UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA
PURA E APLICADA

O TEOREMA DA APLICAÇÃO ABERTA, DO GRÁFICO FECHADO E APLICAÇÕES

RIVANILDO GARCIA DA SILVA

Campina Grande-PB
Agosto de 2012

Rivanildo Garcia da Silva

O TEOREMA DA APLICAÇÃO ABERTA, DO GRÁFICO FECHADO E APLICAÇÕES

Monografia apresentada no Curso de especialização em Matemática pura e aplicada do Departamento de Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências legais para obtenção do título de especialista em Matemática Pura e Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo

Campina Grande-PB

Agosto de 2012

FICHA CATALOGRÁFICA PELA BIBLIOTECA CENTRAL - UEPB

S586t Silva, Rivanildo Garcia da.

O Teorema da Aplicação Aberta, do Gráfico Fechado e Aplicações [manuscrito]/ Rivanildo Garcia da Silva. - 2012.

30 f. : il.

Monografia (Especialização em Matemática Pura e Aplicada)- Universidade Estadual da Paraíba,Centro de Ciências e Tecnologia, 2012

"Orientação: Prof Dr^o Aldo Trajano Lourêdo, Departamento de Matemátiaca".

1. Análise funcional. 2. Álgebra 3. Matemática. I. Titulo.

21. ed. CDD 515

Rivanildo Garcia da Silva

O Teorema da Aplicação Aberta, do Gráfico Fechado e Aplicações

MONOGRAFIA APROVADA EM: 17/08/2012

BANCA EXAMINADORA

Aldo trajano lourêdo

Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo

Departamento de Matemática - CCT/UEPB

Orientador

Joselma S. Santos

Profa. Mrs. Joselma Soares dos Santos

Departamento de Matemática - CCT/UEPB

Examinadora

Prof. Mrs. Luiz Lima de Oliveira Júnior

Campus VI - CCHE/UEPB

Examinador

Este trabalho acadêmico é dedicado para:
Uma pessoa muito especial em minha vida, Geovania, minha amada esposa; Para meu filho José Eudes; E para meus colegas de turma, que estiveram juntos comigo nesse periodo e sempre deram todo o apoio e ajuda para superar as dificuldades que surgiram.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por ter me dado saúde e sabedoria. Agradeço também a Geovania, minha esposa, por acreditar em meu potencial me apoiar e me incentivar. Também agradeço aos professores desta especialização que me apoiaram e me ajudaram na aquisição de novos conhecimentos, em especial a meu orientador Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo que contribuiu muito para o desenvolvimento desse trabalho.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Fatos históricos

Para demonstração do Teorema da Aplicação Aberta e do Teorema do Gráfico Fechado, faremos uso do Teorema de Banach-Steinhaus. Stefan Banach foi um matemático nascido em Cracóvia, império Austro-Húngaro, hoje na Polônia, é considerado um dos fundadores da análise funcional moderna, contribuiu com o desenvolvimento da teoria topológica do espaço vetorial e também é considerado o fundador da escola polonesa de matemática. O teorema de Banach-Steinhaus, também conhecido como princípio da limitação uniforme, que é um importante resultado da análise funcional, o teorema foi originalmente publicado em 1927 por Stefan Banach e Hugo Steinhaus, um matemático de uma família de intelectuais judeus, que nasceu na região da Galiza, numa cidade chamada Jaslo, que ficava próxima das cidades de Cracóvia e Lvov (hoje onde fica a Áustria). Depois de terminar o ensino secundário, Banach foi para Lviv (hoje na Ucrânia) e ingressou na faculdade de engenharia na Universidade Técnica da cidade, teve que se manter virando tutor. Ele se graduou em 1914, mas por causa da Primeira Guerra Mundial, Banach acabou saindo de Lviv. Ele também passou um tempo em Cracóvia dando aulas em escolas, em 1916 uma grande oportunidade teria grande impacto na vida dele. Hugo Steinhaus, que estava servindo o exército, iria pegar uma correspondência em Lviv e teria que andar pelas ruas desta cidade para ir até à Universidade. Neste caminho Steinhaus teria ouvido as palavras "medida de Lebesgue ". Era Banach com seu amigo, Otto Nikodym. Então Steinhaus passou a ter contato com eles regularmente e acabou por fundar com os dois amigos uma "sociedade matemática ". Steinhaus contou-lhes sobre um problema no qual estava trabalhando sem sucesso. Depois de um tempo Banach teve uma idéia para o contraexemplo requerido e contou a Steinhaus, e eles realizaram um trabalho em conjunto, porém a guerra acabou atrasando a publicação.

Em 1919 a Sociedade Matemática de Cracóvia foi estabelecida por iniciativa de Steinhaus. Banach ministrou palestras nessa sociedade e continuou a produzir trabalhos matemáticos. Em 1920 essa Sociedade se tornou Sociedade Matemática da Polônia e foi oferecido a Banach um cargo de assistente de Antoni Lomnicki na Universidade Técnica de Lviv, lá ele fez palestras relacionadas á matemática e tentou submeter a sua tese de doutorado sob a supervisão de Lomnicki. Em 1922 a Universidade Jan Kazimierz em Lviv deu a Banach a sua habilitação (grau acadêmico semelhante ao de livre docente no Brasil) pela tese sobre teoria da medida. Em 1924 foi promovido a professor titular e passou o ano acadêmico 1924-1925 em Paris. No entre-guerras continuou a produzir importantes trabalhos, escrevendo livros didáticos de álgebra, geometria e aritmética para o ensino secundário. Ele também contribuiu para a divulgação da matemática, em 1929 juntamente com Steinhaus lançou o jornal Studia Mathematica, tornando-se os dois os primeiros editores, que tinham como política o foco em análise funcional e tópicos relacionados. Em 1939, conseguiu a presidência da Sociedade Matemática da Polônia. Quando a Segunda Guerra Mundial estourou, as tropas soviéticas invadiram Lviv, mas como Banach tinha boas relações com os matemáticos da União Soviética, indo os visitar algumas vezes, ele conseguiu se manter no cargo, e a guerra não mudou muito a vida dele, pois continuava com suas pesquisas, escrevendo seus livros didáticos, dando palestras e indo a cafés. Porém a ocupação nazista de Lviv em Junho de 1941 fez com que a vida de Banach ficasse difícil por lá, durante esta época muitos acadêmicos poloneses foram mortos, em um dia de massacre - 3 de Julho de 1941. Banach chegou a ser preso sob suspeita de traficar moeda da Alemanha, mas foi solto um tempo depois. Ele pretendia ir a Cracóvia depois da guerra para se tornar o presidente da área de matemática na Jagiellonian Universit, mas morreu em Lviv em 1945 de câncer de pulmão.

Entre os vários trabalhos de Banach destacam-se a sua contribuição para a teoria das séries ortogonais e inovações na teoria da medida e integração, mas a sua contribuição mais importante foi na análise funcional. Dos trabalhos publicados por ele, O Théorie des opérations linéaires, é o mais importante. Também considerada de grande importância na época, a Théorie de Sept Reverse, acabou sendo considerada incompleta na década seguinte. Banach também introduziu o conceito de espaços vetoriais normados, também chamados Espaço de Banach, além de provar vários teoremas dessa área. Suas aplicações ajudaram em muitos estudos na análise funcional por um longo tempo. Entre os teoremas que têm o seu nome, encontram-se:

⋄ Teorema de Hahn-Banach

⋄ Teorema de Banach-Steinhaus

⋄ Teorema de Banach-Alaoglu

⋄ Teorema de Banach-Schaude.

Quanto a Steinhaus foi um dos membros da Escola de Matemática de Lviv, estudou matemática na Universidade de Lviv e na Universidade de Göttingen, onde doutorou-se em 1911 com a tese Neue Anwendungen des Dirichlet'schen Prinzips. Habilitou-se em 1917 em Lviv. Em 1918 publicou o artigo Additive und stetige Funktionaloperationen. Em 1920 foi professor da Universidade de Lviv. Em 1945 foi professor de matemática na Universidade de Wrocław. Em 1952 foi eleito membro da Academia de Ciências da Polônia. Steinhaus publicou cerca de 250 artigos, entre os quais Kalejdoskop matematyczny (1938), traduzido em 10 línguas. Em co-autoria com Leo Moser desenvolveu a notação de Steinhaus-Moser para números de grande magnitude.

Capítulo 2

Espaços Métricos

Definição 2.0.1 *: Um espaço métrico é um par (X, d), onde X é um conjunto não vazio e d é uma métrica em X , isto é, uma função definida por:*

$$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ definida por:}$$
$$(x, y) \longmapsto d(x, y) = |x - y|, \textit{ onde para todos } x, y \textit{ e } z \text{ tem-se:}$$

i) $d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = 0 \iff x = y$

ii) $d(x, y) = d(y, x)$

iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$

Exemplo 2.0.1 *Vamos considerar o espaço de sequências S: Que é o conjunto de todas as sequências de números complexos e munido da metrica definida por:*

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|x_i - y_i|}{1 + |x_i - y_i|} \tag{2.1}$$

onde $x = (x_i)$ e $y = (y_i)$

Para mostrar (iii), usaremos a auxílio de uma função f definida em $\mathbb{R}$ por:

$$f(t) = \frac{t}{1 + t}.$$

Temos:

$$f'(t) = \frac{t'.(1+t) - t.(1+t)'}{(1+t)^2} = \frac{1.(1+t) - t.1}{(1+t)^2} \Longrightarrow f'(t) = \frac{1+t-t}{(1+t)^2} = \frac{1}{(1+t)^2} > 0$$

Portanto, f é monótona e crescente, consequentemente, como

$$|a+b| \leqslant |a| + |b|, \forall a, b \in \mathbb{R} \tag{2.2}$$

logo

$$f(|a+b|) \leqslant f(|a| + |b|)$$

Aplicando, a definição de f e a desigualdade triangular, temos:

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leqslant \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|} = \frac{|a|}{1+|a|+|b|} + \frac{|b|}{1+|a|+|b|} \leqslant \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}$$

Na desigualdade acima, fazendo $a = x_i - z_i$ e $b = z_i - y_i$, temos: $a + b = x_i - z_i + z_i - y_i = x_i - y_i$. Daí, resulta

$$\frac{|x_i - y_i|}{1+|x_i - y_i|} \leqslant \frac{|x_i - z_i|}{1+|x_i - z_i|} + \frac{|z_i - y_i|}{1+|z_i - y_i|} \tag{2.3}$$

se multiplicarmos ambos os lados de (2.3) por $\frac{1}{2^i}$ e somarmos i de 1 até infinito, temos:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|x_i - y_i|}{1+|x_i - y_i|} \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|x_i - z_i|}{1+|x_i - z_i} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|z_i - y_i|}{1+|z_i - y_i|}$$

ou seja,

$$d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y).$$

Portanto (X, d) é um espaço métrico.

Exemplo 2.0.2 *: Seja* $X = \{x \in \mathbb{R}; |x| \leq 1\}$ *sobre este conjunto definimos a função:*

$$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

da seguinte forma:

$$d(x,y) = |x - y|.$$

A função d satisfaz as condições de métricas, portanto (X, d) é um espaço métrico.

Definição 2.0.2 *: Seja $d(x, y)$ um espaço métrico, diremos que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy no espaço métrico X se $x_n \in X$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e ainda verifica-se que para todo $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:*

$$n, m \geqslant n_0 \Longrightarrow d(x_n, x_m) < \epsilon,$$

quando essa sequência de Cauchy é convergente em X, dizemos que o espaço métrico é completo.

Exemplo 2.0.3 *: O conjunto dos números reais com a métrica dada pelo valor absoluto é um espaço métrico completo.*

2.1 Espaços normados

A estrutura de espaço métrico é uma estrutura básica, onde isolamos o conceito de métrica, para definir sobre ela uma convergência de seus elementos. Os espaços normados são estruturas mais ricas, isto é, são conjuntos não vazios que possuem duas operações fechadas definidas sobre eles. Uma delas é a soma de vetores , e a outra é o produto por um escalar, isto é, um espaço normado é um espaço vetorial. Mais precisamente:

Definição 2.1.1 *: Diremos que um espaço vetorial E é um espaço normado, se existir uma função $N : E \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo as seguintes propriedades:*

i) $N(x) \geq 0, \forall x \in E$ e $N(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$;

ii) $N(x + y) \leq N(x) + N(y), \quad \forall \ x, y \in E$;

iii) $N(\alpha x) = |\alpha|.N(x), \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in E$.

Em particular todo espaço normado é um espaço métrico. Quando um espaço normado E é completo, isto é, toda sequência de Cauchy é convergente em E, dizemos que E é um espaço de Banach.

Lema(Baire): Seja X um espaço métrico completo não vazio. Consideremos uma sequência (x_n) de subconjuntos fechados de X tal que:

$$X = \bigcup_{n=0}^{\infty} x_n.$$

Então, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que: $intX_{n_0} \neq \emptyset$

Demonstração: : Suponhamos que $intX_{n_0} = \emptyset \; \forall n \in \mathbb{N}$.
seja $X_1 \neq X$, com $X - X_1 \neq \emptyset$, como todo conjunto aberto contém uma bola aberta, então existe uma bola aberta $B(x_1, \delta_1) \subset X - X_1$, com $0 < \delta_1 < \dfrac{1}{2}$. Agora seja $intX_2 = \emptyset$, a bola $B(x_1, \frac{\delta_1}{2}) \not\subset X_2$. Logo, $B(x_1, \frac{\delta_1}{2}) - X_2$ é um aberto não vazio e portanto $B(x_1, \delta_2) \subset [B(x_1, \frac{\delta_1}{2}) - X_2]$ com $0 < \delta_2 < \dfrac{1}{4}$. Pela hipótese tomada note que: $B(x_{n-1}, \delta_n) \subset [B(x_{n-1}, \frac{\delta_{n-1}}{2}) - X_n]$ e ainda $B(x_n, \delta_n) \cap x_n = \emptyset$.
Agora, considerando $m > n$ temos pela desigualdade triângular que:

$$d(x_m, x_n) \leq \sum_{i=n}^{m-1} d(x_{i+1}, x_i)$$

por (2.1) resulta

$$d(x_m, x_n) \leq \sum_{i=n}^{m-1} \frac{1}{2^i} \frac{|x_{i+1} - x_i|}{1 + |x_{i+1} - x_i|}.$$

Como $|x_{i+1} - x_i| < 1 + |x_{i+1} - x_i|$ *implica*, $0 < \dfrac{|x_{i+1} - x_i|}{1 + |x_{i+1} - x_i|} < 1$, e daí, $\dfrac{1}{2^i} \dfrac{|x_{i+1} - x_i|}{1 + |x_{i+1} - x_i|} < \dfrac{1}{2^i}$, temos:

$$d(x_m, x_n) = \sum_{i=n}^{m-1} d(x_{i+1}, x_i) < \sum_{i=n}^{m-1} 2^{-1} \longrightarrow 0 \quad se \quad m, n \longrightarrow \infty.$$

Como X é completo, então $x_n \longrightarrow x \in X$, e desde que $x_k \in B(x_n, \frac{\delta_n}{2}), \quad \forall k > n$.
Daí, $x \in B(x_n, \delta_n), \forall n \in \mathbb{N}$, o que é uma contradição. Logo, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$intX_{n_0} \neq \emptyset.$$

■

2.2 Espacos Quocientes

Definição 2.2.1 *: Seja E um espaço vetorial, e seja M um subespaço de E. Diremos que $x, y \in E$ são equivalentes módulo M, e escreveremos $x \equiv y(mod(M))$, quando $x - y \in M$. É claro que esta é* *uma relação de equivalência em E. Denotaremos por $\dfrac{E}{M}$ o conjunto de todas as classes de equivalência módulo M. Para cada $x \in E$, denotaremos a classe de equivalência que contém x por $\overline{x}$. Sejam para todo $\overline{x}, \overline{y} \in \dfrac{E}{M}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Pode-se verificar que estas operações estão bem definidas, e que $\dfrac{E}{M}$, com essas operações, é um espaço vetorial. além disso, a aplicação quociente é linear. O espaço vetorial $\dfrac{E}{M}$ é chamado de espaço quociente de E módulo M.*

Proposição 1 *: Sejam E um espaço normado, M um subespaço vetorial fechado de E e $\pi : E \longrightarrow \dfrac{E}{M}$ a projeção canônica. Então, a aplicação,*

$$\| \, . \, \| : \frac{E}{M} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\overline{x} \longmapsto \| \, \overline{x} \, \| = \ inf \ \{ \ \| \, x \, \| : \pi(x) = \overline{x} \ \}$$

define uma norma.

Demonstração:

i) Recorre da definação, que $\| \, \overline{x} \, \| \geq 0$

ii) $\| \, \lambda\overline{x} \, \| = \| \, \lambda\pi(x) \, \| = \ |\lambda|. \, \| \, \overline{x} \, \|$

iii) Seja $\overline{x} \in \dfrac{E}{M}$ tal que $\| \, \overline{x} \, \| = 0$. Então existe uma sequência (x_n) em $\overline{x}$ tal que $x_n \longrightarrow 0$ em E.

Portanto, $0 \in \overline{x} \; e \; \overline{x} = M$.

iv) Sejam $\overline{x}, \overline{y} \in \dfrac{E}{M}$ e sejam $x, y \in E$ tais que $\pi(x) = \overline{x} \; e \; \pi(y) = \overline{y}$.
Então, $\pi(x + y) = \overline{x} + \overline{y}$, donde segue que :

$$\| \, \overline{x} + \overline{y} \, \| \leq \| \, x + y \, \| \leq \| \, x \, \| \ + \ \| \, y \, \|.$$

Logo, por propriedade de do ínfimo, obtemos:

$$\| \, \overline{x} + \overline{y} \, \| \ \leq \ \| \, \overline{x} \, \| \ + \ \| \, \overline{y} \, \|.$$

Observação 1 *: Usaremos o fato de que:*

$$\overline{x} \in \frac{E}{M} \text{ é fechado em E, pois M é fechado em E.}$$

Observação 2 *: Nas condições da proposição acima:*

$$\| \, \overline{x} \, \| = \| \, \pi(x) \, \| \leq \| \, x \, \| \ \ \forall x \in E.$$

■

2.3 Transformações lineares limitadas

Sejam E e F dois espaços vetoriais normados, dizemos que uma aplicação $T : E \longrightarrow F$ é limitada se existe uma constante $c > 0$ tal que:

$$\| T_x \| \leq c \| x \|, \ \forall x \in E$$

Proposição 2 *$T : E \longrightarrow F$ é linear e limitada $\Longleftrightarrow$ T é contínua.*

Demonstração: $\Longrightarrow \rfloor$ Suponhamos que a aplicação $T : E \longrightarrow F$ é linear e limitada, então:

$$T(x + y) = T_x + T_y \ \forall x, y \in E \quad \text{e} \quad T(\lambda x) = \lambda T_x \ \forall \lambda \in \mathbb{R}, x \in E \, .$$

E também, existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $\| T_x \| \leq k \| x \|$, onde $k \in \mathbb{R}, x \in E$. Logo,

$$\| T_x - T_y \| = \| T(x - y) \| \leq k \ \| x - y \|.$$

Portanto, T é uma aplicação Lipschitziana e dessa forma é uniformemente contínua. Então, $T : E \longrightarrow F$ é continua.

$\Longleftarrow \rfloor$ suponhamos que T não é contínua em $x = 0$, então $\forall k \in \mathbb{N}$ existe um ponto $x_k \in E$, com $x_k \neq 0$ tal que:

$$\| T_{x_k} \| > \ k \| x_k \|.$$

Seja $y_k = \dfrac{1}{k} \dfrac{x_k}{\| x_k \|}$, então $\| y_k \| = \dfrac{1}{k} \longrightarrow 0$ se $k \longrightarrow 0$. Logo $y_k \longrightarrow 0$ em E. Mas,

$$T_{y_k} = T(\frac{1}{k} \frac{x_k}{\| x_k \|}) = \frac{1}{k \| x_k \|} T_{x_k}.$$

Daí, obtemos:

$$\| T_{y_k} \| \ = \frac{1}{k \| x_k \|} \| T_{x_k} \| \ > \frac{1}{k \| x_k \|} k \| x_k \| = 1$$

ou seja,

$$\| T_{y_k} \| \ > \ 1 \ \forall k \in \mathbb{N}. \tag{2.4}$$

Assim, $\| T_{y_k} \| \nrightarrow 0$ e portanto $T_{y_k} \nrightarrow 0$. Dessa forma, T não é continua em $x = 0$.

Em (2.4) temos :

$$\| T_{y_k} \| > \quad 1 = k\frac{1}{k} = k. \| y_k \|,$$

ou seja,

$$\| T_{y_k} \| > k. \| y_k \|, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Mostrando que T não é limitada . Logo se T é contínua então

$$\| T_{y_k} \| \leq \ k. \| y_k \| \ \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

■

Denotamos por $\mathcal{L}(E, F)$ ao espaço das transformações lineares contínuas de E em F, munido da norma:

$$\| T \| = sup_{\|x\| < 1} \| Tx \|.$$

2.4 Teorema de Banach - Steinhaus

Teorema 1 (Teorema de Banach - Steinhaus ou principio da limitação uniforme) *: Sejam E e F dois espaços de Banach, consideremos $\{T_i : i \in I\}$ uma familia (não necessariamente enumerável) de transformações lineares contínuas de E em F. Supondo que:*

$$\sup_{i \in I} \| T_i x \| \ < \infty, \ \forall x \in E,$$

então,

$$\sup_{i \in I} \| T_i \|_{\mathcal{L}(E,F)} < \infty,$$

isto é, existe uma constante c > 0 tal que :

$$\| T_i x \| \leq c \ \| x \| \ \ \forall x \in E \ e \ \forall i \in I.$$

Demonstração: Para cada $n \geq 1$, seja $x_n = \{x \in E : \| T_i x \| \ < n, \ \forall i \in I\}$.
Mostremos que x_n^C é aberto em E.
Tome $x_0 \in x_n^C$, então existe $i_0 \in I$ tal que $\| T_{i_0} x_0 \| \ > n$. Da continuidade de T_{i_0}, temos que

existe $r > 0$ tal que $\| T_{i_0}x_0 \| > \ n, \ \forall x \in B(x_0, r)$, portanto x_n^C é aberto, e dessa forma x_n é fechado.

Mostremos agora que:

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} x_n = E.$$

como $x_n \subset E, \forall n \in \mathbb{N}$ segue que $\bigcup_{n=0}^{\infty} x_n \subset E$. Agora, seja $x \in E$ e seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq \sup\limits_{i \in E} \| T_{x_n} \|$.

Temos por hipótese que $\| T_i x \| < \infty, \ \forall x \in E$. Logo $\| T_i x \| < n, \ \forall i \in I$. Daí, temos que $x \in x_n$ implica $x \in \bigcup_{n=0}^{\infty} x_n$.

Assim $E \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} x_n$. Logo $E = \bigcup_{n=0}^{\infty} x_n$.

Pelo Lema de Baire, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $int x_{n_0} \neq \emptyset$. Tomando $x_0 \in E$ e $r > 0$ tal que $B[x_0, r] \subset x_{n_0}$ temos:

$$\| T_i(x_0 + rz) \| \ \leq n_0, \ \forall i \in I \ \ e \ \ \forall z \in B[x_0, r] \subset x_{n_0}.$$

Então,

$$\| T_i(x_0 + rz) \| \ \leq n_0, \ \forall i \in I \ \ e \ \ \forall z \in B[x_0, r].$$

Assim,

$$\| T_i(x_0) + rT_i(z) \| \leq n_0 \ \forall i \in I \ \ e \ \ \forall z \in B[x_0, r].$$

ou seja,

$$\| T_i(x_0) \| + r \| T_i(z) \| \ \leq n_0, \ \forall i \in I \ \ e \ \ \forall z \in B[x_0, r],$$

ou ainda,

$$\| T_i(z) \| \ \leq \tfrac{1}{r}(n_0 - \| T_i(x_0)), \ \forall i \in I \ e \ \forall z \in B[x_0, r].$$

Portanto,

$$\| T_i \|_{\mathcal{L}(E,F)} \ \leq \tfrac{1}{r}(n_0 - \| T_i(x_0) \|) \ \forall i \in I,$$

isto é,

$$\sup_{i \in I} \| T_i \|_{\mathcal{L}(E,F)} < \infty.$$

■

Corolário 1 *: Sejam E e F espaços de Banach e seja* (T_n) *uma sucessão em* $\mathcal{L}(E,F)$ *tal que para todo* $x \in E, (T_n x)$ *converge para um limite denotado por* T_x*, então:*

i) $\sup_{n \in \mathbb{N}} \| T_n \|_{\mathcal{L}(E,F)} < \infty$

ii) $T \in \mathcal{L}(E,F)$

iii) $\| T \|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \lim_{n\to\infty} inf \| T_n \|_{\mathcal{L}(E,F)}$

Demonstração:

i) Segue do Teorema, pois $\| T_n(x) \|$ é convergente e portanto $\sup_{n \in \mathbb{N}} \| T_n(x) \| < \infty, \ \forall x \in E$.

ii) Pelo item i) T é limitada. Observe que T é linear, pois:

$$T(\alpha x + y) = \lim_{n\to\infty} [T_n(\alpha x + y)] = \alpha \lim_{n\to\infty} T_n(x) + \lim_{n\to\infty} T_n(y) = \alpha T(x) + T(y).$$

Como T é linear e limitada, segue da proposição 2 que T é contínua. Daí, $T \in \mathcal{L}(E,F)$.

iii) Seja $c > 0$, por definição :

$$\| T_n \|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{\|x\| < 1} T_n x,$$

de onde segue que:

$$\| T_n \|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \| T_n \|_{\mathcal{L}(E,F)} \| x \|, \ \forall \ x \ \in E.$$

como $\| T_n x \| \longrightarrow \| T_x \|$, segue que:

$$\| T_x \| \leq \lim_{n\to\infty} inf \| T_n x \|_{\mathcal{L}(E,F)} \ \ \forall x \in E.$$

Portanto:

$$\| T \| \leq \lim_{n\to\infty} inf \| T_n \|$$

$\blacksquare$

Corolário 2 *: Seja G um espaço de Banach e seja B um subconjunto de G e suponhamos que para todo $f \in G'$ o conjunto $\langle f, B\rangle = \bigcup_{x \in B} \langle f, x\rangle$ é limitado em $\mathbb{R}$, então B é limitado.*

Demonstração: Vamos usar o teorema de Banach-Steinhaus com $E = G$, $F = \mathbb{R}$ e $I = B$. para cada $b \in B$, seja:

$T_b : G' \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $T_b(x) = \langle f, b\rangle$. Como $\langle f, b\rangle$ é limitado em $\mathbb{R}$, então :

$\sup_{b \in B} |T_b(f)| < \infty \ \forall f \in G' \ e \ \forall b \in B$, ou seja, existe uma constante $c > 0$, tal que:

$$|\langle f, b\rangle| \leq c. \| f \| \quad \forall f \in G' \ e \quad \forall b \in B$$

o que implica $\sup_{f \in G' \ \|f\| \leq 1} |\langle f, b\rangle| \leq c, \ \forall b \in B$

do corolário 1, temos que $\| b \| \leq \ c \ \forall b \in B$. Assim B é limitado. $\blacksquare$

Corolário 3 *: Seja G um espaço de Banach e considere B' um subconjunto de G'. Suponhamos que para todo $x \in G$ o conjunto $\langle B', x\rangle = \bigcup_{f \in B'} \langle f, x\rangle$ é limitado em $\mathbb{R}$. Então, B' é limitado.*

Demonstração: Apliquemos o Teorema de Banach-Steinhaus com $E = G$, $F = \mathbb{R}$ e $I = B'$. Para cada $b \in B'$, seja $T_b : G \to \mathbb{R}$, definida por $T_b(x) = \langle b, x\rangle$. Como $\langle B', x\rangle$ é limitado em $\mathbb{R}$, então, $\sup_{b \in B'} |T_b(x)| < \infty, \forall x \in G'$, e pelo Teorema de Banach-Steinhaus existe uma constante $c > 0$ tal que:

$$|\langle b, x\rangle| \leq c \| x \|, \forall b \in B' \ e \ \forall x \in G \Rightarrow \sup_{x \in G_{\|x\| \leq 1}} \left|\langle f, b\rangle\right| \leq c, \forall b \in B.$$

Portanto, $\| b \| \leq c, \forall b \in B'$ implicando que B' é limitado. $\blacksquare$

2.5 Teorema da aplicação aberta

Teorema 2 (Teorema da aplicação aberta) *: Sejam E e F espaços de Banach e seja $T \in \mathcal{L}(E, F)$ uma transformação linear sobrejetora. Então existe uma constante $c > 0$ talque: $B(0, c) \subset T(B(0, 1))$ e portanto T é uma aplicação aberta.*

Observação 3 *: T leva aberto em aberto.*

De fato, seja $U \subset E$ um aberto e seja $y_0 = T_{x_0} \in T(U)$. Seja $r > 0$ tal que:

$$B(x_0, r) \subset U, \text{ isto é, } x_0 + B(0, r) \subset U$$

então $T(x_0 + B(0,r)) \subset T(U)$, implica que $T(x_0) + T(B(0,r)) \subset T(U)$, logo $y_0 + T(B(0,r)) \subset T(U)$. Mas $B(0, cr) \subset T(B(0,r))$ implica $y_0 + B(0, cr) \subset y_0 + T(B(0,r))$. Portanto $B(y_0, rc) \subset T(U)$.

Demonstração: A prova desse teorema será feita em duas etapas.

1ª etapa: Mostremos que se T é uma transformação linear sobrejetora de E em F, então existe uma constante $c > 0$ tal que $B(0, 4c) \subset T[B(0,1)]$.

De fato, seja $x_n = nT[B(0,1)], n = 1, 2, \cdots$. Temos que x_n é uma sequência de subconjuntos fechados de F.

Mostremos agora que :

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} x_n = F.$$

É claro que $\bigcup_{n=0}^{\infty} x_n \subset F$, pois $x_n \subset F$. Devemos provar que $F \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} x_n$.

Dado $y \in F$ e seja $x \in F$ tal que $y = Tx$. Consideremos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$x \in B(0, n_0) \Longrightarrow T_x \in T(B(0, n_0)) \subset T[B(0,1)]) = n_0 T[B(0,1)] = x_{n_0}.$$

Logo $y \in x_{n_0}$ implica que $y \in \bigcup_{n=0}^{\infty} x_n$. Portanto $\bigcup_{n=0}^{\infty} x_n = F$.

Segue do Lema de Baire que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $int x_{n_0} \neq \emptyset$, isto é,

$$int(n_0 T[B(0,1)]) \neq \emptyset \Longrightarrow int(T[B(0,1)]) \neq \emptyset.$$

De fato, seja $z = n_0 y \in int(n_0 T[B(0,1)])$ e seja $\epsilon > 0$ tal que:

$B(z, \epsilon) \subset n_0 T[B(0,1)] \Longrightarrow B(\frac{z}{n_0}, \frac{\epsilon}{n_0}) \subset T[B(0,1) \Longrightarrow B(y, \frac{\epsilon}{n_0}) \subset T[B(0,1)]$,

onde $y = \dfrac{z}{n_0}$.

Seja $y_0 \in int(T[B(0,1)])$ e seja $c > 0$ tal que $B(y_0, 8c) \subset T[B(0,1)]$.

Em particular y_0 e $-y_0$ pertencem a $T[B(0,1)]$ e teremos:

$$-y_0 + B(y_0, 8c) \subset T[B(0,1)] + T[B(0,1)].$$

disso resulta que :

$$B(0,8c) \subset T[B(0,1)] + T[B(0,1)].$$

Agora, sendo $T[B(0,1)]$ convexo, então:

$$T[B(0,1)] + T[B(0,1)] = 2T[B(0,1)].$$

Portanto,

$$B(0,8c) \subset 2T[B(0,1)] \Longrightarrow B(0,4c) \subset T[B(0,1)].$$

2ª etapa: Seja $T \in \mathcal{L}(E,F)$ que verifica $B(0,4c) \subset T[B(0,1)]$. Mostremos que $B(0,1) \subset T[B(0,1)]$ para algum $c > 0$.
Dado $y \in F$ com $0 < \| y \| < c$, procuremos $x \in E$ com $\| x \| < 1$, tal que $T_x = y$.
Temos que dado $\epsilon > 0$, existe $z \in E$ tal que $\| z \| < \dfrac{1}{4}$ tal que $\| y - Tz \| < \epsilon$, pois

$$\| y \| < c \Longrightarrow y \in \frac{1}{4}B(0,4c) \subset \frac{1}{4}T[B(0,1)] = T[B(0,\frac{1}{4})].$$

Desde que $y \in T[B(0,\frac{1}{4})], \forall \epsilon > 0$ existe $B(y,\epsilon)$ tal que $B(y,\epsilon) \cap T(B(0,\frac{1}{4})) \neq \emptyset$.
Em particular tomando $\epsilon = \dfrac{c}{4}$ temos que $B(y,\frac{c}{4} \cap T(B(0,\frac{1}{4}) \neq \emptyset$. Logo, existe $x_1 \in E \ \ e \ \ x_1 \in B(0,\frac{1}{4})$, isto é, $\|x_1\| < \dfrac{1}{4} \ \ e \ \ T_{x_1} \in B(y,\frac{c}{4})$.
Logo $\|y - T_{x_1}\| < \dfrac{1}{4}$.
Procedendo de maneira análoga com $y - Tx_1$ no lugar de y e $\epsilon = \dfrac{c}{8}$, obtemos $x_2 \in E$ com $\|x_2\| < \dfrac{1}{8}$ e $\|(y - T_{x_1}) - x_2\| < \dfrac{c}{8}$.
Prosseguindo assim, construíremos por recorrência, uma sequência z_n tal que $z_n = x_1 + x_2 + + \cdots + x_n$, onde:

$$\| z_n \| < \frac{1}{2^{n+1}} e \| y - T(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \| < \frac{1}{2^{n+1}} e \| y - T(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \| < \frac{c}{2^{n+1}}, n = 1, 2, \cdots, n \quad (2.5)$$

A sequência $z_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ é de Cauchy em E.
De fato, para $n, m \in E$ e $n > m$, temos:
$\| z_n - z_m \| = \| (x_1 + x_2 + \cdots + x_m + \cdots + x_n) - (x_1 + x_2 + \cdots + x_m) \| \Longrightarrow \| z_n - z_m \| =$
$= \| x_{m+1} + \cdots + x_n \| \leq \dfrac{1}{2^{m+2}} + \cdots + \dfrac{1}{2^{n+1}} = \displaystyle\sum_{k\,=\,m+1}^{n} \frac{1}{2^{k+1}} \longrightarrow 0$, se $m, n \longrightarrow \infty$.
Portanto existe $x \in E$, com $\| x \| < 1$, tal que $z_n \longrightarrow x$ e como T é continua $Tx = \lim\limits_{n\to\infty} Tx_n$. Da equação (2.5) segue que $y = Tx$. ∎

Corolário 4 *: Sejam E e F espaços e Banach e seja T uma aplicação linear contínua e bijetiva . Então a transformação $T^{-1}: F \longrightarrow E$ é continua.*

Demonstração: Pelo Teorema 2, existe uma constante $c > 0$ tal que $B(0, c) \subset T(B(0, 1))$.
Logo se existe $x \in E$ e $\| T_x \| < c$, então $T_x \in B(0, c) \subset T(B(0, 1))$, implica $x\ in\ B(0, 1)$, pela injetividade de T. Assim $\| x \| < 1$.
Se $x \neq 0$ então $\| \dfrac{x}{\| x \|} \| = 1$ e portanto $\| T(\dfrac{x}{\| x \|}) \| \geq c$ donde $\| T_x \| \geq c, \| x \|$.
É claro que que a última desigualdade vale se $x = 0$ e portanto $\| x \| \leq \dfrac{1}{c} \| T_x \| \ \ \forall x \in E$.
Resulta que $\| T_y^{-1} \| \leq c \| y \| \ \ \forall y \in F$, o que prova que $T^{-1}: F \longrightarrow E$ é continua. ■

Observação 4 *: Seja E um espaço vetorial munido de duas normas $\| \,.\, \|_1$ e $\| \,.\, \|_2$. suponhamos que E munido com qualquer das normas acima é um espaço de Banach e que existe $c_1 > 0$ tal que:*

$$\| x \|_2 \leq c_1 \| x \|_1 \ \forall x \in E.$$

Então, existe uma constante c_2 tal que:

$$\| x \|_1 \leq c_2 \| x \|_2, \ \forall x \in E$$

e d Em particular $\| \,.\, \|_1$ e $\| \,.\, \|_2$ são equivalentes e denotamos $\| \,.\, \|_1 \sim \| \,.\, \|_2$
De fato, aplicando o Coralário 4, com $E = (E, \| \,.\, \|_1), F = (F, \| \,.\, \|_2)$ e $T = Id$, temos que Id: $F \longrightarrow E$ é contínua e portanto existe $c_2 > 0$ tal que :

$$\| Id(x) \|_1 \ \leq \ c_2 \| Id(x) \|_2 \Longrightarrow \| x \|_1 \ \leq \ c_2 \| x \|_2 \ \ \forall x \in E.$$

Observação 5 *: A condição E e F serem espaços de Banach não pode ser suprimida da hipótese do teorema 2, como mostra o exemplo abaixo.*

Exemplo 2.5.1 *: Consideremos $E = C([0, 1])$ munido das normas:*

$$\| f \| = sup_{t \in [0,1]} |f(t)| \ e \ \| f \|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt \ .$$

Mostra-se que $(E, \| \,.\, \|)$ é um espaço de Banach e $(E, \| \,.\, \|_1)$ não é um espaço de Banach.
Como $\| f \|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt \leq \sup_{t \in [0,1]} |f(t)| = \displaystyle\int_0^1 \| f \| \, dt \ = \| f \| \int_0^1 dt \ = \| f \| \ .$

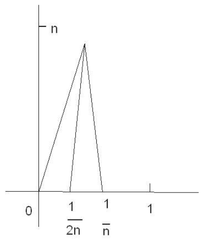
Qualquer que seja f $\in E$

$$Id_E : (E, \|\ .\ \|) \longrightarrow (E, \|\ .\ \|_1) \text{ é contínua.}$$

Por outro lado para cada $n \geq 1$, seja f_n contínua em [0,1] tal que:

$$f_n(t) = \begin{cases} n & se \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{n} \\ 0 & se \quad \frac{1}{n} < t \leq 1 \end{cases}$$

Então $\| f_n \| = n$ e $\| f_n \|_1 = \dfrac{1}{2}$, para todo $n \geq 1$.



Provando que $Id_E : (E, \|\ .\ \|_1) \longrightarrow (E, \|\ .\ \|)$ não é contínua.

2.6 Teorema do gráfico fechado

Teorema 3 *: [Teorema do gráfico fechado]: Sejam E e F espaços de Banach e seja $T : E \to F$ uma aplicação linear. Se o gráfico de T é fechado então T é contínua. (A recíproca vale mesmo que T não seja linear).*

Demonstração: Consideremos em E as seguintes normas: $\| x \|_1 = \| x \|_E + \| Tx \|_F$ (norma do gráfico) e $\| x \|_2 = \| x \|_E$. O gráfico de T, $G(T)$ sendo fechado então, $(E, \|.\|_1)$ é um espaço de Banach.
De fato, seja (x_n) uma sucessão de Cauchy em $(E, \|.\|_1)$. Então: (x_n) e (Tx_n) são sucessões de Cauchy em E e F respectivamente. Então temos:

$$x_n \to x \ em \ (E, \|.\|_E) \ e \ Tx_n \to y \ em \ (F, \|.\|_F).$$

Como $G(T)$ é fechado, então $(x, y) \in G(T)$, isto é, $y = Tx$. Temos que:

$$\|x_n - x\|_1 = (\|x_n - x\|_E + \|Tx_n - Tx\|_F) \to 0 \ se \ n \to \infty.$$

Por outro lado, $||x||_2 \leq ||x||_1$ e portanto, $||.||_1 \approx ||.||_2$. Logo, existe $c > 0$ tal que:

$$||x||_1 \leq c\, ||x||_2 \,.$$

Assim,

$$||Tx||_F \leq (||x||_E + ||Tx||_F) = ||x||_1 \leq c\, ||x||_E \,.$$

Portanto T é contínua. ■

Exemplo 2.6.1 *Seja* $C^1([0,1])$ *o espaço vetorial real das funções continuamente diferenciaveis no intervalo* $[0,1]$ *em* $\mathbb{R}$*, munido da norma* $\|\ f\ \| = \sup_s up \ _{t\ \in\ [0,1]} |f(t)|$*, que é um espaço de Banach.*

Consideremos E = $C^1([0,1])$, $F = C([0,1])$ e a aplicação $T : E \longrightarrow F\ ;\ f \longmapsto T(f) = f'$.

<u>**Afirmação:**</u> Gr(T) é fechado em E x F .

Com efeito , seja $(f_n, T(f_n))_{\ n\ \in\ \mathbb{N}}$ uma sequência em Gr(T) convergindo para (f , g) ∈ E x F . Então, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para f em $[0,1]$ e $g = f'$. Logo, $(f,g) \in Gr(T)$, provando que é fechado em E x F.

Finalmente vejamos que T não é contínua.Consideremos $f_n(t) = \dfrac{sen(nt)}{\sqrt{n}}$, $(n\ \geq\ 1, t \in [0,1])$. Como

$$|f_n(t)| = |\frac{sen(nt)}{\sqrt{n}}|\ \leq\ \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ para todo } n\ \geq\ 1 \text{ e para } t \in [0,1],$$

então $(f_n)_{\ n\ \geq\ 1}$ converge para 0 em E, por outro lado:

$f_n'(t) = \dfrac{\sqrt{n}.[sen(nt)]' + [sen(nt)].[\sqrt{n}]'}{(\sqrt{n})^2} = \dfrac{\sqrt{n}.n.cos(nt) + sen(nt).0}{n} = \sqrt{n}.cos(nt)$, para todo $n\ \geq\ 1\ \ e\ \ t \in [0,1]$. Logo

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(o) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty$$

Demonstração: Portanto, T não é contínua . ■

Capítulo 3

Aplicações

Nesta seção mostraremos a equivalência entre três importantes teoremas da análise funcional (O Teorema da aplicação Inversa, O Teorema da Aplicação Aberta e O Teorema do Gráfico Fechado).

Sejam E e F espaços de Banach e $T : E \longrightarrow F$ uma aplicação linear, temos:

a) Teorema da Aplicação Inversa : Se T é uma bijeção contínua, então T^{-1} é contínua;

b) Teorema da Aplicação Aberta : Se T é contínua e sobrejetiva, então T é uma aplicação aberta, isto é, T(G) é aberto em F, para todo G em E;

c) Teorema do Gráfico Fechado : Se o gráfico de T é fechado em E x F, então T é contínua.

Mostremos que esses três importantes teoremas da análise funcional estão relacionados entre si.

Demonstração:

i) b) $\Longleftrightarrow$ a)

$\Longrightarrow\rfloor$ Suponhamos que G é um aberto em E. Provaremos que $(T^{-1})^{-1}(G)$ é um aberto em E. Mas temos que $(T^{-1})^{-1}(G) = T(G)$, o qual é aberto em F. Assim por hipótese $T^{-1} : F \longrightarrow E$ é contínua.

$\Longleftarrow\rfloor$ Suponhamos que G é é um aberto em E e $T : E \longrightarrow F$ é contínua e sobrejetiva e vamos mostrar que T é aberta.

Consideremos o espaço quociente $\dfrac{E}{N(T)}$, onde N(T) é um subespaço fechado (núcleo de T) de E. Agora consideremos a aplicação: $\overline{T} : \dfrac{E}{N(T)} \longrightarrow F$; $\overline{T}(\overline{x}) = T(x)$.

<u>**Afirmação:**</u> $\dfrac{E}{N(T)}$ é um espaço de Banach.

De fato, seja $\overline{x_n} \in \dfrac{E}{N(T)}$ uma sequência de Cauchy, vamos mostrar que $\overline{x_n} \longrightarrow \overline{x} \in \dfrac{E}{N(T)}$. Como $\overline{x_n}$ em $\dfrac{E}{N(T)}$ é uma sequência de Cauchy, então existe uma sequência de Cauchy (x_n) em E, e sendo E completo, existe $x \in E$ tal que $x_n \longrightarrow x$ em E. Portanto pela proposição demonstrada na pg 14, obtemos:

$$\| \overline{x_n} - \overline{x} \| \leq \| x_n - x \| \longrightarrow 0. \text{ Portanto } \overline{x_n} \longrightarrow \overline{x} \in \frac{E}{N(T)}.$$

Assim, $\dfrac{E}{N(T)}$ é um espaço normado completo, pois toda sequência de Cauchy é convergente, dessa forma é um espaço de Banach.
Mostremos agora que $\overline{T}$ está bem definida e é injetiva.
De fato, $\overline{T}(\overline{x}) = \overline{T}(\overline{y}) \Longleftrightarrow T(x) = T(y) \Longleftrightarrow T(x) - T(y) = 0 \Longleftrightarrow T(x-y) = 0 \Longleftrightarrow \overline{T}(\overline{x} - \overline{y}) = 0 \Longleftrightarrow \overline{x} - \overline{y} \in N(T) \Longleftrightarrow \overline{x} = \overline{y} \Longrightarrow \overline{T}$ é injetiva.
Notemos também que $\overline{T}$ é sobrejetiva.
De fato, pois pela definição , a sobrejetividade de $\overline{T}$ segue da sobrejetividade de T.
Seja agora $\overline{x} \in \dfrac{E}{N(T)}$. Então, $\overline{T}(\overline{x}) = \overline{T}(\overline{y})$ o que implica que:

$$\| \overline{T}(\overline{x}) \| = \| \overline{T}(\overline{y}) \| = \| T(y) \| \leq \| T \| \| y \|.$$

O que acarreta,

$$\frac{\| \overline{T}(\overline{x}) \|}{\| T \|} \leq \| y \|, \ \forall y \in \overline{x}.$$

E daí,

$$\frac{\| \overline{T}(\overline{x}) \|}{\| T \|} \leq \inf_{\ y \in \overline{x}} \| y \|.$$

O que implica $\overline{T}$ é uma bijeção contínua. Logo, a aplicação $\overline{T} : \dfrac{E}{N(T)} \longrightarrow F$ tem inversa contínua.
Agora, se G é um aberto em E, então $\overline{G} \subset \dfrac{E}{N(T)}$ é um aberto em $\dfrac{E}{N(T)}$, pois a projeção π (ver o gráfico a seguir) é uma aplicação aberta.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "\pi"'] & & F \\ & \frac{E}{N(T)} \arrow[ur, "\overline{T}"'] & \end{tikzcd}$$

Daí, segue que $T(G) = \overline{T}(\overline{G})$ é um aberto em F, pois $\overline{T}$ é um homeomorfismo.

ii) (c) $\Longleftrightarrow$ (a)

$\Longrightarrow \rfloor$ Como E e F são espaços de Banach então E x F também é um espaço de Banach, com a norma $\| (x, y) \| = \| x \| + \| y \|$.

De fato, sejam $x_n \in E \; e \; y_n \in F$ sequências de Cauchy, temos que:

$$x_n \longrightarrow x \in E \; e \; y_n \longrightarrow y \in F, \text{ quando } n \longrightarrow \infty.$$

Seja $(x_n, y_n) \in E \; x \; F$ de forma que :

$$\| (x_n, y_n) - (x, y) \|_{E \; x \; F} = \| x_n - x \| + \| y_n - y \| \longrightarrow 0 \text{ quando n} \longrightarrow \infty.$$

Logo,

$$(x_n, y_n) \longrightarrow (x, y) \in E \; x \; F.$$

Assim, E x F é um espaço de Banach.

Desde que G(T) é fechado, então G(T) (gráfico de T)também é um espaço de Banach, provamos isso na demonstração do teorema 3 (teorema do gráfico fechado).

Defina a aplicação:

$$p : G(T) \longrightarrow \text{E}$$
$$p(x, T(x)) \longrightarrow p(x, T(x)) = x$$

Afirmação: p é linear, bijetiva e contínua.

De fato,

- Temos que:
  $p(\lambda(x, T(x)) + (y, T(y))) = p(\lambda x + y, \lambda T(x) + T(y)) = \lambda x + y = \lambda p(x, T(x)) + p(y, T(y))$.
  Portanto p é linear .

- Se $p(x, T(x)) = p(y, T(y))$, implica que $x = y$, assim $T(x) = T(y)$ e portanto, $(x, T(x)) = (y, T(y))$, ou seja, p é injetiva.
  Seja x $\in E$, então $(x, T(x)) \in G(T)$ tal que $p(x, T(x)) = x$. Portanto, p é sobrejetiva. Logo p é bijetiva.

- Temos que:

$$\| p((x, T(x)) \|_{E \times F} = \| x \|_E \leq \| x \|_E + \| T_X \|_F = \| (x, T(x)) \|_{E \times F}.$$

ou seja, p é contínua.

Pelo teorema da aplicação inversa, obtemos que:

$$p^{-1} : E \longrightarrow \text{G(T)}$$
$$\text{x} \longmapsto p^{-1}(x) = (x, T(x))$$

é contínua. Logo, existe $c > 0$ tal que: $\| p^{-1}(x) \| \leq c \| x \|$ o que implica que:
$\| (x, T(x)) \|_{G(T)} \leq c \| x \|_E \Longrightarrow \| x \|_E + \| T_X \|_F \leq c \| x \|_E \Longrightarrow \| T_X \|_F \leq c \| x \|_E$.
Portanto, T é contínua.
$\Longleftarrow\rfloor$ Suponhamos que $T : E \longrightarrow F$ é uma bijeção contínua. Então, $G(T) = \{ (x, T(x)); x \in E \}$ é um subespaço fechado de $E \times F$.
De fato, seja $x \in E$ e $y \in F$, onde $y = T(x)$, $\forall x \in E$, temos que:
$(x, y) \in E\ x\ F$, mas $(x, y) = (x, T(x)) \in G(T)\ \forall x \in E$
Além disso,

$$\| (x, T(x) \|_{E\ x\ F} = \| x \|_E + \| T(x) \|_F \leq \| x \|_E + \| T \|_F \ \| x \|.$$

Logo G(T) é fechado.
Defina:

$$\phi : E\ x\ F \longrightarrow F\ x\ E$$
$$(x, y) \longmapsto \phi(x, y) = (y, x)$$

Afirmação: ϕ é uma bijeção linear contínua, logo existe

$$\phi^{-1} : F\ x\ E \longrightarrow E\ x\ F$$
$$(y, x) \longmapsto \phi^{-1}(y, x) = (x, y)$$

contínua.

Note que : $\phi(G(T)) = G(T^{-1})$. ■

Como $\phi(G(T))$ é fechado em $F \times E$ então $G(T^{-1})$ é fechado, o que implica que pelo Teorema do Gráfico Fechado , que T^{-1} é continua.

Portanto, provamos a equivalência entre o Teorema da Aplicação Aberta, o Teorema da Aplicação Inversa e o Teorema do Gráfico Fechado. Sendo assim podemos dizer que o Teorema daAaplicação Aberta e o Teorema do Gráfico Fechado implicam um no outro.

Referências Bibliográficas

[1] KREYSZIG, Erwin. Introductory analysis with applications. university of wiley classics Library,1989.

[2] WAWRZYNCZYK Antoni. Introduccion analysis functional, $1^a ed$. Iztapalapa. México , D, F, 1993.

[3] H. Brezis, Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations, , Springer Science+Business Media, LLC 2011.

[4] Enciclopedia livre Wikipedia. Disponível em: *http://pt.wikipedia.org/wiki/Stefan-Banach.* Acesso em 5 de jun 2012.

[5] Enciclopedia livre Wikipedia . Disponível em: *http://pt.wikipedia.org/wiki/Hugo-Steinhaus* . Acesso em 5 de jun 2012. bibitem httphttp://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Banach.html. Acesso em 25 de jun 2012.

[6] http://www.ebah.com.br/content/ABAAABIWcAA/analise-funcional-jorge-mujica.Acesso em 25 de jun 2012.

[7] http://www.dec.ufcg.edu.br/biografias/. Acesso em 25 de jun 2012.