



UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

JOSÉ PAULINO DE MEDEIROS ROCHA

EQUAÇÃO DA CORDA VIBRANTE

Campina Grande/PB
Novembro/2014

JOSÉ PAULINO DE MEDEIROS ROCHA

EQUAÇÃO DA CORDA VIBRANTE

Trabalho de Conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba. Em cumprimento às exigências para obtenção do Título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. MANUEL ANTOLINO MILLA MIRANDA

Campina Grande/PB
Novembro/2014

É expressamente proibida a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano da dissertação.

R672e Rocha, José Paulino de Medeiros.
Equação da corda vibrante [manuscrito] / José Paulino de Medeiros Rocha. - 2014.
42 p. : il.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática)
- Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2014.
"Orientação: Prof. Dr. Manuel Antolino Milla Miranda, Departamento de Matemática".

1. Equação da onda. 2. Soluções matemáticas. 3. Decaimento exponencial. I. Título.

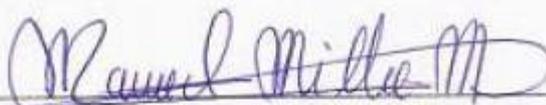
21. ed. CDD 515.1

JOSÉ PAULINO DE MEDEIROS ROCHA

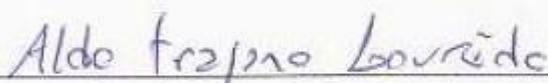
EQUAÇÃO DA CORDA VIBRANTE

Trabalho de Conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba. Em cumprimento às exigências para obtenção do Título de Licenciado em Matemática.

BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Manuel Antolino Milla Miranda
Departamento de Matemática - CCT/UEPB
Orientador



Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo
Departamento de Matemática - CCT/UEPB
Examinador



Prof. Dra. Luciana Roze de Freitas
Departamento de Matemática - CCT/UEPB
Examinadora

Campina Grande, 27 Novembro/2014

Dedicatória

Dedico este trabalho a vovô Crispim
(in memoriam).

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, pelo seu infinito amor e pela oportunidade de vivenciar mais um momento inesquecível na minha vida que é a conclusão deste trabalho.

Agradeço aos meus pais, Abdon Araújo Rocha e Judith Cristina de Medeiros Rocha, por estarem sempre ao meu lado me apoiando desde os meus primeiros passos, nunca me deixando só e sempre acreditando em mim.

Agradeço a minha esposa Lucicleide Nobelino pelo seu apoio, dedicação e compreensão.

Agradeço a minha irmã Maria José que sempre acreditou no meu sucesso. Em especial aos meus sobrinhos Walter e Emília que apesar de pequeninos serve-me de estímulos.

Agradeço em especial a minha tia Izabel, que desde a minha meninice sempre esteve ao meu lado me incentivando e motivando para que eu continue seguindo em frente.

Agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Manuel Milla Miranda pela atenção e dedicação, para realização deste trabalho com sucesso.

Sou grato aos que participaram da banca, professores Aldo Trajano Lourêdo e Luciana Roze de Freitas, que disponibilizam seu tempo em ler meu TCC, pelas contribuições e sugestões. Em especial a professora Luciana Roze de Freitas que estava sempre a disposição para ajudar e pela sua contribuição como professora e coordenadora durante a pesquisa.

Agradeço a todos os meus professores, que muito contribuíram para meu crescimento acadêmico. Em especial ao professor Francisco de Sá, pelo seu apoio no momento mais difícil desta graduação.

Agradeço aos meus colegas de turma, que juntos compartilhamos grandes momentos de alegria e também alguns momentos de dificuldades. Em especial ao amigo Leonardo Alves, pelo apoio e incentivo.

Agradeço aos meus amigos mais antigos, Julierme, Sergio Junior e Rafael e aos mais recentes, Eudes, Weiller, Maxwell, Clesio, Jailson e Kézia Patrícia.

Não poderia deixar de agradecer ao professor e amigo José Elias da Silva por sua grande contribuição e paciência que desde o início esteve presente, do título à gastrite do LATEX.

Enfim, A todos que de uma forma ou outra sempre torceram por mim, o meu muito obrigado!

Resumo

Neste trabalho mostraremos a existência e unicidade de soluções bem como o decaimento da energia do seguinte problema misto:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) + u_t(x, t) = 0, \quad x \in (0, 1), \quad t > 0 \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in (0, 1) \end{array} \right. \quad (P)$$

Iniciaremos nosso estudo com a dedução da equação da corda vibrante, isto é, da equação $(P)_1$, onde $(P)_1$ é a primeira linha do problema (P) . Em seguida transformaremos o Problema (P) num sistema de equações ordinárias. A seguir mostraremos que o Problema (P) , para um caso particular de $u_0(x)$ e $u_1(x)$, têm existência e unicidade de soluções bem como o decaimento exponencial da energia associada.

Palavras chaves: equação da onda, existência e unicidade de soluções, decaimento exponencial.

Abstract

In this work we show the existence and uniqueness of solutions as well as the decay of the energy of solutions of the following mixed problem:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) + u_t(x, t) = 0, \quad x \in (0, 1), \quad t > 0 \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in (0, 1) \end{array} \right. \quad (P)$$

We begin our study with the deduction of the vibrating string equation, i.e, the equation $(P)_1$, where $(P)_1$ is the first line of the problem (P) . Then we transform Problem (P) in a system of ordinary differential equations. Next, we show that Problem (P) for a particular case of $u_0(x)$ and $u_1(x)$, has existence and uniqueness of solutions as well as the exponential decay of the associated energy.

Key words: Wave equation, existence and uniqueness of solutions, exponential decay.

Sumário

Introdução	10
1 Relato Histórico sobre a Equação da Corda Vibrante	11
2 Dedução Física	14
2.1 Dedução da Equação da Corda Vibrante	14
3 Resolução do Problema (P)	19
4 Decaimento Exponencial da Energia	26
5 Procedimentos Técnicos-Methodológicos	33
6 Considerações Finais	34
Apêndice	35
Referências Bibliográficas	41

Introdução

Considere uma corda elástica flexível de comprimento igual a 1 a qual está presa nos seus extremos. Suponha que a corda na sua posição de repouso ocupa o intervalo $[0, 1]$ do eixo de coordenada x . Suponha também que atua sobre a corda uma força externa que a faz vibrar e que o ar oferece uma resistência ao movimento que é proporcional a velocidade de deslocamento da corda. Nessas condições, se $u(x, t)$ denota o pequeno deslocamento transversal do ponto x da corda no instante t então $u(x, t)$ é solução do seguinte problema:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) + u_t(x, t) = 0, \quad x \in (0, 1), \quad t > 0 \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in (0, 1) \end{array} \right. \quad (P)$$

Aqui $u(0, t) = u(1, t) = 0, t > 0$, indica que a corda está presa nos seus extremos $x = 0$ e $x = 1$. A posição inicial e velocidade inicial da corda são dadas, respectivamente, pelas funções $u_0(x)$ e $u_1(x)$.

Este trabalho propõe-se a estudar a existência, unicidade bem como o decaimento exponencial de solução do problema (P) .

Observamos que em nosso estudo consideramos casos particulares de posição inicial $u_0(x)$ e de velocidade inicial $u_1(x)$, mais precisamente, consideramos somas finitas das respectivas séries de Fourier de $u_0(x)$ e $u_1(x)$. Observamos também que se consideramos a equação $(P)_1$ sem o termo $u_t(x, t)$ então obtém-se a conservação da energia do Problema (P) . O termo $u_t(x, t)$ que representa a resistência do ar ao deslocamento da corda, permite obter o decaimento exponencial da energia.

Em nosso estudo utilizaremos as ferramentas teóricas proporcionadas pela Análise Matemática. A seguir descreveremos o nosso trabalho. De início, fazemos um breve relato histórico do aparecimento da equação da corda vibrante, isto é, da equação $(P)_1$. No capítulo seguinte, mostra-se a dedução física de $(P)_1$. No capítulo 3, aplicando o método de separação de variáveis, obtemos a solução $u(x, t)$ do Problema (P) . No capítulo 4, mostra-se o decaimento exponencial da energia associada ao Problema (P) . Na parte final, em Apêndice, apresenta-se alguns cálculos que ajudam na compreensão dos capítulos 2, 3 e 4.

Capítulo 1

Relato Histórico sobre a Equação da Corda Vibrante

No contexto dos estudos matemáticos, entende-se que o fenômeno da corda vibrante são pequenas vibrações transversais num plano (x, t) de uma corda perfeitamente flexível que se desloca apenas na direção vertical e que na posição de repouso ocupa o eixo x .

Lê-se em Medeiros & Andrade (1978), que um dos primeiros matemáticos a se deter acerca do problema da corda vibrante foi Taylor. Este foi também o primeiro a calcular, em 1713 a frequência fundamental de uma corda de comprimento L . Em seu trabalho "On the motion of a taut sinew", obteve uma expressão que, na notação atual, é escrita :

$$v = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{\sigma}}$$

Ainda segundo Medeiros & Andrade (op. cit.), coube ao matemático e filósofo francês D'Alembert, através dos resultados de Taylor, o papel de deduzir, em 1746, a equação linear da corda vibrante, primeira equação diferencial parcial que apareceu na literatura e que passou a ser estudada de forma intensiva. Nesse viés, podem ser citados vários matemáticos que se ocuparam do estudo do fenômeno da corda vibrante, enfatizando-se as contribuições de d'Alembert, Euler, Lagrange, Bernoulli e Fourier. Podemos afirmar que estes teóricos, ainda que de forma indireta, contribuíram decisivamente para a solução de problemas de contorno para esta equação e a equação do calor.

D'Alembert obteve, em 1747, soluções da forma

$$u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct),$$

com f e g funções "arbitrárias". Além de Medeiros & Andrade, podemos ainda encontrar considerações acerca do percurso histórico da equação da corda vibrante, em Boyce & Diprima (2010) e Figueiredo (1977). No entanto, restavam-se dúvidas acerca da solução acima citada. D'Alembert afirmava que as funções f e g deveriam ser analíticas, ao passo que Euler afirmava que deveriam ser funções contínuas quaisquer. Conforme pode ser lido em Medeiros & Andrade (1978).

Em 1748 Euler já observava que a equação possuía soluções não analíticas, cuja singularidade são determinadas pela fronteira, e em 1764 afirmou que "eventualmente estas soluções podem representar perturbações, refletidas na fronteira, que se propagam". Essa observação o levou ao método das imagens.

Na mesma época em que d'Alembert e Euler obtinham a solução acima, Bernoulli encontrou uma solução, em forma de uma série de funções seno, que agora chamamos série de Fourier. Esses dois resultados, aparentemente irreconciliáveis, deram origem a uma controvérsia que durou aproximadamente vinte anos. Por um lado, Bernoulli argumentava que sua solução deveria implicar aquela de Euler e d'Alembert e, por outro, Euler objetava que, se isso fosse verdadeiro, então seria possível expandir uma função arbitrária em termos de uma série em senos. Mas isso é contraditório dizia Euler, porque nem toda função é ímpar e periódica.

Nessa mesma época em que esses matemáticos tentavam resolver este paradoxo, o matemático italiano Lagrange, que viveu seus últimos 25 anos em Paris, no ano de 1759 quase o resolveu no seu famoso trabalho sobre a natureza e propagação do som. Ele imaginava uma corda real como um caso limite de um conjunto finito de massas pontuais, igualmente espaçadas, num fio sem peso. Aumentando indefinidamente o número de partículas, ele deduziu a equação da corda vibrante através de operações de limite sobre um sistema de equações a diferenças finitas, como chamamos hoje.

Como havia usado interpolação trigonométrica, ele quase obteve a solução que seria dada mais tarde por Fourier. Usando um deslocamento inicial e velocidade inicial arbitrários, no caso finito, Lagrange obteve a solução, para o caso contínuo, na forma de uma série trigonométrica. Um passo a mais e ele teria calculado os números que hoje chamamos coeficientes de Fourier. Porém, sua consciência de Matemático o proibia de permutar as operações de soma e integração, $\int \sum_1^x$, sem uma investigação mais cuidadosa. Quando aproximadamente cinquenta anos mais tarde, Fourier apresentou seu trabalho, Lagrange o recusou. Como um dos membros do júri, que era composto por ele, Legendre e Laplace. Lagrange recusou o trabalho de Fourier, sobre condução do calor, sob a alegação de que faltavam as demonstrações. Fourier, que publicara sua obra em 1822, se recusou durante quinze anos a dar atenção as críticas, de Lagrange e outros, de que pontos fundamentais de sua análise não eram corretos. Preferiu, inicialmente, confiar em sua intuição física e deixar os problemas de convergência para serem estudados numa segunda etapa, conseguindo, assim, obter resultados que posteriormente se mostraram corretos. Por isso, Fourier foi chamado "o Euler da Física Matemática".

A sexta seção da sua obra, "La Théorie Analytique de la Chaleur", é a que

é devotada à solução do problema que estamos discutindo. Nas palavras de Fourier : " ...trata-se de resolver um problema mais geral que consiste em expandir uma função qualquer em uma série infinita de senos ou co-senos de arcos múltiplos". Após resolver um caso particular, Fourier continua:... "Podemos estender estes resultados a funções quaisquer, mesmo aquelas que são descontínuas e inteiramente arbitrárias". Na verdade, esses resultados sobre representação de função por séries trigonométricas foram obtidos por Fourier em 1807, embora sua obra completa, sobre condução do calor tenha aparecido em 1822. Esse resultado produziu um efeito extraordinário e durante todo o século XIX foi considerado um dos teoremas mais importantes da Análise, pela sua importância e sua simplicidade, uma vez que envolve apenas integração termo a termo de uma série trigonométrica formalmente escrita. O problema da convergência só foi resolvido em 1829 por Dirichlet, que se baseou em resultados rigorosos sobre funções monótonas por partes, obtidos por Cauchy em 1821. Dirichlet deu as condições, que levam seu nome, para que uma função f possa ser representada por uma série trigonométrica.

Lagrange discutindo, em 1783, a teoria da gravitação de Newton, observou que as componentes da força de atração, devida a uma distribuição de massas pontuais, podiam ser obtidas calculando-se derivadas espaciais de uma certa função da posição das partículas. Assim, Lagrange introduziu o conceito de função potencial de um campo gravitacional newtoniano devido a uma distribuição discreta de massas pontuais. Em 1782, Laplace mostrou que, em pontos do espaço vazio onde não há massas, o potencial V satisfaz a equação $\Delta V = 0$ e S. D. Poisson deduziu, em 1813, a equação correspondente, $\Delta V = -4\pi\rho$, válida para pontos de uma distribuição de massas, a densidade ρ sendo dada como função das coordenadas do ponto. O passo fundamental seguinte foi dado, em 1828, por G. Green no seu trabalho "Essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism". Esse trabalho continha o resultado, extremamente útil e conhecido como teorema de Green ou teorema de Gauss, que transforma uma integral de volume numa integral de superfície. Em 1889, Hilbert provou que, sob restrições convenientes sobre o domínio em que V está definida, sobre a função V e sobre os valores assumidos por V na fronteira de seu domínio, o problema de Dirichlet pode ser resolvido de forma rigorosa. O problema de Dirichlet foi o primeiro, na teoria do potencial, a suscitar a questão da existência.

A questão da existência da função de Green só foi resolvida em 1898 por Liapunov, que deu condições a serem impostas à fronteira do domínio Ω .

Capítulo 2

Dedução Física

2.1 Dedução da Equação da Corda Vibrante

Estudaremos a equação diferencial parcial das pequenas oscilações de uma corda, com base na análise de MEDEIROS & ANDRADE, 1978.

Por corda entende-se um fio fino e flexível. Supondo-se que, em estado de equilíbrio, a corda coincida com o eixo dos x de um sistema de coordenadas cartesianas com origem no ponto zero do plano \mathbb{R}^2 ; limitar-se-á, aqui ao estudo das pequenas oscilações transversais. Por transversal entende-se a oscilação que se realiza em um plano que contém o eixo dos x e em que cada elemento da corda se desloca perpendicularmente a esse eixo.

Representa-se por $u(x, t)$ o deslocamento de cada ponto x da corda no instante t , a partir de sua posição de equilíbrio. As hipóteses que se seguem são necessárias para a fundamentação das considerações posteriores.

i) Todas as forças de atrito, tanto internas como externas, não serão consideradas.

ii) A intensidade das forças gravitacionais é pequena quando comparada com as tensões na corda.

iii) As amplitudes $u(x, t)$ das oscilações e suas derivadas são pequenas, de modo que seus quadrados e produtos não são considerados nos cálculos quando comparados com a unidade.

Num instante t fixo, suponha-se que o perfil da corda seja o representado na Figura 2.1, onde o segmento $\overline{x_1x_2}$ se deformou, devido ao movimento, no arco de curva $\widehat{M_1M_2}$.

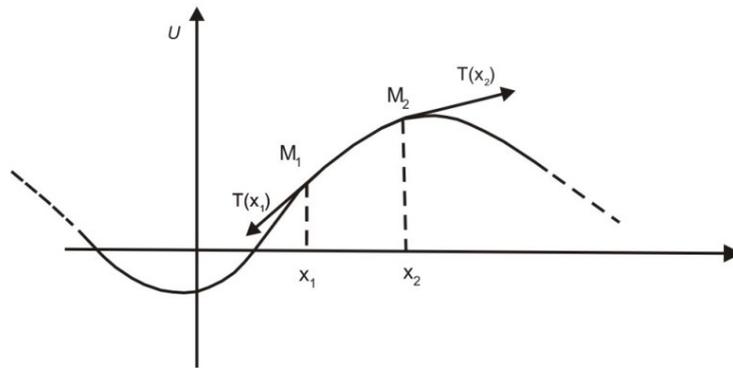


Figura 2.1

O comprimento do arco $\widehat{M_1M_2}$, no instante t , é dado por

$$S = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} dx \quad (*)$$

Demonstração de (*) feita em Apêndice.

Em virtude da hipótese (iii) de pequenas oscilações, obtém-se

$$S \approx x_2 - x_1;$$

isto é, considera-se S igual a $x_2 - x_1$. Desse modo, quando se estudam pequenas oscilações, não há variação do comprimento do segmento $\overline{x_1x_2}$. Daí pela Lei de Hooke, pode-se concluir que a intensidade da tensão T , em cada ponto, não varia com o tempo, ou seja, que a variação da tensão durante o movimento não é levada em conta em presença da tensão a que está submetido o segmento $\overline{x_1x_2}$ na posição de equilíbrio.

É possível mostrar, também, que a tensão T pode ser tomada como independente de x , isto é, pode-se considerá-la igual à tensão T_0 . De fato, as forças que atuam sobre o arco de curva $\widehat{M_1M_2}$ são as seguintes:

- a) As tensões em M_1 e M_2 tangenciais a corda;
- b) As forças externas, caso existam;
- c) As forças de inércia;

Como, por hipótese, o movimento é na direção perpendicular ao eixo dos x e as forças externas e de inércia tem direção também perpendicular a esse eixo, deduz-se que o arco $\widehat{M_1M_2}$ não possui aceleração na direção x , isto é, a resultante das forças na

direção x é nula. Então, representando-se por alfa o ângulo agudo que a direção T faz com o eixo dos x , no instante T , tem-se

$$T(x_2)\cos\alpha(x_2) - T(x_1)\cos\alpha(x_1) = 0.$$

Da hipótese de serem pequenas as oscilações vem

$$\cos\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}} \approx 1$$

resultando $T(x_2) \approx T(x_1)$ quaisquer que sejam x_1 e x_2 da corda. Assim T não depende de x e será identificada com T_0 para todo x e t .

Vale a pena lembrar o Princípio de d'Alembert, que afirma: "Num sistema material em movimento, as forças neles aplicadas e as forças de inércia se equilibram". A equação diferencial de pequenas oscilações de uma corda será deduzida como aplicação desse princípio. Para tanto, serão explicitados as forças que atuam na corda. Viu-se que, devido às condições impostas, as forças responsáveis pelo o movimento são as componentes das tensões na direção dos deslocamentos u , as forças externas e as forças de inércia. Calculando-se essas forças, obtém-se:

a) Resultante das tensões na direção u :

$$F_1 = T_0 [\operatorname{sen}\alpha(x_2) - \operatorname{sen}\alpha(x_1)];$$

sendo:

$$\operatorname{sen}\alpha(x) = \frac{\operatorname{tg}\alpha(x)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha(x)}} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}} \approx \frac{\partial u}{\partial x}$$

conclui-se que:

$$F_1 = T_0 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_2} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_1} \right] = T_0 \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx.$$

Portanto, a componente das tensões na direção u é dada por

$$F_1 = T_0 \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx.$$

b) Forças externas representa-se por $p(x, t)$ a distribuição de forças externas por unidade de comprimento atuando sobre a corda, na direção u . Resulta que a força F_2 que atua sobre o arco $\widehat{M_1M_2}$ será

$$F_2 = \int_{x_1}^{x_2} p(x, t) dx;$$

c) Forças de inércia - Seja $\rho(x)$ a densidade linear da corda. A massa do segmento Δx da corda é $\rho(x)\Delta x$ e a força de inércia sobre esse segmento será

$$-\rho(x)\Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2};$$

Portanto a força F_3 sobre o arco $\widehat{M_1M_2}$ será dada por

$$F_3 = - \int_{x_1}^{x_2} \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx;$$

Finalmente do princípio de d'Alembert obtém-se

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + p(x, t) \right] dx = 0$$

quaisquer que sejam x_1, x_2 e $t \geq 0$. Supondo-se o integrando uma função contínua, segue-se que

$$T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + p(x, t) = 0.$$

Esta última é a equação diferencial de pequenas oscilações de uma corda flexível, sob a ação de uma força externa $p(x, t)$. Quando $\rho(x)$ é constante (corda uniforme), obém-se

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t);$$

sendo

$$a = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}, \quad F(x, t) = \frac{p(x, t)}{\rho}.$$

Quando não há força externa atuando na corda, a equação se reduz à seguinte:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

No nosso caso para simplificar as contas temos feito $a = 1$.

Observação 1: Na dedução da equação corda vibrante, temos feito uso das seguintes identidades trigonométricas:

$$\cos\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha(x)}} \quad e \quad \operatorname{sen}\alpha(x) = \frac{\operatorname{tg}\alpha(x)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha(x)}}$$

Note que $\alpha(x)$ é pequeno portanto $\operatorname{sen}\alpha(x) \geq 0$ e $\cos\alpha(x) \geq 0$. Mostremos estas identidades. Tem-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha(x)}} &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\operatorname{sen}^2\alpha(x)}{\cos^2\alpha(x)}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2\alpha(x) + \operatorname{sen}^2\alpha(x)}{\cos^2\alpha(x)}}} \\ &= \cos\alpha(x). \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{tg}\alpha(x)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha(x)}} &= \frac{\frac{\operatorname{sen}\alpha(x)}{\cos\alpha(x)}}{\sqrt{1 + \frac{\operatorname{sen}^2\alpha(x)}{\cos^2\alpha(x)}}} \\ &= \frac{\frac{\operatorname{sen}\alpha(x)}{\cos\alpha(x)}}{\sqrt{\frac{\cos^2\alpha(x) + \operatorname{sen}^2\alpha(x)}{\cos^2\alpha(x)}}} \\ &= \operatorname{sen}\alpha(x). \end{aligned}$$

Capítulo 3

Resolução do Problema (P)

Neste capítulo apresentaremos a demonstração da existência e unicidade de solução do Problema (P) para um caso particular de dados iniciais $u_0(x)$ e $u_1(x)$, mais precisamente, estudaremos o seguinte problema misto:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) + u_t(x, t) = 0, \quad x \in (0, 1), \quad t > 0 \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in (0, 1) \end{array} \right. \quad (3.1)$$

onde

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^m \xi_k \sqrt{2} \operatorname{sen} k\pi x, \quad u_1(x) = \sum_{k=1}^m \gamma_k \sqrt{2} \operatorname{sen} k\pi x \quad (3.2)$$

onde, ξ_1, \dots, ξ_k e $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ são números reais arbitrários.

Considere a sequência $(w_k)_{k \in \mathbb{N}}$ onde

$$w_k = \sqrt{2} \operatorname{sen} k\pi x, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3.3)$$

então

$$(w_k, w_j) = \int_0^1 (\sqrt{2} \operatorname{sen} k\pi x)(\sqrt{2} \operatorname{sen} j\pi x) dx = 0, \quad k \neq j \quad (3.4)$$

e

$$(w_k, w_k) = \int_0^1 (\sqrt{2} \operatorname{sen} k\pi x)^2 dx = 1, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3.5)$$

Estes cálculos podem ser vistos em apêndice.

Comentário 1: Seja X o espaço vetorial definido por

$$X = \{f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}; f \text{ contínua}\}$$

Defina

$$(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx \quad (3.6)$$

e

$$\|f\| = (f, f)^{\frac{1}{2}} = \left[\int_0^1 [f(x)]^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.7)$$

Então (f, g) é um produto escalar em X e $\|f\|$ a norma de $f \in X$. As expressões (3.4) e (3.5) nos dizem que

$$(w_k, w_j) = 0, \quad \forall k, j \text{ com } k \neq j$$

e

$$\|w_k\| = 1, \quad \forall k$$

isto é, $(w_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é um sistema ortonormal de X .

Comentário 2: Se completamos o espaço X usando a norma (3.7), obtemos o espaço $L^2(0, 1)$. Seja $v \in L^2(0, 1)$ então

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} (v, w_k)w_k \quad (3.8)$$

sendo a convergência da série no espaço $L^2(0, 1)$.

A série (3.8) é denominada a série de Fourier de $v \in L^2(0, 1)$. Observe que (3.2) representam somas finitas de séries de Fourier.

O estudo dos espaços X , $L^2(0, 1)$ e de séries de Fourier de funções $v \in L^2(0, 1)$ está fora de nosso plano. Apresentamos os comentários 1 e 2 apenas para situar nosso estudo num contexto geral.

Teorema 3.1 *O problema (3.1) com dados iniciais (3.2) possui uma única solução dada por*

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^m g_k(t)\sqrt{2}\text{sen}k\pi x \quad (3.9)$$

onde

$$g_k(t) = e^{-\frac{1}{2}t} \left[\xi_k \cos \frac{1}{2} \left(\sqrt{4k^2\pi^2 - 1} \right) t + \frac{(\gamma_k + \frac{1}{2}\xi_k)}{\frac{1}{2}\sqrt{4k^2\pi^2 - 1}} \text{sen} \frac{1}{2} \left(\sqrt{4k^2\pi^2 - 1} \right) t \right]$$

Demonstração: Utilizaremos o métodos de separação de variáveis para obter a solução (3.9) e aplicaremos o método da energia para obter unicidade de solução.

Existência de Solução: Suponha que a solução $u(x, t)$ de (P) tem a forma

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^m g_k(t) \sqrt{2} \text{sen} k\pi x \quad (3.10)$$

Tem-se

$$u_t(x, t) = \sum_{k=1}^m g_k'(t) \sqrt{2} \text{sen} k\pi x$$

$$u_{tt}(x, t) = \sum_{k=1}^m g_k''(t) \sqrt{2} \text{sen} k\pi x$$

$$u_x(x, t) = \sum_{k=1}^m g_k(t) k\pi \sqrt{2} \text{cos} k\pi x$$

$$u_{xx}(x, t) = - \sum_{k=1}^m g_k(t) k^2 \pi^2 \sqrt{2} \text{sen} k\pi x$$

Como $u(x, t)$ deve ser solução da equação (3.1)₁, obtemos

$$\sum_{k=1}^m \left[g_k''(t) + k^2 \pi^2 g_k(t) + g_k'(t) \right] \sqrt{2} \text{sen} k\pi x = 0$$

Assim, por (3.4) e (3.5), obtemos

$$g_k''(t) + k^2 \pi^2 g_k(t) + g_k'(t) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m$$

Como

$$u(x, 0) = u_0(x) = \sum_{k=1}^m \xi_k \sqrt{2} \text{sen} k\pi x$$

e

$$u_t(x, 0) = u_1(x) = \sum_{k=1}^m \gamma_k \sqrt{2} \text{sen} k\pi x$$

Deve ter-se

$$g_k(0) = \xi_k \text{ e } g_k'(0) = \gamma_k.$$

Assim temos que resolver m equações diferenciais ordinárias da forma

$$\begin{cases} g_k''(t) + k^2\pi^2 g_k(t) + g_k'(t) = 0, & t > 0 \\ g_k(0) = \xi_k \text{ e } g_k'(0) = \gamma_k \end{cases} \quad (3.11)$$

A seguir resolvemos o Problema (3.11).

Temos então a equação característica:

$$r^2 + r + k^2\pi^2 = 0 \quad (3.12)$$

que tem como solução as duas raízes complexas,

$$r_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4k^2\pi^2 - 1}i \text{ e } r_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{4k^2\pi^2 - 1}i$$

Note que $4k^2\pi^2 > 1$, $k = 1, 2, \dots$,

Como solução geral das equações diferenciais ordinárias com coeficientes constantes, temos

$$g_k(t) = c_1 e^{\alpha t} \cos \beta t + c_2 e^{\alpha t} \sen \beta t. \quad (3.13)$$

Agora substituindo as raízes de (3.12) em (3.13), temos:

$$g_k(t) = e^{-\frac{1}{2}t} \left[c_{1k} \cos \frac{1}{2} \left(\sqrt{4k^2\pi^2 - 1} \right) t + c_{2k} \sen \frac{1}{2} \left(\sqrt{4k^2\pi^2 - 1} \right) t \right]. \quad (3.14)$$

Determinemos a constante c_{1k} .

Para $g_k(0) = \xi_k$, temos:

$$g_k(0) = e^{-\frac{1}{2}0} \left[c_{1k} \cos \frac{1}{2} \left(\sqrt{4k^2\pi^2 - 1} \right) 0 + c_{2k} \sen \frac{1}{2} \left(\sqrt{4k^2\pi^2 - 1} \right) 0 \right] \quad (3.15)$$

isso implica que:

$$g_k(0) = c_{1K} = \xi_k$$

A seguir determinemos a constante c_{2K} . Derivando $g_k(t)$ com relação a t , obtemos:

$$\begin{aligned}
g_k'(t) &= -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t} \left[\xi_k \cos \frac{1}{2} \left(\sqrt{4k^2\pi^2 - 1} \right) t + c_2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} \left(\sqrt{4k^2\pi^2 - 1} \right) t \right] \\
&+ e^{-\frac{1}{2}t} \left[\xi_k \frac{1}{2} \sqrt{4k^2\pi^2 - 1} \left(-\operatorname{sen} \frac{1}{2} \sqrt{4k^2\pi^2 - 1} \right) t \right] \\
&+ e^{-\frac{1}{2}t} \left[c_2 \frac{1}{2} \sqrt{4k^2\pi^2 - 1} \left(\cos \frac{1}{2} \sqrt{4k^2\pi^2 - 1} \right) t \right]
\end{aligned}$$

Note que deve ter-se $g_k'(0) = \gamma_k$. Tem-se

$$\begin{aligned}
g_k'(0) &= -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}0} \left[\xi_k \cos \frac{1}{2} \left(\sqrt{4k^2\pi^2 - 1} \right) 0 + c_2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} \left(\sqrt{4k^2\pi^2 - 1} \right) 0 \right] \\
&+ e^{-\frac{1}{2}0} \left[\xi_k \frac{1}{2} \sqrt{4k^2\pi^2 - 1} \left(-\operatorname{sen} \frac{1}{2} \sqrt{4k^2\pi^2 - 1} \right) 0 \right] \\
&+ e^{-\frac{1}{2}0} \left[c_2 \frac{1}{2} \sqrt{4k^2\pi^2 - 1} \left(\cos \frac{1}{2} \sqrt{4k^2\pi^2 - 1} \right) 0 \right]
\end{aligned} \tag{3.16}$$

que implica

$$g_k'(0) = -\frac{1}{2}\xi_k + c_{2k} \frac{1}{2} \sqrt{4k^2\pi^2 - 1} = \gamma_k$$

assim

$$c_{2k} = \frac{(\gamma_k + \frac{1}{2}\xi_k)}{\frac{1}{2}\sqrt{4k^2\pi^2 - 1}}.$$

Daí

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^m e^{-\frac{1}{2}t} \left[\xi_k \cos \frac{1}{2} \left(\sqrt{4k^2\pi^2 - 1} \right) t + \frac{(\gamma_k + \frac{1}{2}\xi_k)}{\frac{1}{2}\sqrt{4k^2\pi^2 - 1}} \operatorname{sen} \frac{1}{2} \left(\sqrt{4k^2\pi^2 - 1} \right) t \right] \sqrt{2} \operatorname{sen} k\pi x$$

Assim, verifica-se que $u(x, t)$ é solução de (3.1)₁, com as condições de contorno e condições iniciais dadas.

Unicidade de Solução: Utilizaremos o método da energia para obter a unicidade de solução do Problema (P). Suponha que u e v sejam soluções do Problema (P). Então

$$\left| \begin{array}{l} u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) + u_t(x, t) = 0, \quad x \in (0, 1), \quad t > 0 \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in (0, 1) \end{array} \right. \tag{3.17}$$

e

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{tt}(x, t) - v_{xx}(x, t) + v_t(x, t) = 0, \quad x \in (0, 1), \quad t > 0 \\ v(0, t) = v(1, t) = 0, \quad t > 0 \\ v(x, 0) = u_0(x), \quad v_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in (0, 1) \end{array} \right. \quad (3.18)$$

Mostraremos que (P) possui apenas uma solução isto é, $u = v$. De fato, seja $w = u - v$.

Tem-se

$$\left\{ \begin{array}{l} w_{tt}(x, t) - w_{xx}(x, t) + w_t(x, t) = 0, \quad x \in (0, 1), \quad t > 0 \\ w(0, t) = w(1, t) = 0, \quad t > 0 \\ w(x, 0) = 0, \quad w_t(x, 0) = 0, \quad x \in (0, 1) \end{array} \right. \quad (3.19)$$

Multiplicando ambos os membros da equação (3.19)₁ por $w_t(x, t)$ e integrando em $[0, 1]$, obtemos

$$\int_0^1 w_{tt}(x, t)w_t(x, t)dx - \int_0^1 w_{xx}(x, t)w_t(x, t)dx + \int_0^1 [w_t(x, t)]^2 dx = 0$$

Como $w_t(x, t)$ se anula nos extremos $x = 0$ e $x = 1$, resulta

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 [w_t(x, t)]^2 dx + \int_0^1 w_x(x, t)w_{xt}(x, t)dx + \int_0^1 [w_t(x, t)]^2 dx = 0$$

Assim

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 [w_t(x, t)]^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 [w_x(x, t)]^2 dx + \int_0^1 [w_t(x, t)]^2 dx = 0$$

Integrando ambos os membros desta expressão em $[0, t]$, obtemos

$$\frac{1}{2} \int_0^1 [w_t(x, t)]^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 [w_x(x, t)]^2 dx + \int_0^t \int_0^1 [w_t(x, t)]^2 dxdt = 0$$

Assim

$$E(t) + \int_0^t \int_0^1 [w_t(x, t)]^2 dxdt = 0, \quad \forall t \geq 0 \quad (3.20)$$

Tem-se que

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[w_t(x, t) \right]^2 dx + \int_0^1 \left[w_x(x, t) \right]^2 dx$$

corresponde a energia total do Problema (P). Mostraremos que o Problema (P) possui apenas uma única solução, pois se existissem duas soluções u e v , então teríamos que $w = u - v$ seria solução do problema em estudo. De fato de (3.20) conclui-se que $E(t)$ possui derivada nula, portanto é constante. Tem-se que $E(0) = 0$, logo $E(t) = 0$ para todo $t > 0$, ou seja

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[w_t(x, t) \right]^2 dx + \int_0^1 \left[w_x(x, t) \right]^2 dx \leq 0, \quad \forall x \in (0, 1) \text{ e } \forall t > 0$$

logo

$$w_t(x, t) = 0, \quad \forall x \in (0, 1) \text{ e } \forall t > 0$$

e

$$w_x(x, t) = 0, \quad \forall x \in (0, 1) \text{ e } \forall t > 0.$$

Isso implica que

$$w(x, t) - w(x, 0) = \int_0^t w_t(x, \xi) d\xi = 0,$$

para todo x e t , ou seja $w(x, t) = 0$, portanto $u = v$, o que mostra a unicidade e soluções.

Capítulo 4

Decaimento Exponencial da Energia

Decaimento Exponencial da Energia associada ao Problema (P) tem-se a energia $E(t)$ dada por

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 [u_t(x, t)]^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 [u_x(x, t)]^2 dx, \quad t \geq 0 \quad (4.1)$$

onde $u(x, t)$ é a solução do Problema (P) . Aqui o primeiro e o segundo termo de (4.1), denotam, respectivamente a energia cinética e a energia potencial do sistema (P) .

Teorema 4.1 *Se $u(x, t)$ é a solução dada no teorema (3.1), então*

$$E(t) \leq 32E(0)e^{-t}, \quad \forall t \geq 0 \quad (4.2)$$

onde $E(t)$ é a energia definida em (4.1).

Demonstração: Multiplicando ambos os membros da equação $(P)_1$ por $u_t(x, t)$ e integrando em $[0, 1]$, obtemos

$$\int_0^1 u_{tt}(x, t)u_t(x, t)dx - \int_0^1 u_{xx}(x, t)u_t(x, t)dx + \int_0^1 [u_t(x, t)]^2 dx = 0.$$

Como $u_t(x, t)$ se anula nos extremos $x = 0$ e $x = 1$, resulta

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 [u_t(x, t)]^2 dx + \int_0^1 u_x(x, t)u_{xt}(x, t)dx + \int_0^1 [u_t(x, t)]^2 dx = 0.$$

Assim

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 [u_t(x, t)]^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 [u_x(x, t)]^2 dx + \int_0^1 [u_t(x, t)]^2 dx = 0.$$

Integrando ambos os membros desta expressão em $[0, t]$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^1 [u_t(x, t)]^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 [u_x(x, t)]^2 dx + \int_0^t \int_0^1 [u_t(x, t)]^2 dx dt \\ = \frac{1}{2} \int_0^1 [u_1(x)]^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 [u_0(x)]^2 dx \end{aligned}$$

Assim

$$E(t) + \int_0^t \int_0^1 [u_t(x, t)]^2 dx dt = E(0), \quad \forall t \geq 0 \quad (4.3)$$

Observação 4.1: Note que se na equação $(P)_1$ não se considera o termo $u_t(x, t)$ então (4.3) proporciona

$$E(t) = E(0), \quad \forall t \geq 0$$

Assim neste caso tem-se a conservação de energia.

Observação 4.2: De (4.3) segue que

$$E(t) \leq E(0), \quad \forall t \geq 0$$

Nosso objetivo é mostrar que $E(t)$ decai exponencialmente.

Derivando a solução $u(x, t)$ com relação ao tempo, obtém-se

$$u_t(x, t) = \sum_{k=1}^m g_k'(t) \sqrt{2} \operatorname{sen} k\pi x$$

Elevando ao quadrado ambos os membros desta expressão e integrando em $[0, 1]$, resulta

$$\int_0^1 [u_t(x, t)]^2 dx = \int_0^1 \left[\sum_{k=1}^m g_k'(t) \sqrt{2} \operatorname{sen} k\pi x \right]^2 dx \quad (4.4)$$

Como

$$\int_0^1 \left(\sqrt{2} \operatorname{sen} k\pi x \right) \left(\sqrt{2} \operatorname{sen} j\pi x \right) dx = \begin{cases} 0, & k \neq j \\ 1, & k = j \end{cases} \quad (4.5)$$

(ver apêndice), obtém-se

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left[\sum_{k=1}^m g_k'(t) \sqrt{2} \operatorname{sen} k\pi x \right]^2 dx = \\ \sum_{k=1}^m \int_0^1 [g_k'(t)]^2 [\sqrt{2} \operatorname{sen} k\pi x]^2 dx \end{aligned} \quad (4.6)$$

Com efeito, de (4.5) e usando as notações introduzidas em **Comentário 1** do **Capítulo 3**, resulta

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left[\sum_{k=1}^m g_k'(t) \sqrt{2} \operatorname{sen} k\pi x \right]^2 dx &= \left\| \sum_{k=1}^m g_k'(t) \sqrt{2} \operatorname{sen} k\pi x \right\|^2 = \\
&= \left(\sum_{k=1}^m g_k'(t) \sqrt{2} \operatorname{sen} k\pi x, \sum_{j=1}^m g_j'(t) \sqrt{2} \operatorname{sen} j\pi x \right) = \\
&= \sum_{k=1}^m \left(g_k'(t) \sqrt{2} \operatorname{sen} k\pi x, g_k'(t) \sqrt{2} \operatorname{sen} k\pi x \right) = \\
&= \sum_{k=1}^m \left\| g_k'(t) \sqrt{2} \operatorname{sen} k\pi x \right\|^2 = \sum_{k=1}^m \int_0^1 [g_k'(t)]^2 [\sqrt{2} \operatorname{sen} k\pi x]^2 dx
\end{aligned}$$

que justifica (4.6). Usando (4.5) segue

$$\int_0^1 [g_k'(t)]^2 [\sqrt{2} \operatorname{sen} k\pi x]^2 dx = [g_k'(t)]^2 \int_0^1 [\sqrt{2} \operatorname{sen} k\pi x]^2 dx = [g_k'(t)]^2$$

Das duas últimas expressões, obtém-se

$$\int_0^1 \left[\sum_{k=1}^m g_k'(t) \sqrt{2} \operatorname{sen} k\pi x \right]^2 dx = \sum_{k=1}^m [g_k'(t)]^2 \quad (4.7)$$

Assim, de (4.4) e (4.7) segue que

$$\int_0^1 [u_t(x, t)]^2 dx = \sum_{k=1}^m [g_k'(t)]^2 \quad (4.8)$$

Por outro lado, derivando a solução $u(x, t)$ com relação a x , resulta

$$u_x(x, t) = \sum_{k=1}^m g_k(t) k\pi \sqrt{2} \operatorname{cosec} k\pi x$$

Elevando ao quadrado ambos os membros desta expressão e integrando em $[0, 1]$, obtemos

$$\int_0^1 [u_x(x, t)]^2 dx = \int_0^1 \left[\sum_{k=1}^m g_k(t) k\pi \sqrt{2} \operatorname{cosec} k\pi x \right]^2 dx \quad (4.9)$$

Como

$$\int_0^1 (\sqrt{2}\cos k\pi x) (\sqrt{2}\cos j\pi x) dx = \begin{cases} 0, & \text{se } k \neq j \\ 1, & \text{se } k = j \end{cases} \quad (4.10)$$

(ver apêndice), aplicando os mesmos argumentos usados para obter (4.8), resulta

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left[\sum_{k=1}^m g_k(t) k\pi\sqrt{2}\cos k\pi x \right]^2 dx &= \sum_{k=1}^m \int_0^1 g_k^2(t) k^2\pi^2 [\sqrt{2}\cos k\pi x]^2 dx \\ &= \sum_{k=1}^m g_k^2(t) k^2\pi^2 \int_0^1 [\sqrt{2}\cos k\pi x]^2 dx \\ &= \sum_{k=1}^m g_k^2(t) k^2\pi^2 \end{aligned}$$

isto é,

$$\int_0^1 \left[\sum_{k=1}^m g_k(t) k\pi\sqrt{2}\cos k\pi x \right]^2 dx = \sum_{k=1}^m k^2\pi^2 g_k^2(t) \quad (4.11)$$

De (4.8) e (4.11), obtém-se

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2} \int_0^1 [u_t(x, t)]^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 [u_x(x, t)]^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \left\{ [g_k'(t)]^2 + k^2\pi^2 g_k^2(t) \right\} \end{aligned}$$

isto é,

$$E(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \left\{ [g_k'(t)]^2 + k^2\pi^2 g_k^2(t) \right\}, \quad \forall t \geq 0 \quad (4.12)$$

Notando que $g_k'(0) = \gamma_k$ e $g_k(0) = \xi_k$, segue de (4.12) que

$$E(0) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m [\gamma_k^2 + k^2\pi^2 \xi_k^2] \quad (4.13)$$

Para mostrar o teorema temos que calcular $[g_k'(t)]^2$ e $[g_k(t)]^2$ e escrever estes resultados em função de γ_k^2 e ξ_k^2 .

Note que

$$g_k(t) = e^{-\frac{1}{2}t} \left[\xi_k \cos \frac{1}{2} \left(\sqrt{4k^2\pi^2 - 1} \right) t + \frac{(\gamma_k + \frac{1}{2}\xi_k)}{\frac{1}{2}\sqrt{4k^2\pi^2 - 1}} \operatorname{sen} \frac{1}{2} \left(\sqrt{4k^2\pi^2 - 1} \right) t \right] \quad (4.14)$$

(ver Teorema 3.1)

Tem-se

$$|g_k(t)| \leq e^{-\frac{1}{2}t} \left[|\xi_k| + \frac{|\gamma_k| + \frac{1}{2}|\xi_k|}{\frac{1}{2}\sqrt{4k^2\pi^2 - 1}} \right]$$

Observando que $(a+b+c)^2 \leq 2a^2 + 4b^2 + 4c^2$ para todo a, b, c números reais, segue que

$$g_k^2(t) \leq e^{-t} \left[2\xi_k^2 + \frac{4\gamma_k^2 + 2\xi_k^2}{\frac{1}{4}(4k^2\pi^2 - 1)} \right] \quad (4.15)$$

Portanto

$$k^2\pi^2 g_k^2(t) \leq e^{-t} \left[2k^2\pi^2\xi_k^2 + \frac{16k^2\pi^2\gamma_k^2}{(4k^2\pi^2 - 1)} + \frac{8k^2\pi^2\xi_k^2}{(4k^2\pi^2 - 1)} \right] \quad (4.16)$$

Observe que

$$\frac{k^2\pi^2}{4k^2\pi^2 - 1} \leq \frac{1}{3}, \quad \forall k = 1, 2, \dots \quad (4.17)$$

$$\frac{8}{4k^2\pi^2 - 1} \leq 1, \quad \forall k = 1, 2, \dots \quad (4.18)$$

Portanto, levando em consideração (4.17) e (4.18) em (4.16) obtém-se

$$k^2\pi^2 g_k^2(t) \leq e^{-t} \left[2k^2\pi^2\xi_k^2 + \frac{16}{3}\gamma_k^2 + k^2\pi^2\xi_k^2 \right]$$

isto é

$$k^2\pi^2 g_k^2(t) \leq e^{-t} \left[3k^2\pi^2\xi_k^2 + \frac{16}{3}\gamma_k^2 \right] \quad (4.19)$$

Derivando $g_k(t)$ resulta de (4.14)

$$\begin{aligned} g_k'(t) &= \left(-\frac{1}{2}\right)g_k(t) \\ &+ e^{-\frac{1}{2}t} \left[-\xi_k \frac{1}{2}\sqrt{4k^2\pi^2 - 1} \operatorname{sen} \frac{1}{2}\sqrt{4k^2\pi^2 - 1}t \right] \\ &+ e^{-\frac{1}{2}t} \left[\left(\gamma_k + \frac{1}{2}\xi_k \right) \cos \frac{1}{2}\sqrt{4k^2\pi^2 - 1}t \right] \end{aligned}$$

Portanto

$$\left| g_k'(t) \right| \leq \frac{1}{2} |g_k(t)| + e^{-\frac{1}{2}t} \left[|\xi_k| \frac{1}{2}\sqrt{4k^2\pi^2 - 1} + \left| \gamma_k + \frac{1}{2}\xi_k \right| \right]$$

logo fazendo uso da desigualdade $(a+b+c)^2 \leq 2a^2 + 4b^2 + 4c^2$, obtém-se

$$\left[g_k'(t) \right]^2 \leq \frac{1}{2} g_k^2(t) + e^{-t} \left[\xi_k^2(4k^2\pi^2 - 1) + 4 \left| \gamma_k + \frac{1}{2}\xi_k \right|^2 \right]$$

Como $|\gamma_k + \frac{1}{2}\xi_k|^2 \leq 2\gamma_k^2 + \xi_k^2$, resulta

$$\left[g_k'(t) \right]^2 \leq \frac{1}{2}g_k^2(t) + e^{-t} \left[\xi_k^2(4k^2\pi^2 - 1) + 8\gamma_k^2 + 4\xi_k^2 \right] \quad (4.20)$$

Fazendo uso de (4.17) e (4.18) em (4.15), obtém-se

$$g_k^2(t) \leq e^{-t} \left[2\xi_k^2 + 2\gamma_k^2 + \xi_k^2 \right] = e^{-t} \left[3\xi_k^2 + 2\gamma_k^2 \right]$$

Note que

$$\xi_k^2 (4k^2\pi^2 - 1) \leq 4k^2\pi^2\xi_k^2$$

Utilizando estas duas últimas desigualdades em (4.20) resulta

$$\left[g_k'(t) \right]^2 \leq e^{-t} \left[\frac{3}{2}\xi_k^2 + \gamma_k^2 \right] + e^{-t} \left[4k^2\pi^2\xi_k^2 + 8\gamma_k^2 + 4\xi_k^2 \right]$$

que implica

$$\left[g_k'(t) \right]^2 \leq e^{-t} \left[\frac{3}{2}k^2\pi^2\xi_k^2 + \gamma_k^2 \right] + e^{-t} \left[4k^2\pi^2\xi_k^2 + 8\gamma_k^2 + 4k^2\pi^2\xi_k^2 \right]$$

isto é

$$\left[g_k'(t) \right]^2 \leq e^{-t} \left[10k^2\pi^2\xi_k^2 + 10\gamma_k^2 \right] \quad (4.21)$$

De (4.19) e (4.21) resulta

$$\begin{aligned} \left[g_k'(t) \right]^2 + k^2\pi^2 g_k^2(t) &\leq e^{-t} \left[3k^2\pi^2\xi_k^2 + \frac{16}{3}\gamma_k^2 \right] \\ &+ e^{-t} \left[10k^2\pi^2\xi_k^2 + 10\gamma_k^2 \right] \\ &\leq e^{-t} \left[13k^2\pi^2\xi_k^2 + 16\gamma_k^2 \right] \\ &\leq e^{-t} \left[16k^2\pi^2\xi_k^2 + 16\gamma_k^2 \right] \end{aligned}$$

Assim

$$\left[g_k'(t) \right]^2 + k^2\pi^2 g_k^2(t) \leq 16e^{-t} \left[k^2\pi^2\xi_k^2 + \gamma_k^2 \right] \quad (4.22)$$

Decorre disto e de (4.12) que

$$E(t) \leq 32e^{-t} \left[\frac{1}{2} \sum_{k=1}^m (k^2\pi^2\xi_k^2 + \gamma_k^2) \right]$$

Esta desigualdade e (4.13) implica

$$E(t) \leq 32E(0)e^{-t}, \quad \forall t \geq 0$$

o que demonstra o teorema.

Capítulo 5

Procedimentos

Técnicos-Methodológicos

Para realização deste trabalho foi necessário um estudo bibliográfico com autores relacionado ao tema proposto, que serviram de base para o referencial teórico.

Quanto ao método que utilizamos foi o método dedutivo. Conforme a sequência a seguir: Primeiro transformamos o Problema de Cauchy para uma equação diferencial ordinária num problema integral equivalente. Depois definimos uma sequência de soluções aproximadas deste problema integral. O limite destas soluções aproximadas proporcionou a solução do problema integral, conseqüentemente, do Problema de Cauchy para a equação diferencial ordinária.

Para chegar ao estágio acima se fez necessário o estudo de alguns pré-requisitos, os principais foram: séries numéricas, séries de funções, limite uniforme de séries de funções e equações integrais.

Para aplicação das equações diferenciais ordinárias no estudo do comportamento assintótico das soluções da equação da corda com amortecimento, fez-se necessário estudar tópicos de equações diferenciais parciais, integração de funções de duas variáveis, energia potencial e energia cinética de um sistema e Funcionais de Lyapunov.

Capítulo 6

Considerações Finais

Chegando ao término da análise da equação da corda vibrante, bem como da leitura sistemática dos outros autores referendados nesse trabalho, elaboramos as considerações finais conscientes de que muito se têm a discutir sobre essa equação.

Concluimos a partir de nossos estudos que as equações diferenciais parciais têm grande importância nas diversas áreas, podemos citar a física, a engenharia, podemos usar as equações diferenciais parciais para modelar diversos problemas relacionados a estas áreas. No decorrer do estudo proposto utilizamos de várias ferramentas para a construção da existência e unicidade da equação da corda vibrante o qual o nosso tema abordou.

Utilizamos o método dedutivo e a análise de outros matemáticos como Medeiros & Andrade, Leithold, Lages Lima, entre outros supracitados, com relevância nos conteúdos, dentre os quais foram séries numéricas, séries de funções, séries de Fourier, que são séries trigonométricas com certo grau de complexidade que aparecem em problemas envolvendo equações diferenciais parciais. Usamos também o método de separação de variáveis para resolver o problema da corda vibrante com as condições de contorno e as condições iniciais particulares. E o método da energia para o decaimento exponencial.

Por fim concluimos que a matemática possibilitou analisar uma situação-problema, evidenciando como ela se une a física em um determinado contexto para encontrar a solução do problema, e assim compreender um fenômeno que ocorre no cotidiano das pessoas, como foi aqui citado.

Apêndice

Neste Apêndice provaremos alguns resultados que fazem-se essenciais no decorrer deste trabalho. A seguir deduziremos a expressão para calcular o comprimento de arco.

Apresentaremos a demonstração do comprimento de arco com base no estudo de LEITHOLD, 1994.

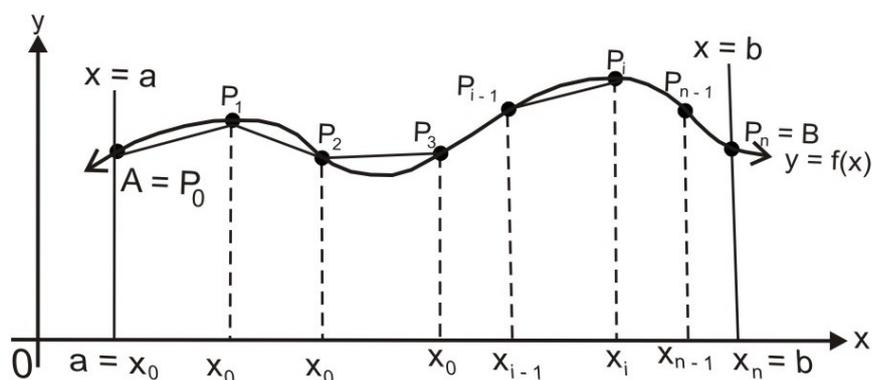


Figura 2.2

Seja Δ uma partição do intervalo fechado $[a, b]$ formada ao dividirmos o intervalo em n subintervalos, escolhendo $(n - 1)$ números intermediários entre a e b . Sejam $x_0 = a$ e $x_n = b$ e x_1, x_2, \dots, x_{n-1} , números intermediários de tal forma que $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n$. Então, o i -ésimo subintervalo será $[x_{i-1}, x_i]$; seu comprimento denotado por $\Delta_i x$ será $x_i - x_{i-1}$, onde $i = 1, 2, \dots, n$. Então, se $\|\Delta\|$ for a norma da partição Δ , cada $\Delta_i x \leq \|\Delta\|$.

Associado a cada ponto $(x_i, 0)$ no eixo x está um ponto $P_i(x_i, f(x_i))$ sobre a curva. Trace um segmento de reta de cada ponto P_{i-1} ao próximo ponto P_i , conforme mostra a Figura 2.2 acima. O comprimento do segmento de reta de P_{i-1} a P_i é denotado por $|\overline{P_{i-1}P_i}|$, sendo dado pela fórmula

$$|\overline{P_{i-1}P_i}| = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}. \quad (6.1)$$

A soma dos comprimentos desses segmentos de reta é

$$|\overline{P_0P_1}| + |\overline{P_1P_2}| + |\overline{P_2P_3}| + \dots + |\overline{P_{i-1}P_i}| + \dots + |\overline{P_{n-1}P_n}|$$

que pode ser escrito como

$$\sum_{k=1}^n |\overline{P_{i-1}P_i}|. \quad (6.2)$$

Parece plausível que se n for suficientemente grande, a soma em (6.2) estará próxima do que intuitivamente pensamos ser o comprimento do arco AB . Assim, definimos um comprimento do arco como sendo o limite da soma (6.2) quando a norma Δ tende a zero, e nesse caso n cresce sem limitação. Temos, então, a definição a seguir.

Definição 6.1 *Suponhamos que a função f seja contínua no intervalo fechado $[a, b]$. Além disso, suponhamos que exista um número L tendo as seguintes propriedades: Para todo $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que para toda partição Δ do intervalo $[a, b]$ seja verdade que*

$$\text{Se } \|\Delta\| < \delta \text{ então } \left| \sum_{i=1}^n |\overline{P_{i-1}P_i}| - L \right| < \epsilon$$

Assim, escrevemos

$$L = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n |\overline{P_{i-1}P_i}| \quad (6.3)$$

e L é chamado de comprimento do arco da curva $y = f(x)$ do ponto $A(a, f(a))$ ao ponto $B(b, f(b))$.

Se o limite em (6.3) existir, dizemos que o arco é retificável. Vamos deduzir uma fórmula para encontrar o comprimento L de um arco retificável. A dedução exige que a derivada de f seja contínua em $[a, b]$; dizemos que tal função é suave em $[a, b]$.

Consulte a Figura 2.3. Se P_{i-1} , tiver coordenadas (x_{i-1}, y_{i-1}) e P_i tiver coordenadas (x_i, y_i) , então o comprimento da corda $P_{i-1}P_i$ será dado pela fórmula (6.1).

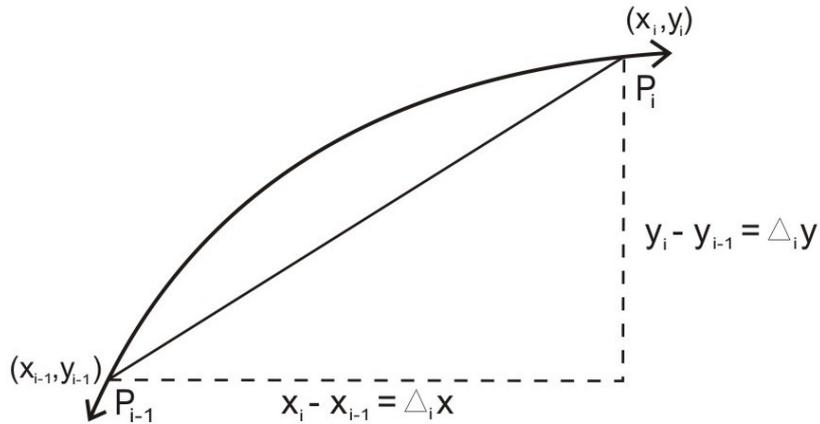


Figura 2.3

Tomando $x_i - x_{i-1} = \Delta_i x$ e $y_i - y_{i-1} = \Delta_i y$, temos

$$|\overline{P_{i-1}P_i}| = \sqrt{(\Delta_i x)^2 + (\Delta_i y)^2}$$

ou, equivalentemente, como $\Delta_i x \neq 0$,

$$|\overline{P_{i-1}P_i}| = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta_i y}{\Delta_i x}\right)^2} \Delta_i x \quad (6.4)$$

Como exigimos que f' seja contínua em $[a, b]$, as hipóteses do (TVM), Teorema do Valor Médio, estão satisfeitas por f , assim, existe um número z_i no intervalo aberto (x_{i-1}, x_i) tal que

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(z_i)(x_i - x_{i-1})$$

Como $\Delta_i y = f(x_i) - f(x_{i-1})$ e $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$, da equação acima, teremos

$$\frac{\Delta_i y}{\Delta_i x} = f'(z_i)$$

Substituindo esta equação em (6.4), obtemos

$$|\overline{P_{i-1}P_i}| = \sqrt{1 + [f'(z_i)]^2} \Delta_i x$$

Para cada i de 1 até n , existe uma expressão dessa forma, tal que

$$\sum_{i=1}^n |\overline{P_{i-1}P_i}| = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [f'(z_i)]^2} \Delta_i x$$

Tomando o limite de ambos os membros dessa expressão quando $\|\Delta\|$ tende a zero, obtemos

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n |\overline{P_{i-1}P_i}| = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [f'(z_i)]^2} \Delta_i x \quad (6.5)$$

se o limite existir.

Para mostrar que o limite do segundo membro de (6.5) existe, seja F a função definida por

$$F(x) = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$$

Como estamos impondo que f' seja contínua em $[a, b]$, F será contínua em $[a, b]$. Como $x_{i-1} < z_i < x_i$, para $i = 1, 2, \dots, n$, no lado direito de (6.5), temos o limite de uma soma de Reimann que é uma integral definida. Portanto, de (6.5)

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n |\overline{P_{i-1}P_i}| = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

De (6.3), o primeiro membro é L ; portanto

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

Logo mostramos que o comprimento do arco $\widehat{M_1M_2}$, no instante t , é dado por

$$S = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} dx$$

A seguir provaremos algumas identidades que foram necessárias para a obtenção dos resultados.

Das identidades trigonométricas temos:

$$\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v = \frac{1}{2} \left[\cos (u - v) - \cos (u + v) \right]$$

Daí, integrando em $[0, 1]$, obtém-se:

$$\begin{aligned} 2 \int_0^1 \operatorname{sen} (k\pi) x \operatorname{sen} (j\pi) x dx &= 2 \int_0^1 \frac{1}{2} \left[\cos (j\pi x - k\pi x) - \cos (j\pi x + k\pi x) \right] dx \\ &= \int_0^1 \left[\cos (j - k) \pi x - \cos (j + k) \pi x \right] dx \\ &= \int_0^1 \cos 0 dx - \int_0^1 \cos 2k\pi x dx \\ &= 1 - \int_0^1 \cos 2k\pi x dx = 1 - \frac{1}{2k\pi} \operatorname{sen} 2k\pi x \\ &= 1 - 0 = 1, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

se $j = k$

Analogamente temos:

$$\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v = \frac{1}{2} \left[\cos (u - v) - \cos (u + v) \right]$$

Daí, integrando em $[0, 1]$, obtém-se:

$$\begin{aligned} 2 \int_0^1 \operatorname{sen} (k\pi) x \operatorname{sen} (j\pi) x dx &= 2 \int_0^1 \frac{1}{2} \left[\cos (j\pi x - k\pi x) - \cos (j\pi x + k\pi x) \right] dx \\ &= \int_0^1 \left[\cos (j\pi - k\pi) x - \cos (j\pi + k\pi) x \right] dx \\ &= \frac{1}{(j - k) \pi} \operatorname{sen} (j - k) \pi x - \frac{1}{(j + k) \pi} \operatorname{sen} (j + k) \pi x \\ &= 0 \end{aligned}$$

se $j \neq k$

Como feito no início, das identidades trigonométricas temos:

$$\operatorname{cos} u \operatorname{cos} v = \frac{1}{2} \left[\cos (u + v) + \cos (u - v) \right]$$

Daí, integrando em $[0, 1]$, obtém-se:

$$\begin{aligned}
 2 \int_0^1 \cos(k\pi x) \cos(j\pi x) dx &= 2 \int_0^1 \frac{1}{2} \left[\cos(j\pi x + k\pi x) + \cos(j\pi x - k\pi x) \right] dx \\
 &= \int_0^1 \left[\cos(j+k)\pi x + \cos(j-k)\pi x \right] dx \\
 &= \int_0^1 \cos 2k\pi x dx + \int_0^1 \cos 0 dx \\
 &= \int_0^1 \cos 2k\pi x dx + 1 = \frac{1}{2k\pi} \sin 2k\pi x + 1 \\
 &= 0 + 1 = 1, \quad \forall k \in \mathbb{N}.
 \end{aligned}$$

se $j = k$

Analogamente temos:

$$\cos u \cos v = \frac{1}{2} \left[\cos(u+v) + \cos(u-v) \right]$$

Daí, integrando em $[0, 1]$, obtém-se:

$$\begin{aligned}
 2 \int_0^1 \cos(k\pi x) \cos(j\pi x) dx &= 2 \int_0^1 \frac{1}{2} \left[\cos(j\pi x + k\pi x) + \cos(j\pi x - k\pi x) \right] dx \\
 &= \int_0^1 \left[\cos(j+k)\pi x + \cos(j-k)\pi x \right] dx \\
 &= \frac{1}{(j+k)\pi} \sin(j+k)\pi x + \frac{1}{(j-k)\pi} \sin(j-k)\pi x \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

se $j \neq k$

Referências Bibliográficas

- [1] BARTLE, Robert G. **The Elements of Integration and Lebesgue Measure**. New York: John Wiley Sons. Inc., 1995.

- [2] BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**; tradução e revisão Valéria de Magalhães Iório. 9^a.ed. Rio de Janeiro: LTC, 2010.

- [3] BUTKOV, Eugene. **Física Matemática**. Traduzido por João Bosco Pitombeira Fernandes de Carvalho. 1^a ed. Rio de Janeiro: LTC, 2010.

- [4] EISBERG, Roberto M.; LAWRENCE, S. Lener. **Física: fundamentos e aplicações**. v. 2; tradução Ivan José Albuquerque; revisão técnica Paulo Roberto Motejunas, Oliveira Delfin Dias Soares. São Paulo: McGraw- Hill do Brasil, 1982.

- [5] FIGUEREDO, Djairo Guedes de.; NEVES, Aloisio Freiria. **Equações diferenciais aplicada** 3^a. Ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2007.

- [6] FIGUEREDO, Djairo Guedes de. **Análise de Fourier e equações diferenciais parciais**. 2^a. Ed. Rio de Janeiro: IMPA, CNPq, Projeto Euclides, 1977.

- [7] HÖNIG, Chaim Samuel. **Análise Funcional e o problema de Sturm-Liouville**. São Paulo: Edgard Blücher, 1978.

- [8] KREYZIG, Erwin. **Introductory Functional Analysis with Applications**. New York: John Wiley Sons. Inc., 1978.

- [9] LEITHOLD, Louis. **Cálculo com Geometria Analítica** 3^a. ed. volumes 1 e 2; Tradução Cyro de Carvalho Patarra; revisão técnica Wilson Castro Ferreira, Jr. Silvio Pregnotatto. São Paulo: HARBRA, 1994.

- [10] MARCIEL, Aldo Bezerra. ; LIMA, Osmundo Alves. **Introdução à análise real.** Campina /grande: EDUEPB, 2005.
- [11] MEDEIROS, Luís Adauto.; ANDRADE, Nirzi G. de. **Iniciação às equações diferenciais parciais.** Rio de Janeiro: Livros técnicos e científicos, 1978.
- [12] MATOS, Marivaldo P. **Séries e Equações Diferenciais.** São Paulo: Printece Hall, 2002
- [13] BASSANESI, R. C e FERREIRA, W. **Equações Diferenciais com Aplicações.** São Paulo: Harbra, 1988
- [14] FIGUEREDO D. G. & NEVES A. F, **Equações Diferenciais Aplicadas,** IMPA/Rio de Janeiro, 1997.
- [15] LIMA, Elon Lages, 1929 - **Curso de Análise** vol. 2 - Rio de Janeiro IMPA/CNPq/1981.
- [16] LIMA, Elon Lages, 1929 - **Espaços Métricos** - Rio de Janeiro IMPA/CNPq/1977.
- [17] SIMMONS, G.F. - **Introduction to Topology and Modern Analysis.** 1963
- [18] SWOKOWSKI, Earl William. **Cálculo com Geometria Analítica** Vol 2. Tradução de Alfredo Alves de com a colaboração dos professores Vera Reguna L. F. Flores e Márcio Quintão Moreno ; revisão técnica Antonio Pertence Júnior. 2ª ed. São Paulo: Markron Books, 1994.
- [19] ZILL, Dennis G., CULLEN, Michael R. **Equações Diferenciais.** Vol. 2. 3ª ed. Tradução: Alfredo Alves de Farias. Revisão Técnica: Antonio Pertence Jr. São Paulo: Pearson Makron Books, 2001.