



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS, TECNOLOGIA E SAÚDE  
COORDENAÇÃO DE ENGENHARIA CIVIL**

**TÚLIO RAUNYR CÂNDIDO FELIPE**

**VIBRAÇÃO EM ESTRUTURAS RETICULADAS DE CONCRETO  
ARMADO**

**ARARUNA - PB  
2014**

**TÚLIO RAUNYR CÂNDIDO FELIPE**

**VIBRAÇÃO EM ESTRUTURAS RETICULADAS DE CONCRETO  
ARMADO**

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC)  
apresentado à Universidade Estadual da Para-  
íba como requisito parcial para à obtenção  
do título de Bacharel em Engenharia Civil  
pela Universidade Estadual da Paraíba.

Orientador: Prof. Me. Wesley Imperiano Gomes de Melo

**ARARUNA - PB  
2014**

É expressamente proibida a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano da dissertação.

315 Felipe, Túlio Raunyr Cândido  
Vibração em estruturas reticuladas de concreto armado  
[manuscrito] : / Túlio Raunyr Cândido Felipe. - 2014.  
58 p. : il. color.

Digitado.  
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Civil) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Tecnologia e Saúde, 2014.

"Orientação: Prof. Me. Wesley Imperiano Gomes de Melo,  
Departamento de Engenharia Civil".

"Co-Orientação: Dr. José Jamilton Rodrigues dos Santos,  
Departamento de Engenharia Civil".

1. Vibração. 2. Sistemas contínuos. 3. Vigas. I. Título.  
21. ed. CDD 620.3

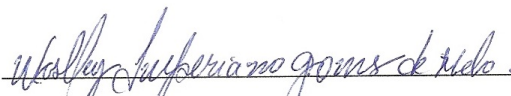
**TÚLIO RAUNYR CÂNDIDO FELIPE**

**VIBRAÇÕES EM ESTRUTURAS RETICULADAS DE CONCRETO ARMADO**

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC)  
apresentado à Universidade Estadual da  
Paraíba como requisito parcial à obtenção  
do título de Bacharel em Engenharia Civil  
pela Universidade Estadual da Paraíba.

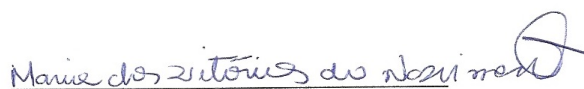
Aprovado pela banca examinadora em : 12 de dezembro de 2014.

**BANCA EXAMINADORA**



**Prof. Me. Wesley Imperiano Gomes de Melo**

Orientador – UEPB



**Profa. Ma. Maria das Vitórias do Nascimento**

Examinadora – UEPB



**Prof. Me. Valdecir Alves dos Santos Júnior**

Examinador – UEPB

**VIBRAÇÃO EM ESTRUTURAS RETICULADAS DE CONCRETO  
ARMADO**

*Viva a vida como se fosse um operador temporal, pois, como este, a taxa que rege seu comportamento é variável com o tempo, ou seja, à medida que envelhecemos, a expansão de neurônios é uma taxa que depende também do tempo e da capacidade de adquirir conhecimento. No entanto, precisamos excitá-los para obter maiores proveitos de nossa capacidade intelectual.*

Dedico este trabalho aos meus pais, Manoel Enedino Felipe e Maria de Fátima Cândido Felipe, por ter me concedido uma educação de qualidade e incentivado ao longo da minha formação acadêmica.

A meus irmãos, Tiago, Kallynne e Karolynne, pessoas especiais que sempre acreditaram na realização do meu sonho.

Aos meus avôs maternos Maria José da Conceição e Gentil Cândido Pereira (*in memorian*) e avôs paternos Zulmira Minervino da Silva (*in memorian*) e Otávio Enedino Felipe (*in memorian*), pessoas estas que ficarão eternamente guardadas na minha memória.

## AGRADECIMENTOS

Não posso deixar de dedicar o meu primeiro agradecimento a Deus, que representa a imagem mais presente de toda a minha vida. Estendo esse agradecimento a meus pais Manoel Enedino e Maria de Fátima, aos meus irmãos Tiago, Kallynne e Karollynne e familiares, como também a minha noiva Kaliandra pelo incentivo nos momentos difíceis da elaboração desta pesquisa.

Agradeço muito aos professores colaboradores que participaram na elaboração deste trabalho de conclusão de curso em especial ao professor Wesley Imperiano Gomes de Melo, pela dose extra de conhecimento e incentivo, que minimizaram as minhas dificuldades na realização desse trabalho; ao professor João Hugo Baracuy o meu primeiro orientador em projetos de extensão na universidade, que juntos fizemos um exitoso trabalho para o município de Araruna e cidades circunvizinhas no que se trata em captação de água de chuvas; e ao diretor do Campus VIII, professor Raimundo Leidimar Bezerra, um exemplo de profissional a ser seguido: dedicado, humilde, extremamente competente e ainda um ídolo. Também estendo este agradecimento ao coordenador do curso de engenharia civil professor Valdecir Alves dos Santos Júnior, um ser humano diferenciado nas suas atitudes, um exemplo para a minha vida profissional e acadêmica.

Ao professor José Jamilton Rodrigues dos Santos uma pessoa especial e alegre que sempre me incentivou na busca do conhecimento, não só pelas disciplinas ministradas, mas como uma forma paralela de aprender novos conteúdos fora da sala de aula. Agradeço pelo privilégio de tê-lo não apenas como orientador, mas como um amigo.

Agradeço ao Departamento de Engenharia Civil da Universidade Estadual da Paraíba, no conjunto de seus professores e funcionários, por oferecer um ensino de qualidade. Agradeço aos meus amigos Advanaldo, Everton, Valter, Valdemar, Joaldo e aos meus colegas da graduação por sempre acreditarem na minha pessoa. Por fim, agradeço a minha tia Graça Cândido, seu esposo Severino Almeida e seu filho Júnior Almeida por me ajudarem financeiramente no decorrer da minha formação acadêmica, pessoas estas que sou eternamente grato.



## RESUMO

Este trabalho versa sobre o estudo da vibração em estruturas reticuladas de concreto armado devido às forças dinâmicas com a utilização dos meios contínuos para descrever este fenômeno. Vibração é entendida como qualquer movimento que se repete, regular ou irregularmente, num intervalo de tempo. O estudo de meios contínuos teve seu início com Timoshenko, onde o mesmo verificou que um sistema contínuo não pode ser dividido, possuindo um número infinito de graus de liberdade sendo também conhecidos como sistemas com parâmetros distribuídos. Isto implica que a análise do problema da vibração em um sistema contínuo recai em equações diferenciais parciais em que na maioria das vezes as condições de contorno não conduzem as soluções analíticas das mesmas. Portanto, a análise da vibração devido a sua complexidade é descrita em sistemas com apenas um grau de liberdade. O objetivo geral deste trabalho foi demonstrar a obtenção da deflexão ocasionada pela vibração lateral de uma viga devido à ação dinâmica do vento, como também a deflexão numa viga de uma ponte causada por uma carga móvel, utilizando as Séries de Fourier e o método de separação de variável para determinar a solução da equação diferencial parcial que rege o comportamento deste fenômeno. A metodologia consistiu na modelagem do fenômeno e suas condições de contorno para diferentes tipos de vigas. A estabilidade global de uma estrutura está relacionada com sua capacidade de suportar as forças externas que geram perturbações, como por exemplo, a vibração, pois a mesma causa deflexões nas vigas e rotações nos pilares que futuramente comprometerão sua função estrutural. Contudo, as normas brasileiras regulamentadoras não apresentam um método de cálculo refinado para determinar o acréscimo das deformações devido a vibração em estruturas de concreto armado fazendo com que os projetistas estruturais utilizem normas internacionais, adaptando as suas necessidades.

**Palavras-Chave:** Vibração. Sistemas contínuos. Teoria da viga de Temoshenko.

## ABSTRACT

This work deals with the study of vibrations in reinforced concrete reticulated structures due to dynamic forces using of continuous media to describe this phenomenon. Vibration is understood as any movement which is repeated, regularly or irregularly, after a time interval. The study of continuous media began with Timoshenko, where it found that a continuous system can not be split, having an infinite number of degrees of freedom. This implies that the analysis of the problem of vibration in continuous system rests on partial differential equations in which most of the time the boundary conditions do not lead to analytical solutions. Therefore, the analysis of the vibration due to its complexity is described in systems with only one degree of freedom. The objective of this work is to apply the Fourier Series and the Variable Separation Method to determine the solution of partial differential equation that governs the behavior of the deflection (deformation) caused by lateral vibration of a beam due to dynamic wind action, as well as the deflection as girder bridge due to a mobile charge passing over the same. The methodology consisted in the modeling of the phenomenon and its boundary conditions for different types of beams. The global stability of a structure is related to its ability to support the external forces that generate disturbances, for example, vibration, because the same cause deflections in beams and rotations in the pillars in the future should compromise its structural function. However, the Brazilian regulatory standards do not bring a refined method of calculation to determine the increase in deformation due to vibration causing structural designers use international standards, adapting to their needs.

**Keywords:** Vibration. Continuous systems. Theory of beam Temoshenko.

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>JUSTIFICATIVA</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>OBJETIVOS</b>	<b>5</b>
3.1	Objetivo Geral . . . . .	5
3.2	Objetivo Específico . . . . .	5
<b>4</b>	<b>METODOLOGIA</b>	<b>5</b>
<b>5</b>	<b>FUNDAMETAÇÃO TEÓRICA</b>	<b>6</b>
5.1	Conceitos Dinâmicos . . . . .	6
5.2	Classificação das Vibrações . . . . .	6
5.3	Sistemas Discretos e Contínuos . . . . .	7
5.4	Efeitos Dinâmicos em Vigas de Concreto Armado . . . . .	8
5.4.1	Efeitos Dinâmicos Devido à Turbulência Atmosférica . . . . .	8
5.5	Efeitos Dinâmicos em Estruturas de Ponte de Concreto Armado . . . . .	9
5.5.1	Efeitos Dinâmicos das Cargas Móveis . . . . .	9
5.5.2	Efeitos Dinâmicos da Frenagem e da Aceleração . . . . .	9
5.5.3	Efeitos Dinâmicos do Movimento das Águas . . . . .	10
5.6	Método de Fourier para Determinar Soluções de Equações Diferenciais Parciais . . . . .	10
5.6.1	Funções Periódicas . . . . .	10
5.6.2	Coefficientes de Fourier . . . . .	11
5.6.3	Série de Fourier . . . . .	17
5.6.4	Método de Separação de Variável . . . . .	17
5.7	Determinação da Equação da Linha Elástica para Estruturas Reticuladas . . . . .	17
5.7.1	A Linha Elástica . . . . .	18
5.7.2	Relação Momento-Curvatura . . . . .	18
5.7.3	Determinação da Curvatura . . . . .	20

<b>6</b>	<b>RESULTADOS</b>	<b>22</b>
6.1	Vibração Lateral de Vigas . . . . .	22
6.1.1	Equação Diferencial do Movimento . . . . .	23
6.1.2	Vibração Livre . . . . .	27
6.1.3	Condições Iniciais . . . . .	30
6.1.4	Condições de Contorno . . . . .	31
6.1.5	Ortogonalidade de Funções Normais . . . . .	32
6.1.6	Determinação da Frequência Natural de uma Viga: Extremidade Engastada-Apoiada . . . . .	34
6.2	Vibração Forçada de uma Viga Biapoiada Devido a uma Carga Móvel . . .	38
6.2.1	Vibração Forçada . . . . .	39
6.2.2	Ponte Sujeita a um Carregamento Móvel . . . . .	42
<b>7</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>44</b>
<b>8</b>	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>46</b>

# 1 INTRODUÇÃO

A engenharia civil exige que as estruturas sejam obrigatoriamente funcionais e seguras. Além disto, existe uma busca por otimização de materiais e arquiteturas harmoniosas. Nesse contexto, há necessidade dos estudos das deformações em vigas e pilares (pórticos), oriundos das ações verticais e horizontais, proporcionando uma maior segurança para a estrutura, assim garantido sua estabilidade global.

Os sistemas estruturais podem ser composto por um tipo de elemento estrutural, entretanto, é mais comum que uma edificação seja formada por um conjunto desses elementos, principalmente pórticos, pois os mesmos resistirão à ação dos esforços horizontais, até edifício com treze pavimentos. Para edifícios altos o sistema formado por pórticos não são mais eficientes, sendo utilizados os núcleos rígidos, sistemas de contraventamentos e sistemas tubulares visando o aumento da rigidez das estruturas.

Pode então ressaltar que um pavimento de forma geral é formado por lajes e vigas, que são responsáveis por receber as ações mais significantes para a edificação, ou seja, a de utilização e serviço, transmitindo para os pilares e fundações. Dessa maneira o sistema estrutural formado deve proporcionar equilíbrio e resistência necessária, tanto no sentido horizontal quanto vertical, atuando estas simultaneamente ou não. Os engenheiros calculistas se preocupam bastante com essa questão, pois as construções devem ter um coeficiente de segurança que esteja dentro dos parâmetros da ABNT (Associação Brasileira de Normas Técnicas).

As deformações que ocorrem nos pórticos, devido carregamentos combinados, devem ser matematizados para serem expostos nos projetos de forma que o coeficiente de segurança englobe todas as deformações no estado limite último de serviço (ELS).

As estruturas reticuladas são estruturas formadas por barras, seja qual for a configuração destas, tais como: vigas, pórticos planos, pórticos espaciais, grelhas, treliças planas e treliças espaciais (GERE, 1981).

Segundo a NBR 6118 (ABNT, 2014), vigas de concreto são elementos lineares em que a flexão é predominante, ou seja, aqueles cujo comprimento longitudinal é superior á

pelo menos três vezes a maior dimensão da seção transversal, sendo também denominadas barras.

Pórticos são estruturas lineares constituídas por barras (vigas e pilares) ligadas entre si. Essas barras podem estar submetidas aos mais diversos tipos de apoios (1<sup>a</sup> gênero, 2<sup>o</sup> gênero e 3<sup>o</sup> gênero) e carregamentos (horizontais, verticais e inclinados). Eles podem ser planos ou espaciais.

Pórticos espaciais é o tipo mais geral de estrutura reticulada, visto que não há restrições na posição dos nós, direções dos membros ou direções das cargas. Os membros individuais de um pórtico espacial podem suportar forças axiais internas, binários torsores, binários fletores em ambas as direções principais da seção transversal, bem como forças cortantes em ambas as direções principais da seção transversal (GERE, 1981). Devido à complexidade da determinação dos esforços e deformações, neste caso via análise matricial, os pórticos espaciais são modelados em sistemas computacionais que trazem um refinamento mais apurado da sua análise.

Treliças planas são aquelas que se distribuem em um único plano e geralmente são utilizadas na sustentação de telhados de madeiras, telhados metálicos e estruturas de pontes. São estruturas de elementos relativamente delgados ligados entre si pelas extremidades. As cargas aplicadas às treliças podem consistir em forças concentradas aos nós, assim, a análise dos esforços deste modelo despreza os momentos fletores que por ventura venha surgir devido à existência de excentricidade na aplicação da carga no nó da treliça.

Uma treliça espacial é idêntica a uma treliça plana, exceto que os membros podem ter qualquer direção no espaço. As forças que atuam numa treliça espacial podem ter direções arbitrárias, mas qualquer binário que atue num membro deve ter seu vetor-momento perpendicular ao eixo da barra. A razão desta exigência é que um membro de uma treliça é incapaz de suportar um momento torsor (GERE, 1981).

Grelhas são estruturas reticuladas planas formadas por barras que recebem ações de forças perpendicularmente ao seu plano. Este sistema estrutural é composto por um

conjunto de vigas perpendiculares ou oblíquas entre si, que si interceptam, estando interligadas nos pontos de interseção.

De acordo com a NBR 6118/2014, na análise estrutural deve ser considerada a influência de todas as ações que possam produzir efeitos significativos para a segurança da estrutura, levando-se em conta os possíveis estados limites últimos e os estados limites de serviços definido na seção 10 da referida norma. "As ações a considerar classificam-se, de acordo com a ABNT NBR 8681 em permanentes, variáveis e excepcionais; para cada tipo de construção, as ações a considerar devem respeitar suas peculiaridades e as normas a ela aplicáveis"(NBR 6118, 2014).

Dentre estas ações, este trabalho abordou a influência da ação do vento. Os esforços devido à ação do vento devem ser considerados e determinados de acordo com o prescrito pela NBR 6123/1988, devido à turbulência atmosférica num viga de um pavimento de um edifício, como também a ação excepcional de uma carga móvel solicitando uma ponte de concreto armado. Ambas as ações geram vibrações nas peças estruturais, devendo ser verificadas no estado limite de vibrações excessivas (ELS-VE): descrita pela NBR 6118/2014.

Segundo Rao (2008) o estudo da vibração em estruturas reticuladas de concreto aramado ocorre comumente para sistemas discretos nos quais se admite que sua massa, amortecimento e elasticidade estão presentes apenas em certos pontos discretos do sistema. Na prática, os mesmos são tratados como sistemas de um grau de liberdade.

No entanto, existem casos em que não é possível identificar as massas e os amortecedores da estrutura. Assim, temos que considerar a distribuição contínua da massa, do amortecimento e da elasticidade supondo que cada um do número infinito de pontos do sistema possa vibrar. Sendo assim, podemos classificar este sistema com infinitos graus de liberdade (RAO, 2008).

De acordo com Rao (2008), se um sistema for modelado como um sistema discreto, as equações governantes são equações diferenciais ordinárias, simples de se resolver. Mas se o sistema for modelado como um sistema contínuo, as equações governantes são equações

diferenciais parciais, mais complexas e de difícil solução. A escolha por um dos modelos devem ser feita com bastante atenção devido à influência da análise estrutural do projeto, tendo em vista a otimização das estruturas reticuladas de concreto armado.

Em 1705 as Equações de Daniel provaram que o deslocamento de qualquer ponto em qualquer instante para a vibração de um objeto é igual à soma algébrica dos deslocamentos para todas as harmônicas. Essa característica foi denominada princípio da superposição, mostrando ser o mais valioso no desenvolvimento da Teoria de Vibrações e levou à possibilidade de expressar qualquer função arbitrária usando uma série infinita de senos e cossenos (RAO, 2008).

As vibrações de vigas delgadas apoiadas e engastadas foram estudadas pela primeira vez por Euler em 1744 e Bernoulli em 1751, ficando conhecida como Teoria de Euler-Bernoulli, ou da viga delgada.

Em 1921 Timoshenko, apresentou uma teoria melhorada da vibração de vigas que ficou conhecida como a Teoria da Viga de Timoshenko ou de viga grossa, que considera os efeitos da inércia de rotação e da deformação por cisalhamento (RAO, 2008).

## **2 JUSTIFICATIVA**

O crescimento vertical das cidades implica em análises de estabilidades globais mais apuradas devido à ação de forças harmônicas (ação do vento, sísmico, vibrações de máquinas, etc.) agindo em estruturas como lajes, vigas e pilares. Edifícios, como por exemplo, o Burj Khalifah em Dubai, com 828 metros de altura, deve conter estruturas que controlem a vibração no intuito de minimizar as forças dinâmicas excessivas que possam comprometer sua estabilidade.

O uso maciço do modal rodoviário no Brasil ao longo da década de 50 e a centralização da capital do país na região do planalto central proporcionou o surgimento de novas rodovias, exigindo a construção de pontes, viadutos e túneis. Como as peças estruturais (lajes, vigas e pilares) empregadas para a construção dessas obras especiais estão se tornando cada vez mais esbeltas, as análises dinâmicas são cada vez mais requeridas como



uma ferramenta de projeto, pois, os sistemas estruturais estão mais suscetíveis à vibração.

Portanto, diante das dificuldades expostas pelos problemas clássicos de engenharia civil que envolvem equações diferenciais ordinárias e equações diferenciais parciais este trabalho de conclusão de curso demonstrou de uma forma simples, o passo a passo da resolução do problema de vibração em estruturas reticuladas de concreto armado, possibilitando que alunos de graduação em engenharia civil possa entender a importância das equações diferenciais no decorrer da sua vida profissional.

## **3 OBJETIVOS**

### **3.1 Objetivo Geral**

Demonstrar a obtenção da deflexão ocasionada pela vibração lateral de uma viga devido à ação dinâmica do vento, como também a deflexão numa viga de uma ponte causada por uma carga móvel, utilizando as Séries de Fourier e o método de separação de variável para determinar a solução da equação diferencial parcial que rege o comportamento deste fenômeno.

### **3.2 Objetivo Específico**

Verificar as fragilidades das normas brasileiras regulamentadoras que tratam sobre assunto da vibração, apontado às dificuldades que os engenheiros calculistas têm em determinar os esforços adicionais devido à ação dinâmica nas estruturas de concreto armado.

## **4 METODOLOGIA**

A metodologia foi desenvolvida por meio de estudos sob a orientação dos orientadores, com a modelagem do fenômeno físico e suas condições de contorno da vibração em estruturas reticuladas de concreto armado observando suas importantes aplicações à Engenharia civil.

A modelagem do fenômeno para a vibração devido à ação dinâmica do vento foi realizada em um edifício de 14 pavimentos, em que as estruturas de contraventamentos são formadas por pórticos rígidos. Para o caso mais crítico de dimensionamento da estrutura

do edifício sobre a ação dinâmica do vento, adotou-se a viga do último andar e, estudando um elemento infinitesimal da mesma, determinou-se os esforços atuantes, os quais são fundamentais para determinar a deformação da viga.

Na modelagem do fenômeno da deflexão para a ponte de concreto armado foram utilizados os dados geométricos da ponte localizada na rodovia PB-073, nas proximidades do povoado do Bola, município de Tacima/PB. Esta obra de arte especial possui 9,50 m de largura, 23,00 m de comprimento e 5,80 m de altura, é apoiada nas extremidades por muros de arrimo. Para o modelo de cálculo adotado, considerou que o sistema é articulado em uma extremidade (apoio de 2º gênero) e apoiada na outra extremidade (apoio de 1º gênero).

## **5 FUNDAMETAÇÃO TEÓRICA**

### **5.1 Conceitos Dinâmicos**

Vibração é entendida como qualquer movimento que se repete, regular ou irregularmente, num intervalo de tempo. O movimento de um pêndulo simples e da corda em um varal são exemplos de vibrações.

Em engenharia civil estes movimentos ocorrem em elementos estruturais (vigas e pilares), quando estes estão submetidos a ações dinâmicas, como por exemplo, em edifícios e pontes sujeitos a ação sísmica ou a ação do vento.

### **5.2 Classificação das Vibrações**

As vibrações podem ser classificadas segundo Rao (2008) em:

**Vibração livre** é aquela produzida por uma perturbação inicial que não persiste durante o movimento vibratório. Como exemplo, a vibração do pêndulo simples. Depois de deslocado de sua posição de equilíbrio, o pêndulo simples permanece em movimento oscilatório sem que nenhum efeito externo intervenha.

**Vibração forçada** é provocada por um efeito externo que persiste durante o tempo em que o movimento vibratório existir. O movimento de um rotor desbalanceado é típico de uma vibração forçada.

**Vibração não amortecida** é aquela em que a energia vibratória não se dissipa, de forma que o movimento vibratório permanece imutável com o passar do tempo.

**Vibração amortecida** é aquela em que a energia vibratória se dissipa com o transcorrer do tempo de forma que os níveis vibratórios diminuem progressivamente.

**Vibração linear** é aquela que ocorre em um sistema cujos componentes atuam linearmente (a força de mola proporcional ao deslocamento, a força de amortecimento é proporcional à velocidade e a força de inércia é proporcional à aceleração).

**Vibração não linear** é aquela em que um ou mais componentes do sistema não se comporta linearmente, ou seja, a força produzida não apresenta uma relação linear com a variável cinemática a que se associa (relações quadráticas, cúbicas, logarítmicas, exponenciais, senoidais, etc.).

**Vibração determinística** é aquela em que se pode prever todas as características do movimento vibratório em qualquer instante de tempo.

**Vibração aleatória** é aquela em que não se pode prever todas as características do movimento vibratório em um dado instante de tempo.

### 5.3 Sistemas Discretos e Contínuos

Sistemas que podem ser separados em partes, de forma que cada uma delas possua um determinado número de graus de liberdade e o sistema global tenha um número finito de graus de liberdade são sistemas discretos, sendo também chamados de sistemas com parâmetros concentrados.

Um sistema contínuo é aquele que possui um número infinito de graus de liberdade sendo também conhecidos como sistemas com parâmetros distribuídos.

Graus de liberdade é o número mínimo de coordenadas independentes necessárias a descrever completamente o movimento de todas as partes que compõem um sistema vibratório.

## 5.4 Efeitos Dinâmicos em Vigas de Concreto Armado

### 5.4.1 Efeitos Dinâmicos Devido à Turbulência Atmosférica

De acordo com a norma NBR 6123/1988 item 9.1, a velocidade média do vento designada por  $\nabla$  pode admitir que a mesma mantém-se constante durante um intervalo de tempo de 10 min ou mais, provocando nas edificações, ou obras especiais (pontes, viadutos) efeitos puramente estáticos. No entanto, as flutuações da velocidade podem induzir em estruturas com vinculações flexíveis, ou seja, estruturas que possuam nós móveis ou  $\gamma_z > 1,1$ , oscilações importantes na direção de  $\nabla$ .

O conforme prescrito no item 15.5.3 da NBR 6118/2014, "O coeficiente  $\gamma_z$  de avaliação da importância dos esforços de segunda ordem globais é válido para estruturas reticuladas de no mínimo quatro andares". Este coeficiente é determinado a partir dos resultados da estrutura não deformada, ou seja, de uma análise linear de primeira ordem, para cada combinação de carregamento.

O valor de  $\gamma_z$  é dado pela seguinte expressão:

$$\gamma_z = \frac{1}{1 - \frac{\Delta M_{tot,d}}{M_{1,tot,d}}} \quad (1)$$

onde,

$M_{1,tot,d}$  é o momento de tombamento, ou seja, a soma dos momentos de todas as forças horizontais da combinação considerada, com seus valores de cálculo, em relação à base da estrutura;  $\Delta M_{tot,d}$  é a soma dos produtos de todas as forças verticais atuantes na estrutura, na combinação considerada, com seus valores de cálculo, pelos deslocamentos horizontais de seus respectivos pontos de aplicação, obtidos da análise de 1ª ordem.

Ainda a referida norma prescreve que em edificações com período fundamental  $T_1 \leq 1s$ , a influência da resposta flutuante é pequena sendo computado na determinação do fator  $S_2$ . Mas, edificações com  $T_1 > 1s$ , podem apresentar resposta flutuante na direção do vento médio. Portanto, a resposta dinâmica total é igual à superposição das respostas média e flutuante, sendo calculado pelas especificações do capítulo 9 da NBR 6123/1988.

## 5.5 Efeitos Dinâmicos em Estruturas de Ponte de Concreto Armado

### 5.5.1 Efeitos Dinâmicos das Cargas Móveis

Conforme prescrito na NBR 7187/2003 item 7.2.1.2, deve ser analisado o efeito dinâmico das cargas móveis pela teoria da dinâmica das estruturas. É permitido, no entanto, assimilar as cargas móveis a cargas estáticas através de sua multiplicação pelos coeficientes de impacto definidos a seguir:

I) nos elementos estruturais de obras rodoviárias:

$$\varphi = 1,4 - 0,007L \geq 1 \quad (2)$$

II) nos elementos estruturais de obras ferroviárias:

$$\varphi = 0,001(1600 - 60\sqrt{L} + 2,25L) \geq 1,2 \quad (3)$$

onde,  $L$  é o comprimento de cada vão teórico do elemento carregado, qualquer que seja o sistema estrutural, em metros (m).

$$F_{din} = \varphi F_{est}, \quad (4)$$

em que,  $F_{din}$  é a força dinâmica e  $F_{est}$  é a força estática. Sendo assim, as cargas estáticas são majoradas substituindo as dinâmicas no cálculo.

Ainda a referida norma estabelece, que no caso de vão desiguais, em que o menor vão seja igual ou superior a 0,70 do maior, permite-se considerar um vão ideal equivalente à média aritmética dos vãos teóricos. No caso de vigas em balanço,  $L$  é tomada igual a duas vezes o seu comprimento. Não deve ser considerado o impacto na determinação do empuxo de terra provocado pelas cargas móveis no cálculo de fundações e nos passeios das pontes rodoviárias.

### 5.5.2 Efeitos Dinâmicos da Frenagem e da Aceleração

Segundo Marchetti (2008), um veículo em movimento sobre uma ponte representa, em virtude de sua massa, uma certa "força-viva" de que é possuída. A força resultante é

chamada frenagem. Da mesma forma, ao iniciar seu movimento apoia-se sobre a estrutura transmitindo à mesma um esforço de aceleração.

De acordo com a NBR 7187/2003 item 7.2.1.5, o valor característico da força longitudinal provocada pela frenagem ou pela aceleração de veículos sobre as pontes deve ser tomado como uma fração das cargas móveis, considerados sem o coeficiente de impacto. Nas pontes rodoviárias, este valor deve ser aplicado na superfície de rolamento e igual ao maior dos seguintes valores: 0,05 do peso do carregamento do tabuleiro com as cargas móveis distribuídas, excluindo os passeios, ou 0,30 do peso do trem-tipo.

### 5.5.3 Efeitos Dinâmicos do Movimento das Águas

Segundo a NBR 7187/2003 item 7.2.6, o efeito dinâmico das ondas e das águas em movimento deve ser determinado através de métodos baseados na hidrodinâmica.

## 5.6 Método de Fourier para Determinar Soluções de Equações Diferenciais Parciais

Uma série de Fourier, nomeada em honra a Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), é a representação de uma função periódica, como uma soma de funções periódicas. As séries trigonométricas infinitas formadas por seno e/ou cosseno são chamadas séries de Fourier (FIGUEIREDO, 2007).

### 5.6.1 Funções Periódicas

Uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é periódica de período  $T$ , se  $f(x + T) = f(x)$  para todo  $x$ . Se  $T$  é um período para a função  $f$ , então  $2T$  também é um período, pois

$$f(x + 2T) = f(x + T) = f(x).$$

E, em geral,  $nT$  é um período, onde  $n$  é um número inteiro. O menor período positivo é chamado de período fundamental. Logo é usado apenas a expressão período para caracterizar o período fundamental (FIGUEIREDO, 2007).

**EXEMPLO:** O período fundamental  $T$  da função  $\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$  pode ser determinado do seguinte modo.

Sendo

$$\text{sen}\left(\frac{n\pi(x+T)}{L}\right) = \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \text{ para todo } x \in \mathbb{R},$$

Como  $\text{sen}(a+b) = \text{sen}a \cos b + \cos a \text{sen}b$ , assim

$$\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi T}{L}\right) + \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi T}{L}\right) = \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Para  $x = L/2n$ , obtemos

$$\text{sen}\left(\frac{n\pi L}{2nL}\right) \cos\left(\frac{n\pi T}{L}\right) + \cos\left(\frac{n\pi L}{2nL}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi T}{L}\right) = \text{sen}\left(\frac{n\pi L}{2nL}\right)$$

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{n\pi T}{L}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi T}{L}\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{n\pi T}{L}\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

o que implica

$$\cos\left(\frac{n\pi T}{L}\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2L}{n} \quad (5)$$

Como estamos procurando o menor valor positivo de  $T$  que satisfaça a equação (5), obtemos  $n\pi T/L = 2\pi$ , ou seja, o período fundamental é  $T = 2L/n$ . O período fundamental de  $\cos(n\pi x/L)$  é também  $2L/n$  (FIGUEIREDO, 2007).

### 5.6.2 Coeficientes de Fourier

Se uma função  $f(x)$  for expressa como a seguinte expressão

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right], \quad (6)$$

é esperando que os coeficientes  $a_n$  e  $b_n$  estejam intimamente ligados à função  $f(x)$ . Para descobrir que expressões são esses coeficientes, vamos considerar que a igualdade acima se verifica, e que a série em (6) converge uniformemente. A função  $f$  deve ser contínua e deve ser periódica de período  $2L$ , pois o período de  $\cos \pi x/L$  é  $2L$ , e  $2L$  é período para

as demais funções seno e cosseno que aparecem na série (FIGUEIREDO, 2007). Agora integrando ambos os lados da expressão, temos

$$\int_{-L}^L f(x)dx = \frac{1}{2}a_0 \int_{-L}^L dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx + b_n \int_{-L}^L \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \right)$$

Como,

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \int_{-L}^L \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = 0$$

Logo,

$$\int_{-L}^L f(x)dx = a_0 \cdot L$$

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x)dx. \quad (7)$$

No intuito de determinar os demais coeficientes, exploramos a mesma ideia e usamos as relações de ortogonalidade:

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx = 0, \quad \text{se } n, m \geq 1; \quad (8)$$

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx = \begin{cases} L, & \text{se } n = m \geq 1 \\ 0, & \text{se } n \neq m, n, m \geq 1; \end{cases} \quad (9)$$

$$\int_{-L}^L \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx = \begin{cases} L, & \text{se } n = m \geq 1 \\ 0, & \text{se } n \neq m, n, m \geq 1. \end{cases} \quad (10)$$

A demonstração poderá ser feita por meio das identidades trigonométricas. Logo para a equação (8), temos

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx = 0, \quad \text{considerando que } n = m$$

Pois, fazendo a integração por substituição,

$$u = \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \quad e \quad du = \frac{m\pi x}{L} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx,$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L u \frac{L}{m\pi} du &= \frac{u^2 L}{2m\pi} \Big|_{-L}^L = \frac{1}{2} \text{sen}^2\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \frac{L}{m\pi} \Big|_{-L}^L \\ &= \frac{1}{2} \text{sen}^2\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \frac{L}{m\pi} \Big|_{-L}^L = \frac{L}{2m\pi} \left[ \text{sen}^2\left(\frac{m\pi L}{L}\right) - \text{sen}^2\left(\frac{m\pi(-L)}{L}\right) \right] \end{aligned}$$



Portanto,

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = 0$$

Para a equação (9), temos:

Se  $n = m \geq 1$

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \int_{-L}^L \cos^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad (11)$$

Sendo,

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) &= \cos^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \\ &= \cos^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) - \left(1 - \cos^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right) \\ &= 2\cos^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) - 1 \end{aligned}$$

Daí chegamos a,

$$\cos^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \frac{\cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) + 1}{2} \quad (12)$$

Substituindo (12) em (11). Temos,

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L \frac{\cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) + 1}{2} dx &= \frac{1}{2} \int_{-L}^L \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) dx + \frac{1}{2} \int_{-L}^L dx \\ &= \frac{1}{4} \frac{L}{n\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) \Big|_{-L}^L + \frac{1}{2} x \Big|_{-L}^L \\ &= \frac{1}{4} \frac{L}{n\pi} \left[ \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi L}{L}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi(-L)}{L}\right) \right] + \frac{1}{2} L - \frac{1}{2}(-L) \\ &= \frac{1}{4} \frac{L}{n\pi} [0 - 0] + L \end{aligned}$$

Daí chegamos a,

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = L$$

Se  $n \neq m, n, m \geq 1$ , como

$$\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) = \frac{1}{2} \text{sen}\left(\left(\frac{n\pi}{L} - \frac{m\pi}{L}\right)x\right) - \frac{1}{2} \text{sen}\left(\left(\frac{n\pi}{L} + \frac{m\pi}{L}\right)x\right)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx &= \frac{1}{2} \int_{-L}^L \text{sen}\left[\left(\frac{n\pi}{L} - \frac{m\pi}{L}\right)x\right] dx - \frac{1}{2} \int_{-L}^L \text{sen}\left[\left(\frac{n\pi}{L} + \frac{m\pi}{L}\right)x\right] dx \\ &= \frac{1}{2} \text{sen}\left[\left(\frac{n\pi}{L} - \frac{m\pi}{L}\right) \frac{x^2}{2}\right] \Big|_{-L}^L - \frac{1}{2} \text{sen}\left[\left(\frac{n\pi}{L} + \frac{m\pi}{L}\right) \frac{x^2}{2}\right] \Big|_{-L}^L \\ &= \frac{1}{2} \text{sen}\left[\left(\frac{n\pi}{L} - \frac{m\pi}{L}\right) \frac{L^2}{2}\right] - \frac{1}{2} \text{sen}\left[\left(\frac{n\pi}{L} - \frac{m\pi}{L}\right) \frac{(-L)^2}{2}\right] \\ &\quad - \frac{1}{2} \text{sen}\left[\left(\frac{n\pi}{L} + \frac{m\pi}{L}\right) \frac{L^2}{2}\right] + \frac{1}{2} \text{sen}\left[\left(\frac{n\pi}{L} + \frac{m\pi}{L}\right) \frac{(-L)^2}{2}\right] \end{aligned}$$

Logo, obtemos que

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = 0$$

Para a equação (10), temos:

Se  $n = m \geq 1$

$$\int_{-L}^L \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \int_{-L}^L \text{sen}^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad (13)$$

Sendo

$$\begin{aligned} \cos\left(2\frac{n\pi x}{L}\right) &= \cos^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) - \text{sen}^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \\ &= 1 - \text{sen}^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) - \text{sen}^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \\ &= 1 - 2\text{sen}^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \end{aligned}$$

Daí chegamos a,

$$\operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \frac{1 - \cos\left(2\frac{n\pi x}{L}\right)}{2} \quad (14)$$

Substituindo (14) em (13). Assim,

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L \frac{1 - \cos\left(2\frac{n\pi x}{L}\right)}{2} dx &= \frac{1}{2} \int_{-L}^L dx - \frac{1}{2} \int_{-L}^L \cos\left(2\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ &= \frac{1}{2} x \Big|_{-L}^L - \frac{1}{4n\pi} \operatorname{sen}\left(2\frac{n\pi x}{L}\right) \Big|_{-L}^L \\ &= \frac{1}{2} L - \frac{1}{2}(-L) - \frac{1}{4n\pi} \left[ \operatorname{sen}\left(2\frac{n\pi L}{L}\right) - \operatorname{sen}\left(2\frac{n\pi(-L)}{L}\right) \right] \\ &= L - \frac{1}{4n\pi} [0]. \end{aligned}$$

Daí chegamos a,

$$\int_{-L}^L \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = L$$

Se  $n \neq m, n, m \geq 1$

Como,

$$\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) = \frac{1}{2} \cos\left(\left(\frac{n\pi}{L} - \frac{m\pi}{L}\right)x\right) - \frac{1}{2} \cos\left(\left(\frac{n\pi}{L} + \frac{m\pi}{L}\right)x\right)$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\int_{-L}^L \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx &= \frac{1}{2} \int_{-L}^L \cos\left[\left(\frac{n\pi}{L} - \frac{m\pi}{L}\right)x\right] dx - \frac{1}{2} \int_{-L}^L \cos\left[\left(\frac{n\pi}{L} + \frac{m\pi}{L}\right)x\right] dx \\
&= \frac{1}{2} \cos\left[\left(\frac{n\pi}{L} - \frac{m\pi}{L}\right)\frac{x^2}{2}\right] \Big|_{-L}^L - \frac{1}{2} \cos\left[\left(\frac{n\pi}{L} + \frac{m\pi}{L}\right)\frac{x^2}{2}\right] \Big|_{-L}^L \\
&= \frac{1}{2} \cos\left[\left(\frac{n\pi}{L} - \frac{m\pi}{L}\right)\frac{L^2}{2}\right] - \frac{1}{2} \cos\left[\left(\frac{n\pi}{L} - \frac{m\pi}{L}\right)\frac{(-L)^2}{2}\right] \\
&\quad - \frac{1}{2} \cos\left[\left(\frac{n\pi}{L} + \frac{m\pi}{L}\right)\frac{L^2}{2}\right] + \frac{1}{2} \cos\left[\left(\frac{n\pi}{L} + \frac{m\pi}{L}\right)\frac{(-L)^2}{2}\right]
\end{aligned}$$

Logo, obtemos que

$$\int_{-L}^L \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = 0$$

Agora, multiplicando (6) por  $\cos m\pi x/L$ , para  $m \geq 1$  e integrando, temos

$$\int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = a_n L \quad (15)$$

Assim, fazendo de maneira semelhante, multiplicando (6) por  $\operatorname{sen}(m\pi x/L)$ , para  $m \geq 1$  e integrando, obtemos

$$\int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = b_n L \quad (16)$$

Logo, chegamos aos coeficientes de Fourier de (7), (15) e (16), assim

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad (17)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad (18)$$

### 5.6.3 Série de Fourier

Dada uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  periódica de período  $2L$ , integrável, podemos calcular seus coeficientes de Fourier pelas equações (17) e (18). Logo

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right), \quad (19)$$

e isso significa que a expressão do lado direito é a série de Fourier de  $f$  (FIGUEIREDO, 2007).

Segundo Figueiredo (2007) "uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  será seccionalmente contínua se ela tiver apenas um número finito de descontinuidades em qualquer intervalo limitado, e será seccionalmente diferenciável se ela for seccionalmente contínua e se a função derivada  $f'$  for também seccionalmente contínua".

### 5.6.4 Método de Separação de Variável

Tomemos como exemplo uma função  $v(x, t)$ , o Método de Separação de Variáveis consiste em separar as variáveis da função  $v(x, t)$  em duas funções  $F(x)$  e  $G(t)$  tal que  $v(x, t) = F(x)G(t)$ , onde  $F(x)$  depende somente de  $x$ , e  $G(t)$  depende apenas de  $t$ . Isso implica que  $F(x)$  e  $G(t)$ , independam de  $x$  e de  $t$ . Logo, são iguais a um parâmetro  $\alpha$  (independente de  $x$  e de  $t$ ), o qual será determinado de modo que as condições de fronteira sejam satisfeitas por  $v(x, t) = F(x)G(t)$ .

Este método, juntamente com as Séries de Fourier, é bastante utilizado para determinar as soluções de equações diferenciais parciais pela sua simplicidade na resolução do problema. Para uma melhor compreensão da metodologia do método buscar referências especializadas como Figueiredo (2007) e Lorio (1981).

## 5.7 Determinação da Equação da Linha Elástica para Estruturas Reticuladas

O engenheiro calculista quando dimensiona uma estrutura de concreto armado submetido à flexão, utiliza o domínio 2 ou domínio 3, pois quando as mesmas se deformam a ruptura da estrutura provoca um "aviso prévio", porque a armadura ao escoar acarretará fissuras visíveis na viga, antes que o concreto possa romper-se por esmagamento. Sendo

assim, o estudo de deflexões em vigas na engenharia civil é fundamental na otimização de estruturas de concreto armado e na prevenção de colapsos das mesmas.

### 5.7.1 A Linha Elástica

Linha elástica é definida como o diagrama de deflexão do eixo longitudinal que passa pelo centróide de cada área da seção transversal da viga (HIBELLER, 2010).

Segundo Beer (2006), a linha elástica é entendida como a equação da curva na qual o eixo da viga é transformado sob um dado carregamento atuante ao longo da mesma.

De acordo com Timoshenko (1969), a linha elástica é a representação da forma do eixo da viga depois que se processam no plano de simetria, as forças transversais que agem nesse plano.

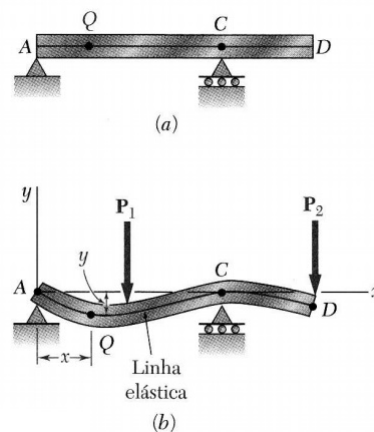


Figura 1: Representação da linha elástica. Fonte (BEER, 2006)

### 5.7.2 Relação Momento-Curvatura

Para deduzir uma expressão que dê a relação entre a curvatura e a forma da linha elástica, limitou-se escolheu o caso de uma viga inicialmente reta que é deformada elasticamente (válida a Lei de Hooke). Considerando que as cargas aplicadas a viga se encontrem no plano de simetria  $x - v$  para a área da seção transversal da viga. A Figura 2 mostra como as cargas estão distribuídas ao longo da viga. Devido a essas cargas, a deformação na viga é provocada pela força cortante interna, bem como pelo momento fletor (HIBBLER, 2010).

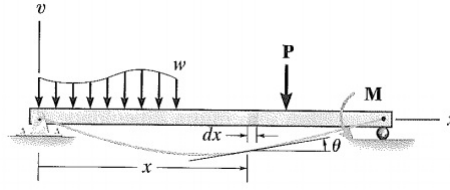


Figura 2: Viga submetida a vários carregamentos. Fonte (HIBBLER, 2010)

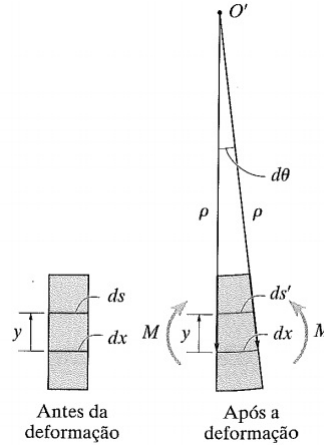


Figura 3: Deformação em um elemento infinitesimal de uma viga. Fonte (HIBBLER, 2010)

Quando o momento fletor interno  $M$  atua na viga provocando uma deformação, prolongando as linhas da seção transversal da viga deformada até se encontrarem, considerando que a seção transversal da viga continue plana (Teoria de Navier-Bernoulli), o ângulo entre as mesmas torna-se  $d\theta$  (Figura 3). O raio de curvatura para esse arco é definido como  $\rho$ , que é medida do centro de curvatura  $O'$  até  $dx$ . Assim, a deformação no arco  $ds$ , localizado em uma posição  $y$  em relação ao eixo neutro, é

$$\epsilon = \frac{ds' - ds}{ds}. \quad (20)$$

Antes da deformação o elemento diferencial da viga era dado por,

$$ds = dx = \theta. \quad (21)$$

Após as cargas atuarem na viga teremos:

$$ds' = (\rho - y)d\theta \quad (22)$$

Combinando (20),(21) e (22), obtemos

$$\epsilon = \frac{[(\rho - y)d\theta - \rho d\theta]}{\rho d\theta}$$

Daí,

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{\epsilon}{y}. \quad (23)$$

Como consideramos que a Lei de Hooke é válida, a fórmula da flexão também é válida para a nossa viga. Assim,

$$\sigma = -\frac{My}{I} = \epsilon E$$

Logo,

$$-\frac{\epsilon}{y} = \frac{M}{EI}. \quad (24)$$

Combinando (24) e (23), teremos

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}, \quad (25)$$

onde:

$\rho$  = raio de curvatura em um ponto específico sobre a curva da linha elástica e  $1/\rho$  é denominado curvatura;

$M$  = momento fletor interno na viga, no ponto onde  $\rho$  deve ser determinado;

$E$  = módulo de elasticidade do material;

$I$  = momento de inércia calculado em torno do eixo neutro.

### 5.7.3 Determinação da Curvatura

Uma forma de deduzir uma expressão para a curvatura é considerando dois pontos na linha elástica, distantes um do outro de uma distância  $ds$ . Da definição de ângulo temos

$$\begin{aligned} ds &= \rho d\theta \\ \frac{1}{\rho} &= \frac{d\theta}{ds} \end{aligned} \quad (26)$$

Para pequenos deslocamentos e pequenos ângulos, obtemos

$$\begin{aligned} ds &\approx dx \\ \theta &\approx \text{tg}\theta = \frac{dv}{dx} \end{aligned} \quad (27)$$



Levando (27) em (26), teremos

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dv}{dx} \right) = \frac{d^2v}{dx^2}$$

$$\frac{M(x)}{EI} = \frac{d^2v}{dx^2}$$

Fazendo,

$$\theta \approx \frac{dv}{dx}.$$

Daí,

$$\theta = \arctg \theta = \arctg \left( \frac{dv}{dx} \right) \quad (28)$$

Combinando (26) e (28), obteremos

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{d}{ds} \left[ \arctg \left( \frac{dv}{dx} \right) \right] = \frac{d}{dx} \left[ \arctg \left( \frac{dv}{dx} \right) \right] \quad (29)$$

Onde,

$$\frac{d}{dx} (\arctg u) = \frac{1}{(1+u^2)^{2/3}} \frac{du}{dx}$$

Daí,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2v}{dx^2}}{\left[ 1 + \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \quad (30)$$

onde  $dv/dx$  e  $d^2v/dx^2$  são a primeira e a segunda derivada da função  $v(x)$ . No entanto, como os deslocamentos e deformações são pequenos, a inclinação  $dv/dx$  é muito pequena, logo, o seu quadrado é desprezível. Escrevemos então

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2v}{dx^2} \quad (31)$$

Substituindo (25) em (31), temos

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI}. \quad (32)$$

Logo, (32) é uma equação diferencial linear de segunda ordem que governa a linha elástica.

"O produto  $EI$  é definido como ridez à flexão e, se ele varia ao longo da viga, como no caso de uma viga com altura variável, devemos expressá-lo como função de  $x$  antes de integrar a equação (79)"(BEER, 2006, p.522).

## 6 RESULTADOS

### 6.1 Vibração Lateral de Vigas

Com o desenvolvimento de técnicas avançadas de programas computacionais os estudos das forças dinâmicas em estruturas apórticadas se tornam uma atração aos engenheiros calculistas, pois agora os coeficientes de segurança utilizados para majorar os esforços (esforço normal, esforço cortante e momento fletor) estão dentro de uma faixa mais segura e eficiente. Assim, as estruturas ficaram mais esbeltas e ganharam maiores vãos, deixando os edifícios com uma arquitetura harmoniosa.

O crescimento vertical das cidades implica em análise de estabilidade global mais apurada, devido à ação do vento agindo lateralmente em estruturas como vigas e pilares. Sendo assim, este capítulo visa deduzir a equação diferencial do movimento que rege o comportamento de uma viga submetida à vibração lateral, para obter a deformação ocasionada por este fenômeno.

Um edifício é, em primeira análise, uma estrutura complexa tridimensional (pórticos espaciais), podendo este ser entendido como o agrupamento de estruturas bidimensionais (pórticos planos), em formato apórticado (quadro), Figura 4 (FERREIRA, 2005).

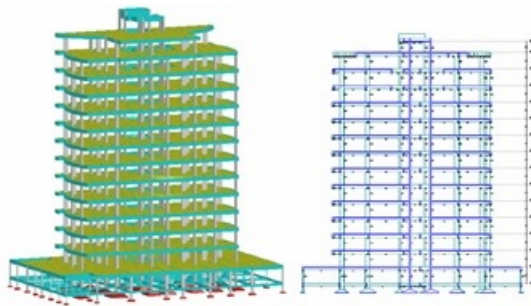


Figura 4: Edifício na sua configuração apórticada em 3D e em 2D. Fonte (FERREIRA, 2005)

Os pórticos planos podem ser classificados em pórticos simples, que não necessitam ser subdivididos, como demonstrado na Figura 5; e pórticos compostos, quando a subdivisão é o caminho para sua resolução, como apresentado na Figura 6.

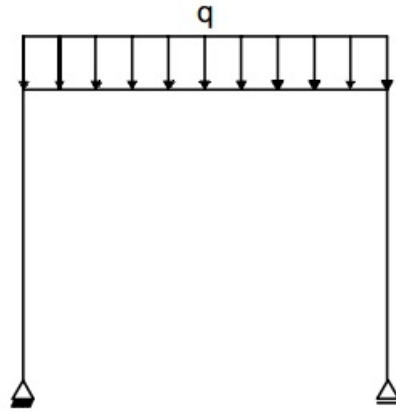


Figura 5: Pórtico plano simples

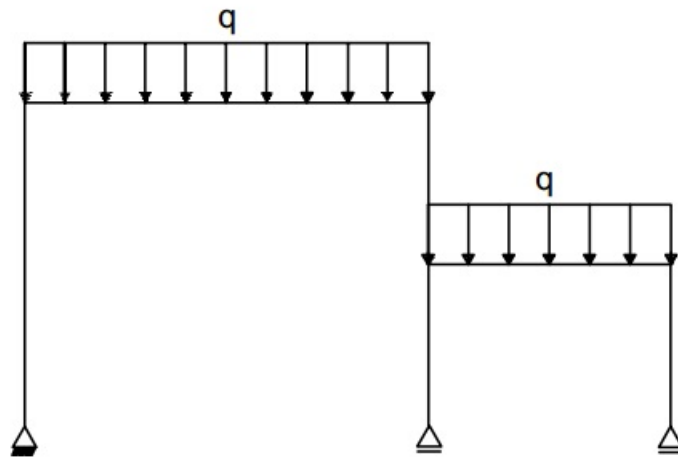


Figura 6: Pórtico plano composto.

### 6.1.1 Equação Diferencial do Movimento

Para deduzir a equação do movimento da deformação (deflexão) numa viga devido à vibração lateral do vento, considerou-se que o edifício da Figura 4 esteja submetido à variação da velocidade do vento ao longo da sua altura na direção  $x$  e na direção  $y$ . Considerando o caso mais desfavorável, ou seja, a viga que está submetida à velocidade do vento localizada no último pavimento (cobertura). Sendo a viga exercitada harmo-

nicamente por uma força externa que atua ao longo do seu comprimento. Considere o diagrama de corpo livre de um elemento infinitesimal da viga mostrado na Figura 7, onde  $M(x, t)$  é o momento fletor,  $V(x, t)$  é a força cortante e  $f(x, t)$  é a força externa por unidade de comprimento da viga. Visto que a força de inércia que age sobre o elemento da viga seja dado por:

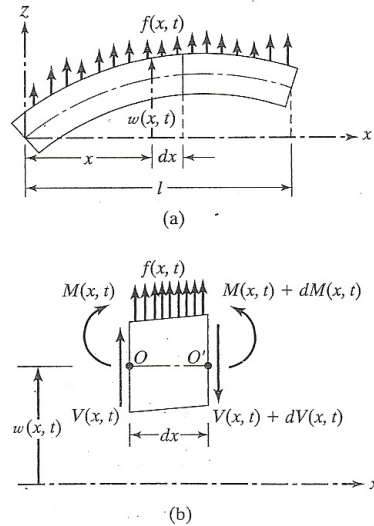


Figura 7: Flexão lateral de elemento infinitesimal de uma viga. Fonte (RAO, 2008)

$$f(\text{inércia}) = ma$$

Reescrevendo a massa,  $m$ , em função da sua massa específica e a aceleração,  $a$ , em função da posição, obtemos:

$$m = \rho A(x) dx.$$

como,

$$a = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right) = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} (x, t).$$

logo,

$$f(\text{inércia}) = \rho A(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} (x, t)$$

Fazendo o somatório das forças na direção  $z$  temos,

$$\begin{aligned}
& + \uparrow \sum F_z = \rho A(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) \\
& -(V + dV)(x, t) + f(x, t)dx + V(x, t) = \rho A(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) \\
& -dV(x, t) + f(x, t)dx = \rho A(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t). \tag{33}
\end{aligned}$$

Agora o somatório dos momentos em relação ao eixo  $y$  que passa pelo ponto 0 na Figura (7.b), tem-se como resultado:

$$\begin{aligned}
& + \curvearrowright \sum M = 0 \\
& (M + dM)(x, t) - (V + dV)(x, t)dx + f(x, t)dx \frac{dx}{2} - M(x, t) = 0 \\
& dM(x, t) - Vdx(x, t) + dVdx(x, t) + f(x, t) \frac{dx^2}{2} = 0 \tag{34}
\end{aligned}$$

Fazendo,

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx \tag{35}$$

$$dM = \frac{\partial M}{\partial x} dx \tag{36}$$

Combinando (35) e (33) e eliminando os termos  $dx$  nos ambos os lados. A equação torna-se:

$$\begin{aligned}
& -\frac{\partial V}{\partial x} dx(x, t) + f(x, t)dx = \rho A(x) dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) \\
& -\frac{\partial V}{\partial x}(x, t) + f(x, t) = \rho A(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) \tag{37}
\end{aligned}$$

Combinando (36) e (34) e desconsiderando os termos que envolvem potências ao quadrado de  $dx$ , pois,  $dx \approx 0$ , logo,  $dx^2 \cong 0$ . As equações tornam-se:

$$\frac{\partial M}{\partial x} dx(x, t) - Vdx(x, t) + \frac{\partial V}{\partial x} dx^2(x, t) + f(x, t) \frac{dx^2}{2} = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} - V(x, t) = 0 \quad (38)$$

Daí,

$$\frac{\partial M}{\partial x} = V(x, t) \quad (39)$$

Combinando (39) e (37), a equação torna-se:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial M}{\partial x}(x, t) \right) + f(x, t) &= \rho A(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) \\ -\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}(x, t) + f(x, t) &= \rho A(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) \end{aligned} \quad (40)$$

Na seção 5.9 deste TCC demonstramos que a deformação (deflexão) em uma viga é dada por:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI}$$

Para o nosso caso da vibração lateral em uma viga, podemos reescrevê-la como:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x) = \frac{M(x)}{EI(x)}$$

Daí,

$$M(x, t) = EI(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x) \quad (41)$$

onde  $E$  é o módulo de elasticidade da viga e  $I(x)$  é o momento de inércia de área da seção transversal da viga em relação ao eixo  $y$ . Substituindo a eq.(41) na eq.(40), teremos:

$$-EI(x) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(x) + f(x, t) = \rho A(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) \quad (42)$$

Agrupando os termos, obtemos:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x) \right] + \rho A(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) = f(x, t) \quad (43)$$

Para uma viga uniforme, a eq.(43) reduz;

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(x) + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(x, t) \quad (44)$$

### 6.1.2 Vibração Livre

Para a vibração livre,  $f(x, t) = 0$  e, portanto, a equação de movimento torna-se;

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(x) + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (45)$$

Dividido ambos os membros por  $\rho A$ , obtemos;

$$\frac{EI}{\rho A} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(x) + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (46)$$

Fazendo,

$$c = \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (47)$$

Daí,

$$c^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(x) + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (48)$$

Onde a equação (48) é uma equação diferencial parcial de quarta ordem. "O método de resolução desse problema é conhecido como método de Fourier, o qual consiste em duas etapas. Na primeira, utiliza-se separação de variáveis para obter problemas de autovalor, para as equações diferenciais ordinárias, estreitamente relacionados com a equação diferencial parcial em estudo. A segunda é utilizar a Análise de Fourier"(FIGUEIREDO, 2007, p.12).

**Método de Fourier.** Esse método consiste em, primeiramente, usar separação de variáveis e procurar soluções do problema na forma

$$w(x, t) = F(x)G(t) \quad (49)$$

Diferenciando (49) em relação a  $x$ , quatro vezes, obtemos:

$$\frac{\partial w}{\partial x}(x) = \frac{dF(x)}{dx} G(t),$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x) = \frac{d^2 F(x)}{dx^2} G(t),$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(x) = \frac{d^3 F(x)}{dx^3} G(t),$$

e

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(x) = \frac{d^4 F(x)}{dx^4} G(t) \quad (50)$$

Diferenciando (49) em relação a  $t$ , duas vezes, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t}(x) &= F(x) \frac{dG(t)}{dt}, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x) &= F(x) \frac{d^2 G(t)}{dt^2} \end{aligned} \quad (51)$$

Combinando (51), (50) e (48), tem-se;

$$c^2 \frac{d^4 F(x)}{dx^4} G(t) + \frac{d^2 G(t)}{dt^2} F(x) = 0 \quad (52)$$

Fazendo um rearranjo, tem-se:

$$\frac{c^2}{F(x)} \frac{d^4 F(x)}{dx^4} = - \frac{1}{G(t)} \frac{d^2 G(t)}{dt^2} \quad (53)$$

Agora observe o lado esquerdo de (53) é uma função apenas de  $t$ , enquanto que o lado direito é função apenas de  $x$ . Logo, tanto o lado esquerdo de (53) como o lado direito devem independer de  $x$  e de  $t$ . Isto quer dizer:

$$\frac{c^2}{F(x)} \frac{d^4 F(x)}{dx^4} = - \frac{1}{G(t)} \frac{d^2 G(t)}{dt^2} = \alpha = \omega^2 \quad (54)$$

Considerando que  $\alpha = \omega^2$  é uma constante positiva. A equação (54) pode ser escrita como duas equações: Para o lado esquerdo de (54) temos,

$$\frac{c^2}{F(x)} \frac{d^4 F(x)}{dx^4} = \omega^2$$

Fazendo,

$$\beta^4 = \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\omega^2}{\left(\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}\right)^2} = \frac{\omega^2 \rho A}{EI} \quad (55)$$

Daí,

$$\frac{d^4 F(x)}{dx^4} - \beta^4 F(x) = 0 \quad (56)$$

Para o lado direito de (54), obtemos:

$$\frac{d^2 G(t)}{dt^2} + G(t) \omega^2 = 0 \quad (57)$$



Onde (56) e (57) são equações diferenciais homogêneas com coeficientes constantes. Assim sendo, utilizando o método da equação característica, teremos para (56).

$$\frac{d^4 F(x)}{dx^4} - \beta^4 F(x) = 0$$

Daí,

$$m^4 - \beta^4 = (m^2 + \beta^2)(m^2 - \beta^2) = 0$$

$$m^2 + \beta^2 = 0$$

$$m^2 - \beta^2 = 0$$

As raízes dessas equações são,

$$\begin{aligned} m_1 &= \beta & m_3 &= i\beta \\ m_2 &= -\beta & m_4 &= -i\beta \end{aligned}$$

Lembre-se que a forma de uma solução de uma equação diferencial homogênea de 4ª ordem é a seguinte:

$$f(x) = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} + C_3 e^{m_3 x} + C_4 e^{m_4 x}$$

Por consequência, a solução de (56), torna-se:

$$F(x) = C_1 e^{\beta x} + C_2 e^{-\beta x} + C_3 e^{i\beta x} + C_4 e^{-i\beta x} \quad (58)$$

Utilizando a equação de Euler, a equação (58) pode ser expressa como,

$$F(x) = C_1 e^{\beta x} + C_2 e^{-\beta x} + C_3 \cos(\beta x) + C_4 \operatorname{sen}(\beta x) \quad (59)$$

onde  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  e  $C_4$  são constantes. Estas constantes podem ser determinadas pelas condições de contorno. As frequências naturais da viga são calculadas pelas equação (55) como,

$$\beta^4 = \frac{\omega^2 \rho A}{EI} \quad \Rightarrow \quad \omega = \beta^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} = (\beta L)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A L^4}} \quad (60)$$

A função  $F(x)$  é conhecida como modo normal ou função característica da viga e  $\omega$  é denominada frequência natural de vibração.

Agora para (57) utilizando novamente a equação característica, teremos:

$$\frac{d^2 G(t)}{dt^2} + G(t)\omega^2 = 0$$

Daí,

$$m^2 + \omega^2 = 0 \quad \longrightarrow \quad m = \pm \omega i \quad (61)$$

Então, a solução de (57) pode ser expressa como,

$$G(t) = C_5 \cos(\omega t) + C_6 \text{sen}(\omega t) \quad (62)$$

onde  $C_5$  e  $C_6$  são constantes que podem ser determinadas pelas condições iniciais.

Combinando (62), (59) e (49), teremos a solução geral para a vibração livre de uma viga.

$$w(x, t) = \left[ C_1 e^{\beta x} + C_2 e^{-\beta x} + C_3 \cos(\beta x) + C_4 \text{sen}(\beta x) \right] \left[ C_5 \cos(\omega t) + C_6 \text{sen}(\omega t) \right] \quad (63)$$

### 6.1.3 Condições Iniciais

As condições iniciais são as seguintes:

$$w(x, t = 0) = w_0(x)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}(x, t = 0) = \dot{w}_0(x)$$

### 6.1.4 Condições de Contorno

As condições de contorno comuns das formas de vinculação das vigas podem ser determinadas utilizando a seção 5.9 deste trabalho. Logo, são as seguintes:

**1. Extremidade Livre:**

$$M(x) = EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

$$V(x) = \frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0$$

**2. Extremidade biapoiada:**

$$w(0, t) = 0$$

$$w(L, t) = 0$$

$$M(x=0) = EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

$$M(x=L) = EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

**3. Extremidade engastada-apoiada:**

$$F(0) = 0$$

$$F(L) = 0$$

$$\frac{dF}{dx}(0) = 0$$

$$EI \frac{d^2 F}{dx^2}(L) = 0$$

4. Extremidade biengastada:

$$w(0, t) = 0$$

$$w(L, t) = 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}(0, t) = 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}(L, t) = 0$$

### 6.1.5 Ortogonalidade de Funções Normais

As funções normais  $F(x)$  satisfazem a equação:

$$c^2 \frac{d^4 F(x)}{dx^4} - \omega^2 F(x) = 0 \quad (64)$$

Sejam  $F_i(x)$  e  $F_j(x)$  as funções normais correspondentes as frequências naturais  $\omega_i$  e  $\omega_j$  para  $(i \neq j)$ , de modo que,

$$\frac{d^4 F_i(x)}{dx^4} - \omega_i^2 F_i(x) = 0 \quad (65)$$

e

$$\frac{d^4 F_j(x)}{dx^4} - \omega_j^2 F_j(x) = 0 \quad (66)$$

Multiplicando (65) por  $F_j(x)$  e (66) por  $F_i(x)$ , e depois subtraindo as equações resultantes uma da outra, teremos;

$$F_j(x) c^2 \frac{d^4 F_i(x)}{dx^4} - \omega_i^2 F_j(x) F_i(x) = 0$$

$$F_i(x) c^2 \frac{d^4 F_j(x)}{dx^4} - \omega_j^2 F_i(x) F_j(x) = 0$$

e depois subtraindo as equações resultantes uma da outra, teremos;

$$F_j(x) c^2 \frac{d^4 F_i(x)}{dx^4} - \omega_i^2 F_j(x) F_i(x) - F_i(x) c^2 \frac{d^4 F_j(x)}{dx^4} + \omega_j^2 F_i(x) F_j(x) = 0$$

agora, integrando de 0 a  $L$ , temos;

$$\begin{aligned} \int_0^L \left[ F_j(x) c^2 \frac{d^4 F_i(x)}{dx^4} - \omega_i^2 F_j(x) F(x)_i \right] dx &- \int_0^L \left[ F_i(x) c^2 \frac{d^4 F_j(x)}{dx^4} - \right. \\ &\left. - \omega_j^2 F_i(x) F_j(x) \right] dx = 0 \\ \int_0^L F_j(x) c^2 \frac{d^4 F_i(x)}{dx^4} dx - \int_0^L \omega_i^2 F_j(x) F(x)_i dx &- \int_0^L F_i(x) c^2 \frac{d^4 F_j(x)}{dx^4} dx + \\ &+ \int_0^L \omega_j^2 F_i(x) F_j(x) dx = 0 \\ \int_0^L \left[ F_j(x) c^2 \frac{d^4 F_i(x)}{dx^4} - F_i(x) c^2 \frac{d^4 F_j(x)}{dx^4} \right] dx &- \\ &- \int_0^L \left[ \omega_i^2 F_j(x) F(x)_i - \omega_j^2 F_i(x) F_j(x) \right] dx = 0 \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} \int_0^L \left[ F_j(x) c^2 \frac{d^4 F_i(x)}{dx^4} - F_i(x) c^2 \frac{d^4 F_j(x)}{dx^4} \right] dx &- (\omega_i^2 - \omega_j^2) \int_0^L F_i(x) F_j(x) dx = 0 \\ \int_0^L \left[ F_j(x) c^2 \frac{d^4 F_i(x)}{dx^4} - F_i(x) c^2 \frac{d^4 F_j(x)}{dx^4} \right] dx &= (\omega_i^2 - \omega_j^2) \int_0^L F_i(x) F_j(x) dx \\ \frac{c^2}{\omega_i^2 - \omega_j^2} \int_0^L \left[ F_j(x) \frac{d^4 F_i(x)}{dx^4} - F_i(x) \frac{d^4 F_j(x)}{dx^4} \right] dx &= \int_0^L F_i(x) F_j(x) dx \end{aligned}$$

Para diminuir a notação, fazemos

$$\frac{c^2}{\omega_i^2 - \omega_j^2} \int_0^L \left( F_i^{IV}(x) F_j(x) - F_j^{IV}(x) F_i(x) \right) dx = \int_0^L F_i(x) F_j(x) dx \quad (67)$$

onde  $(^I)$  indica diferenciação em relação a  $x$ . O lado esquerdo de (67) pode ser avaliado usando a integração por partes. Lembrando do método de integração por parte, temos:

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v du \quad (68)$$

usando a equação (68), obtemos:

$$\frac{c^2}{\omega_i^2 - \omega_j^2} \int_0^L \left( F_i^{IV}(x) F_j(x) - F_j^{IV}(x) F_i(x) \right) dx = \frac{c^2}{\omega_i^2 - \omega_j^2} \left[ F_i(x) F_j^{III} - F_j(x) F_i^{III} + \right.$$

$$\left. F_j^I(x)F_i^{II} - F_i^I(x)F_j^{II}(x) \right]_0^L$$

Daí,

$$\int_0^L F_i(x)F_j(x)dx = \frac{c^2}{\omega_i^2 - \omega_j^2} \left[ F_i(x)F_j^{III} - F_j(x)F_i^{III} + F_j^I(x)F_i^{II} - F_i^I(x)F_j^{II}(x) \right]_0^L \quad (69)$$

Podemos mostrar que o lado direito de (69) é zero para qualquer combinação de condições de extremidade livre, engastada ou simplesmente apoiada. Em extremidade livre pelas condições de contorno, o momento fletor  $[M(x)]$  e a força de cortante  $[V(x)]$  são iguais a zero, de modo que

$$M(x) = \frac{d^2 F(x)}{dx^2} = F^{II}(x) = 0, \quad V(x) = \frac{d^3 F(x)}{dx^3} = F^{III}(x) = 0 \quad (70)$$

Para uma extremidade engastada, a deflexão  $[w(x,t)]$  e a inclinação  $(\theta)$  são zero:

$$w(x,t) = F(x) = 0, \quad \frac{dF(x)}{dx} = F^I = 0 \quad (71)$$

Em extremidade simplesmente apoiada, o momento fletor e a deflexão são zero:

$$M(x) = \frac{d^2 F(x)}{dx^2} = F^{II}(x) = 0, \quad w(x,t) = F(x) = 0 \quad (72)$$

Visto que cada termo no lado direito de (69) é zero em  $x = 0$  ou  $x = L$  para qualquer combinação das condições de contorno em (70), (71) e (72) mostramos que:

$$\int_0^L F_i(x)F_j(x)dx = 0 \quad (73)$$

o que prova a ortogonalidade de funções normais para a vibração transversal de vigas sob as condições de contorno.

### 6.1.6 Determinação da Frequência Natural de uma Viga: Extremidade Engastada-Apoiada

Na Figura 8 tem-se um exemplo de uma viga engastada- apoiada. Este tipo de configuração é uma das mais usuais na engenharia de estruturas, porque no nó que possui o engaste a rotação é impedida de ocorrer e no nó apoiado, se houver uma variação de

temperatura na viga, este facilita a dilatação/contração da mesma, aumentando assim à estabilidade global da estrutura. A partir das condições de contorno para este problema podemos determinar a frequência natural e as constantes da equação (59).

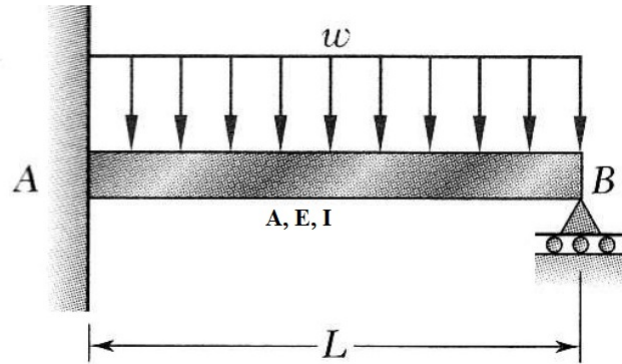


Figura 8: Modelo de cálculo da viga engastada-apoiada. Adaptado de BEER (2010).

Assim temos:

$$F(x) = C_1 e^{\beta x} + C_2 e^{-\beta x} + C_3 \cos(\beta x) + C_4 \text{sen}(\beta x),$$

com as condições de contorno:

$$F(0) = 0; \quad F(L) = 0; \quad \frac{dF}{dx}(0) = 0 \quad e \quad EI \frac{d^2 F}{dx^2}(L) = 0.$$

Aplicando a primeira condição de contorno, tem-se:

$$F(0) = C_1 e^0 + C_2 e^0 + C_3 \cos(0) + C_4 \text{sen}(0)$$

$$F(0) = C_1 + C_2 + C_3 = 0$$

$$C_1 + C_2 + C_3 = 0 \tag{74}$$

Utilizando a terceira condição de contorno, obtemos:

$$\frac{dF}{dx}(x) = C_1 e^{\beta x} + C_2 e^{-\beta x} + C_3 \cos(\beta x) + C_4 \text{sen}(\beta x)$$

$$\frac{dF}{dx}(x) = C_1 \beta e^{\beta x} - C_2 \beta e^{-\beta x} - C_3 \beta \text{sen}(\beta x) + C_4 \beta \cos(\beta x)$$

$$\frac{dF}{dx}(0) = C_1 \beta e^{\beta 0} - C_2 \beta e^{-\beta 0} - C_3 \beta \text{sen}(\beta 0) + C_4 \beta \cos(\beta 0)$$

$$\frac{dF}{dx}(0) = C_1 - C_2 + C_4 = 0$$

$$C_1 - C_2 + C_4 = 0 \quad (75)$$

Combinando (74) e (75), temos:

$$2C_1 + C_3 + C_4 = 0$$

$$C_3 = -(2C_1 + C_4) \quad (76)$$

Assim, a solução da equação (59), torna-se:

$$F(x) = C_1 e^{\beta x} + C_2 e^{-\beta x} - (2C_1 + C_4) \cos(\beta x) + C_4 \text{sen}(\beta x)$$

$$F(x) = C_1 \left( e^{\beta x} - 2 \cos(\beta x) \right) + C_2 e^{-\beta x} + C_4 \left( \text{sen}(\beta x) - \cos(\beta x) \right) \quad (77)$$

Aplicando a segunda e a quarta condição de contorno na equação (77), obtemos:

$$F(L) = C_1 \left( e^{\beta L} - 2 \cos(\beta L) \right) + C_2 e^{-\beta L} + C_4 \left( \text{sen}(\beta L) - \cos(\beta L) \right) = 0 \quad (78)$$



$$\frac{dF}{dx}(x) = C_1\beta \left( e^{\beta x} + 2\text{sen}(\beta x) \right) - C_2\beta e^{-\beta x} + C_4\beta \left( \cos(\beta x) + \text{sen}(\beta x) \right)$$

$$\frac{dF}{dx}(x) = C_1\beta^2 \left( e^{\beta x} + 2\cos(\beta x) \right) + C_2\beta^2 e^{-\beta x} + C_4\beta^2 \left( -\text{sen}(\beta x) + \cos(\beta x) \right)$$

$$\frac{d^2F}{dx^2}(L) = C_1\beta^2 \left( e^{\beta L} + 2\cos(\beta L) \right) + C_2\beta^2 e^{-\beta L} + C_4\beta^2 \left( -\text{sen}(\beta L) + \cos(\beta L) \right) = 0$$

$$C_1\beta^2 \left( e^{\beta L} + 2\cos(\beta L) \right) + C_2\beta^2 e^{-\beta L} + C_4\beta^2 \left( -\text{sen}(\beta L) + \cos(\beta L) \right) = 0$$

Como  $\beta^2 \neq 0$ , tem-se;

$$C_1 e^{\beta L} + 2C_1 \cos(\beta L) + C_2 e^{-\beta L} - C_4 \text{sen}(\beta L) + \cos(\beta L) = 0 \quad (79)$$

Somando (79) com (78) chegamos a:

$$2C_1 e^{\beta L} + 2C_2 e^{-\beta L} = 0 \quad (80)$$

$$C_1 e^{\beta L} + C_2 e^{-\beta L} = 0 \quad (81)$$

Para uma solução não-trivial,  $C_1$  e  $C_2$ , devem ser diferente de zero, assim, tomando  $C_1 = C_2 = 1$ , logo

$$e^{\beta L} + e^{-\beta L} = 0, \quad (82)$$

onde identificamos (82) como uma equação não-linear ou transcidental. As raízes dessa equação,  $\beta_n L$ , dão as frequências naturais de vibração da viga engastada-apoiada, utilizando (60), obtemos:

$$\omega_n = (\beta_n L)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho AL^4}}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (83)$$

Se o valor de  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_4$  corresponde a um  $\beta_n$ , então podemos rescrever a equação (77) como:

$$F_n(x) = C_{1n} \left( e^{\beta_n x} - 2\cos(\beta_n x) \right) + C_{2n} e^{-\beta_n x} + C_{4n} \left( \text{sen}(\beta_n x) - \cos(\beta_n x) \right) \quad (84)$$

Os modos normais de vibração para o caso da viga engastada-apoiada, torna-se pelo método da separação de variável:

$$w_n(x, t) = F_n(x)G_n(t)$$

$$w_n(x, t) = \left[ C_{1n} \left( e^{\beta_n x} - 2 \cos(\beta_n x) \right) + C_{2n} e^{-\beta_n x} + C_{4n} \left( \text{sen}(\beta_n x) - \cos(\beta_n x) \right) \right] \left[ C_{5n} \cos(\omega_n t) + C_{6n} \text{sen}(\omega_n t) \right] \quad (85)$$

Sendo assim, a solução geral da vibração lateral de uma viga engastada-apoiada pode se expressa pelo somatório dos modos normais:

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(x, t)$$

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ C_{1n} \left( e^{\beta_n x} - 2 \cos(\beta_n x) \right) + C_{2n} e^{-\beta_n x} + C_{4n} \left( \text{sen}(\beta_n x) - \cos(\beta_n x) \right) \right] \left[ C_{5n} \cos(\omega_n t) + C_{6n} \text{sen}(\omega_n t) \right] \quad (86)$$

## 6.2 Vibração Forçada de uma Viga Biapoiada Devido a uma Carga Móvel

Com o surgimento de veículos mais velozes e pesados o estudo das vibrações em pontes teve uma atenção especial pelos pesquisadores na metade do século XIX. O objetivo dos mesmos era propor soluções para o problema de forma simplificada. Em 1849, R. Wills deduziu uma equação de movimento com base em um modelo formado por uma massa se deslocando com velocidade constante sobre uma viga simplesmente apoiada, flexível e de massa desprezível. No mesmo ano, Stokes obteve uma solução da equação de movimento por meio de expansão em séries (CUNHA, 2011).

Segundo Cunha (2011) após a década de 1950, com surgimento das ferramentas computacionais, e a partir dos anos 1970, com o Método dos Elementos Finitos, a análise vibracional em pontes passou a ser desenvolvida utilizando hipóteses mais sofisticadas.

Portanto, no dimensionamento de pontes rodoviárias ou ferroviárias, devem-se considerar os efeitos dinâmicos dos carregamentos móveis agindo na sua estrutura. Este carregamento ao ser submetido sobre a sobreestrutura da ponte (vigas e lajes) gera vibração forçada no decorrer do vão da mesma comprometendo sua estabilidade e consequentemente a segurança dos que trafegam sobre a mesma.

### 6.2.1 Vibração Forçada

Consideremos que devido a vibração forçada em uma viga, sua deflexão seja dada pela seguinte equação:

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n(x)q_n(t) \quad (87)$$

em que  $W_n(x)$  é o  $n$ -ésimo modo normal, ou função característica, que satisfaz a equação diferencial (64), ou seja,

$$\frac{EI}{\rho A} \frac{d^4 W_n(x)}{dx^4} - W_n(x)\omega_n^2 = 0 \quad (88)$$

$$EI \frac{d^4 W_n(x)}{dx^4} - W_n(x)\omega_n^2 \rho A = 0 \quad (89)$$

e  $q_n(t)$  é a coordenada generalizada no  $n$ -ésimo modo. Substituindo (87) na equação (44) e utilizando a regra da cadeia, temos

$$EI \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^4 W_n(x)}{dx^4} q_n(t) + \rho A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^2 q_n(t)}{dt^2} W_n(x) = f(x, t) \quad (90)$$

Rearranjando a equação (89) combinando com equação (90), tem-se:

$$EI \frac{d^4 W_n(x)}{dx^4} = W_n(x)\omega_n^2 \rho A$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^2 \rho A W_n(x) q_n(t) + \rho A \sum_{n=1}^{\infty} W_n(x) \frac{d^2 q_n(t)}{dt^2} = f(x, t)$$

Dividindo ambos os membros por  $\rho A$ , temos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^2 W_n(x) q_n(t) + \sum_{n=1}^{\infty} W_n(x) \frac{d^2 q_n(t)}{dt^2} = \frac{1}{\rho A} f(x, t) \quad (91)$$

Multiplicando toda a equação (91) por  $W_m(x)$ , integrando de 0 a  $L$  e usando a condições de ortogonalidade descrita na seção 6.1.5 deste trabalho, a equação (73), torna-se

$$\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^2 W_m(x) W_n(x) q_n(t) + \sum_{n=1}^{\infty} W_m(x) W_n(x) \frac{d^2 q_n(t)}{dt^2} = \frac{W_m(x)}{\rho A} f(x, t)$$

$$\int_0^L \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^2 W_m(x) W_n(x) q_n(t) dx + \int_0^L \sum_{n=1}^{\infty} W_m(x) W_n(x) \frac{d^2 q_n(t)}{dt^2} dx = \int_0^L \frac{W_m(x)}{\rho A} f(x, t) dx$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^2 q_n(t) \int_0^L W_m(x) W_n(x) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^2 q_n(t)}{dt^2} \int_0^L W_m(x) W_n(x) dx = \frac{1}{\rho A} \int_0^L W_m(x) f(x, t) dx$$

Dividindo a equação anterior por  $\int_0^L W_m(x) W_n(x) dx$ , temos:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^2 q_n(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^2 q_n(t)}{dt^2} &= \frac{1}{\rho A} \frac{\int_0^L W_m(x) f(x, t) dx}{\int_0^L W_m(x) W_n(x) dx} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^2 q_n(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^2 q_n(t)}{dt^2} &= \frac{1}{\rho A} \frac{\int_0^L W_m(x) W_n(x) f(x, t) dx}{\int_0^L W_m(x) W_n^2(x) dx} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^2 q_n(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^2 q_n(t)}{dt^2} &= \frac{1}{\rho A} \frac{\int_0^L W_n(x) f(x, t) dx}{\int_0^L W_n^2(x) dx} \end{aligned}$$

Fazendo,

$$Q_n(t) = \int_0^L f(x, t) W_n(x) dx, \quad (92)$$

onde  $Q_n(t)$  é denominada a força generalizada correspondente a  $q_n(t)$ . Podemos ainda, determinar a constante  $b$ , dada pela seguinte expressão.

$$b = \int_0^L W_n^2 dx \quad (93)$$

Logo,

$$\frac{d^2 q_n(t)}{dt^2} + \omega_n^2 q_n(t) = \frac{1}{\rho A b} Q_n(t) \quad (94)$$

A equação (94) pode ser identificada como a mesma equação de movimento de um sistema não amortecido com um grau de liberdade (RAO, 2008). Onde (94) é uma equação diferencial não-homogênea com coeficientes constantes. Assim sendo, utilizando o método da equação característica, teremos para (94) uma solução geral dada por uma solução complementar e uma solução particular

$$q_n(t) = q_c(t) + q_p(t)$$

onde a solução complementar é dado:

$$\frac{d^2 q_n(t)}{dt^2} + \omega_n^2 q_n(t) = 0$$

$$m^2 + \omega_n^2 = 0$$

$$m = \pm \omega_n i$$

$$q_c = a_n \cos(\omega_n t) + b_n \text{sen}(\omega_n t)$$

e a solução particular: Como  $Q_n(t)$  é uma constante, a solução particular da equação não-homogênea é dado:

$$q_c(t) = c$$

$$\frac{dq(t)}{dt} = 0$$

$$\frac{d^2 q(t)}{dt^2} = 0$$

$$\frac{d^2 q_c(t)}{dt^2} + \omega_n^2 q_c(t) = \frac{1}{\rho Ab} Q_n(t) = 0 + \omega_n^2 c = \frac{1}{\rho Ab} Q_n(t)$$

$$c = \frac{1}{\rho Ab \omega_n^2} Q_n(t)$$

Logo, a solução geral da equação (94), torna-se:

$$q_n(t) = a_n \cos(\omega_n t) + b_n \text{sen}(\omega_n t) + \frac{1}{\rho Ab \omega_n^2} Q_n(t) \quad (95)$$

Uma outra forma de terminar a solução para equação (94) é utilizar a integral de Duhamel, expressa abaixo como:

$$q_n(t) = A_n \cos(\omega_n t) + B_n \text{sen}(\omega_n t) + \frac{1}{\rho Ab \omega_n^2} \int_0^t Q_n(\tau) \text{sen}[\omega_n(t - \tau)] d\tau, \quad (96)$$

onde o primeiro e o segundo termo do lado direito da equação (96) representam a vibração livre resultante das condições iniciais e o terceiro termo do lado direito a vibração em regime permanente resultante da função forçante (RAO, 2008).

### 6.2.2 Ponte Sujeita a um Carregamento Móvel

Considere uma viga biapoiada de uma ponte sujeita a uma força harmônica que percorre todo o seu vão. A figura abaixo exemplifica este problema comum no dimensionamento da sobreestrutura de pontes de concreto armado.

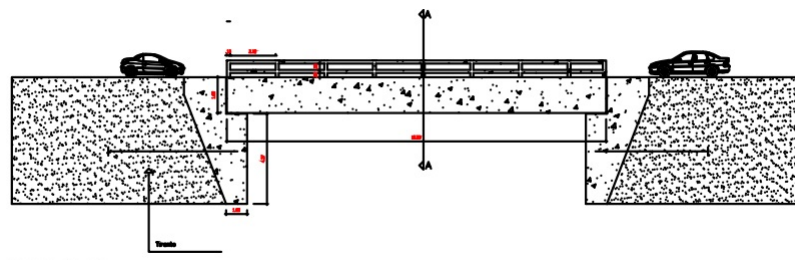


Figura 9: Vista lateral da ponte em estudo.

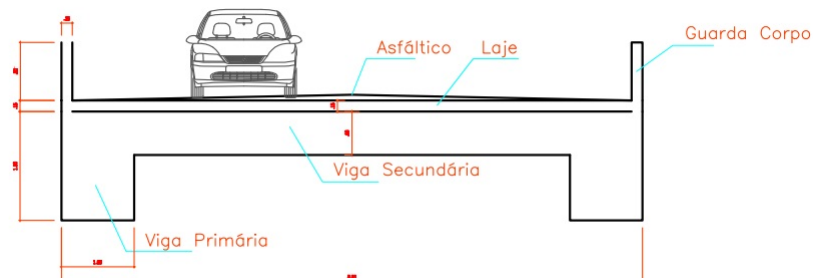


Figura 10: Vista frontal da ponte em estudo.

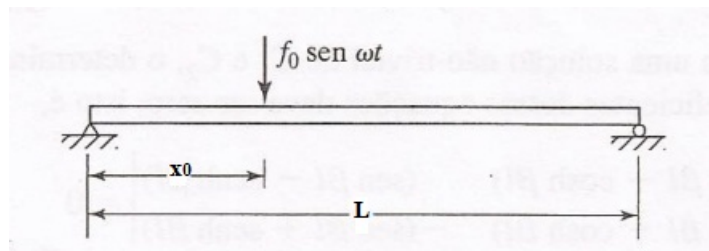


Figura 11: Carregamento móvel na viga biapoiada da ponte, modelo de cálculo.

Segundo RAO (2008), as funções modais normais de uma viga biapoada são dada por:

$$W_n(x) = \text{sen}(\beta_n x) = \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad (97)$$

onde

$$\beta_n = \frac{n\pi}{L}.$$

Substituindo a equação (97) na equação (92), obtemos:

$$Q_n(t) = \int_0^L f(x, t) \text{sen}(\beta_n x) dx = \int_0^L f_0 \text{sen} \omega t \text{sen}\left(\frac{n\pi x_0}{L}\right) dx \quad (98)$$

$$Q_n(t) = f_0 \text{sen}\left(\frac{n\pi x_0}{L}\right) \text{sen} \omega t \quad (99)$$

A resposta de regime permanente da viga ao ser submetida ao carregamento móvel é dado por:

$$q_n(t) = \frac{1}{\rho A b \omega_n} \int_0^t Q_n(\tau) \text{sen}[\omega_n(t - \tau)] d\tau, \quad (100)$$

onde,

$$b = \int_0^L W_n^2(x) dx = \int_0^L \text{sen}^2(\beta_n x) dx$$

Fazendo

$$\text{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$$

e

$$\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$$

Combinando as equações anteriores, obtemos:

$$\text{sen}^2 x = 1 - (\cos 2x + \text{sen}^2 x) = 1 - \cos 2x - \text{sen}^2 x \quad \Rightarrow \quad \text{sen}^2 x = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2}$$

Daí,

$$b = \int_0^L \left[ \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2} \right] dx = \left[ \frac{x}{2} - \frac{\cos(2\beta_n x)}{4\beta_n} \right]_0^L$$

$$b = \left[ \frac{x}{2} - \frac{\cos\left(\frac{2n\pi}{L}x\right)}{4\beta_n} \right]_0^L = \frac{L}{2} - \frac{1}{4\beta_n} \left[ \cos\left(\frac{2n\pi L}{L}\right) - \cos\left(\frac{2n\pi 0}{L}\right) \right]$$

$$b = \frac{L}{2}$$

A solução da equação (100) pode ser expressa como:

$$q_n(t) = \frac{2}{\rho AL \omega_n} \int_0^\tau f_0 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x_0}{L}\right) \operatorname{sen}(\omega t) \operatorname{sen}\left[\omega_n(t - \tau)\right] d\tau$$

$$q_n(t) = \frac{2f_0 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x_0}{L}\right)}{\rho AL(\omega_n^2 - \omega^2)} \operatorname{sen}(\omega t) \quad (101)$$

Sendo assim, a resposta da estrutura da viga é dada, combinando a equação (87), (97) e (101).

$$w(x, t) = \frac{2f_0}{\rho AL} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\omega_n^2 - \omega^2)} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x_0}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}(\omega t) \quad (102)$$

## 7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os custos de fabricação para eliminar a vibração em uma obra sempre são demasiadamente altos (RAO, 2008): o engenheiro calculista deve buscar a melhor solução no intuito de equilibrar o custo, o controle da vibração e a segurança da obra. Conforme prescrito na NBR 6118/2014, as ações dinâmicas podem provocar estados limites de serviço e estados limites últimos por vibração excessiva ou por fadiga dos materiais.

Na prática é possível reduzir as vibrações, tomando as seguintes precauções (RAO, 2008):

- I)** Controlar as frequências naturais do sistema e evitar ressonância sob excitações externas;
- II)** Evitar resposta excessiva do sistema, mesmo em ressonância, introduzindo um mecanismo de amortecimento ou de dissipação de energia;
- III)** Reduzir a transmissão das forças de excitação de uma parte da máquina para outra mediante a utilização de isoladores de vibração;
- IV)** Reduzir a resposta do sistema mediante a adição de um neutralizador de massa ou absorvedor de vibração auxiliar.



Devido ao fato de no Brasil não possuir histórico de vibrações sísmicas a análise dinâmica para os outros fenômenos citados nas seções 5.4 e 5.5 deste trabalho merece uma atenção especial pelos projetistas estruturais, pois os mesmos aumentam consideravelmente os esforços de 2ª ordem na estrutura. Ainda existe certa omissão por parte das normas regulamentadoras brasileiras a respeito da análise dinâmica, pois as mesmas não trazem detalhes de como aplicar as verificações do Estado Limites de Vibrações Excessivas (ELS-VE) definida na NBR 6118/2014 para as peças estruturais de concreto armado (vigas, pilares e pórticos), fundamentais para minimizar as deformações e os acréscimos de momentos fletores devidos à ação dinâmica.

Segundo KUSTER e SARTORTI (2011) "as normas específicas que tratam algo sobre o assunto, algumas são obsoletas ou incompletas", ou seja, para um melhor refinamento dos cálculos aplicados à vibração em estruturas reticuladas de concreto armado e seu dimensionamento devem-se utilizar as normas vigentes internacionais que tratem do assunto, adequando-a as necessidades do projetista.

Outro ponto importante a respeito da análise dinâmica em edifícios é o dimensionamento dos sistemas construtivos, pois a um aumento considerável dos esforços de 2ª ordem na estrutura, provocando um deslocamento horizontal do edifício em relação a sua base. Este problema pode ser avaliado pelo aumento do coeficiente gama-z definido na seção 5.4.1 deste trabalho. Contudo, para um coeficiente  $\gamma_z > 1,1$ , a estrutura do edifício é dimensionada como sendo de nós móveis, nos quais, diminui drasticamente a rigidez das ligações viga-pilar comprometendo sua estabilidade global.

No caso do estudo dinâmico em obras de arte especial, o engenheiro calculista deve ter uma atenção especial, pois como listado na seção 5.5 deste TCC, a um número maior de fenômenos que provocam a vibração nas suas estruturas. Na análise da estabilidade global em ponte de concreto armado a NBR 7187/2003, não traz em seu corpo uma citação de como fazer a referida análise. Portanto, fica a critério e/ou experiência de cada projetista em considerar um fator de segurança que englobe todos os referidos esforços adicionais que possa surgir ao longo da vida útil da construção devido à vibração.

## 8 REFERÊNCIAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118/2014 - Projeto e Execução de Obras de Concreto Armado**. Rio de Janeiro, 2014.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6123/1988 - Força Devidas ao Vento em Edificações**. Rio de Janeiro, 1988.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 7187/2003 - Projeto de Pontes de Concreto Armado e de Concreto Protendido - Procedimento**. Rio de Janeiro, 2003.

BEER, Ferdinand Pierre, JOHNTON, E. Russel. **Resistência dos Materiais**. Tradução Mario Moro Fecchio; revisão técnica Walter Libard. São Paulo: McGraw-Hill, 2006.

CUNHA, Pollyana Gil. **Análise Dinâmica de Pontes Ferroviárias: Uma Metodologia Simplificada**. Dissertação de mestrado. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. São Paulo, 2011.

FERREIRA, Enildo Tales. **Estudo Comparativo entre a Velocidade Básica do Vento Estabelecida na NBR. 6123 e a Obtida de Estações Meteorológicas na Paraíba Impactos nos Âmbitos do Projeto Estrutural, do Meio Ambiente e dos Custos**: Dissertação de mestrado, PPGEUA UFPB, João Pessoa, 2005.

FIGUEIREDO, Djairo Guedes de. **Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais**. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 2007.

GERE, James M., WEAVER Jr., William. **Análise de Estruturas Reticuladas**, Tradução de Carlos M. P. F. Pinto, Guanabara Dois, Rio de Janeiro, 1981.

HIBBELER, R. C. **Resistência dos Materiais**. Tradução Arlete Simille Marques; revisão técnica Sebastião Simões da Cunha Jr. 7.ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

KUSTER, Leandro Dias. SARTORTI, Artur Lenz. **Análise Dinâmica de Estruturas de Concreto: Avaliação de Três Sistemas Construtivos de Lajes**. Revista: Teoria e Prática na Engenharia Civil, n.18, p.13-22, Novembro,2011.

LORIO, Rafael José Jr. **O Método de Separação de Variáveis e Expansões em Auto-Funções**. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1981.

MARCHETTI, Osvaldemar. **Ponte de Concreto Armado**. São Paulo: Blucher, 2008.

RAO, S. S. **Vibrações Mecânicas**. Revisor técnico José Juliano de Lima Junior; tradução Arlete Simille. - 4.ed - São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2008.

TIMOSHENKO, S. P. **Resistência dos Materiais**. Tradução José Rodrigues de Carvalho. - 3.ed - Rio de Janeiro: AO Livro Técnico S.A, 1966.