UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
ESPECIALIZAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA PARA PROFESSORES DO ENSINO MÉDIO

ANA CLÁUDIA DE BRITO LIRA

A MATEMÁTICA DOS ESPELHOS: PROPOSTA PARA O ENSINO-APRENDIZAGEM DE MATRIZES UTILIZANDO TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

CAMPINA GRANDE
2011

ANA CLÁUDIA DE BRITO LIRA

A MATEMÁTICA DOS ESPELHOS: PROPOSTA PARA O ENSINO-APRENDIZAGEM DE MATRIZES UTILIZANDO TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

Monografia apresentada no Curso de Especialização em Educação Matemática para Professores do Ensino Médio da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências para obtenção do Título de Especialista em Educação Matemática.

Orientadora:
Me. Maria da Conceição Vieira Fernandes

CAMPINA GRANDE
2011

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL-UEPB

L768m Lira, Ana Cláudia de Brito.

A Matemática dos Espelhos [manuscrito] : Proposta para o ensino-aprendizagem de matrizes utilizando transformações geométricas / Ana Cláudia de Brito Lira. - 2011.

73 f. il. color.

Monografia (Especialização em Educação Matemática para Professores do Ensino Médio) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2011.

“Orientação: Profa. Ma. Maria da Conceição Vieira Fernandes, Departamento de Matemática”.

1. Ensino de matemática. 2. Geometria. 3. Matrizes. 4. Aprendizagem. I. Título.

21. ed. CDD 510

ANA CLÁUDIA DE BRITO LIRA

A MATEMÁTICA DOS ESPELHOS: PROPOSTA PARA O ENSINO-APRENDIZAGEM DE MATRIZES UTILIZANDO TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

Monografia apresentada no Curso de Especialização em Educação Matemática para Professores do Ensino Médio da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências para obtenção do Título de Especialista em Educação Matemática.

ONOGRAFIA APROVADA EM: 03/11/2011

BANCA EXAMINADORA

Prof. Me. Maria da Conceição Vieira Fernandes
Departamento de Matemática e Estatística - CCT/UEPB
Orientadora

Prof. Me. Fernando Luiz Tavares da Silva
Departamento de Matemática e Estatística - CCT/UEPB
Examinador

Prof. Me. Aníbal de Menezes Maciel
Departamento de Matemática e Estatística - CCT/UEPB
Examinador

RESUMO

O principal objetivo desse estudo é apresentar uma proposta didática para o ensino de Matrizes considerando sua relação com as Transformações Geométricas e utilizando espelhos como recursos didáticos. Inicialmente expomos algumas discussões a respeito do ensino de matrizes, o conteúdo matemático que relaciona as matrizes às transformações geométricas, o desenvolvimento histórico dos espelhos, os diferentes recursos didáticos elaborados com espelhos que tem contribuído com o aprendizado matemático, a proposta didática elaborada bem como as atividades desenvolvidas pelos alunos, a descrição da intervenção didática em sala de aula e a avaliação relativa aos objetivos. Utilizamos nesta pesquisa a colaboração de algumas propostas de Dante, Lima e Wagner e Stormowski. Realizamos a intervenção com quatorze estudantes do 2º ano do Ensino Médio da Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Francisco Ernesto do Rêgo da cidade de Queimadas/PB. Durante a intervenção observamos que os alunos conseguiram analisar e definir o efeito das transformações geométricas sobre figuras geométricas planas e sua relação com as matrizes. Podemos então, considerar que o uso de espelhos auxilia no ensino aprendizagem de matrizes e as relações entre matrizes e transformações geométricas contribuem para ampliar sua aprendizagem.

Palavras-chave: Ensino-aprendizagem. Matrizes. Transformações Geométricas. Espelhos.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1.0 – INTRODUÇÃO

Desmistificar a idéia de que a matemática é um conteúdo de difícil aprendizado é uma das preocupações dos pesquisadores em Educação Matemática. São notórios os esforços destes pesquisadores para tornar o ensino de Matemática mais prazeroso e motivador. Mas inovar é tão necessário quanto trabalhoso.

Atualmente o ensino da matemática não possibilita a vivencia de investigação, exploração e descobrimento. A maioria dos livros didáticos se apresenta dividido entre definições e exercícios repetitivos, e muitos professores os têm como única fonte de referencia para preparar suas aulas.

Diante deste contexto, é comum alguns alunos atribuírem aos conteúdos matemáticos o título de "desnecessários", "desinteressantes" e "exaustivos". É preciso tornar a aprendizagem da matemática mais significativa para o aluno através da vivência de situações investigativas, de exploração e de descoberta.

Uma das freqüentes causas apontadas como responsáveis pela descrença de que os conteúdos matemáticos auxiliam indivíduos em circunstâncias cotidianas é a ausência de conexões do conteúdo abordado com outras áreas do conhecimento e com a realidade dos alunos. No que se refere ao ensino de matrizes, percebemos, na maioria dos livros didáticos, a carência de contextualizações e, quase sempre, não são apresentados argumentos suficientes para justificar sua abordagem.

Referente ao ensino de matrizes, Dante (2010) defende que as matrizes devem ser exploradas não só como objeto matemático, mas como código de imagens, tabela de dupla entrada, representante de sistemas lineares, transformações no plano, entre outros significados; Lima e Wagner (2001) concordam que uma das justificativas para o estudo de matrizes são as transformações geométricas e que as mesmas dariam um significado às operações entre matrizes, principalmente a multiplicação. Porém, os livros didáticos, em sua maioria, não abordam matrizes associando-as a transformações geométricas.

As relações entre as Matrizes e as Transformações Geométricas possibilitam a integração entre Geometria e Álgebra, campos distintos da Matemática, mas, assim como nos livros didáticos, são ignoradas por muitos professores de matemática.

É em tal contexto de reflexões e discussões sobre o processo de ensino-aprendizagem de Matrizes que se insere esta pesquisa. O principal objetivo desse estudo é apresentar uma proposta didática para o ensino de Matrizes considerando sua relação com as Transformações

Geométricas e utilizando espelhos como recursos didáticos. Propomos um enfoque diferente daquele que é usualmente enfatizado no intuito de responder as seguintes questões:

- O uso de espelhos auxilia no ensino aprendizagem de matrizes?
- Mostrar as relações entre matrizes e transformações geométricas contribui para ampliar a aprendizagem de matrizes?

Os espelhos são utilizados para relacionar as matrizes a atividades cotidianas dos alunos, de despertar a curiosidade e de motivar os mesmos. A proposta deste trabalho consiste em partir da observação de imagens em espelhos (espelho plano simples, dois espelhos planos paralelos e dois espelhos planos articulados na forma de um livro); relacionar as observações com os conceitos reflexão, rotação e translação (Transformações Isométricas); traçar as transformações no plano cartesiano; algebrizar as transformações estudadas analisando as coordenadas dos vértices das figuras iniciais e das figuras transformadas e identificando relações entre elas; e relacionar a composição de transformações com as operações entre matrizes.

Acreditamos que o trabalho com materiais didáticos facilita a realização de descobertas e a percepção de propriedades, ou seja, a construção efetiva da aprendizagem e, de acordo com MURARI (1999), MARTINS (2003), ALMEIDA (2003), GOUVÊA (2005), BATISTELA (2005), REIS (2006), SANTOS (2006) entre outros pesquisadores, espelhos e caleidoscópios são instrumentos que apóiam o trabalho do professor, auxiliando no processo de construção do conhecimento e estimulando a aprendizagem. Segundo estes pesquisadores, a utilização dos instrumentos espelhados provoca o envolvimento, o interesse e a participação dos alunos nas aulas de Geometria.

Para responder as questões mencionadas será realizada uma pesquisa bibliográfica a respeito dos temas envolvidos na proposta e uma intervenção didática. Será elaborada e aplicada uma seqüência didática para o ensino de matrizes considerando sua relação com as transformações geométricas e fazendo uso de recursos didáticos elaborados com espelhos.

O presente trabalho está estruturado da seguinte forma: O capítulo 2 traça o perfil do ensino de matrizes e faz referência a dois autores que inspiraram o presente trabalho. O terceiro capítulo apresenta as transformações geométricas e suas respectivas formas algébricas, mostrando possibilidades de conectar Álgebra e Geometria, conteúdos que costumam ser abordados separados no Ensino Médio.

O quarto capítulo destaca os espelhos enquanto recursos didáticos. Faz um resgate histórico a respeito dos espelhos destacando suas origens e suas utilizações ao longo da

História e enumera alguns dos diversos instrumentos elaborados com espelhos que são utilizados para fins didáticos e que têm contribuído para o aprendizado matemático.

O capítulo 5 apresenta a seqüência didática que explora as transformações geométricas e faz uso de materiais manipulativos construídos com espelhos para justificar o estudo de matrizes. O sexto capítulo trará a análise da intervenção didática e os resultados quanto aos objetivos propostos.

2.0 – O ENSINO DE MATRIZ

Matrizes, Sistemas Lineares e Determinantes cobrem parte do programa da segunda série do Ensino Médio e, Segundo Lima e Wagner (2001), pode ser chamada de Álgebra Linear para principiantes.

Sabe-se dos valiosos esforços que os pesquisadores e educadores matemáticos têm dedicado para alcançar uma aprendizagem mais significativa e das inúmeras discussões a respeito da importância de se trabalhar a matemática de modo que motive o aluno e desmistifique a idéia de que é um conteúdo de difícil aprendizado. No entanto, muitos livros didáticos do Ensino Médio priorizam preparar os alunos para o exame de vestibular, abordando tópicos da matemática de forma arbitrária, sem conexões com outras áreas da Matemática, com outras Ciências e com a realidade atual.

O ensino de matrizes não é uma exceção a essa regra, referindo-se a matrizes, determinantes e sistemas lineares Lima e Wagner (2001, p. 25) comentam que “nos programas, nos livros textos e nos exames de vestibulares, esses assuntos são sempre mal colocados e impropriamente abordados”.

Na maioria dos livros as matrizes são introduzidas a partir de exemplos que apresentam matrizes como modelos matemáticos para tabelas de dupla entrada. Segue então sua representação e a introdução de diversas definições rotineiras: linhas, colunas, matriz quadrada, matriz diagonal, matriz identidade, matriz transposta, matriz simétrica, matriz nula e igualdade de matrizes. Depois são abordadas a adição e a subtração de matrizes, seguida da multiplicação de um número real por uma matriz e da multiplicação de matrizes. Poucos abordam equações matriciais e apresentam aplicações de matrizes.

Segundo Lima e Wagner (2001), a justificativa elementar para o estudo de matrizes são as transformações geométricas e os sistemas lineares, mas no Ensino Médio brasileiro as noções fundamentais de rotação, translações, reflexões e homotetia, são praticamente ignoradas. Ainda referindo-se as transformações geométricas Lima e Wagner (2001, p. 62) acrescentam que as mesmas dariam um significado concreto à noção de matriz e às operações entre matrizes, principalmente a multiplicação.

Contrapondo-se a maioria dos livros didáticos de matemática do Ensino Médio, no livro *Matemática: Contextos e Aplicações de Luiz Roberto Dante*, as transformações aparecem em dois momentos, são utilizadas para contextualizar o estudo de coordenadas cartesianas e para exemplificar aplicações de matrizes.

2.1 – Aplicações de matrizes segundo o livro Matemática Contextos e Aplicações de Luiz Roberto Dante

As aplicações de matrizes apresentadas por Dante (2010) referem-se à computação gráfica. Na introdução do capitulo o autor trabalha a noção de matrizes associando-as a tabelas, comenta que em algumas situações é necessário formar grupos ordenados de números que se apresentam dispostos em linhas e colunas numa tabela e que as mesmas em Matemáticas são ditas matrizes. Exemplifica a importância das matrizes comentando que o que é visto na tela de um computador é uma enorme matriz e que cada valor guardado nas linhas e colunas da matriz representa um ponto colorido mostrado na tela (*pixel*), mostrando ilustrações.

No tópico Aplicações de Matrizes o autor retoma o que foi comentado na introdução do capitulo exemplificado que uma imagem de resolução 800 x 600 tem 800 · 600 = 480000 *pixels* em 800 colunas e 600 linhas. Acrescenta que quando um programa altera a posição da imagem (gira ou muda a escala) na verdade está mudando a posição dos *pixel*s que a formam e que isto é feito por operações de matrizes e em computação gráfica representam transformações geométricas.

Seguido sua abordagem é apresentado algumas transformações geométricas simples (rotação, escala e translação), devidamente ilustradas. Abaixo segue as definições de rotação, escala e translação apresentadas pelo autor.

> **Rotação**: Uma rotação de α graus de um ponto (x, y), no sentido anti-horário e em torno da origem, é feita a partir da multiplicação da matriz R= $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -sen\alpha \\ sen\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ pela matriz P= $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, gerando uma matriz P'= $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$, com a nova posição dos pontos após a rotação: P' = RP.
> **Escala**: Uma mudança de escala de um ponto (x, y) em relação à origem, usando um fator multiplicativo Sx para a coordenada **x** e um fator Sy para a coordenada **y**, é feita usando-se a matriz E = $\begin{bmatrix} Sx & 0 \\ 0 & Sy \end{bmatrix}$ e a matriz P = $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, de forma que P'=EP.
> **Translação**: Já uma translação de um ponto (x, y) de Tx unidades para a direita na coordenada **x** e Ty unidades para cima na coordenada **y** é feita pela soma da matriz T = $\begin{bmatrix} Tx \\ Ty \end{bmatrix}$, com a matriz P = $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, gerando uma matriz P' = $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$, com a nova posição (x', y') dos pontos após a translação: P'= T + P. (DANTE, 2010, p. 114).

Exemplificando as definições apresentadas o autor prossegue sua abordagem com um exercício resolvido aplicando as transformações apresentadas. Todos propõem encontrar a nova posição de um ponto após uma das transformações geométricas.

> Com base no texto anterior:
> a) Vamos encontrar a nova posição do ponto (2, 3) após uma rotação de 90° no sentido anti-horário, em torno da origem.
> $$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 90^\circ & -sen 90^\circ \\ sen 90^\circ & \cos 90^\circ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$
> Portanto, a nova posição será (-3, 2).
> b) Vamos escalar as duas coordenadas do ponto (2, 3) em 100%.
> Aumentar 100% é multiplicar por 2. Assim, Sx = 2 e Sy = 2. Logo:
> $$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$
> Portanto, a nova posição será (4 6).
> c) Vamos transladar o ponto (2, 3) em 4 unidades para cima e 3 unidades para a esquerda.
> Para Tx = -3 e Ty = 4 vem: $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \end{bmatrix}$
> Logo, a nova posição será (-1 7). (DANTE, 2010, p. 114).

Sobre a composição de transformações geométricas, o autor escreve:

> Uma operação de translação no plano, em principio, não é uma operação de multiplicação de matrizes, o que dificulta a composição de transformações geométricas. Para facilitar a composição das transformações geométricas (rotação, escala e translação) tornando em multiplicação de matrizes todas essas operações, é necessário usar coordenadas homogêneas, em que um ponto (x, y) do plano é descrito pela matriz $\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$. Usando-se coordenadas homogêneas, as matrizes **R** de rotação, **E** de escala e **T** de translação são, respectivamente, R = $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -sen\alpha & 0 \\ sen\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, E = $\begin{bmatrix} Sx & 0 & 0 \\ 0 & Sy & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e T = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & Tx \\ 0 & 1 & Ty \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. (DANTE, 2010. p. 115).

Acrescenta o autor que na composição de transformações geométricas basta multiplicar o ponto original pela seqüência inversa das transformações. Sua abordagem prossegue com alguns exercícios propostos referente à abordagem exposta. Percebe-se que as transformações geométricas permitem estudar as matrizes do ponto de vista geométrico, mostrando conexões entre campos da matemática.

O estudo de matrizes a partir das transformações geométricas foi tema da dissertação de mestrado de Vandoir Stormowski.

2.2 – A proposta de Vandoir Stormowski para o ensino de matrizes

Em dissertação de mestrado Vandoir Stormowski desenvolveu uma seqüência didática para o estudo de matrizes a partir da análise de transformações geométricas. Um dos objetivos da seqüência didática foi propiciar ao aluno um estudo que justificasse as definições das operações entre matrizes e suas respectivas propriedades, a partir da análise de algumas transformações geométricas. Além disso, apresenta algumas atividades de aplicações de matrizes, onde a composição e interação de transformações geométricas no *software Shapari* geram algumas figuras fractais.

Em seu texto o autor apresenta uma análise das referencias sobre o ensino de matrizes e de transformações geométricas e um extrato sobre o conhecimento matemático envolvido no tema. A abordagem da matemática envolvida no tema serviu de base para o desenvolvimento do presente trabalho, mais detalhes são apresentados no próximo capitulo.

3.0 ALGEBRIZAÇÃO DAS TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS NO PLANO

Neste capítulo apresentamos as transformações geométricas simples e suas respectivas formas algébricas. A algebrização das transformações geométricas pode e deve ser feita no ensino secundário A importância das transformações geométricas se dá devido a estas constituírem um campo rico de conexões, uma ferramenta muito útil para demonstrações, para resolver problemas e, de uma maneira geral, para raciocinar sobre o plano e o espaço.

Vários tópicos da geometria hoje têm fundamentos na geometria das transformações e são ensinados sem citá-la. Uma simples multiplicação por -1 pode ser vista como uma reflexão na reta numerada. As semelhanças deveriam ser trabalhadas do ponto de vista das transformações geométricas e estabelecendo conexões com as funções, as proporcionalidades diretas, e o conceito de razão. No ensino médio temos a oportunidade de voltar ao assunto das transformações geométricas, nas operações com números complexos, no estudo das aplicações de matrizes e na comparação de gráficos de funções da mesma família. Explorar as transformações geométricas ao estudar estes e outros temas matemáticos auxilia na compreensão da matemática, sua natureza e suas aplicações.

As transformações podem ser isométricas, isomórficas ou anamórficas, de acordo com as relações estabelecidas entre as figuras iniciais e finais.

3.1 - Transformações Isométricas, “movimentos no plano”.

Transformações isométricas quando aplicadas a uma figura geométrica, mantêm a distância entre seus pontos, ou seja, os segmentos da figura transformada são geometricamente iguais aos da figura original. As transformações isométricas são denominadas de movimentos no plano por modificar apenas a posição da figura inicial. As isometrias simples são Reflexão, Translação e Rotação.

3.1.1- Reflexão em relação a uma reta

Seja r uma reta no plano Π. A reflexão em torno da reta r é a função $R_r\colon \Pi \to \Pi$ assim definida: $R_r(X) = X$ para todo $X \in r$ e, para $X \notin r$, $R_r(X) = X'$ é tal que a mediatriz do segmento *XX'* é a reta *r*. Noutras palavras, seja **A** o pé da perpendicular baixada de *X* sobre r. então Y é o ponto médio do segmento *XX'* . (LIMA, 1996, p.16).

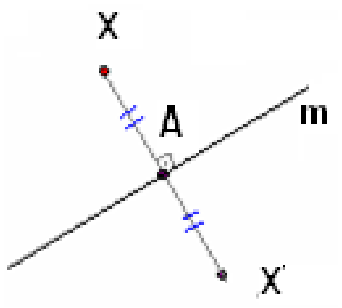


Figura 3.1 Reflexão

Tomando no plano Π um sistema de coordenadas no qual o eixo das abscissas coincida com a reta *m*, então para cada ponto $X = (x, y)$, tem-se $R_m(X) = (x, y) = (x', y') = X'$, onde $x' = x$ e $y' = y$. Portanto no plano cartesiano a reflexão ocorre quando se substitui o par (x, y) por $(x, -y)$,quando *m* coincide com os eixos das abscissas, ou por $(-x, y)$, quando m coincide com o eixo das ordenadas.

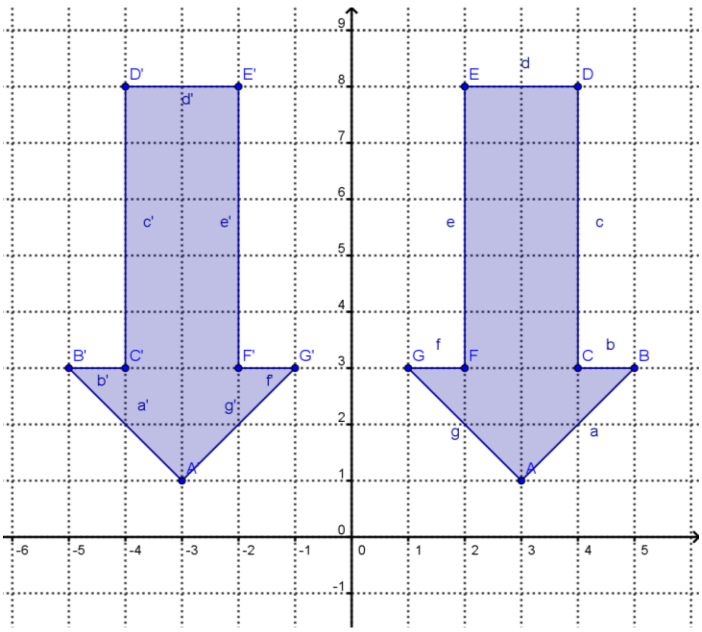


Figura 3.2: $R(X) = R(x, y) = (x', y') = (-x, y) = X'$

De modo geral, a relação entre as coordenadas de X e as coordenadas de X' é dada pelo sistema:

1) $\begin{cases} \boldsymbol{x' = x} \\ \boldsymbol{y' = -y} \end{cases}$ Para reflexão em relação ao eixo das abscissas

2) $\begin{cases} \boldsymbol{x' = -x} \\ \boldsymbol{y' = y} \end{cases}$ Para reflexão em relação ao eixo das ordenadas

3) $\begin{cases} \boldsymbol{x' = y} \\ \boldsymbol{y' = x} \end{cases}$ Para reflexão em relação a reta $\boldsymbol{y = x}$

4) $\begin{cases} \boldsymbol{x' = -y} \\ \boldsymbol{y' = -x} \end{cases}$ Para reflexão em relação a reta $\boldsymbol{y = -x}$

3.1.2 – Translação

Transladar uma figura plana é aplicar a mesma um movimento retilíneo seguindo uma direção determinada. Seja A , B pontos distintos do plano Π. A *translação* $T_{AB}: \Pi \rightarrow \Pi$ é a função assim definida: dado $X \in \Pi$, sua imagem $X' = T_{AB}(X)$ é o quarto vértice do paralelogramo que tem AB e AX como lados (LIMA, 1996; p. 18). Sendo A, B e X não colineares.

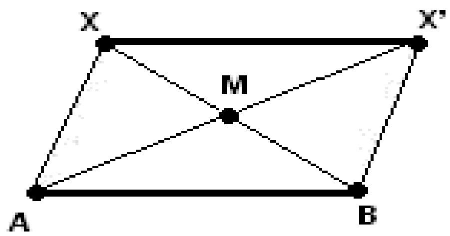


Figura 3.3 Translação

Tomando no plano Π um sistema de coordenadas, onde $X = (x, y)$ e o vetor $v(a, b)$, tem-se translação quando $T(X) = T(x, y) = (x + a, y + b)$, com a e b pertencente a IR. Se $a = 0$ temos translação vertical e, se $b = 0$, translação horizontal.

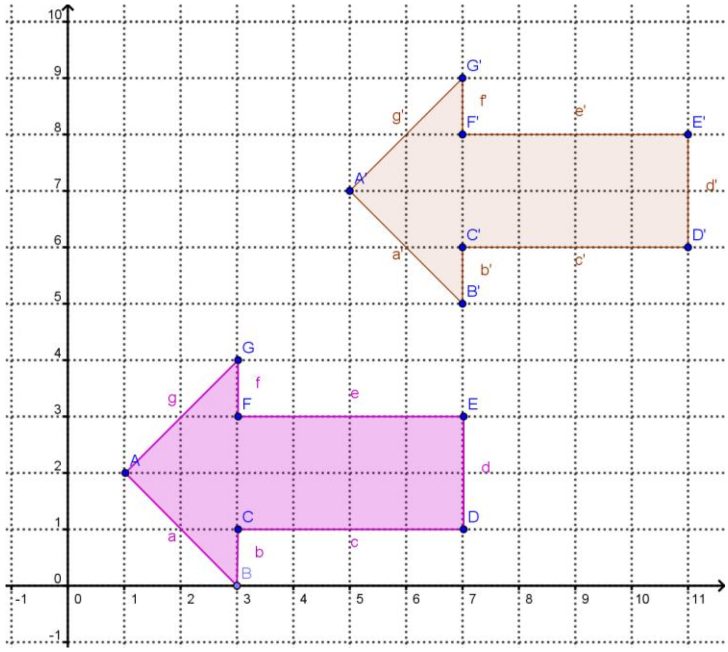


Figura 3.4: $T(X) = T(x, y) = (x + a, y + b)$

A transformação desloca os pontos horizontalmente uma distancia indicada por a e verticalmente numa distancia indicada por b. Desta forma a translação dada por $T(X) = X + \vec{v} = (x + a, y + b)$ e as coordenadas (x', y') do ponto $T(X) = X'$ são indicadas pelas equações:

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

3.1.3 – Rotação

Seja O um ponto tomado no plano Π e $\alpha = A\hat{O}B$ um ângulo de vértice O. A rotação de ângulo α em torno do ponto O é a função $R_{O,\alpha}: \Pi \to \Pi$ assim definida: $R_{O,\alpha}(O) = O$ e, para todo $X \neq O$ em Π, $R_{O,\alpha}(X) = X'$ é o ponto do plano Π tal que $d\,(X, O) = d(X', O)$, $X\hat{O}X = \alpha$ e o sentido de rotação de A para B é o mesmo de X para X'(LIMA, 1996; p. 21-22).

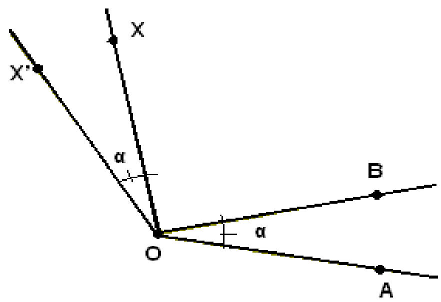


Figura 3.5: $R_{O,\alpha}(X) = X'$

Tomando no plano π um sistema de coordenadas no qual a origem coincida com o ponto O, a rotação R de centro O e ângulo α transforma o ponto $X = (x, y)$ no ponto $R(X) = (x', y')$ por meio das seguintes equações:

$$\begin{cases} x' = x.cos\alpha - y.sen\alpha \\ y' = x.sen\alpha + y.cos\alpha \end{cases}$$

Para demonstrar esta afirmação, considere a figura abaixo.

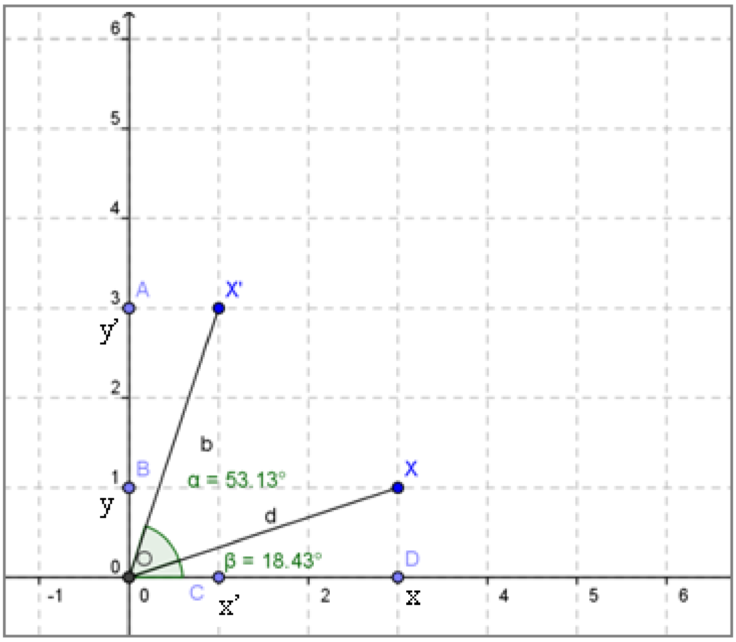


Figura 3.6: Rotação do ponto X com centro em O e ângulo α

Seja d o comprimento do segmento OX, ou seja, $d = OX = OX'$. Pela definição das relações trigonométricas no triângulo retângulo OXD, temos que:

$$\boldsymbol{cos\beta = \frac{x}{d}} \quad \text{e} \qquad \boldsymbol{sen\beta = \frac{y}{d}}$$

Donde podemos escrever:

$$\boldsymbol{x = d.cos\beta} \quad \text{e} \qquad \boldsymbol{y = d.sen\beta}.$$

Da mesma forma, considerando o triângulo $OX'C$ temos:

$$\boldsymbol{cos(\alpha+\beta)=\frac{x'}{d}} \quad \text{e} \quad \mathbf{sen}(\boldsymbol{\alpha+\beta})=\boldsymbol{\frac{y'}{d}}$$

Ou seja,

$$\boldsymbol{x'=d.cos(\alpha+\beta)} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{y'=d.sen(\alpha+\beta)}.$$

Sabendo que: $sen(\alpha+\beta)=sen\alpha.cos\beta+sen\beta.cos\alpha$ e $\cos(\alpha+\beta)=cos\alpha.cos\beta-sen\alpha.sen\beta$, podemos escrever:

$$\boldsymbol{x'=d.cos(\alpha+\beta)}$$
$$\boldsymbol{x'=d.cos\alpha.cos\beta-sen\alpha.sen\beta}$$
$$\boldsymbol{x'=(d.cos\beta).cos\alpha-(d.sen\beta).sen\alpha}$$
$$\boldsymbol{x'=x.cos\alpha-y.sen\alpha}$$

$$\boldsymbol{y'=d.sen(\alpha+\beta)}$$
$$\boldsymbol{y'=d.sen\alpha.cos\beta+d.sen\beta.cos\alpha}$$
$$\boldsymbol{y'=(d.cos\beta).sen\alpha+(d.sen\beta).cos\alpha}$$
$$\boldsymbol{y'=x.sen\alpha+y.cos\alpha}$$

As expressões encontradas confirmam o sistema apresentado acima.

3.2 - Transformações Isomórficas

As transformações isomórficas quando aplicadas a uma figura geométrica, modifica o tamanho e mantêm a forma da figura inicial. As transformações isomórficas são conhecidas como Homotetia e Semelhança.

3.2.1 – Homotetia

A homotetia com centro O e uma razão k, diferente de zero, é a transformação $H: \Pi \rightarrow \Pi$' que associa a cada ponto $A \in \Pi$ o ponto $X' = H(A)$, tal que $OA^{'} = k.OP$. Tomando no plano Π um sistema de coordenadas e £ uma figura em Π, a homotetia é definida da seguinte forma: a cada ponto A de £, tem-se $H(A)=H(x_A,y_A)=(k.x_A,k.y_A)=A'$.

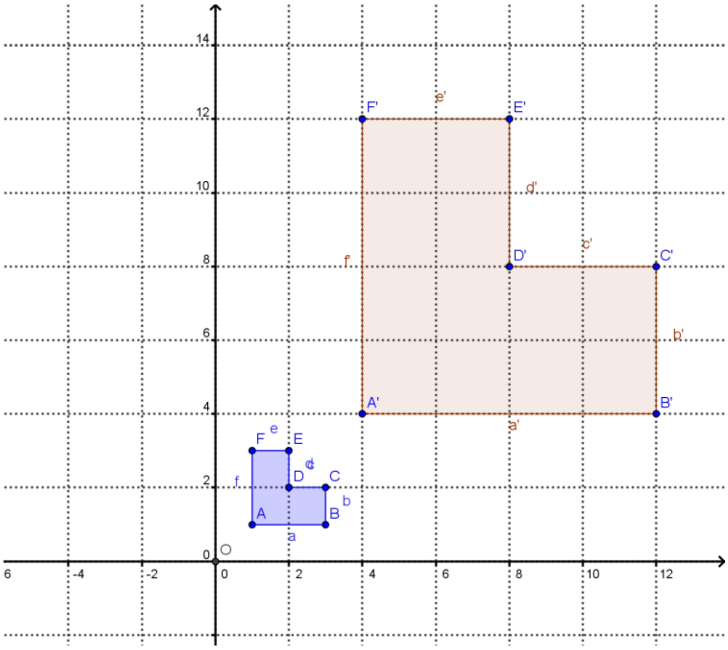


Figura 3.7: $H(A) = H(x_A, y_A) = (k.x_A, k.y_A) = A'$

De acordo com o valor de k têm-se diferentes tipos de homotetia: se k > 0 tem-se homotetia direta ; se k < 0 tem-se homotetia inversa ; se k = 1 tem-se uma congruência; se k = -1 tem-se simetria central. Numa homotetia, considerando $A = (x, y)$, as coordenadas (x', y') do ponto A' são dadas pelo sistema:

$$\begin{cases} x' = k.x \\ y' = k.y \end{cases}$$

3.3 - Transformações Anamórficas

Segundo STORMOWSKI (2008), transformações que deformam (ampliam ou reduzem) as figuras no sentido horizontal em proporão diferente do que no sentido vertical, não são consideradas homotetias. Tais transformações denominaremos de Transformações Anamórficas.

As transformações anamórficas quando aplicadas a uma figura geométrica, modifica a posição, o tamanho e a forma da figura original. São as funções $A: \Pi \rightarrow \Pi'$ onde tomando X no plano Π, $A(X) = X'$ de modo que X' não conserva as características da figura inicial.

3.3.1 – Dilatação

A transformação de dilatação, contração vertical e horizontal, são transformações que deformam as figuras no sentido horizontal em proporção diferente do que no sentido vertical, portanto são exemplos de transformações anamóficas.

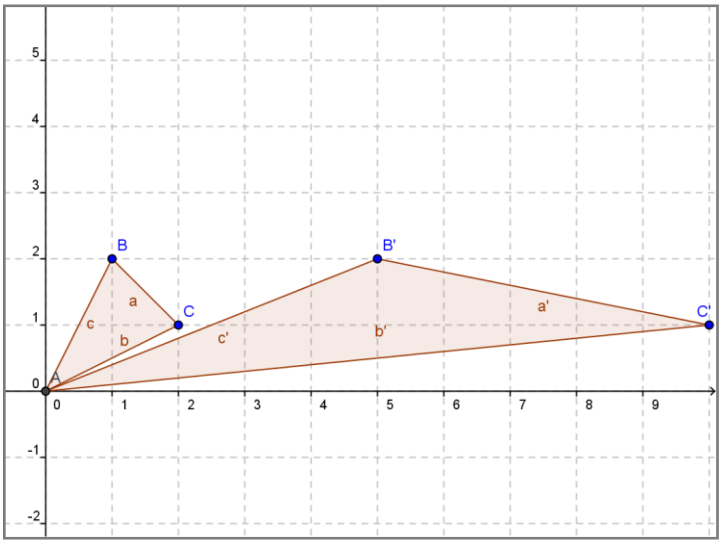


Figura 3.8: Dilatação horizontal

Dilatações geram deformações na direção de OX de acordo com o fator k_1, e na direção de OY é utilizado o fator k_2. Dessa forma, as coordenadas do ponto P' obtidas a partir de P são dadas por

$$\begin{cases} x' = k_1 . x \\ y' = k_2 . y \end{cases}$$

3.4 - Representação matricial das transformações

Sistemas de equações do tipo $\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$, com a, b, c e $d \in IR$, podem ser escritos na forma $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, representação matricial. Com exceção da translação, as demais transformações apresentadas podem ser representadas por meio de uma matriz. A representação matricial da transformação geométrica translação tem forma diferente das demais transformações.

A tabela a seguir foi retirada de Stormowski (2008), apresenta a representação matricial das transformações geométricas estudadas.

Transformação	Sistema	Matriz da transformação
Reflexão em relação ao eixo $\boldsymbol{OX}$	$\begin{cases} \boldsymbol{x' = x} \\ \boldsymbol{y' = -y} \end{cases}$	$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{bmatrix}$
Reflexão em relação ao eixo $\boldsymbol{OY}$	$\begin{cases} \boldsymbol{x' = -x} \\ \boldsymbol{y' = y} \end{cases}$	$\begin{bmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$
Reflexão em relação a reta $\boldsymbol{y = x}$	$\begin{cases} \boldsymbol{x' = y} \\ \boldsymbol{y' = x} \end{cases}$	$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$
Reflexão em relação a reta $\boldsymbol{y = -x}$	$\begin{cases} \boldsymbol{x' = -y} \\ \boldsymbol{y' = -x} \end{cases}$	$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$
Rotação de 90º	$\begin{cases} \boldsymbol{x' = -y} \\ \boldsymbol{y' = x} \end{cases}$	$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$
Rotação de 180°	$\begin{cases} \boldsymbol{x' = -x} \\ \boldsymbol{y' = -y} \end{cases}$	$\begin{bmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{bmatrix}$
Rotação de 270°	$\begin{cases} \boldsymbol{x' = y} \\ \boldsymbol{y' = -x} \end{cases}$	$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$
Homotetia	$\begin{cases} \boldsymbol{x' = k.x} \\ \boldsymbol{y' = k.y} \end{cases}$	$\begin{bmatrix} \boldsymbol{k} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{k} \end{bmatrix}$

Tabela 1: Representação matricial das transformações geométricas (STORMOWSKI, 2008).

Para a transformação translação tem-se o sistema $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$ e a seguinte representação matricial $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$.

3.5 - Composição das transformações geométricas

Muitas outras transformações podem ser obtidas com a aplicação sucessiva das transformações apresentadas.

Segundo Stormowski (2008), considerando duas transformações T_1e T_2 no plano Π, a composta T_1∘ T_2: Π→Π é a transformação que associa a cada ponto P do plano Π o ponto $T_2\ (T_1(P))$. Ou seja, primeiro aplicamos a transformação T_1 a um ponto P e obtemos $P' = T_1(P)$ e depois a transformação T_2 é aplicada ao ponto P' e obtemos $P" = T_2(P')$.

Percebe-se que as transformações geométricas associam as coordenadas (x, y) a coordenadas (x', y') e podem ser expressas na forma:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x' = a.x + b.y} \\ \boldsymbol{y' = c.x + d.y} \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} \boldsymbol{x'} \\ \boldsymbol{y'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{bmatrix}$$

A matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ é a matriz da transformação geométrica.

Numa composição de transformação geométrica temos duas transformações consecutivas: primeiro $T_1: (x, y) \to (x', y')$ e depois $T_2: (x', y') \to (x", y")$. Sejam $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$ as representações matriciais de T_1 e T_2, respectivamente, temos:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x' = a.x + b.y} \\ \boldsymbol{y' = c.x + d.y} \end{cases}$$ Sistema que relaciona $(\boldsymbol{x'}, \boldsymbol{y'})$ com $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$

$$\begin{cases} \boldsymbol{x'' = p.x' + q.y'} \\ \boldsymbol{y'' = r.x' + s.y'} \end{cases}$$ Sistema que relaciona $(\boldsymbol{x''}, \boldsymbol{y''})$ com $(\boldsymbol{x'}, \boldsymbol{y'})$

Partindo desses sistemas é possível obter o sistema que relaciona (x'', y'') diretamente com (x, y), substituindo os valores de x' e y' do primeiro sistema no segundo. Vejamos:

$$\begin{cases} x'' = p(a.x + b.y) + q(c.x + d.y) \\ y'' = r(a.x + b.y) + s.(c.x + d.y) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x'' = p.a.x + p.b.y + q.c.x + q.d.y \\ y'' = r.a.x + r.b.y + s.c.x + s.d.y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x'' = (p.a + q.c)x + (p.d + q.d)y \\ y'' = (r.a + s.c)x + (r.b + s.d)y \end{cases}.$$

A representação matricial do sistema obtido é $\begin{bmatrix} p.a + q.c & p.b + q.d \\ r.a + s.c & r.b + s.d \end{bmatrix}$.

Para Stormowski (2008), a composição dá origem à multiplicação de matrizes. Nota-se facilmente por que, a matriz obtida é o produto das matrizes das transformações T_1 e T_2, ou seja,

$$\begin{bmatrix} p.a + q.c & p.b + q.d \\ r.a + s.c & r.b + s.d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

A matriz da composição destas transformações pode ser obtida multiplicando-se a matriz da segunda transformação pela matriz da primeira.

A composição de translação pode ser feita diretamente, sua representação matricial é a soma das matrizes das translações. E a composição de rotação (ou reflexão) com translação resulta na seguinte expressão geral:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}.$$

Partindo da interpretação geométrica das transformações geométricas (representação no plano cartesiano) é possível obter a representação algébrica das transformações em forma de matrizes por meio da análise da relação entre as coordenadas dos vértices das figuras iniciais e transformadas. Percebe-se que as transformações geométricas possibilitam conexões entre Álgebra e Geometria, conteúdos que costumam ser abordados separados no Ensino Médio.

Os conceitos de transformações geométricas podem ser passados de uma forma mais atrativa e interessante, fazendo uso de materiais manipulativos para que se prenda a atenção dos alunos, tornando o processo mais fácil. Uma boa sugestão de materiais manipulativos são os espelhos. Por este motivo faremos uma breve pausa no próximo capitulo para destacar os espelhos enquanto recursos didáticos.

4.0 – ESPELHOS ENQUANTO RECURSOS DIDÁTICOS

Neste capítulo faremos um resgate histórico a respeito dos espelhos destacando suas origens e suas utilizações ao longo da História, no intuito de enumerar algumas de suas contribuições no desenvolvimento das artes e das ciências, especificamente na matemática, e faremos um levantamento dos diversos instrumentos elaborados com espelhos que são utilizados para fins didáticos e que têm contribuído para o aprendizado matemático.

4.1 - Percurso histórico – da origem a utilização dos espelhos na Matemática

Acredita-se que a primeira vez que o ser humano viu seu reflexo foi na água. A imagem mais primitiva é a das sombras, que funciona pelo principio da propagação retilínea da luz combinado com sua absorção pelos objetos. As imagens de um espelho de água devem-se á reflexão da luz na superfície da água que funciona como um espelho, provavelmente foram esses “espelhos” que inspiraram a invenção dos espelhos que temos hoje.

Segundo Sousa (2009), antigas populações da atual região do Irã, foram responsáveis pela fabricação dos primeiros espelhos de toda a História. Por volta de 3000 a. C. usavam areia para polir metais e pedras produzindo espelhos que refletiam apenas contornos de uma imagem bastante distorcida e o metal oxidava com facilidade.

Segundo Figueiredo (2009), a civilização Olmeca, que viveu no atual México por volta de 1500 a 400 a.C., usava pedras de hematita[1] para construir espelhos. Polia uma pedra batendo contra outra pedra fixa, dessa forma a pedra que segurava nas mãos ficava esférica enquanto que a pedra fixa ficava côncava. As pedras convexas mostravam a imagem do rosto e as côncavas concentravam os raios do sol para fazer fogo.

Livros e artigos que relatam a história do desenvolvimento da matemática na Grécia, contam que o matemático e inventor grego, Arquimedes (287 a.C.-212 a.C.) usou uma rede de espelhos para defender sua cidade natal Siracusa da marinha romana. Conseguiu incendiar e afundar navios romanos usando um enorme jogo de espelhos, formados pelos escudos de bronze dos soldados gregos, para direcionar os raios de Sol em um único ponto. Não há comprovações históricas de que esse fato realmente ocorreu.

---

[1] Hematite ou hematita é um mineral de fórmula óxido de ferro III, (Fe_2O_3), um dos diversos óxidos de ferro.

Somente no fim do século XIII, quando o homem já dominava técnicas de fabricação do vidro, é que artesãos venezianos combinando uma camada de vidro a uma fina lâmina de metal produziram espelhos com maior nitidez onde o metal não oxidava por ser protegido pelo vidro. Surgia assim o espelho como o conhecemos até hoje. Mas estes eram produtos caros e raros, chegavam a custar mais que obras de arte ou jóias.

Sousa (2009), conta que a primeira ação em prol da popularização dos espelhos aconteceu no século XVII. Em 1660 o rei francês Luís XIV ordenou que subornasse artesãos venezianos a fim de descobrir sua técnica de fabricação de espelhos. Mas foi a partir da Revolução Industrial que os espelhos começaram a ficar mais baratos e começou a se popularizar fazendo parte de ambientes domésticos de famílias de variadas classes sociais. E apenas no século XX foi que os espelhos se popularizaram de fato.

No século XV os espelhos foram utilizados para demonstrar princípios geométricos. Através de um mecanismo de espelho, o arquiteto florentino Filippo Brunelleschi (1377-1446) demonstrou um método geométrico para construção em perspectiva, provavelmente esta foi a primeira vez que espelhos foram utilizados para demonstrar leis matemáticas e geométricas. Brunelleschi foi o primeiro a aplicar princípios de geometria e matemática no estabelecimento de leis de percepção visual na perspectiva. O método geométrico que apresentou para construção em perspectiva é usado até hoje. Descobriu ao pintar silhuetas de edifícios através de um espelho. Brunelleschi percebeu que todas as linhas naquelas silhuetas convergiam para a linha do horizonte, num ponto de fuga (o ponto onde se encontram todas as linhas que desenham a profundidade). Hoje em dia, designa-se este tipo de abordagem por projeção cônica – a projeção é realizada a partir de um ponto donde partem as retas.

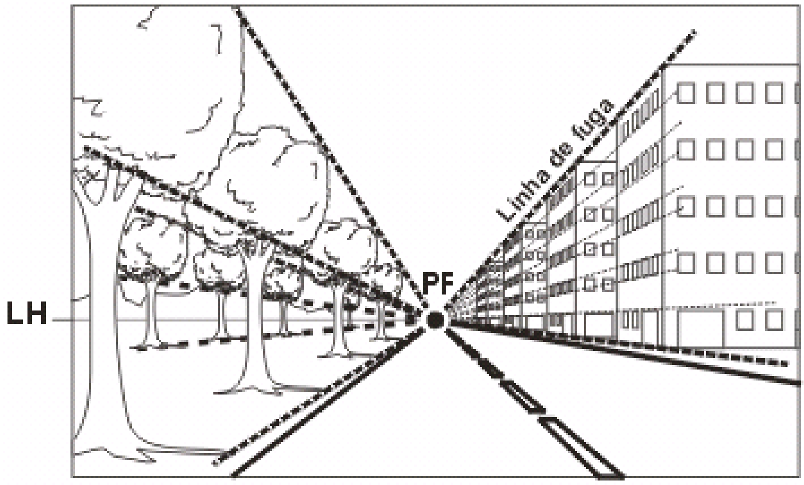


Figura 4.1: Perspectiva de um ponto de fuga
http://www.sobrearte.com.br/desenho/perspectiva/elementos_da_perspectiva.php

Segundo Flinn (2010), nos anos de 1660 matemáticos observaram que os espelhos podiam ser usados em telescópios, em vez de lentes. James Bradley usou esse conhecimento para construir o primeiro telescópio refletor em 1721. Os espelhos possibilitaram também um novo tipo de arte: o autorretrato.

Nos séculos XVI e XVII, muitos artistas, sobretudo na China, fizeram uso de diferentes tipos de espelhos em suas pinturas. Alguns desses artistas pintavam ao mesmo tempo em que viam o pincel através de um espelho apropriado, criando anamorfoses. Anamorfose é uma técnica engenhosa da perspectiva usada para dar uma imagem distorcida de um objeto representado numa pintura quando se vê de um ponto de vista usual, mas ao olhar de um ângulo especial ou se é refletida num determinado sistema óptico, a distorção desaparece e a imagem da pintura resulta normal. Na figura 4.2 mostramos uma anamorfose, a projeção anamórfica de um carro num espelho cônico, a direita está a reconstituição da projeção anamórfica por meio do espelho cônico.

Figura 4.2: Anamorfose Cônica
http://archiviomacmat.unimore.it/CR/LaboratoriFoto/FL4AnamorfosiCatottriche2D.jpg

Hoje os espelhos são utilizados para diversos fins: integram o funcionamento de várias máquinas, são utilizados como objeto de decoração, permitem conhecer importantes princípios da Física assim como representa uma ferramenta importante na aprendizagem matemática. As possibilidades de utilização de espelhos como recurso didático nas aulas de matemática é muito vasta, e permite conexões entre diferentes áreas da matemática como Álgebra e Geometria. Entre os instrumentos espelhados que tem contribuído para a aprendizagem matemática vale ressaltar os caleidoscópios.

> Um caleidoscópio nada mais é que um conjunto de dois ou mais espelhos planos perpendiculares a um mesmo plano que, quando algum objeto é colocado entre os espelhos, múltiplas imagens se formam. (ALMEIDA, 2003).

Segundo ALMEIDA (2003), a primeira publicação sobre caleidoscópios é devida a Kircher, datada de 1646, mas sua denominação, dada por Sir David Brewster, só foi utilizada em 1819 em seu livro “A Teatrise on the Kaleidoscope”, palavra que se origina etimologicamente da junção das três palavras gregas Kalos=Belo, Eidos=Formas, Skopein=Ver, isto é, ver coisas belas.

A partir da década de 70 surgiram vários trabalhos que envolvem o caleidoscópio em atividades educacionais de Matemática, temos obras como as de Jacobs (1974), O’Daffer & Clemens (1977), Ball & Coxeter (1987), Barbosa (1993) e Murari (1999).

De acordo com estes e outros autores os espelhos e caleidoscópios são instrumentos que apóiam o trabalho do professor, auxiliando no processo de construção do conhecimento e estimulando a aprendizagem. A utilização dos instrumentos espelhados provoca o envolvimento, o interesse e a participação dos alunos nas aulas de Geometria.

Figura 4.3: Espelho plano e caleidoscópio
http://pinoquiobrinquedos.com.br/fotos/brinquedos/grande/espelhos.jpg

São muitos os argumentos sobre a importância da utilização de materiais manipulativos como facilitadores do processo de ensino-aprendizagem. A seguir apresentaremos alguns instrumentos elaborados com espelhos e utilizados como recursos didáticos no ensino de geometria. No intuito de apontar o potencial que representam para o ensino-aprendizagem da Matemática.

4.2 - Recursos didáticos elaborados com espelhos utilizados para o ensino de geometria

Trabalhar com atividades laboratoriais é fundamental para melhorar a qualidade na aprendizagem da Matemática, sobretudo no que diz respeito à construção do conhecimento. O trabalho com materiais didáticos facilita a realização de descobertas e a percepção de propriedades, ou seja, a construção efetiva da aprendizagem. Pois, mais do que obter um bom desempenho em exercícios pré-definidos, ou a memorização de fórmulas, um dos objetivos centrais do ensino da Matemática é conseguir que os alunos desenvolvam uma compreensão aprofundada dos conceitos matemáticos.

De acordo com Batistela (2005), existem vários instrumentos construídos com espelhos e utilizados para o ensino de geometria, dentre estes, estão os espelhos simples e os articulados: espelho plano individual, espelho mágico (mira), caleidoscópios planos com dois, três e quatro espelhos, caleidoscópios generalizados, caleidoscópios especiais, ou espelhos articulados especiais. São utilizados também os espelhos curvados (côncavos e convexos).

4.2.1 - O espelho mágico

O espelho mágico (figura 4.4) é uma ferramenta geométrica feito com um pedaço de plástico espelhado e transparente. Devido à transparência, o objeto posto de um lado do espelho mágico é refletido inversamente do outro lado do espelho, e pode ser visualizado e desenhado contornando a imagem do objeto vista através do plástico.

Fig. 4.4: Espelho mágico. (BATISTELA, 2005)

Em atividades propostas encontra-se o espelho mágico sendo usado, na maioria das vezes, como linha de simetria, cuja característica propicia fazer construções geométricas, tais como retas perpendiculares e paralelas; demonstrar que para um triângulo as bissetrizes e as mediatrizes são concorrentes. O espelho mágico também pode ser utilizado para o estudo de transformações geométricas, para o estudo de reflexões, pois ela funciona como uma linha de reflexão.

Muitas construções podem ser feitas com esse instrumento, encontra-se atividades de construção de reta paralela a uma reta dada, por um ponto dado fora da reta; transferência de medidas entre retas não paralelas; intersecção de duas linhas, intersecção de duas circunferências e de uma reta e uma circunferência. E, ainda, conceitos de congruência de círculos e outras figuras coplanares podem ser investigados por meio da imagem destas nesse espelho.

4.2.2 - Um espelho simples

Os espelhos simples obedecem às leis da reflexão da ótica geométrica, portanto dada uma figura qualquer num plano, colocado a frente e perpendicularmente a um espelho plano, obtém-se o simétrico da figura em relação ao espelho. O espelho funciona como uma linha de simetria, e, dessa maneira, possibilita situações de aprendizagem exploratórias de propriedades e conceitos geométricos.

Pesquisas com uso de um espelho em atividades de ensino e aprendizagem de geometria, apresentadas por Batistela (2005), utilizam o espelho para selecionar partes de figuras congruentes a outras; para observar propriedades de figuras geométricas, como diâmetro e raio; para explorar conceitos de orientação, rotação, simetria, linha de simetria, reflexão em uma linha, entre outras.

4.2.3- Dois espelhos planos verticais e paralelos

Quando um objeto é colocado entre dois espelhos verticais e paralelos (figura 2), com as faces voltadas frente a frente, temos um número infinito de imagens formadas entre os mesmos, afirma MURARI (1999). Entre as atividades que propõe com o uso de espelhos planos assim dispostos, estão as que exploram o conceito de translação, através de sucessivas reflexões paralelas.

Outra possibilidade de utilização de dois espelhos planos é articulando os para formação de ângulos, neste caso teremos um caleidoscópio simples, também dito caleidoscópio comum.

4.2.4- Caleidoscópios

Caleidoscópio é um conjunto de dois ou mais espelhos planos perpendiculares a um mesmo plano que, quando algum objeto é colocado entre os espelhos formam-se múltiplas imagens (ALMEIDA, 2003).

Contamos com diferentes tipos de caleidoscópios, com dois, três e quatro espelhos. No comércio existe o ***caleidoscópio popular*** do tipo eqüilátero, com tampas para as bases, numa delas há um orifício para observação e na outra há pequenos fragmentos coloridos que produzem belas e imprevisíveis imagens nas reflexões nos espelhos.

Os ***caleidoscópios educacionais individuais*** dos tipos triangulares diferem dos populares por possibilitarem repetição perfeita das imagens, uma de suas bases também possui um orifício para observação, mas a outra é aberta para a colocação de desenhos (bases substituíveis) que, diferentemente do caleidoscópio popular, produzirão nos espelhos, através das reflexões, um visual previsível.

Murari (1995) propôs a fusão do caleidoscópio de dois espelhos com o de três, este recebeu a denominação de ***caleidoscópio modificado***. O ***caleidoscópio generalizado*** é o conjunto de três espelhos articulados na forma de uma pirâmide invertida, que possibilita a visualização de pontos sobre uma esfera.

A reflexão em um espelho plano simples gera imagens idênticas, enquanto que diferentes e mais complexos padrões são produzidos com o uso de múltiplos espelhos. A combinação de espelhos (caleidoscópios) produz o efeito da multiplicação da imagem, criando uma rede de imagens formadas pela conexão entre o ângulo dos espelhos e o número de imagens formadas. (BATISTELA, 2005).

a - Caleidoscópio Comum

O caleidoscópio comum é um instrumento construído a partir de dois espelhos planos articulados na forma de livro aberto com as faces voltadas para dentro, formando um ângulo que pode variar (figura 4.5). Para um ângulo $\frac{\pi}{n}$ a reflexão fornece 2.n – 1 (n inteiro) imagens refletidas.

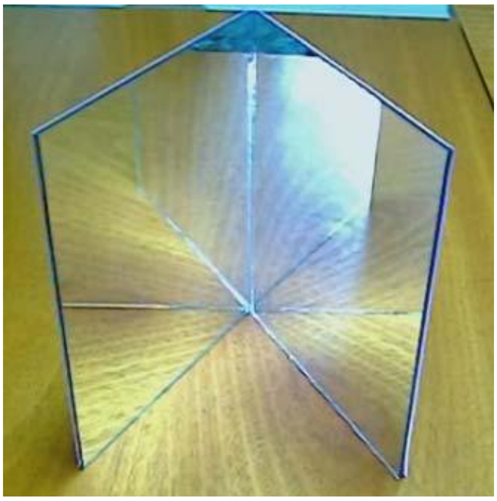


Figura 4.5: caleidoscópio com dois espelhos (BATISTELA, 2005)

Há diferentes possibilidades de exploração desse instrumento em aulas de matemática. Entre estas, uma investigação sobre a questão dos ângulos formados entre os espelhos (a variação da medida dos ângulos entre os dois espelhos faz com que se vejam quantidades diferentes de imagens de um objeto posto entre eles) e a visualização de polígonos bem como de círculos, quando se colocam segmentos ou arcos entre os espelhos são algumas das possibilidades.

Abaixo, a tabela 2 que relaciona o ângulo entre os espelhos com o número de imagens obtidas pelas reflexões e com as possíveis construções.

α	**Nº de Imagens**	**Possíveis construções**
180º	1	Linhas paralelas, círculos.
120º	2	Triângulos, círculos.
90º	3	Quadrados, paralelogramos, linhas paralelas, círculos.
72º	4	Pentágonos, círculos.
60º	5	Hexágonos, triângulos, círculos.
51 3/7º	6	Heptágonos, círculos.
45º	7	Octógonos, quadrados, círculos.
40º	8	Eneágono, círculos.
36º	9	Decágonos, pentágonos, círculos.

Tabela 2: **Fonte:** Alspaugh, C. A., Kaleidoscope Geometry, Arithmetic Teacher 17, (1970), p. 117.

Segundo Almeida (2003) para se obter repetição perfeita de imagens é preciso que o dobro do ângulo entre os espelhos divida 360°.

Outras possibilidades apresentadas por Batistela (2005) mostram este instrumento utilizado para explorar o conceito de rotação, por meio da reflexão de uma figura colocada entre dois espelhos posicionados sobre duas linhas que se intersectam; para visualizar padrões simétricos; para explorar conceitos de ângulos, orientação, translação e reflexões.

b - Caleidoscópios educacionais com três espelhos

Caleidoscópios educacionais com tres espelhos são espelhos articulados dois a dois perpendiculares a um mesmo plano, com as faces espelhadas voltadas para o interior. É utilizado para visualização de pavimentacões do plano.

A variação do ângulo formado entre os espelhos é que determina a quantidade e a perfeição das imagens, a fim de que a repetição de imagens seja perfeita, só existem três tipos de caleidoscópios com bases triangulares: eqüilátero, isósceles retângulo e escaleno retângulo (figura 4.6). Nestes caleidoscópios o número de imagens é infinito.

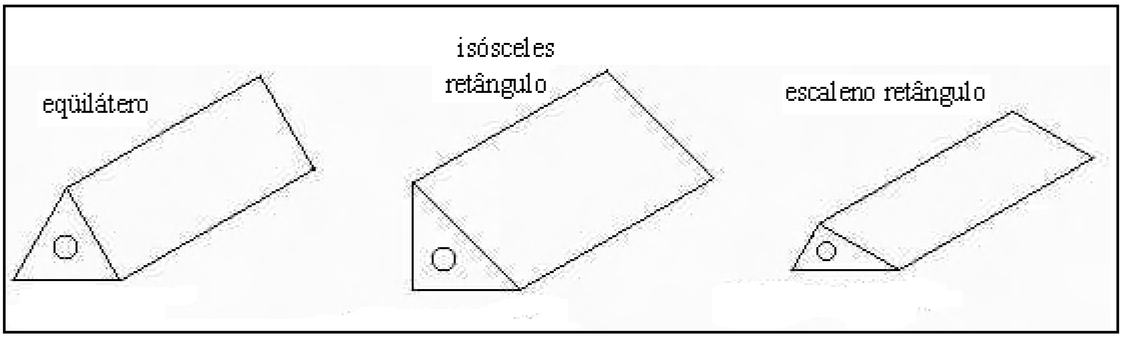


Figura 4.6: Caleidoscópios de base triangular. (ALMEIDA, 2003)

Para que as imagens obtidas neste instrumento sejam perfeitas é necessário que o dobro de cada um dos três ângulos deve ser divisor de 360º. Portanto, sendo $\hat{a},\hat{b}$ e $\hat{c}$ os ângulos entre os espelhos, devemos ter:

$$\frac{360º}{2\hat{a}} = \frac{180º}{\hat{a}} = \alpha \quad , \quad \frac{360º}{2\hat{b}} = \frac{180º}{\hat{b}} = \beta \quad \text{e} \quad \frac{360º}{2\hat{c}} = \frac{180º}{\hat{c}} = \gamma$$

Onde α, β e $\gamma \in$ IN. Podemos então escrever:

$$\frac{180^o}{\alpha} = \hat{a} \quad , \quad \frac{180^o}{\beta} = \hat{b} \quad e \quad \frac{180^o}{\lambda} = \hat{c}$$

Como $\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = 180^o$, então temos:

$$\frac{180^o}{\alpha} + \frac{180^o}{\beta} + \frac{180^o}{\gamma} = 180^o \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = 1$$

Agora supondo que $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ e $\alpha \geq 2$ para que exista triângulo e substituindo β e γ por α temos:

$$\frac{3}{\alpha} \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \leq 3 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 2 \text{ ou } \alpha = 3$$

Se $\alpha = 2$, ao substituirmos γ por β, teremos:

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\beta} \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \beta + 4 \geq 2 \cdot \beta \quad \Leftrightarrow \quad \beta \leq 4$$

Como $\alpha = \beta = 2$ não é possível (pois teríamos dois ângulos retos no triângulo), temos que $\beta = 3$ ou $\beta = 4$. Podemos então escrever:

- Se $\alpha = 2$ e $\beta = 3$, temos: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{\gamma} = 1 \quad \Rightarrow \quad \gamma = 6$
- Se $\alpha = 2$ e $\beta = 4$, temos: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{\gamma} = 1 \quad \Rightarrow \quad \gamma = 4$

Se $\alpha = 3$, ao substituirmos γ por β, teremos:

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{\beta} \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \beta + 6 \geq 3 \cdot \beta \quad \Leftrightarrow \quad 2 \cdot \beta \leq 6 \quad \Leftrightarrow \quad \beta \leq 3$$

Como $\alpha \leq \beta$, então $\beta = 3$ e conseqüentemente $\gamma = 3$.

Donde emergem as soluções (3, 3, 3), (2, 4, 4) e (2, 3, 6) as quais dão validade aos três caleidoscópios ditos anteriormente, o eqüilátero (60°, 60°, 60°), o escaleno (90°, 60°, 30°) e o isósceles (90°, 45°, 45°).

c - Caleidoscópios educacionais com quatro espelhos

Caleidoscópios educacionais com quatro espelhos são espelhos articulados dois a dois perpendiculares a um mesmo plano, com as faces espelhadas voltadas para o interior. Também é utilizado para visualização de pavimentacões do plano (figura 4.7).

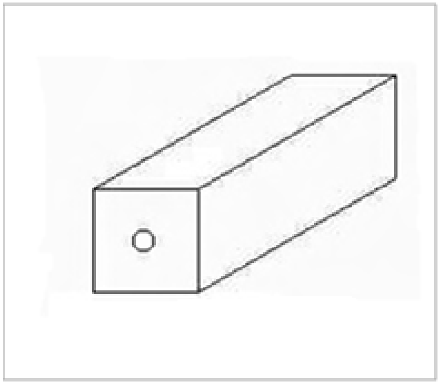


Figura 4.7: Caleidoscópio de base quadrangular. (ALMEIDA, 2003)

Semelhantemente ao caso de três espelhos, para obter repetição perfeita de imagens é necessário que o dobro de cada ângulo divida 360°. Temos, então:

$$\frac{360^{o}}{2\hat{a}} = \frac{180^{o}}{\hat{a}} = \alpha, \qquad \frac{360^{o}}{2\hat{b}} = \frac{180^{o}}{\hat{b}} = \beta, \qquad \frac{360^{o}}{2\hat{c}} = \frac{180^{o}}{\hat{c}} = \gamma \qquad e\,\frac{360^{o}}{2\hat{d}} = \frac{180^{o}}{\hat{d}} = \delta$$

Como a soma dos ângulos internos de um polígono quadrangular é igual a 360°, temos:

$$\frac{180°}{\alpha} + \frac{180°}{\beta} + \frac{180°}{\gamma} + \frac{180°}{\delta} = 360°$$

Donde podemos escrever:

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta} = 2$$

Supondo α ≤ β ≤ γ ≤ δ e substituindo, temos:

$$\frac{4}{\alpha} \geq 2 \quad \Rightarrow \hat{a} \leq 2$$

Como α não pode ser 1, temos que $\alpha = 2$. Sendo $\alpha = 2$ e substituindo γ e δ por β, temos:

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{\beta} \geq 2 \quad \Leftrightarrow \quad \beta + 6 \geq 4 \cdot \beta \quad \Rightarrow \quad 6 \geq 3 \cdot \beta \quad \Rightarrow \quad \beta \leq 2$$

Como $\beta \geq \alpha$ e $\alpha = 2$, temos $\beta = 2$. Fazendo $\alpha = \beta = 2$ e substituindo δ por γ, temos:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{2}{\gamma} \geq 2 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + \frac{2}{\gamma} \geq 2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{\gamma} \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \gamma \leq 2$$

Como $\alpha = \beta = 2$ e $\beta \leq \gamma$ então $\gamma = 2$ e conseqüentemente $\delta = 2$. Logo $\hat{a} = \hat{b} = \hat{c} = \hat{d} = 90°$, que forma um caleidoscópio quadrangular ou retangular.

d – Caleidoscópio generalizado (esférico)

Como foi dito anteriormente, são chamados caleidoscópios generalizados aqueles que permitem a visualização de pontos objetos numa esfera. É formado por três espelhos cortados na forma triangular e articulados na forma de um funil triangular e servem para a visualização de tesselações esférica por poliedros e de poliedros semirregulares (BATISTELA, 2005). (Figura 4.8).

Figura 4.8: Caleidoscópios generalizados (BATISTELA, 2005)

Segundo BATISTELA (2005), uma generalização natural é o caso em que os três ângulos são $\frac{\pi}{l}$, $\frac{\pi}{m}$ e $\frac{\pi}{n}$ onde *l*, *m* e n são divisores inteiros de 180°. Para que estes caleidoscópios possibilitem a visualização perfeita de uma rede de triângulos esféricos que cubra totalmente a esfera é necessário que os ângulos formados pelos espelhos determinem um triângulo sobre a mesma, tal que sua área seja um divisor inteiro da área total da esfera a ser visualizada.

Tomando uma esfera de raio unitário, cuja área será 4π, e sabendo que a área do triângulo formado pelos ângulos $\frac{\pi}{l}, \frac{\pi}{m}$ e $\frac{\pi}{n}$ sobre a esfera é $\frac{\pi}{l}+\frac{\pi}{m}+\frac{\pi}{n}-\pi$ (geometria esférica), temos que a área da esfera dividida pela área de cada triangulo é:

$$\frac{4\pi}{\frac{\pi}{l}+\frac{\pi}{m}+\frac{\pi}{n}-\pi} > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-1} > 0$$

Tem-se que $\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n} > 0$, para que se tenha repetição perfeita de imagens desse triângulo tesselando a esfera. Donde emergem as seguintes soluções para essa inequação: (2,2,n); (2,3,3); (2,3,4) e (2,3,5). Como l, m e n são divisores de 180° para cada terna de solução correspondem os caleidoscópios cujos ângulos são o resultado da divisão de 180° por esta terna. Na primeira terna os ângulos não são bem definidos. As três últimas ternas correspondem, respectivamente, os caleidoscópios com ângulos (90º, 60º, 60º), (90º, 60º, 45º) e (90º, 60º, 36º).

4.2.5 – Espelhos articulados especiais

Os espelhos articulados especiais são instrumentos construídos pela articulação de espelhos cortados com ângulos precisos. São utilizados para a visualização dos poliedros de Platão (figura 4.9).

Figura 4.9: Espelhos articulados especiais (BATISTELA, 2005)

4.2.6 – Espelhos Curvados (côncavos e convexos)

Espelhos curvados geralmente têm superfícies que são esféricas, cilíndricas, cônicas, parabólicas, elipsoidais ou hiperboloidais. Os espelhos esféricos produzem imagens que são reduções, e são utilizados em automóveis; os parabólicos podem ser usados para focar raios paralelos para um foco real, como ocorre em um espelho de telescópio; os espelhos elipsoidais refletem a luz de um de seus dois pontos focais para o outro, portanto um objeto situado no foco desse espelho terá uma imagem virtual; os espelhos cilíndricos convergem todos os raios de um feixe de luz para um único ponto.

A reflexão nesses espelhos não obedece às regras da perspectiva normal. A imagem formada por um espelho côncavo varia de acordo com a posição do objeto refletido. Quando o objeto está entre o vértice da superfície da superfície do espelho e seu foco, a imagem formada é direita e maior, dessa forma se tivermos um espelho cilíndrico visualizamos a imagem mais larga. No espelho cilíndrico convexo a imagem formada é sempre menor e direita, uma pessoa que olha seu reflexo neste espelho se vê mais magro.

Num espelho com curvaturas, com partes convexas e côncavas, a imagem refletida é deformada, podendo ficar cortada em partes. Uma das possibilidades de utilização de espelhos curvados no ensino de geometria é a exploração de anamorfoses por reflexão (imagens deformadas que só aparece normal se refletida num determinado sistema óptico).

A obtenção de imagens anamórficas é um tema que pode ser explorado para no ensino de matemática. O Tema pode ser tratado interdisciplinarmente com as áreas de artes, desenho geométrico e ainda história, pois alguns artistas "escondiam" imagem usando o anamorfismo. Em geometria, anamorfose é a correspondência obtida projetando-se os pontos de uma figura de um plano sobre uma superfície plana ou curva. A obtenção de anamorfoses se dá através de construções geométricas simples.

É possível construir anamorfoses, submetendo-se à imagem original a um quadriculado, depois a reproduz sobre uma quadrícula alongada, ou sobre uma trama curvilínea obtendo-se formas deformadas da imagem original. Na figura 4.10, temos a imagem inscrita na base de um cone e na figura 4.11, a trama curvilínea deformada para a obtenção da anamorfose.

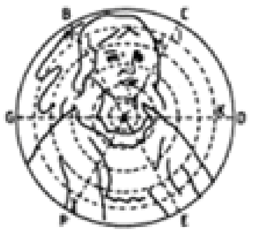


Figura 4.10: Imagem original.
Fonte: http://www.artetoma.it/anamorfosi/niceron

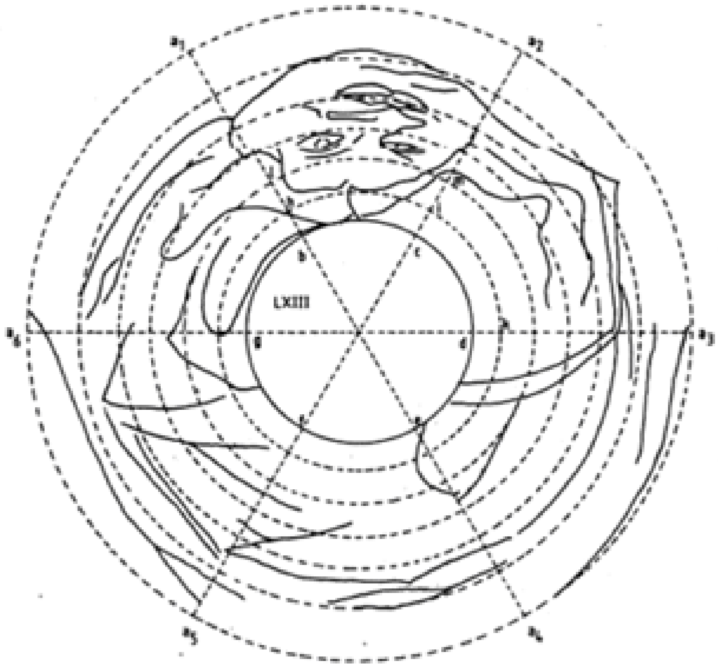


Figura 4.11: Anamorfose Cônica.
Fonte: http://www.artetoma.it/anamorfosi/niceron

4.2.7 – Traçado geométrico de anamorfose cônica

De modo geral as anamorfoses por reflexão são soluções do seguinte problema: Dado um espelho cônico convexo sobre um plano paralelo a sua base, descrever sobre este plano uma imagem real que, por mais disforme e confusa que pareça, vista por reflexão no espelho dado, como imagem virtual, apareça similar àquele objeto proposto.

O traçado desta anamorfose parte da inscrição da imagem num circulo dividido em três diâmetros e seis partes iguais; divide-se um dos raios em seis partes iguais, onde passara cinco círculos concêntricos ao primeiro, criando uma serie quadrangular onde é colocada a imagem que pretende-se deformar. (figura 4.12).

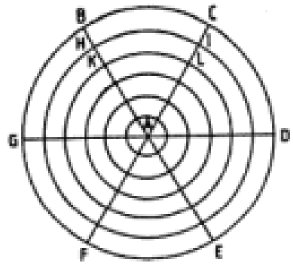


Figura 4.12: Circulo dividido em três diâmetros e seis partes iguais
Fonte: http://www.artetoma.it/anamorfosi/niceron

O procedimento relativo ao desenho do traçado da base consiste em tirar uma linha reta NZ e, em NZ, tomar AC igual ao diâmetro da base do cone; de AC traça-se o triangulo ABC congruente ao triangulo formado pela secção meridiana do cone considerado, onde AB e BC representaram os dois lados do cone e AC o diâmetro da base.

Com centro em D, ponto médio de AC, e abertura AD traça-se o semicírculo AC. Como a imagem inicial foi inscrita numa circunferência dividida em seis partes iguais o semicírculo AC será dividido em três arcos iguais: AT, TX e XC. Do centro D para os pontos desta divisão toma-se as semi-retas DN, DV, DY e DZ. Prosseguindo, toma-se o semidiâmetro AD e o divide em tantas partes iguais quantas são em AB, ou seja, em seis partes iguais, nos pontos H, I, J, k, L e D; e de todos estes pontos traça-se segmentos ligando-os a E, que pertence a reta perpendicular a NZ em D e que contem o ponto B, de modo que B esta entre D e E. Os segmentos HE, IE, JE, KE, LE e DE interceptaram AB nos pontos 1, 2, 3, 4, 5 e 6. Com centro em B e abertura BE descreve-se um arco, neste arco toma-se os pontos F e G, o ponto F no ponto de interseção do arco com o prolongamento do segmento AB e o ponto G de modo que EF = FG. Dando seqüência, de G para os pontos 1, 2, 3, 4, 5 e 6 de AB traçam-se linhas retas interceptando AN nos pontos S, R, Q, P, O e N, nos quais passam-se os arcos de centro D que representara por reflexão metade da quadricula original (figura 4.13).

A partir da primeira metade é fácil concluir o desenho da quadricula deformada restando apenas transferir a imagem para esta quadricula obedecendo as determinadas posições. A particularidade da imagem resultante consiste no fato de que a parte do desenho que no original era mais distante do centro do circulo em que era inscrito, agora vem a ser o mais próximo a base do cone. O que acontece é que o circulo maior da original corresponde ao menor do traçado deformado e vice-versa, resultando num enorme poder deformador, tornando a imagem absolutamente irreconhecível sem o auxilio do espelho.

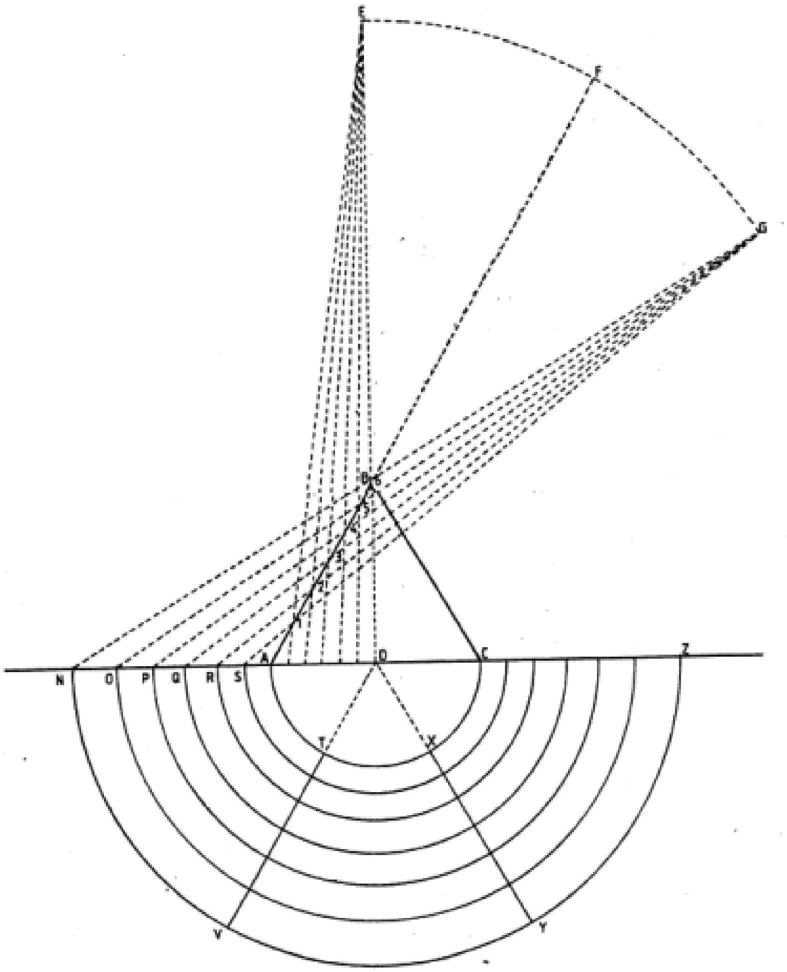


Figura 4.13: Traçado de base para construção de anamorfose cônica.
Fonte: http://www.artetoma.it/anamorfosi/niceron

O ponto de vista mais indicado para ver a imagem no espelho é colocar o olho exatamente sobre a linha da base elevada da ponta do espelho a distancia BF. Neste caso, o espelho funciona como o decodificador. Algumas anamorfoses são concebidas com base num calculo gráfico de distorção causada por certos tipos de espelhos. O registro das técnicas para construir figuras anamórficas se encontra em “La Perspective Curieuse” (Nicerón s. XVII).

5.0 ESTUDANDO MATRIZES A PARTIR DE ESPELHOS E TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

A proposta apresentada neste capítulo foi inspirada nas propostas apresentadas por Dante (2010) e Stormowski (2008) em sua dissertação de mestrado. Consiste em uma seqüência didática para o ensino de matrizes que explora suas relações com as transformações geométricas e utiliza espelhos como recursos didáticos.

5.1 - Proposta Didática

A presente atividade é destinada para alunos do 2º ano do Ensino Médio, tem por objetivo avaliar se o uso de espelhos auxilia no ensino aprendizagem de matrizes e será desenvolvida em três etapas. A avaliação da proposta se dará durante todo o percurso do processo das aulas, tendo como foco as discussões, depoimentos, produções e a compreensão individual de cada aluno.

1ª. Etapa

As atividades da primeira etapa têm como objetivo apresentar algumas transformações geométricas aos alunos, de modo que os mesmos identifiquem suas peculiaridades, características e regularidades. Serão utilizados com recursos didáticos instrumentos elaborados com espelhos para modelar transformação de reflexão, translação, rotação e transformação anamórficas. As atividades serão desenvolvidas em grupos de quatro alunos, o tempo estimado para a aplicação das atividades desta etapa é duas horas.

Serão distribuídos materiais manipulativos elaborados com espelhos (um espelho simples, dois espelhos planos paralelos, dois espelhos planos articulados e um espelho cônico) e objetos, imagens e figuras para serem observadas através destes. Também serão utilizados papel quadriculado com eixos cartesianos, atividades xerocopiadas, imagens anamórficas e traçado de base para construção de anamorfoses.

Utilizando papel quadriculado contendo os eixos coordenados, será proposto aos alunos que desenhem transformações de reflexão e as rotações de 90°, 180° e 270° já visualizadas por meio dos espelhos.

Ainda nesta etapa os alunos serão desafiados a construírem uma figura anamorfica por reflexão em espelho cônico, semelhante a figura 4.14 da página 36. Para isso será disponibilizado os traçados de base para construção anamórfica apresentados na página 33. As imagens anamórficas serão utilizadas para exemplificar um transformação anmorfica.

2ª. Etapa

Nesta etapa iremos iniciar o processo de algebrização de algumas das transformações apresentadas. Os alunos irão analizar as coordenadas dos vértices das figuras iniciais e das transformadas a fim de identificarem relações entre elas. Serão utilizados atividades xerocopiadas e as atividades serão desenvolvidas em duplas.

Espera-se que os alunos cheguem a representação matricial das transformações de reflexão, rotação e translação, apresentadas na tabela da página 16. O tempo estimado para a aplicação destas atividades é duas horas.

3ª. Etapa

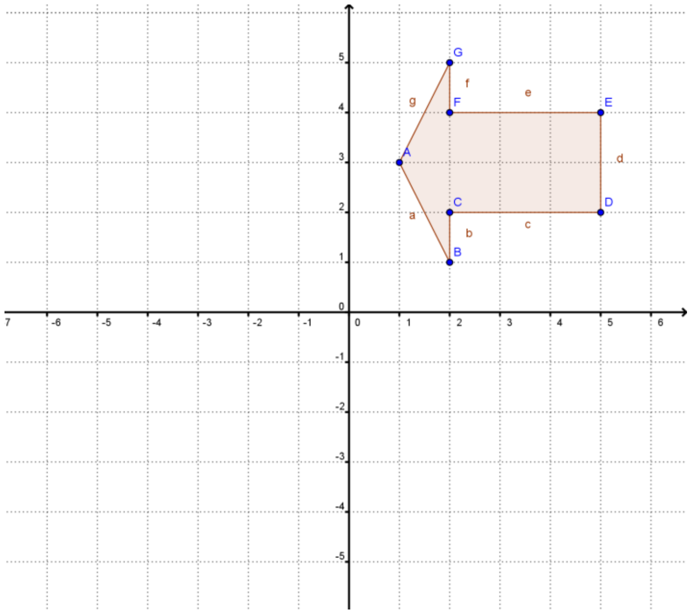
Nesta etapa, partindo da discussão sobre a representação matricial da translação, serão estudados os casos de composição de transformação e suas expressões gerais, com o intuito de relacionar as composições de transformações à multiplicação de matrizes. Serão propostos exercícios para obter a representação matricial de composições por meio de operações com matrizes.

As atividades serão desenvolvidas em grupos de dois e o tempo estimado para a aplicação destas é duas horas.

5.2 - Atividades a serem desenvolvidas

Atividades 1ª. Etapa

1. Utilize um espelho plano comum para visualizar a imagem contida no plano cartesiano abaixo. Coloque o espelho perpendicular ao plano da figura fazendo coincidir inicialmente com os eixos OX e, depois OY. Reproduza as imagens da reflexão horizontal e vertical da figura.

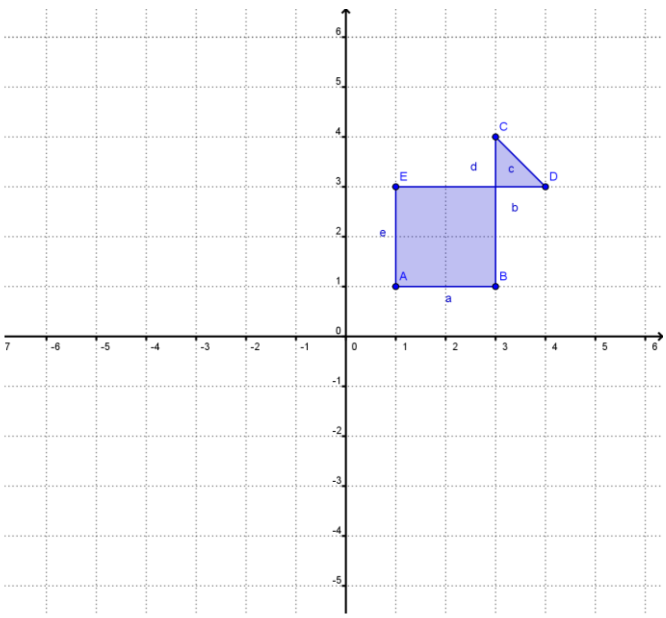


a. O que acontece com a figura em cada caso?

b. Que características as reflexões conservaram?

c. Além da localização em que aspectos as reflexões diferem da imagem inicial?

2. Utilize os dois espelhos planos articulados na forma de um livro para visualizar a figura contida no plano cartesiano. Disponha os espelhos perpendiculares ao plano da figura com ângulo de abertura igual a 90° e vértice na origem dos eixos coordenados.



a. Descreva suas observações.

b. Que características entre a figura inicial e as reflexões foram preservadas?

c. Além da localização em que aspectos as reflexões diferem da imagem inicial?

d. Você afirmaria que houve um giro da figura original, em relação ao centro dos espelhos?

3. Utilizando dois espelhos planos paralelos observe e um objeto, observe as imagens desse objeto nos espelhos. Você poderia dizer que houve como que um deslizamento do objeto, sem girar, através de uma linha imaginária?

4. *As Isometrias são Transformações Geométricas que quando aplicadas a uma figura modificar apenas a posição desta. As isometrias simples são Reflexão, Translação e Rotação. A transformação reflexão inverte a imagem em torno de uma reta, a translação provoca um deslocamento (horizontal ou vertical) da imagem e rotação da um giro na imagem em volta de ponto.* De acordo com as informações acima identifique como reflexão, translação ou rotação as transformações estudadas nas atividades:

a) Atividade 1 b) Atividade 2 c) Atividade 3

5. Identifique a figura abaixo.

Nota: A figura apresentada é uma anamorfose, uma imagem deformada que só aparece normal quando observada por meio de um dispositivo óptico. Neste caso a anamorfose foi obtida por reflexão de um espelho cônico. A figura apresentada é a projeção anamórfica de uma borboleta num espelho cônico, abaixo tem-se a reconstituição da projeção anamórfica de borboleta por meio de um espelho cônico.

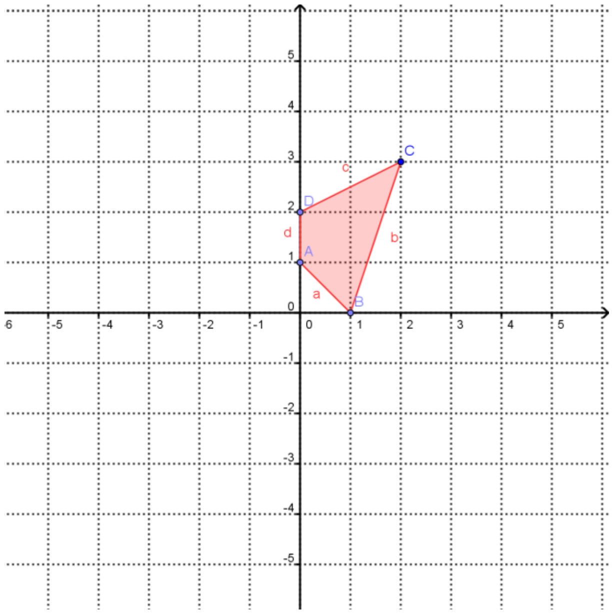
Nota-se que a anamorfose (imagem transformada) não preserva o tamanho nem a forma da imagem original (borboleta), este é um exemplo de transformação geométrica que aplicada a uma figura causa deformações a qual podemos chamar de transformação anamórfica.

6. Vamos aplicar a transformação anamórfica a uma figura, seguindo os seguintes passos:

- Inicialmente inscreva a imagem a ser transformada no gráfico 1, que representa a base do espelho cônico.
- Em seguida reproduza a imagem no gráfico 2 obedecendo às posições correspondentes aos da figura anterior. Utilize o espelho cônico para verificar as correspondências.

Atividades 2ª. Etapa

7. (*Reflexão em torno de uma reta*) Faça a representação gráfica da reflexão em torno do eixo vertical da figura abaixo, e na tabela identifique as coordenadas dos pontos da figura obtida correspondente aos pontos dados.



$$X = (x, y) \rightarrow X' = (x', y')$$

$$A = (0, 1) \rightarrow A' = (\ \ ,\ \ )$$

$$B = (1, 0) \rightarrow B' = (\ \ ,\ \ )$$

$$C = (2, 3) \rightarrow C' = (\ \ ,\ \ )$$

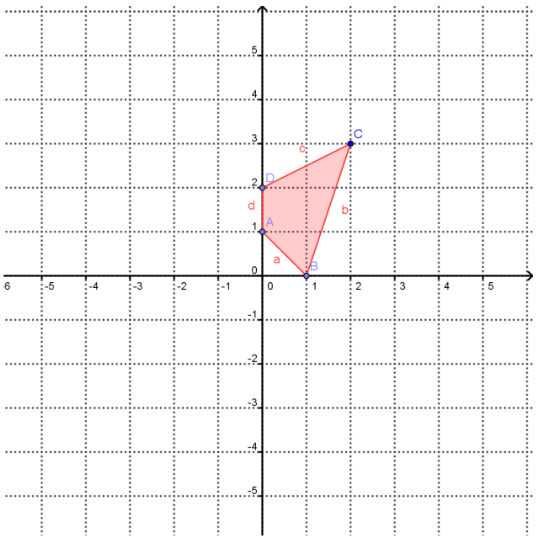
$$D = (0, 2) \rightarrow D' = (\ \ ,\ \ )$$

7.1 Identifique a relação entre as coordenadas da figura obtida e as coordenadas da figura inicial. Para as coordenadas x e y da figura inicial que são os valores x' e y' da figura obtida?

$$x' = \_\_\_$$
$$y' = \_\_\_$$

8. Faça a representação gráfica da reflexão em torno do eixo horizontal da figura abaixo, obtenha os valores das coordenadas da figura transformadas e estabeleça uma relação entre as coordenadas da figura transformada e a da figura inicial.

Reflexão em torno do eixo horizontal



$$X = (x, y) \rightarrow X' = (x', y')$$

$$A = (0, 1) \rightarrow A' = (\ \ ,\ \ )$$

$$B = (1, 0) \rightarrow B' = (\ \ ,\ \ )$$

$$C = (2, 3) \rightarrow C' = (\ \ ,\ \ )$$

$$D = (0, 2) \rightarrow D' = (\ \ ,\ \ )$$

$$x' = \_\_\_$$
$$y' = \_\_\_$$

9. Nas transformações de reflexão os valores de x e de y podem ser escritos em função de x e de y. As equações que relacionam x' e y' com x e y podem ser expressa como um sistema de equações. No caso da reflexão em torno do eixo vertical obtemos $x' = -x$ e $y' = y$, estas equações podem ser expressas como

$$\begin{cases} x' = -1.x + 0.y \\ y' = 0.x + 1.y \end{cases}.$$

Os coeficientes de x e de y das equações do sistema podem ser colocados numa matriz

$$\begin{cases} x' = -1.x + 0.y \\ y' = 0.x + 1.y \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

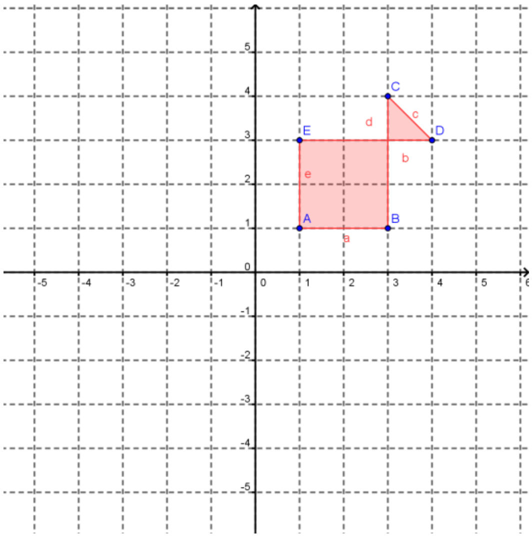
A matriz $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ é chamada matriz da transformação geométrica.

Obtenha as matrizes das transformações:

a. Reflexão em torno do eixo horizontal
b. Reflexão em torno da reta $y = x$
c. Reflexão em torno da reta $y = -x$

10. (Rotação) Faça a representação gráfica de cada transformação, e na tabela da direita identifique as coordenadas dos pontos da figura transformada.

Rotação de 90º anti-horário



$X = (x, y) \to X' = (x', y')$
$A = (1, 1) \to A' = (\ , \ )$
$B = (3, 1) \to B' = (\ , \ )$
$C = (3, 4) \to C' = (\ , \ )$
$D = (4, 3) \to D' = (\ , \ )$
$E = (1, 3) \to E' = (\ , \ )$

Identifique a relação entre as coordenadas da figura obtida e as coordenadas da figura inicial. Para as coordenadas x e y da figura inicial que são os valores x' e y' da figura obtida?

$$x' = \_\_\_$$
$$y' = \_\_\_$$