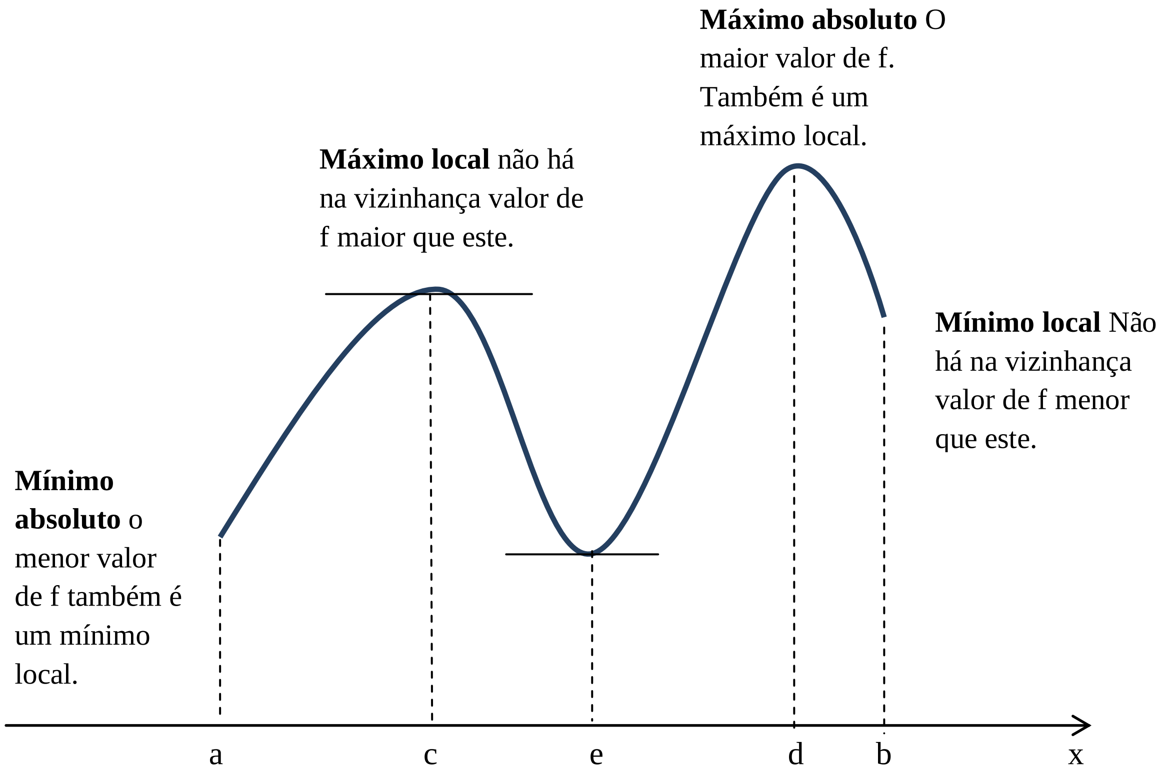
Seja f uma função de domínio D. Então f tem um valor **máximo absoluto** em D em um ponto c se $f(x) \leq f(c)$ para qualquer x em D e um **valor mínimo** absoluto em D no ponto c se $f(x) \geq f(c)$ para qualquer x em D.

Teorema 1- O teorema do valor extremo

Se f é contínua em um intervalo fechado $[a,b]$, então f assume tanto um valor máximo M como um valor mínimo m em $[a,b]$. Ou seja, há números x_1 e x_2 em $[a,b]$ tais que $f(x_1) = m$ e $f(x_2) = M$ e m $\leq f(x) \leq$ M para qualquer outro valor de x em $[a,b]$.

Pontos de Máximo e Mínimo interior





Definição 2- Máximo Local, Mínimo Local.

Uma função f tem um valor **máximo local** em um ponto interior c de seu domínio se $f(x) \leq f(c)$ para qualquer x em um intervalo aberto que contenha c. Uma função f tem um valor **Mínimo local** em um ponto interior c de seu domínio se $f(x) \geq f(c)$ para qualquer x em um intervalo aberto que contenha c.

Teorema 2- Teorema da derivada para valores de extremos locais

Se f possui um valor máximo ou mínimo local em um ponto c interior de seu domínio e se f □ é definida em c, então f □ (c) = 0.

Definição 3- Ponto crítico

Um ponto interior do domínio de uma função f onde f □ é zero ou indefinido é um **ponto crítico** de f.

Na maior parte das buscas por valores extremos, é indispensável determinar os extremos absolutos de uma função contínua em um intervalo fechado e finito. O teorema 1 mostra que esses valores existem, e o teorema 2 nos diz que eles só são adquiridos em pontos críticos e extremidades. Muitas vezes, podemos simplesmente listar esses pontos e calcular os valores adequados da função, descobrindo assim os valores maior e menor e sua localização.

3.3. Como determinar os extremos absolutos de uma função contínua f em um intervalo fechado e finito

1- Calcule f em todos os pontos críticos e extremidades.

2- Tome o maior e o menor dentre os valores obtidos.

3.4. Estratégia Para Resolver Problemas de Máximos e Mínimos

Passo 1- Compreendendo o problema. Leia o problema atentamente. Identifique as informações necessárias para resolvê-lo. O que é desconhecido? O que é dado? O que é pedido?

Passo 2- Desenvolva um modelo matemático para o problema. Desenhe figuras e indique as partes que são importantes para o problema. Introduza uma variável para representar a quantidade a ser maximizada ou minimizada. Utilizando essa variável, escreva uma função cujo valor extremo forneça a informação pedida.

Passo 3- Determine o domínio da função. Determine quais valores da variável tem sentido no problema. Se possível, esboce o gráfico da função.

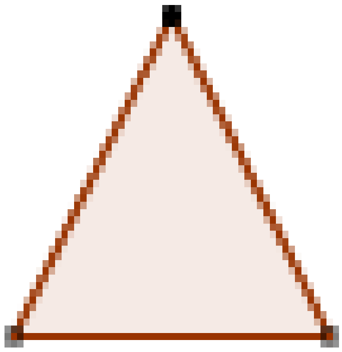
Passo 4- Identifique os pontos críticos e as extremidades. Determine onde a derivada é zero ou não existe. Utilize aquilo que você sabe sobre a forma do gráfico de uma função e sobre a física do problema. Use a primeira e a segunda derivada para identificar e classificar pontos críticos (onde $f = 0$ ou não existe).

Passo 5- Interprete a solução. Traduza seu resultado matemático de volta para a linguagem original do problema e decida se o resultado tem sentido ou não. (SILVA, 2010 apud FINNEY, 2002, p. 275).

4- Conexões de Conteúdos

4.1. Triângulo

Obter um prisma de volume máximo a partir de um triângulo equilátero.



A partir da fórmula da área de um triângulo temos:

$$A = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$A = x\left(a - 2x\right)^2\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$A = x\left(a^2 - 4ax + 4x^2\right)\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$A = \left(a^2x - 4ax^2 + 4x^3\right)\frac{\sqrt{3}}{4}$$

Fazendo A'(x) = 0, obtemos:

A'(x) = $a^2 - 8ax + 12x^2$

$$x = \frac{-\left(-8a\right) \pm \sqrt{\left(-8a\right)^2 - 4\cdot 12\cdot a^2}}{2\cdot 12}$$

$$x = \frac{8a \pm \sqrt{64a^2 - 48a^2}}{24}$$

$$x = \frac{8a \pm \sqrt{16a^2}}{24}$$

$$x = \frac{8a \pm 4a}{24}$$

$$x_1 = \frac{a}{2}$$

$$x_2 = \frac{a}{6}$$

V'(x) = $a^2 - 8ax + 12x^2$

Derivando novamente temos;

V"(x) = $-8a + 24x$

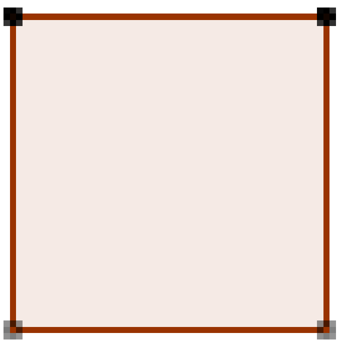
Para $x_1 = \frac{a}{2}$, temos V"$\left(\frac{a}{2}\right)$ = 4a > 0 não convém, pois é o valor mínimo.

Para $x_2 = \frac{a}{6}$, temos V"$\left(\frac{a}{6}\right)$= - 4a < 0 logo é o valor máximo.

Portanto obtemos o volume máximo do sólido tomando $\frac{a}{6}$.

4.2. Quadrado

Obter um prisma de volume máximo a partir de um quadrado.



A partir da fórmula do volume do sólido temos:

$v(x) = a^3$

$v(x) = (a - 2x) \cdot (a - 2x) \cdot x$

$v(x) = (a - 2x)^2 \cdot x$

$v(x) = (a^2 - 4ax + 4x^2) \cdot x$

$v(x) = a^2x - 4ax^2 + 4x^3$

$\text{v}'(\text{x}) = 12x^2 - 8ax + a^2$

$$x = \frac{-(-8a) \pm \sqrt{(-8a)^2 - 4 \cdot 12 \cdot a^2}}{2 \cdot 12}$$

$$x = \frac{8a \pm \sqrt{64a^2 - 48a^2}}{24}$$

$$x = \frac{8a \pm \sqrt{16a^2}}{24}$$

$$x = \frac{8a \pm 4a}{24}$$

$$x_1 = \frac{a}{2}$$

$$x_2 = \frac{a}{6}$$

V'(x) = $a^2 - 8ax + 12x^2$

Derivando novamente temos;

V"(x) = $-8a + 24x$

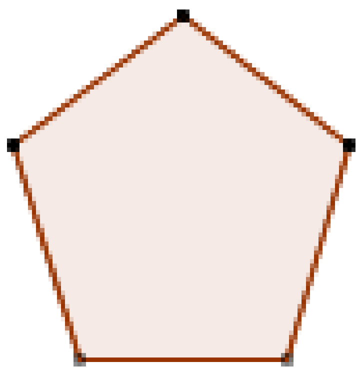
Para $x_1 = \dfrac{a}{2}$, temos V"$\left(\dfrac{a}{2}\right) =$ 4a > 0 não convém, pois é o valor mínimo.

Para $x_2 = \frac{a}{6}$, temos V"$\left(\frac{a}{6}\right)$= - 4a < 0 logo é o valor máximo.

Portanto obtemos o volume máximo do sólido tomando $\frac{a}{6}$.

4.3. Pentágono regular

Obter um prisma de volume máximo a partir de um pentágono regular.



A partir da fórmula da área de um pentágono regular temos:

$$A = \frac{5 \cdot l^2}{4\tan(36)}$$

Logo temos substituindo l por $(a-2x)$ de forma análoga temos;

$$A = \frac{5(a-2x)^2}{4\tan(36)} \cdot x$$

$$A = \frac{5(a^2-4ax+4x^2)}{4\tan(36)} \cdot x$$

$$A = \frac{5(a^2x-4ax^2+4x^3)}{4\tan(36)}$$

Logo;

$$A(x) = a^2x - 4ax + 4x^3$$

$$A'(x) = 12x^2 - 8ax + a^2$$

De forma análoga obtemos;

$$x_1 = \frac{a}{2}$$

$$x_2 = \frac{a}{6}$$

Derivando novamente temos;

V"(x) = $-8a + 24x$

Consequentemente;

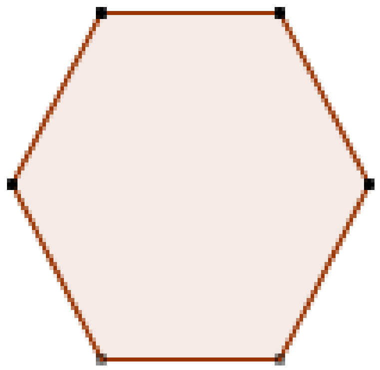
$$V''\left(\frac{a}{2}\right) = 4a > 0 \text{ (mínimo) e}$$

$$V''\left(\frac{a}{6}\right) = -4a < 0 \text{ (máximo)}$$

Portanto obtemos o volume máximo do sólido tomando $\frac{a}{6}$.

4.4. Hexágono Regular

Obter um prisma de volume máximo a partir de um hexágono regular.



A partir da fórmula da área do hexágono regular temos:

$$A = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$$

$$A = \frac{3(a-2x)^2\sqrt{3}}{2} \cdot x$$

$$A = \frac{3(a^2-4ax+4x^2)\sqrt{3}}{2} \cdot x$$

$$A = \frac{3(a^2x-4ax+4x^3)\sqrt{3}}{2}$$

Logo;

$$A(x) = a^2x - 4ax + 4x^3$$

$$\text{A}'(\text{x}) = 12x^2 - 8ax + a^2$$

De forma análoga obtemos;

$$x_1 = \frac{a}{2}$$

$$x_2 = \frac{a}{6}$$

Derivando novamente temos;

V"(x) = $-8a + 24x$

Consequentemente;

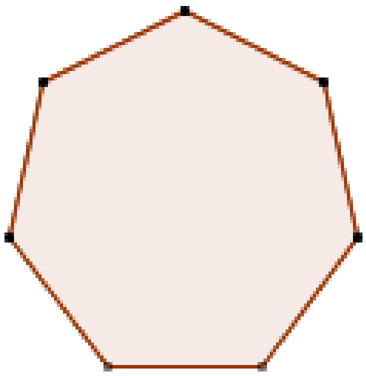
V"$\left(\frac{a}{2}\right)$ = 4a > 0 (mínimo) e

V"$\left(\frac{a}{6}\right)$ = - 4a < 0 (máximo)

Portanto obtemos o volume máximo do sólido tomando $\frac{a}{6}$.

4.5. Heptágono Regular

Obter um prisma de volume máximo a partir de um heptágono regular



A partir da fórmula da área do heptágono regular temos:

$$A = \frac{7\left({}^{2} \right)}{4\tan\left(\frac{180}{7}\right)}$$

$$A = \frac{7}{4}\,\frac{\left(a - 2x\right)^{2}}{\tan 25{,}71} \cdot x$$

Logo;

$$A = a^{2} - 4ax^{2} + 4x^{3}$$

$$\mathrm{A'(x)} = 12x^{2} - 8ax + a^{2}$$

De forma análoga obtemos;

$$x_1 = \frac{a}{2}$$

$$x_2 = \frac{a}{6}$$

Derivando novamente temos;

$$\mathrm{V''(x)} = -8a + 24x$$

Consequentemente;

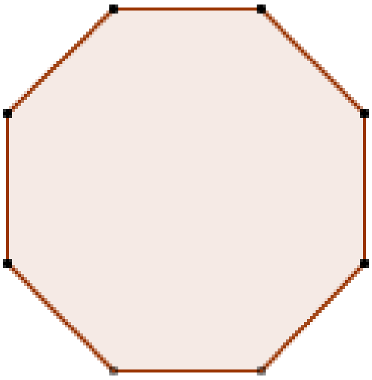
$$V''\left(\frac{a}{2}\right) = 4a > 0 \text{ (mínimo) e}$$

$$V''\left(\frac{a}{6}\right) = -\,4a < 0 \text{ (máximo)}$$

Portanto obtemos o volume máximo do sólido tomando $\frac{a}{6}$.

4.6. Octógono Regular

Obter um prisma de volume máximo a partir de um octógono regular.



A partir da fórmula da área do octógono regular temos:

$$A = \frac{8\left(\;\right)^{2}}{4\tan\left(\frac{180}{8}\right)}$$

$$A = \frac{8\left(a - 2x\right)^{2}}{4\tan 22{,}5}$$

$$A = 2\,\frac{\left(a^{2} - 4ax + 4x^{2}\right)}{\tan 22{,}5}\cdot x$$

Logo,

$$A(x) = a^{2}x - 4ax + 4x^{3}$$

$A'(x) = 12x^2 - 8ax + a^2$

De forma análoga obtemos;

$$x_1 = \frac{a}{2}$$

$$x_2 = \frac{a}{6}$$

Derivando novamente temos;

$V''(x) = -8a + 24x$

Consequentemente;

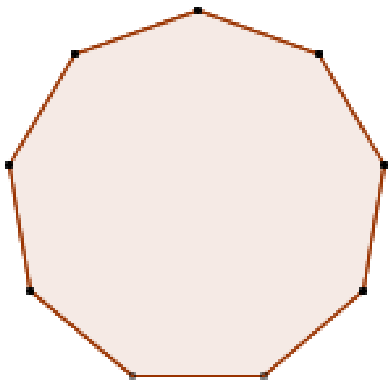
$V''\left(\frac{a}{2}\right) =$ 4a > 0 (mínimo) e

$V''\left(\frac{a}{6}\right) =$ - 4a < 0 (máximo)

Portanto obtemos o volume máximo do sólido tomando $\frac{a}{6}$.

4.7. Eneágono Regular

Obter um prisma de volume máximo a partir de um eneágono regular.



A partir da fórmula da área do eneágono regular temos:

$$A = \frac{9(l^2)}{4\tan\left(\frac{180}{9}\right)}$$

$$A = \frac{9(a - 2x)^2}{4\tan 20} \cdot x$$

$$A = \frac{9(a^2 - 4ax + 4x^2)}{4\tan 20} \cdot x$$

Logo;

$$A(x) = a^2x - 4ax + 4x^3$$

$$\text{A}'(\text{x}) = 12x^2 - 8ax + a^2$$

De forma análoga obtemos;

$$x_1 = \frac{a}{2}$$

$$x_2 = \frac{a}{6}$$

Derivando novamente temos;

V"(x) = $-8a + 24x$

Consequentemente;

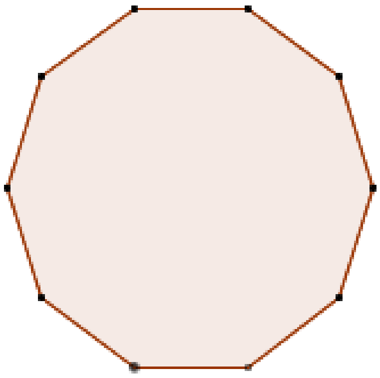
V"$\left(\frac{a}{2}\right)$ = 4a > 0 (mínimo) e

V"$\left(\frac{a}{6}\right)$ = - 4a < 0 (máximo)

Portanto obtemos o volume máximo do sólido tomando $\frac{a}{6}$.

4.8. Decágono Regular

Obter um prisma de volume máximo a partir de um decágono regular.



A partir da fórmula da área do decágono regular temos:

$$A = \frac{10\,(\;)^{2}}{4\tan\left(\frac{180}{10}\right)}$$

$$A = \frac{5(a-2x)^{2}}{2\tan 18}\cdot x$$

$$A = \frac{5(a^{2}x-4ax+4x^{3})}{2\tan 18}$$

Logo;

$$A(x) = a^{2}x-4ax+4x^{3}$$

$$A'(x) = 12x^{2}-8ax+a^{2}$$

De forma análoga obtemos;

$$x_{1} = \frac{a}{2}$$

$$x_{2} = \frac{a}{6}$$

Derivando novamente temos;

V"(x) = $-8a + 24x$

Consequentemente;

V"$\left(\frac{a}{2}\right)$ = 4a > 0 (mínimo) e

V"$\left(\frac{a}{6}\right)$= - 4a < 0 (máximo)

Portanto obtemos o volume máximo do sólido tomando $\frac{a}{6}$.

5. Considerações Finais

Como foi visto, construir *Prismas* com volumes máximos a partir de polígonos regulares, foi o tema escolhido para ser desenvolvido em um determinado espaço de tempo e consequentemente, vir a ser o nosso Trabalho de Conclusão de Curso.

Em princípio, uma tarefa relativamente fácil de ser realizada, e realmente é fácil, desde que as etapas a serem executadas estejam devidamente identificadas e que seus executores tenham domínio dos diversos conteúdos envolvidos, bem como habilidade para utilizá-los.

Nesse sentido, faz-se necessário realçar que o *sólido* a ser confeccionado, não é um *Prisma* qualquer e sim, o *Prisma* que detenha o volume máximo dispondo da matéria prima oferecida (papel, cartolina, madeira, metal, vidro, dentre outros) todos com formatos de polígonos regulares.

Podemos afirmar que, em nosso trabalho, esse momento de obrigatoriedade em atender essa especificidade, provocou uma queda no ritmo dos trabalhos, porém foi extremamente importante, pois proporcionou reflexões e discussões que contribuíram de forma significativa na correção de rumos e consequente retomada das atividades.

Embora exista uma sensação discreta de mudança no comportamento docente, o que representa um aspecto positivo, esse conflito se faz notar em salas de aulas dos diversos períodos do curso, pois reflete diretamente o modelo de ensino adotado em boa parte dos Componentes Curriculares a serem cursados, ou seja: focalizam apenas o seu conteúdo, e não se preocupam em proporcionar uma discussão juntamente aos conteúdos de outras disciplinas quer sejam em sua área ou outras áreas de conhecimento.

E foi exatamente essa perspectiva, de interligar conhecimentos, que permitiu extrair da sequência de atividades, resultados mais significativos.

Para cumprir com a proposta inicial, se fez necessário refletir sobre:

Modelagem → Lógica → Geometria Plana → Geometria Espacial → Cálculo → Desenho Geométrico → Trigonometria.

Em nosso estudo, uma ferramenta foi de extrema utilidade em cada uma das etapas descritas ou sejam: na configuração, na compreensão, nas figuras planas, nos sólidos, na interpretação dos resultados vindos do *Cálculo*, em razões trigonométricas ou triângulos quaisquer, essa ferramenta foi o Desenho Geométrico.

Entendemos também que dentro das atividades previstas para o período, existam espaços destinados à abordagens sobre a história dos conteúdos a serem ministrados, bem como à suas aplicações.

Ao final, feliz por procurar atender aos ritos do Trabalho de Conclusão de Curso, fica a certeza de que devemos melhorar cada vez mais, desenvolvendo habilidade de percepção no tocante à visualização e criação de novas formas e ideias e relacioná-las com o ensino de Matemática.

Referências Bibliográficas

Portal Educ.fc.ul.; Papiro de Rhind e papiro de Moscou acessado em 10.08.2014 Disponível em: **http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/rhind/inicio.html**

Portal Escola Vera Lux; Geometria Espacial, História e interpretação acessada em 13.08.2014 Disponível em:
http://escolaveralux.no.comunidades.net/index.php?pagina=1733882192_01

Portal blog spot; O papiro de Moscou ou papiro Golonishev acessado em 13.08.2014 Disponível em: **http://jonasportal.blogspot.com.br/2010/02/o-papiro-de-moscou-ou-papiro-golonishev.html**

Portal Wikipédia; Platão Acessado em 15.08.2014 disponível em: **http://pt.wikipedia.org/wiki/Plat%C3%A3o**

ALLAN, N. D. , ALLAN, Nelo D., ou ALLAN, Nelo da S. . Uma Curta História dos Poliedros. In: II Encontro Luso-Brasileiro de História da Matemática, 1997, Águas de São Pedro.

BOYER, CARL B., História da Matemática, revista por Uta C. Merzbach; tradução Elza F. Gomide - 2ª ed.- São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

Cálculo (GEORGE B. THOMAS Jr.) volume I / Maurice D. Weir, Joel Hass, Frank R. Giordano; tradução Thelma Guimarães e Leila Maria Vasconcelos Figueiredo; revisão técnica Claudio Hirofume Asano. – São Paulo: Addison Wesley, 2009.

Faria. Caroline. Artigo: A história do desenho. Publicado em 24.02.2009 e acessado em 15.08.2011. Disponível em **http://www.infoescola.com/artes/historia-do-desenho/**

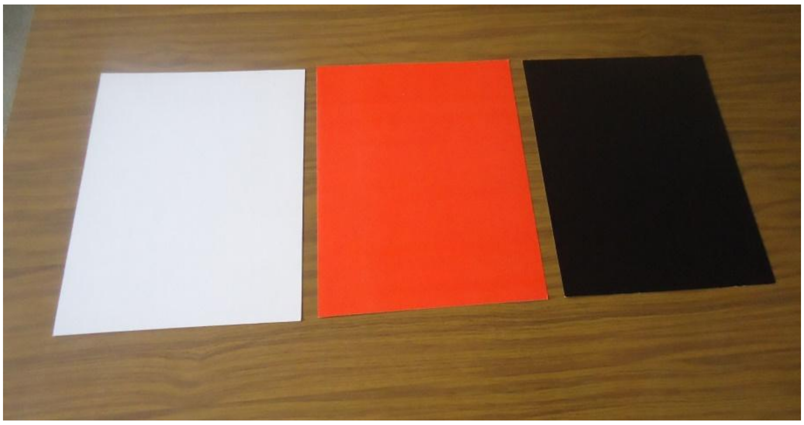
FILHO. Daniel Cordeiro de Morais. Um convite á matemática. EDUFCG - campina grande, 2007.

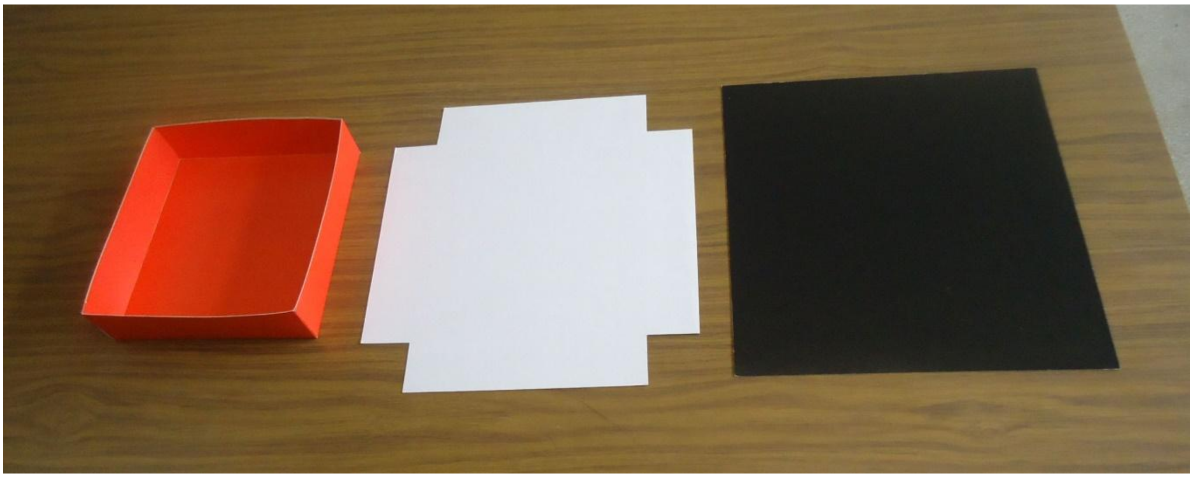
LUYTEN, Sonia M. Bibe. **O que é histórias em quadrinhos.** Editora brasiliense-São Paulo, 1985.

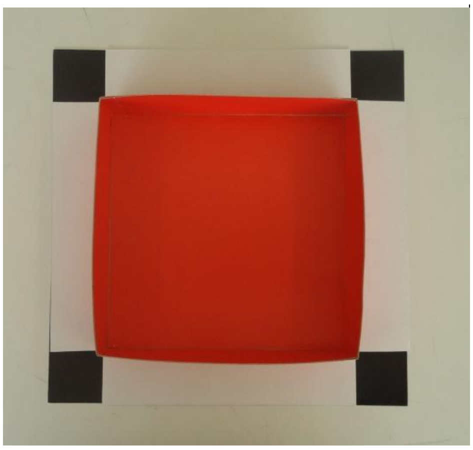
ROCHA, Ruth Rocha. Minidicionário editora Scipione, São Paulo 1996.

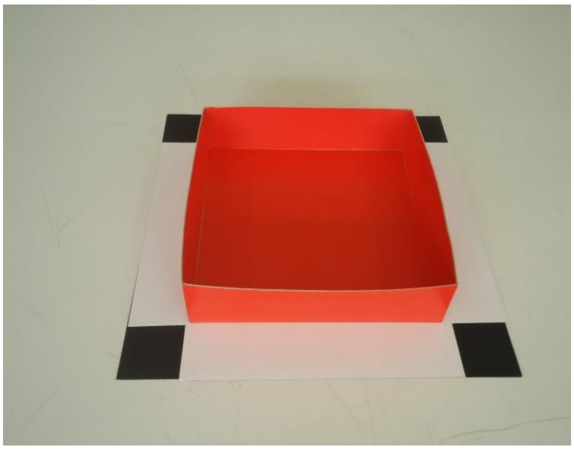
SOUZA, Delany Matias. A importância do desenho como recurso para o ensino e aprendizagem em Trigonometria. Campina Grande - PB, 2014.

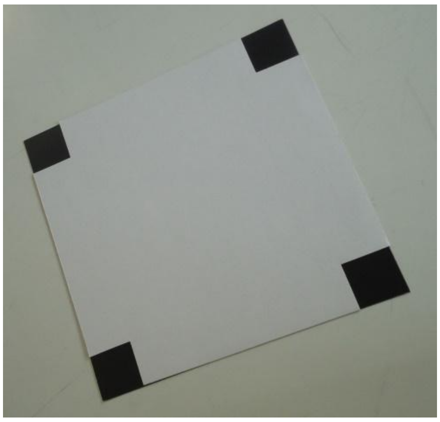
Anexos

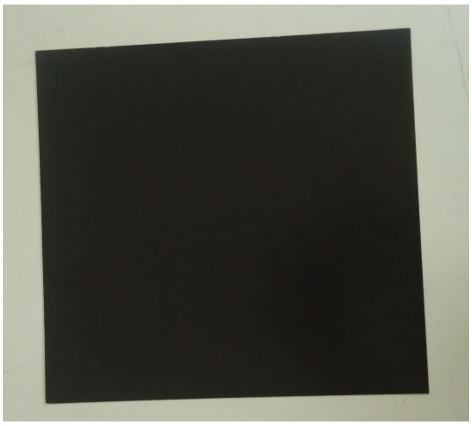


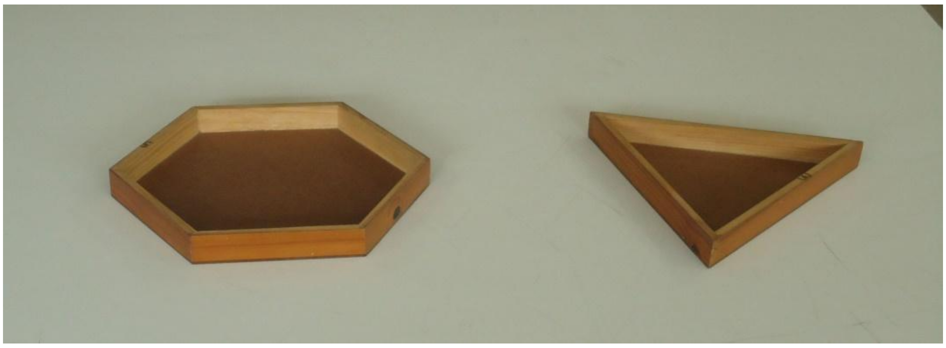


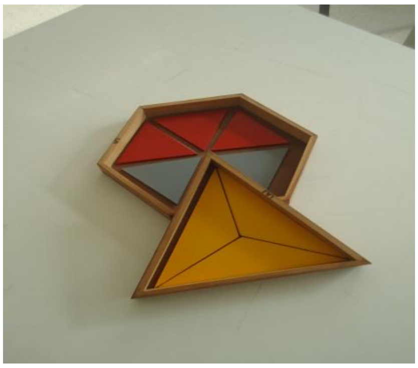


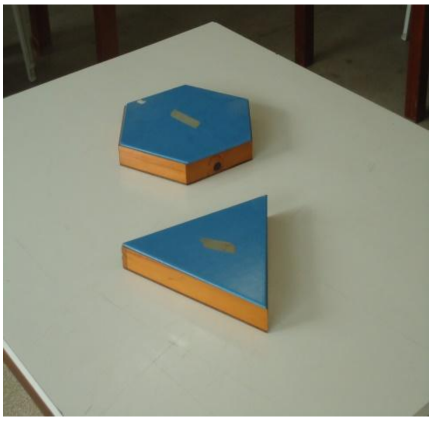












Fotos obtidas no laboratório de Matemática.