



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA  
CAMPUS DE CAMPINA GRANDE  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA**

**DOUGLAS PESSOA LIMA**

**O USO DA HISTÓRIA DA ASTRONOMIA NO ENSINO DE GEOMETRIA: A  
PRIMEIRA LEI DE KEPLER E A ELIPSE**

**CAMPINA GRANDE - PB  
2015**

**DOUGLAS PESSOA LIMA**

**O USO DA HISTÓRIA DA ASTRONOMIA NO ENSINO DE GEOMETRIA: A  
PRIMEIRA LEI DE KEPLER E A ELIPSE**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado em Campina Grande na Universidade Estadual da Paraíba, como requisito para a conclusão do curso de Licenciatura Plena em Matemática.

Orientador: Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Ana Paula Bispo da Silva.

**CAMPINA GRANDE - PB  
2015**

É expressamente proibida a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano da dissertação.

L732u Lima, Douglas Pessoa.  
O uso da história da Astronomia no ensino de Geometria  
[manuscrito] : a primeira lei de Kepler e a elipse / Douglas Pessoa  
Lima. - 2015.  
42 p. : il. color.

Digitado.  
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática)  
- Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e  
Tecnologia, 2015.  
"Orientação: Profa. Dra. Ana Paula Bispo da Silva,  
Departamento de Física".

1. Ensino de Geometria. 2. Astronomia. 3. Cônicas. 4.  
Kepler, Johannes. I. Título.

21. ed. CDD 516

O USO DA HISTÓRIA DA ASTRONOMIA NO ENSINO DE GEOMETRIA: A  
PRIMEIRA LEI DE KEPLER E A ELIPSE

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado  
em Campina Grande na Universidade Estadual  
da Paraíba, como requisito para a conclusão do  
curso de Licenciatura Plena em Matemática.

Aprovada em: 5/5/2015

BANCA EXAMINADORA

  
Prof. Dra. Ana Paula Bispo da Silva (Orientador)  
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

  
Prof. Dr. Rômulo Marinho do Rêgo  
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

  
Prof. Msc. José Antonio Ferreira Pinto  
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Aos meus avós (in memória), Guiomar Rodrigues de Lima e Joaquim Ângelo de Oliveira, pelo carinho, amor e todos os ensinamentos ao longo da minha educação enquanto criança, DEDICO.

## **AGRADECIMENTOS**

À professora Ana Paula Bispo pelas leituras sugeridas ao longo dessa orientação e pela dedicação.

Aos meus pais Gilmar de Oliveira Lima e Doralice Pessoa Lima, por todo o amor e educação, a mim conferidos até hoje.

Às minhas tias Maria Helena de Oliveira Lima, Maria Nazaré de Oliveira Lima e Maria José de Oliveira Lima, e ao meu tio Djalma de Oliveira Lima que mesmo a distância sempre mim deram todo o apoio possível.

Aos professores do Curso de Graduação da UEPB, que contribuíram ao longo de todo o curso, por meio das disciplinas e debates, para o desenvolvimento desta pesquisa.

Aos funcionários da UEPB, pela presteza e atendimento quando nos foi necessário.

Aos colegas de classe pelos momentos de amizade e apoio.

“Quem é você, Johannes Kepler, para destruir a simetria divina?” (Johannes Kepler)

## RESUMO

O presente trabalho é uma revisão teórica, que tem como principal objetivo incentivar o uso da Astronomia como forma motivadora para o ensino das cônicas, mais especificamente o ensino da elipse. A primeira parte do trabalho traz a evolução histórica da concepção do homem quanto à estrutura do universo, do modelo geocêntrico ao heliocêntrico, fazendo uma análise observacional dos deslocamentos dos corpos celestes. Mostramos a contribuição de vários pensadores como: Aristóteles, Claudio Ptolomeu, Nicolau Copérnico, Tycho Brahe e Johannes Kepler. Este último, Johannes Kepler chega à conclusão que dá suporte ao nosso estudo, a qual ficou conhecida como a sua primeira lei. Nela, ele considera que a órbita que os planetas descrevem em torno do Sol tem a forma de uma elipse, e não de um círculo, como acreditava-se até a época. Baseado então na dedução de Kepler, na última parte do trabalho temos as equações modernas da elipse e suas respectivas demonstrações.

**Palavras-Chave:** Astronomia, Kepler, cônicas, equação da elipse.



## **ABSTRACT**

This work is a theoretical review, which aims to encourage the use of Astronomy as motivating way to the teaching of conical , specifically the teaching of ellipse. The first part of work presents the historical evolution the of conception of man with respect to structure of the universe, of the geocentric model to the heliocentric model, doing an observational analysis of displacement of celestial bodies. We show the contribution of various thinkers as: Aristotle, Claudio Ptolemy, Copernicus, Tycho Brahe and Johannes Kepler. This latter Johannes Kepler, his conclusion which became known as his first Law supports our study. In it, He considers that the orbits that the planets describe around the Sun has the shape of an ellipse, and not a circle, as it was believed until the time. Based on deduction of Kepler, in the latter part of work we have the modern equations of ellipse and their respectives statements.

**Keywords:** Astronomy, Kepler, conical, the ellipse equation.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Aristóteles .....	12
Figura 2 - A estrutura do universo, segundo Aristóteles e Ptolomeu.....	13
Figura 3 - Cláudio Ptolomeu .....	14
Figura 4 - Círculo de Ptolomeu para o movimento do Sol.....	15
Figura 5 - Círculo de Ptolomeu para o movimento dos planetas. ....	15
Figura 6 - Círculo de Ptolomeu para o movimento de Mercúrio e da Lua.....	16
Figura 7 - Nicolau Copérnico .....	17
Figura 8 - Tycho Brahe.....	19
Figura 9 - O modelo de universo de Tycho Brahe. ....	20
Figura 10 - Johannes Kepler.....	22
Figura 11 - Taça de Kepler.....	24
Figura 12 - Segunda Lei de Kepler.....	27
Figura 13 - Órbita da Terra.....	28
Figura 14 - Distância do centro da órbita da Terra ao Sol.....	29
Figura 15 - Órbita de Marte.....	30
Figura 16 - Equação óptica máxima.....	30
Figura 17 - Primeira Lei de Kepler.....	31
Figura 18 - Elipse .....	32
Figura 19 - Elementos da elipse .....	32
Figura 20 - Excentricidade de uma elipse .....	33
Figura 21 - Elipse com o eixo maior coincidente com o eixo x.....	34
Figura 22 - Elipse com o eixo maior coincidente com o eixo y.....	35
Figura 23 - Elipse com o eixo maior paralelo ao eixo x.....	36
Figura 24 - Elipse com o eixo maior paralelo ao eixo y.....	37
Figura 25 - Elipse em coordenadas polares .....	38
Figura 26 - Elipse em coordenadas polares com o centro em um dos focos.....	39

## SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....	10
2. PARTE HISTÓRICA .....	12
2.1. O SISTEMA PTOLOMAICO E COPERNICANO .....	14
2.2. O SISTEMA MISTO DE BRAHE .....	19
2.3. JOHANNES KEPLER .....	22
2.4. O ENCONTRO COM TYCHO BRAHE .....	25
2.5. ASTRONOMIA NOVA E A SEGUNDA LEI .....	26
2.6. A ÓRBITA DA TERRA .....	28
2.7. A ÓRBITA DE MARTE E A PRIMEIRA LEI .....	30
3. A ELIPSE .....	32
3.1. Definição .....	32
3.2. Elementos da Elipse .....	32
3.3. Excentricidade .....	33
3.4. Equação canônica da elipse de centro na origem .....	34
3.4.1. Eixo maior coincidente com o eixo x .....	34
3.4.2. Eixo maior coincidente com o eixo y .....	35
3.4.3. Eixo maior paralelo ao eixo x.....	36
3.4.4. Eixo maior paralelo ao eixo y.....	37
4. EQUAÇÃO DA ELIPSE EM COORDENADAS POLARES .....	38
5. CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	41
6. REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS .....	42

## 1. INTRODUÇÃO

No dia 06 de Março de 2009 foi lançado pela NASA (*National Aeronautics and Space Administration; Administração Nacional da Aeronáutica e do Espaço*), o primeiro telescópio espacial, batizado de Kepler, em homenagem ao astrônomo alemão do século XVII, Johannes Kepler, na base militar de Cabo Canaveral, na Florida, Estados Unidos da America<sup>1</sup>. Seu principal objetivo é orbitar o Sol utilizando a órbita da Terra, e assim, vasculhar outros sistemas solares da nossa Via Láctea, no intuito de detectar outros planetas semelhantes à Terra, dentro ou fora da zona habitável. A zona habitável seria a zona onde existem planetas orbitando estrelas, nos quais suas proximidades permitam com que a temperatura do planeta mantenha a água componente vital para a vida, em seu estado líquido na superfície<sup>2</sup>.

Ainda sobre novidades nos céus, uma equipe internacional de astrônomos anunciou dia 15 de outubro de 2012, a descoberta de um planeta que tem seu céu iluminado por quatro Sóis. Essa descoberta foi feita por dois astrônomos amadores americanos, conhecidos como Kian Jek e Robert Gagliano, utilizando o site Planetshunters.org (*Caçadores de Planetas*)<sup>3</sup>, que é uma colaboração entre a Universidade de Yale e o Zooniverse, onde são divulgados lightcurves (*curvas de luz*), que é um gráfico da intensidade da luz de um objeto celeste ou região, como uma função do tempo<sup>4</sup>. Estes gráficos fornecidos no site são de dados divulgados publicamente obtidos pela missão Kepler<sup>5</sup>. Após esta descoberta astrônomos profissionais americanos e britânicos comprovaram a veracidade das informações, através de observações e medições feitas com o telescópio Keck, situado no Monte Mauna Kea, no Havaí.

Este planeta foi batizado de PH1, em homenagem ao site Planethunters, ele está situado a cerca de 5.000 anos-luz da Terra, um ano-luz corresponde a 9, 461 trilhões de quilômetros. O fato intrigante em torno desta descoberta é que o planeta possui duas estrelas que orbitam em torno deste e sua órbita esta em torno de dois Sóis. Nunca antes observado em nenhuma pesquisa realizada, até agora astrônomos do mundo todo, conheciam apenas seis planetas, que orbitam em torno de dois Sóis, mas sem nenhuma outra estrela orbitando seu sistema solar.

O PH1 é um planeta do mesmo tamanho de Netuno, planeta do nosso sistema solar, ele possui também seis vezes o tamanho do planeta Terra. A sua órbita é descrita em 138 dias,

---

<sup>1</sup> Fonte: <http://en.wikipedia.org/>, consulta realizada em 18/10/2012.

<sup>2</sup> Fonte: <http://www.explicatorium.com/>, consulta realizada em 18/10/2012.

<sup>3</sup> Fonte: <http://br.noticias.yahoo.com/>, consulta realizada em 18/10/2012.

<sup>4</sup> Fonte: <http://www.planethunters.org/>, consulta realizada em 18/10/2012.

<sup>5</sup> Fonte: <http://kepler.nasa.gov/>, consulta realizada em 18/10/2012.

contornando duas estrelas, uma com massa respectivamente 1,5 o tamanho do Sol do nosso sistema solar, e a outra aproximadamente 0,41 o tamanho do nosso Sol. As outras duas estrelas que orbitam este planeta completando o sistema planetário estão a uma distância de cerca de mil vezes a distância que separa a Terra do Sol<sup>6</sup>.

A descoberta nos faz pensar o quanto a Astronomia como ciência tem evoluído ao longo tempo, desde a Antiguidade onde os povos mais antigos, estabeleciam a época do plantio e da colheita com relação à posição do Sol, da Lua e das estrelas, até os dias atuais onde são descobertos novos planetas a exemplo do PH1, que se formam e evoluem com essa excentricidade em ambientes nunca antes imaginados. Também nos leva a questionar o quanto o conhecimento científico que temos sobre a natureza é provisório e pode mudar ao longo do tempo, muitas vezes questionando leis que tínhamos como definitivas.

Para entendermos o quanto este conhecimento científico se alterou, é preciso conhecer sua história, a história da Astronomia neste caso, e ver o que está por trás de cada explicação dada aos fenômenos da natureza. Além da Astronomia<sup>7</sup>, muitos conhecimentos matemáticos são necessários para encontrar com precisão a órbita de cada planeta e, a partir daí, deduzir outras informações.

Assim, este trabalho no capítulo 2 tem como principal objetivo relacionar os estudos de Astronomia numa perspectiva histórica ao estudo das cônicas, mais precisamente, da elipse. Para isso, fazemos uma revisão bibliográfica quanto à evolução dos estudos de Astronomia, abordando o rompimento dos paradigmas quanto aos sistemas de mundo, até a primeira lei de Kepler.

No capítulo 3 definimos a elipse e os elementos que a compõe. No capítulo 4 demonstramos as equações matemáticas no formalismo moderno que descrevem a equação da elipse. No capítulo 5, fazemos algumas considerações sobre o papel do estudo das cônicas para a compreensão da Astronomia.

---

<sup>6</sup> Fonte: <http://veja.abril.com.br/>, consulta realizada em 18/10/2012.

<sup>7</sup> A Astronomia estuda a localização e posição dos corpos celestes. Já a Cosmologia estuda a origem e constituição do Cosmos, ou seja, como começou e de que é feito o universo, os planetas, as estrelas, etc. Na antiguidade, os dois assuntos estavam misturados, e ainda havia a Astrologia, que associava estrelas a deuses. Com o tempo os três assuntos foram se diferenciando-se quanto aos campos de estudos.

## 2. PARTE HISTÓRICA

Os babilônios e os egípcios cerca de 3000 a.C. foram os primeiros povos a desenvolver a Astronomia, os principais motivos que levaram esses povos ao estudo dos astros foi a agricultura, religião, astrologia e também a confecção de calendários. Os babilônios usavam métodos de estudos astronômicos que eram baseados na observação e registro dessas observações, pois acreditavam que quanto mais registros são feitos, maior é a possibilidade de previsões sobre o funcionamento da natureza. A partir dessas observações, eles criavam tabelas, com as quais podiam prever o movimento diário do Sol e da Lua, o surgimento da lua nova indicando um novo mês, podiam também prever eclipses lunares e solares. Essa era uma forma bem engenhosa, na qual todos os procedimentos eram puramente aritméticos, como receitas. (PIRES, 2008)

**Figura 1** - Aristóteles



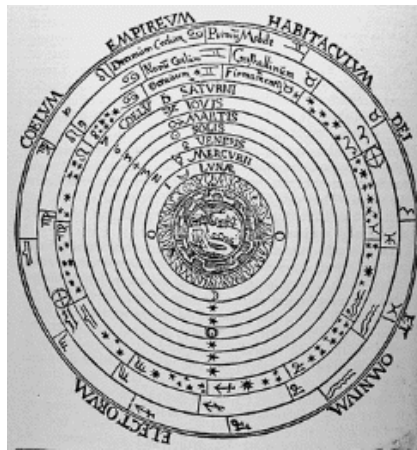
**Fonte:** PIRES, 2008, pg. 32.

Um dos primeiros filósofos a enxergar o universo de uma forma mais geométrica, foi Aristóteles (384 – 322 a.C.), na Grécia Antiga. Antes de Aristóteles, já se sabia que a Terra era redonda, com Platão (427 – 384 a.C.), discípulo de Sócrates. Mas foi com explicações simples, aceitas até hoje, que Aristóteles mostrou este fato, como por exemplo, a observação de estrelas diferentes quando se viajava da Grécia para a África. De fato, aqui no Brasil, podemos enxergar o Cruzeiro do Sul, constelação que não pode ser vista por quem esta na Europa, por exemplo. Indícios como este faziam Aristóteles crer e defender sua teoria que a Terra é curva, e não plana com um limite, como era aceito até a época. (MARTINS, 1994).

Baseado no pensamento filosófico e na metafísica, Aristóteles defendeu teorias para tentar desvendar a origem do universo. Para Aristóteles o mundo era formado por coisas “pesadas”, sólidos e líquidos, e coisas “leves” como o ar e o fogo. Enquanto que os astros (as

estrelas, os planetas, o Sol e a Lua), eram formados por um “quinto elemento”, o éter. E assim dividiu o universo em duas partes distintas, existia o mundo celeste, a partir da Lua, que seria feito de éter. E existia também o mundo terrestre, que estaria abaixo da Lua, e era formado por terra, água, ar e fogo. Na estrutura do universo de Aristóteles, a Terra ocupa o centro do universo, e a atmosfera chegaria até a altura da Lua, logo este espaço era todo ocupado pelos quatro elementos (terra, água, ar e fogo). A partir da Lua existiriam várias cascas esféricas feitas de éter, transparentes, encaixadas e sobrepondo umas as outras, girando em torno da Terra e arrastando os planetas, na última casca e mais distante estariam as estrelas, e seria também o limite do universo. (MARTINS, 1994).

**Figura 2** - A estrutura do universo, segundo Aristóteles e Ptolomeu



**Fonte:** MARTINS, 1994, pg. 76.

A junção entre os modelos astronômicos dos gregos, com os cálculos matemáticos dos babilônios, foi fundamental para o progresso da Astronomia. Baseado nesses conhecimentos, um dos últimos filósofos da irmandade pitagórica, conhecido por Aristarco, nascido em Samos no século III a. C., foi o primeiro astrônomo a afirmar que o Sol era o centro do universo e não a Terra, pois seus cálculos mostravam que o Sol era muito maior que a Terra e, portanto, deveria ocupar uma posição mais privilegiada do que esta. Porém, suas ideias foram rejeitadas na época, pois não fornecia explicação para os fenômenos decorrentes da posição central do Sol. Por exemplo, se o Sol está no centro, porque os objetos não fogem da superfície da Terra e se dirigem para ele? Se o Sol está no centro, como explicar o nascer e o pôr do Sol? Para responder a tais questões seria necessário supor que a Terra se move e isso implicaria em outros fenômenos que não eram explicados. Sendo assim, o modelo geocêntrico permaneceu aceito.

## 2.1. O SISTEMA PTOLOMAICO E COPERNICANO

**Figura 3** - Claudio Ptolomeu



**Fonte:** PIRES, 2008, pg. 54.

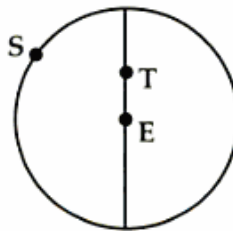
Claudio Ptolomeu foi o último dos grandes astrônomos da escola alexandrina. Sua data de seu nascimento e morte são desconhecidas, assim como o local de seu nascimento, mas há indícios que foi no Egito. Tem seu trabalho considerado por muitos historiadores da ciência, como brilhante para a sua época. Ele teve acesso a observações feitas durante séculos, como o modelo iniciado por Apolônio de Perga (261 – 196 a. C), e que foi desenvolvido por Hiparco (sec. II a.C.), considerado o maior astrônomo da antiguidade. A partir do conhecimento que tinha Ptolomeu, procurou desenvolver os movimentos celestes através de uma estrutura matemática, acreditando que os corpos celestes moviam-se em órbitas esféricas e a Terra encontrava-se no centro do universo. Descartou o movimento de rotação da Terra, e tomou as chamadas estrelas fixas, como referência para provar a imobilidade translacional da Terra. (PIRES, 2008).

Para Ptolomeu havia dois tipos de movimento nos céus, um desses movimentos era responsável por carregar a esfera celeste, ou seja, as estrelas, o Sol, a Lua, e os planetas, em torno de um observador fixo na Terra uma vez por dia. Já o outro movimento carregava também as estrelas, o Sol, a Lua e os planetas com relação a estrelas fixas, todos esses movimentos eram considerados movimentos circulares uniformes. A exemplo desta teoria, explicaremos aqui, como era o movimento do Sol para Ptolomeu. Primeiro a esfera celeste, assim contendo o Sol, rotacionava a Terra diariamente. Enquanto o segundo movimento, era no sentido horário, em relação a um observador situado na Terra, o Sol descrevia um movimento em torno de um eixo que passa pelo polo norte da eclíptica, este movimento durava 365 dias para completar uma revolução. Mas se a teoria de Ptolomeu era baseada em movimentos circulares uniformes, como explicar, as estações do ano não terem a mesma duração? Para explicar este fato Ptolomeu,



mostrou que durante seu movimento, o Sol pode ficar mais perto, ou mais afastado da Terra. Apenas deslocando o centro do movimento circular do Sol do centro da Terra, ou seja, Ptolomeu colocou o centro do movimento circular do Sol, em relação a um ponto chamado de excêntrico (fora do centro). (PIRES, 2008).

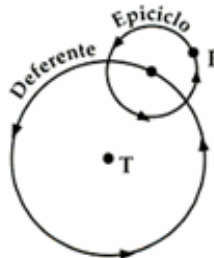
**Figura 4** - Circulo de Ptolomeu para o movimento do Sol.



Fonte: PIRES, 2008, pg. 58.

Ptolomeu também explicou o movimento dos planetas, usando dois círculos, um chamado de deferente (transportar, carregar) e o outro de epiciclo. O planeta move-se na linha da circunferência do epiciclo enquanto o centro do epiciclo transcorre a linha do círculo deferente, ambos no mesmo sentido, o deferente pode ter no seu centro tanto a Terra quanto o excêntrico.

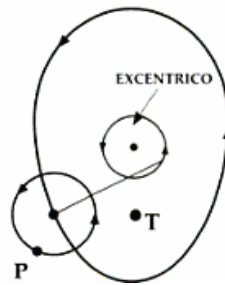
**Figura 5** - Circulo de Ptolomeu para o movimento dos planetas.



Fonte: PIRES, 2008, pg. 58.

Para a Lua e também para Mercúrio o excêntrico não era considerado fixo, mas seu movimento era descrito lentamente sobre um pequeno círculo, logo ambos os movimentos formavam uma figura oval.

**Figura 6** - Círculo de Ptolomeu para o movimento de Mercúrio e da Lua.



**Fonte:** PIRES, 2008, pg. 58.

O sistema de Ptolomeu foi bem montado e fornece bons resultados, como a exemplo, de previsões com relação à posição de um planeta. A estrutura do universo, para ele era a mesma de Aristóteles, mantendo a seguinte ordem, com a Terra no centro e conseqüentemente a Lua, Mercúrio, Vênus, Sol, Marte, Júpiter e Saturno.

**Figura 7 - Nicolau Copérnico**

Fonte: PIRES, 2008, pg. 86.

Em 1473, em Torun na Prússia Oriental, hoje Polônia, nasceu Nicolau Copérnico, aos dez anos de idade Copérnico perdeu seu pai, então sua criação e educação ficaram sobre os cuidados do seu tio o Bispo de Warmie. Durante sua vida acadêmica Copérnico estudou Letras, Religião e Medicina. Mas foi a Matemática e a Astronomia que despertaram o seu interesse e a sua curiosidade. Copérnico inicialmente teve o cuidado e a dedicação durante seus estudos astronômicos, de reler as obras de todos os filósofos, cujas teorias eram aceitas em todas as escolas da época. E vasculhando esses tratados astronômicos, ele sentiu-se entusiasmado com os relatos de alguns pensadores e estudiosos anteriores a ele, que afirmavam com veemência a possibilidade de movimento da Terra, e não só o movimento, mas também a ideia da Terra não esta no centro do universo. (BERTRAND, 2008).

Ptolomeu mesmo, já acreditava na hipótese de rotação da Terra, mas como o conhecimento sobre Mecânica na época ainda era muito pouco e tímido, era difícil aceitar a ideia, pois se a Terra girasse em torno do seu eixo, num período de 24 horas, esta rotação produziria uma força, através de sua velocidade de rotação, capaz de arrancar os edifícios mais sólidos. Mesmo assim Copérnico não encarou este pensamento como uma barreira, acreditando que o movimento da Terra, era um movimento natural, diferente dos demais, não podia se comparar este movimento com o de um objeto que é forçado a girar. Hoje se sabe que os movimentos dos corpos, assim também os corpos celestes são movidos por leis mecânicas. (BERTRAND, 2008).

Copérnico admitia que por mais inconsciente que fosse o movimento, para quem esta na Terra, ela gira em torno da linha dos pólos, num período de 24 horas, do Ocidente para o Oriente. E por este movimento não ser de fato perceptível para quem esta na Terra, atribui-se aos astros esta rotação em 24 horas, do Oriente para o Ocidente, em torno do mesmo eixo. Esta

explicação simples modificava quase todos os modelos aceitos até a época, e também fazia desaparecer muitas dificuldades.

Em seu sistema Copérnico colocou o Sol no centro do universo, e admitiu a Terra girando em torno dele. Para Copérnico por mais que o homem, ainda que por vaidade, quisesse distinguir a Terra dos outros planetas, não era mais possível perceber nenhuma característica que a Terra tenha, capaz de torná-la diferente dos outros planetas, numa visão geométrica e espacial. Copérnico mostra que os planetas possuem certas semelhanças, como em sua forma, nas leis que o regem, e também o fato de girarem em torno do mesmo foco de luz e calor (Sol). Então descreve o sistema da seguinte forma: o Sol está no centro, fixo e imóvel, ao seu redor giram em círculos, os planetas na seguinte ordem: Mercúrio, Vênus, Terra (com a Lua girando em sua volta), Marte, Júpiter e Saturno. Afirmando também, que os planetas tinham diferentes períodos de revolução, que aumentariam ou iriam diminuir de acordo com a sua distância para o Sol. (BERTRAND, 2008).

Para tornar seu sistema mais preciso, Copérnico admitiu que a Terra e os demais planetas, giravam não em torno do Sol, mas sim em torno de um ponto no espaço que estava a uma distância do Sol, que era cerca de três vezes o diâmetro solar. Ainda não satisfeito com os resultados, introduziu em seu modelo o excêntrico, o deferente e o epiciclo, dispositivos já usados por Ptolomeu, assim como o número de círculos, que na teoria de Copérnico aumentou de 40 (usados por Ptolomeu), para 48. Ou seja, os planetas e a Lua possuíam movimentos circulares independentes, a Terra tinha nove, a Lua quatro, Vênus também possuía nove e Mercúrio onze. Já Marte, Júpiter e Saturno, totalizavam mais quinze movimentos.

Apesar de todos os seus esforços, seu modelo não foi aceito, pois esbarrou em algumas dificuldades, que tinham como principal fonte, razões filosóficas, religiosas, epistemológicas e científicas. Na época era difícil aceitar o movimento da Terra, a se observar experiências simples, como um objeto em queda livre que não descreveria sua trajetória em linha reta, pois a Terra durante a queda do objeto se deslocaria, fazendo o objeto cair num local diferente do esperado, o que não era observado. A teoria de Copérnico sobre o movimento da Terra chegou ao ponto de se tornar cômica, nos palcos com alguns atores e comediantes da época. (BERTRAND, 2008).

## 2.2. O SISTEMA MISTO DE BRAHE

Figura 8 - Tycho Brahe



Fonte: PIRES, 2008, pg. 93.

Em 15 de Outubro de 1546, nasceu em Knudstorp, na Dinamarca, Tycho Brahe, filho de Otto Brahe, governador do castelo de Heisenberg, rico e nobre. Desde o nascimento Tycho teve a sua educação e criação sob a responsabilidade de seu tio George Brahe, que o instruiu até os doze anos, e logo após o enviou para Copenhague, onde fez os cursos de retórica e filosofia. Quando tinha ainda treze anos, Tycho observou em Copenhague, um eclipse do Sol, que já havia sido enunciado por astrônomos, este fenômeno previsto foi um dos motivos que despertou em Tycho Brahe um enorme interesse pelos estudos dos astros. Em 1562, foi enviado pelo tio para Leipzig, onde em Agosto de 1563, observou um fenômeno fundamental para a base de seus estudos astronômicos. Tycho observou a conjunção (o encontro no céu), dos planetas Saturno e Júpiter, ou seja, os planetas estavam tão próximos que quase não se distinguiram, e ao consultar as tabelas planetárias de Ptolomeu e Copérnico, observou que havia um erro de vários dias na previsão daquele evento. (BERTRAND, 2008).

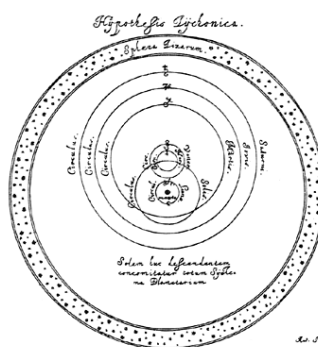
No ano de 1562, durante uma noite, Tycho viu uma estrela muito brilhante, na constelação de Cassiopéia, lugar onde antes nunca havia se visto uma estrela, seu brilho era tão intenso que pode ser visto tanto durante o dia, quanto a noite, durante vários dias. Dias estes que Tycho destinou-se a observar esta estrela, mostrando que ela não se movia em relação à esfera celeste, estando assim, fixa além da Lua. Alguns anos depois, em 1577, Tycho, baseado nas suas observações, mostrou que o cometa observado naquele ano, estava bem mais distante que a Lua. Este cometa em sua trajetória ultrapassava as esferas cristalinas e impenetráveis, as quais carregavam as estrelas e os cometas, durante os seus movimentos. Tal fato colocou em cheque a cosmologia Aristotélica, e também a inexistência de tais esferas. (BERTRAND, 2008).

Em reconhecimento ao seu trabalho, o rei Frederico II da Dinamarca, apressou o retorno de Tycho Brahe a Copenhague, onde lhe concedeu a propriedade da ilha de Hueno, situada a três léguas de Copenhague, além do apoio financeiro para a construção de um observatório, contendo os melhores instrumentos astronômicos da época. Tycho batizou o observatório com o nome de Uraniburgo, em homenagem a Urânia a musa da Astronomia.

Através de numerosas observações, Tycho Brahe tentou renovar a Astronomia por inteiro, e um passo importante para essa reforma, foi com relação à posição dos astros. Ele descobriu que as refrações dos raios luminosos ao penetrarem na atmosfera, nos mostram os astros mais altos do que realmente estão. Copérnico já havia medido a altura do pólo do horizonte e a posição dos círculos da esfera celeste, mas sem levar em conta as refrações. Apesar da extrema admiração de Tycho por Copérnico, ele não admitia o seu sistema, com o movimento da Terra, contestado por experiências cotidianas, tiradas da Mecânica. Para Tycho se a Terra girasse em torno do Sol, em um sentido, todos os astros que observamos devem dar início a um movimento, igual e contrário, assim perceptível a nós. E como os instrumentos mais precisos da época não revelavam nenhum movimento deste tipo com as estrelas, era preciso acreditar que a distância entre a Terra e estes astros era tão grande, a ponto de tornar esse deslocamento imperceptível. Mesmo assim, ainda admitiu que as distâncias de alguns astros ultrapassassem e muito a distância entre o Sol e a Terra.

Em seu modelo planetário, Tycho Brahe, colocou os cinco planetas girando em torno do Sol, colocou a Terra no centro do universo e a Lua e o Sol girando ao seu redor. Fez um estudo minucioso baseado nas ideias de Hiparco, sobre o movimento da Lua, a ponto de construir tabelas exatas dos movimentos planetários, através da utilização de instrumentos, com uma perfeição desconhecida. O universo de acordo com a hipótese de Tycho Brahe:

**Figura 9** - O modelo de universo de Tycho Brahe.



Fonte: <http://bibliotecadigital.ilce.edu.mx>, consulta realizada em 18/03/2013.

Com a morte do rei Frederico, os estudos de Tycho em sua ilha perderam o sossego, e com o passar dos anos o herdeiro do trono o jovem Cristiano IV, criou tal desafeto com Tycho,

que após oito anos de intrigas, foi nomeada uma comissão, para decidir o futuro de Uraniburgo, a qual decidiu por retirar de Tycho a pensão real, influenciando diretamente na sua retirada da ilha. Ele então seguiu para a casa de um amigo, o Conde de Rantzau, governador de Holstein, o qual lhe apresentou ao imperador da Alemanha, Rodolfo, amante da ciência. Então o imperador Rodolfo convidou Tycho para juntar-se a ele, e ofereceu todas as vantagens e facilidades que Tycho tinha na Dinamarca para realizar seus trabalhos.

Tycho Brahe, fazendo uso do seu crédito junto a Rodolfo, chamou a Praga, onde havia se instalado, para se juntar a ele em suas pesquisas os astrônomos mais iminentes da época: Muller, Fabricius e o ilustre Kepler. Mas em 24 de outubro de 1600, após quinze meses de sua chegada a Praga, Tycho faleceu, fazendo assim com que Kepler se comprometesse a terminar suas tabelas e torná-las públicas.

### 2.3. JOHANNES KEPLER

**Figura 10** - Johannes Kepler



Fonte: PIRES, 2008, pg. 97.

Em 1597, aos vinte e seis anos de idade, Johannes Kepler, elaborou um horóscopo genealógico, no qual descreve a natureza psicológica, dos principais membros da família, incluindo seus avos, pais, tios e irmãos. Segundo o próprio Kepler, em 15 de Maio de 1571, seu pai Heinrich Kepler (1547-1590), casou-se com a sua mãe Katherine Guldenmann (1547-1622). No dia 27 de Novembro, por volta das 2h30min da tarde, na cidade de Weil, sudoeste da Alemanha, sua mãe Katherine deu a luz a um menino, que foi batizado de Johannes Kepler, em homenagem ao santo do dia, o apóstolo João Evangelista. (MOURÃO, 2007).

Johannes nasceu prematuro, era uma criança doentia e raquítica, durante toda a sua adolescência, sofreu com as mais drásticas complicações de saúde, desde doenças de pele até problemas na bexiga. Sua família era pobre e muito problemática, cheia de parentes degenerados e psicopatas. O jovem Kepler chegou até a abandonar a escola, sendo obrigado a trabalhar duramente no campo.

Em 1576, a família de Kepler deixou Weil e mudou-se para Leonberg, cidade do ducado de Wurttemberg, onde teve a oportunidade de retomar os estudos, pois os duques locais haviam desenvolvido um sistema educativo, no qual as escolas eram acessíveis a todos, até mesmo os pobres. Já em 1578, retomou seus estudos na escola elementar em Leonberg, demonstrando um grande potencial, seu professor logo lhe transferiu para a escola latina. Dos treze aos dezessete anos seguiu um curso médio em Adelberg e um superior em Maulbronn, em 16 de Outubro de 1584, foi para o seminário de Adelberg. Em 26 de Novembro de 1586, dando prosseguimento a sua futura carreira como pastor, entrou para o seminário de Maulbronn, onde passou três anos estudando rudimentos de Geometria e Aritmética. Já em 1588, Kepler passou no exame de admissão em Tubingen, e em 1594, concluiu seus estudos teológicos, seguindo logo após para



Graz, capital da Estíria, província austríaca, a pedido de uma congregação local em virtude da morte do professor de Matemática, Stadius, e assim substituí-lo em uma das universidades protestantes do local. (MOURÃO, 2007).

Em 11 de Abril de 1594, Kepler chegou a Graz, para assumir a condição de *Mathematicus Provincial*, onde sua principal função era redigir prognósticos anuais e preparar as predições para os nobres estirianos. Apesar de sua fama começar a se espalhar. Kepler não conseguiu atrair muitos alunos para os seus cursos de Matemática. Mas foi durante uma aula em 9 de Julho de 1595, que ao desenhar uma figura geométrica, que mostrava um triângulo com um círculo inscrito e outro circunscrito, que ele teve a ideia de associar o sistema de Copérnico a geometria euclidiana. Kepler notou que a proporção entre o raio do círculo maior e o do menor, era sempre semelhante a existente entre as órbitas de Saturno e de Júpiter. Não satisfeito, usando a mesma lógica só que agora com a ajuda de um quadrado, ele tentou determinar a distância entre Marte e Júpiter. Logo após Kepler, construiu mais duas figuras, com a ajuda de um pentágono, e com o auxílio de um hexágono. Mas essas tentativas foram em vão e não deram certo.

Então Kepler teve a ideia de usar os “sólidos perfeitos” ou “sólidos platônicos” ou ainda “sólidos pitagóricos”, em referência aos filósofos gregos Pitágoras (sec. VI a. C.) e Platão (428-374 a. C.). Estes sólidos são: Tetraedro (pirâmide), constituído por quatro triângulos equiláteros, o cubo, constituído por seis quadrados, o octaedro, constituído por oito triângulos equiláteros, o dodecaedro, constituído por doze pentágonos, e o icosaedro, constituído por vinte triângulos equiláteros. Como estes sólidos são perfeitamente simétricos, cada um deles tanto pode ser inscrito, quanto circunscrito à superfície de uma esfera. Para Kepler era perfeitamente possível, determinar o curso dos intervalos dos seis planetas à época conhecidos, associando-os aos sólidos platônicos. (MOURÃO, 2007).

Então em 1596, aos 25 anos, o jovem Kepler publicou sua primeira obra – *Mysterium Cosmographicum* (Mistério Cosmográfico), tendo como principal motivo para a elaboração da obra, uma razão que justificasse as distâncias dos diferentes planetas ao Sol, assim como também a ligação que havia entre os períodos de revolução de cada planeta e as dimensões de suas órbitas.

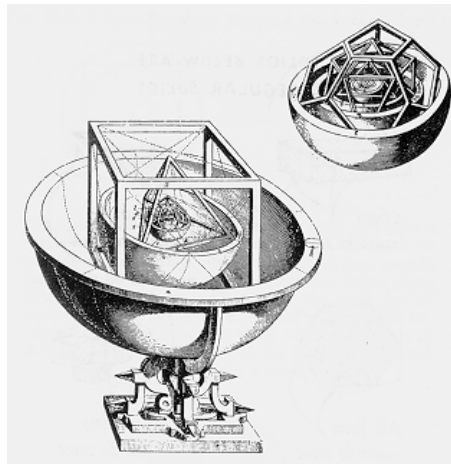
Kepler usando os cinco poliedros regulares, de forma concêntrica, ou seja, encaixando um dentro do outro, tentou demonstrar sua teoria da seguinte forma:

1. Na órbita ou esfera de Saturno, inscreveu um cubo;
2. Junto à esfera tangente a face desse cubo colocou a esfera de Júpiter;

3. A esfera de Júpiter englobava um tetraedro, enquanto a esfera nele contida estava órbita de Marte;
4. Na órbita de Marte, inscrevia-se um dodecaedro no qual se encontrava a órbita da Terra;
5. Na órbita da Terra, situava-se um Icosaedro, sendo a esfera interior a órbita de Vênus;
6. Na esfera de Vênus, colocava-se um octaedro, que envolvia a órbita de Mercúrio;

E no centro de todo o sistema planetário encontrava-se imóvel o Sol, abaixo temos a “taça de Kepler”.

**Figura 11** - Taça de Kepler



**Fonte:** <http://www.portalsaofrancisco.com.br/alfa/johannes-kepler/johannes-kepler.php> consulta realizada em

10/12/2014

Mas sua obra *Mysterium Cosmographicum*, não foi muito bem aceita pelos grandes nomes do mundo científico da época. Pois a cosmografia de Kepler se diferenciava de todas as outras explicações vistas até então, haja visto que a Astronomia, desde Ptolomeu, era bem mais descritiva, ou seja, os estudos realizados eram com o objetivo de fornecer mapas de estrelas fixas, com representações de constelações, tabelas com os horários e posições do sol, da lua e dos planetas, entre outros interesses.

## 2.4. O ENCONTRO COM TYCHO BRAHE

Em dezembro de 1599, Tycho Brahe enviou uma carta convite, ao astrônomo alemão, convidando Kepler para juntar-se a ele em suas observações e estudos astronômicos, realizados em Benatky, castelo situado cerca de 40 quilômetros a nordeste de Praga. Então em 4 de fevereiro de 1600, Kepler e Tycho Brahe se encontraram, com 30 anos e 54 anos respectivamente. Mas apesar da enorme admiração que Kepler tinha por Tycho, assim como a necessidade que o astrônomo dinamarquês, já observava de ter um sucessor para dar continuidade ao seu trabalho, por conta do agravamento de sua condição de saúde. Não foi suficiente para evitar as divergências, ocasionando até uma crise na relação entre os astrônomos. (MOURÃO, 2007).

Em outubro de 1601, após um jantar, Tycho sofreu uma crise de rins e antes de morrer designou Kepler como seu sucessor. Então em 6 de novembro o imperador Rodolfo II, nomeou Kepler como *Mathematicus Imperialis*, onde Kepler permaneceu no cargo na Corte Imperial de Praga até o falecimento de Rodolfo II, período este que foi o mais produtivo de sua carreira.

## 2.5. ASTRONOMIA NOVA E A SEGUNDA LEI

Considerada a mais complexa obra de Kepler, publicada em Heidelberg, 1609, cujo título completo é *Astronomia Nova seu Physica Coelestis Tradita Commentariis de Motibus Stellae Martis* (Astronomia Nova, fundada sobre causas, ou Física Celeste, exposta em comentários sobre os movimentos da Estrela Marte).

No *Astronomia Nova*, Kepler introduziu três inovações revolucionárias. A primeira foi desconsiderar a teoria do modelo heliocêntrico copernicano, no qual Copérnico adotava que o centro do sistema não era ocupado pelo Sol, mas pelo centro da órbita da Terra, ou seja, o equante. A segunda inovação introduzida por Kepler, foi a de considerar que as órbitas dos planetas encontravam-se aproximadamente num mesmo plano. E a terceira inovação, foi libertar-se da ideia que os planetas descreviam um movimento uniforme em círculos perfeitos. (MOURÃO, 2007).

Como Kepler passou a desconsiderar o movimento circular, seu principal objetivo passou a ser traçar uma órbita para Marte<sup>8</sup>, sem quaisquer ideias com relação a forma. Kepler então usou o artifício de transporta-se pra Marte e com isso, poderia observar e calcular os movimentos da Terra, pois o movimento da Terra naquela época para toda a astronomia era a referência, haja visto que era do planeta Terra que se faziam todas as observações das posições dos corpos celestes.

Logo Kepler pode observar, que a Terra como os demais planetas, não se deslocava com uma velocidade uniforme. Ou seja, no periélio, ou nos pontos mais próximos ao Sol o planeta se deslocava com maior velocidade, e o mesmo acontecia de forma inversa no afélio e nos pontos mais afastados do Sol, quando o planeta se deslocava mais lentamente. (MOURÃO, 2007).

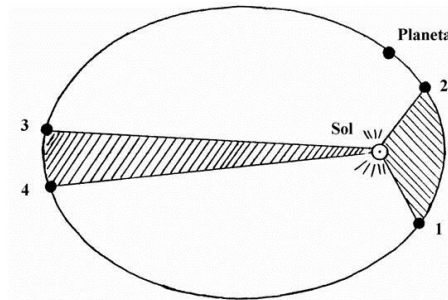
Com essas observações Kepler pode concluir que a linha imaginária ligando o Sol aos planetas vai varrer áreas iguais em tempos iguais. Esta dedução ficou conhecida como Segunda Lei dos Movimentos Planetários:

---

<sup>8</sup> Kepler usou como preferência Marte, pois havia prometido a Tycho Brahe, assim como o próprio Brahe lhe confiou suas observações.

*“O raio vetor que une o Sol a um Planeta percorre superfícies iguais em tempos iguais.”*

**Figura 12** - Segunda Lei de Kepler



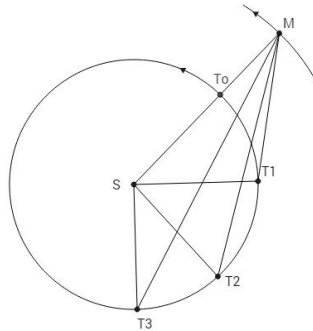
**Fonte:** [http://www.gea.org.br/historia/2003postilaleituradoceu\\_arquivos/image088.jpg](http://www.gea.org.br/historia/2003postilaleituradoceu_arquivos/image088.jpg) consulta realizada em

08/12/2014.

## 2.6. A ÓRBITA DA TERRA

Para descobrir a forma geométrica da órbita da Terra Kepler usou um processo bem engenhoso, ele observou as sucessivas posições ao longo de suas órbitas, tanto da Terra quanto de Marte. Do seguinte modo:

**Figura 13** - Órbita da Terra



**Fonte:** Autoria própria.

T0, T1, T2 e T3 são posições da Terra ao longo do tempo.

M é a posição de Marte em sua órbita.

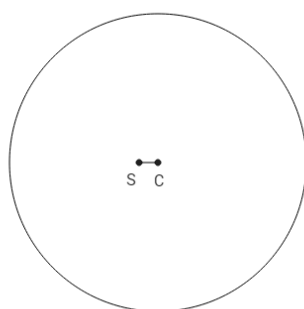
Sabendo que, o período de revolução de Marte em torno do Sol, ou seja, seu período sideral é de 687 dias. Logo partindo de M, o planeta Marte gasta 687 dias para retornar a sua posição inicial. Já o período sideral da Terra é de 365 dias, então partindo de T0 a Terra retorna novamente a mesma posição 365 dias depois. Então, quando Marte sai de M, estando alinhado com a Terra em T0, com relação ao Sol, e retornar a mesma posição completando uma volta, o planeta Terra se encontra na posição T1, quase completando uma segunda volta em torno do Sol. Quando Marte completar a segunda volta a Terra se encontra em T2. E assim sucessivamente. (ÁVILA, 1989).

Baseando-se nas tabelas de posições deixadas por Tycho, com as posições do Sol na eclíptica<sup>9</sup>. Nos triângulos MST<sub>1</sub>, MST<sub>2</sub>, MST<sub>3</sub>, etc., Kepler podia calcular os ângulos MST<sub>1</sub>, MST<sub>2</sub>, MST<sub>3</sub>, etc., assim como também os ângulos MT<sub>1</sub>S, MT<sub>2</sub>S, MT<sub>3</sub>S, etc. Então atribuindo-

<sup>9</sup> Há milhares de anos os astrônomos sabem que o Sol muda de posição no céu ao longo do ano, movendo-se um grau para leste por dia. O tempo para o Sol completar uma volta na esfera celeste define um ano. O caminho aparente do Sol no céu durante o ano define a eclíptica

se uma unidade de comprimento para SM, as medidas dos triângulos  $SMT_1$ ,  $SMT_2$ ,  $SMT_3$ , etc., poderiam ser conhecidas, por dedução, usando a técnica de triangulação ou *paralaxe* (do grego mudança, usado primeiro por Tales de Mileto (624 – 546 a.C) ), o que lhe permitiu conhecer a medida  $ST_1$ ,  $ST_2$ ,  $ST_3$ , etc., ou seja, Kepler calculou varias distancias da Terra ao Sol. Chegando a conclusão que a órbita da Terra é um círculo<sup>10</sup>, com o Sol localizado um pouco fora do centro. (ÁVILA, 1989).

**Figura 14** - Distância do centro da órbita da Terra ao Sol



**Fonte:** Autoria própria.

S = Sol e C = Centro da órbita

Kepler encontrou a distancia SC como sendo  $\frac{1}{59}$  do raio da órbita, proporcionalmente.

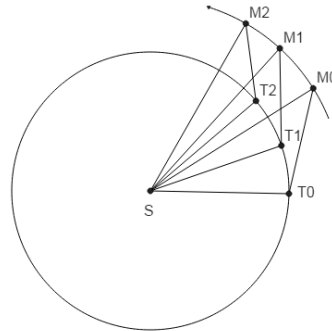
---

<sup>10</sup> Hoje sabemos porquê Kepler teve a falsa impressão que a órbita da Terra era circular, haja visto que a elipse que representa a órbita terrestre tem uma excentricidade muito pequena, ou seja, os focos dessa elipse estão muito próximos, fazendo com que a elipse se pareça com um círculo.

## 2.7. A ÓRBITA DE MARTE E A PRIMEIRA LEI

Kepler então passou a estudar a órbita de Marte, com o conhecimento das distâncias da Terra ao Sol, usando o mesmo raciocínio, ele pôde calcular a distância  $SM_0$ ,  $SM_1$ ,  $SM_3$ , etc., ao longo da órbita de Marte.

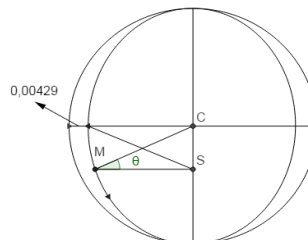
**Figura 15** - Órbita de Marte



**Fonte:** Autoria própria.

Verificando assim que a órbita de Marte não era circular, ela mais se parecia com uma oval, constatação que para ele foi perturbadora, pois os corpos celestes tinham tomado um caminho novo, diferente das simetrias perfeitas das esferas e círculos, deformando assim o sonho da harmonia das esferas celestiais. Para encontrar a área da oval, Kepler calculou uma serie de cento e oitenta distancias do Sol a Marte, e repetiu este procedimento por mais de quarenta vezes. Esta repetição e saturação das observações de Kepler só o levaram a mesma figura geométrica, ou seja, um círculo oval no qual seus lados intermediários opostos eram achatados, formando as *lúnulas*<sup>11</sup>. Kepler observou que esta área na sua parte mais espessa era equivalente a 0,00429 do raio unitário. (KOESTLER, 1961).

**Figura 16** - Equação óptica máxima



**Fonte:** Autoria própria.

<sup>11</sup> Áreas em meia-lua, que se formavam entre um círculo e a órbita de Marte.

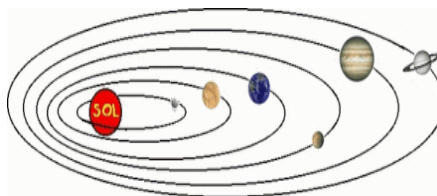


Kepler então sem nenhuma razão passou a estudar o ângulo  $M$ , o ângulo entre o Sol e o centro da órbita, onde  $M$  é a posição de Marte, é evidente que o ângulo  $M$  variou de acordo com o movimento de Marte na sua órbita, mas ele observou que seu valor máximo foi de  $5^{\circ}18'$ , chamado de equação óptica máxima. Foi então que Kepler observou que a secante do ângulo  $5^{\circ}18'$  era equivalente a 1,00429, ou seja, que a largura máxima das lúnulas era o excesso de secante sobre o raio. Deduzindo que existe uma relação fixa entre o ângulo de  $M$  e a distância  $S$ , e essa relação era para ser válida para qualquer ponto da órbita. Logo, ele poderia substituir o raio pela secante em toda a órbita, e assim encontrar a órbita oval de formato correto. Mas ao substituir Kepler obteve uma curva bem distorcida, nem um pouco parecida com a sua oval. (KOESTLER, 1961).

Apesar de ter descoberto o segredo da órbita de Marte, Kepler não conseguiu chegar a dedução de uma lei matemática que pudesse expressar a variação da posição de um planeta em relação ao Sol, ou seja, a equação da elipse. Haja visto e vale salientar que a geometria analítica, nasceu depois de Kepler. Mesmo cometendo vários erros ao tentar deduzir a equação da elipse, Kepler estava convencido que a órbita tinha que ser uma elipse, pois todas as posições de Marte apontavam para essa curva. Johannes Kepler chegou a uma equação, através da sorte e da intuição, mesmo assim, ele não conseguiu enxergar que esta equação representava uma elipse. Partindo então para a construção da elipse através de um processo geométrico, foi que ele percebeu que os dois métodos davam o mesmo resultado. Deduzindo assim o que hoje conhecemos como a sua primeira lei:

*“Os planetas movem-se em torno do Sol em órbitas elípticas, estando o Sol em um dos focos.”*

**Figura 17** - Primeira Lei de Kepler



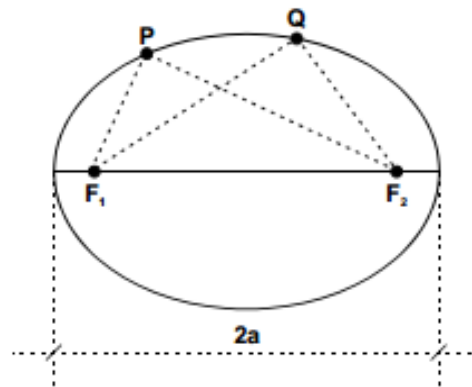
Fonte: <http://www.sobiologia.com.br/> Consulta realizada em 08/12/2014.

### 3. A ELIPSE

#### 3.1. Definição

*Elipse* do grego (falta, omissão) é o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos  $F_1$  e  $F_2$  (focos) do mesmo plano, é uma constante ( $2a$ ), onde  $2a > d(F_1, F_2) = 2c$ .

Figura 18 - Elipse

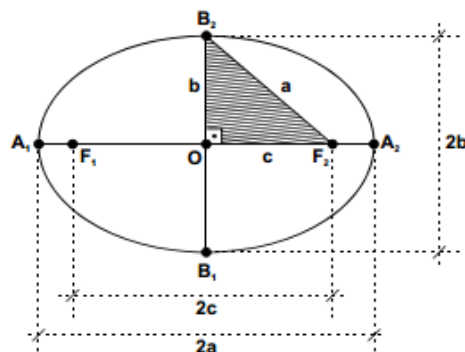


Fonte: VENTURI, 2003, pg. 69.

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a \text{ e } d(Q, F_1) + d(Q, F_2) = 2a$$

#### 3.2. Elementos da Elipse

Figura 19 - Elementos da elipse



Fonte: VENTURI, 2003, pg. 69.

- Distância focal:  $d(F_1, F_2) = 2c$
- Centro da elipse ( $O$ ): Ponto médio do segmento  $F_1F_2$
- Eixo maior: Segmento  $A_1A_2 = 2a$
- Eixo menor: Segmento  $B_1B_2 = 2b$

Nota: Do triângulo retângulo  $B_2OF_2$ , na figura acima, obtemos a seguinte relação pelo Teorema de Pitágoras.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

### 3.3. Excentricidade

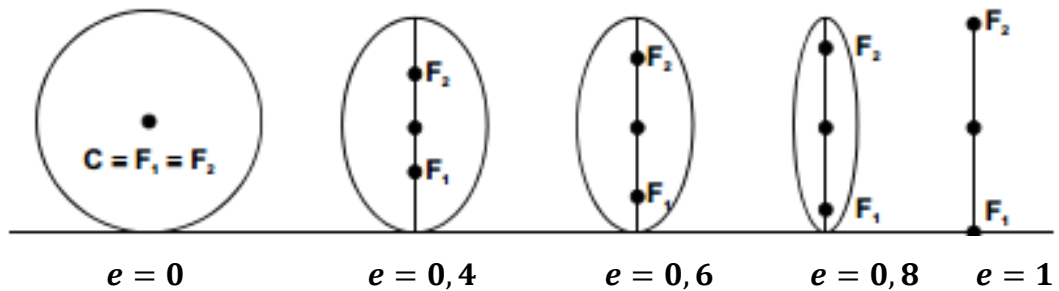
A excentricidade de uma elipse é dada pela relação:

$$e = \frac{c}{a}$$

Como  $a$  e  $c$  são positivos e  $c < a$ , logo  $0 < e < 1$ .

Quanto mais próximo de zero for o valor de  $e$ , mais a elipse se aproxima de uma circunferência. Por outro lado, quanto mais achatada for a elipse, mais o valor de  $e$  se aproxima de 1.

**Figura 20** - Excentricidade de uma elipse

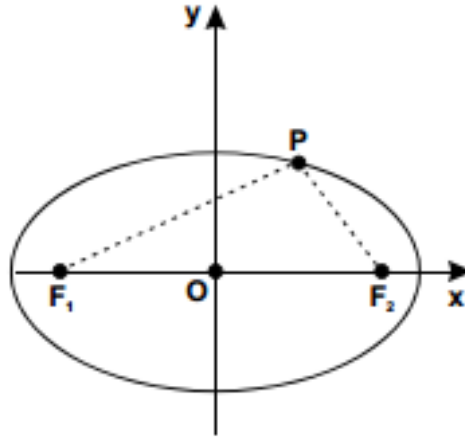


Fonte: VENTURI, 2003, pg. 70.

### 3.4. Equação canônica da elipse de centro na origem

#### 3.4.1. Eixo maior coincidente com o eixo x

Figura 21 - Elipse com o eixo maior coincidente com o eixo x



Fonte: VENTURI, 2003, pg. 71.

- $P(x, y)$  = um ponto genérico na elipse
- $F_1(-c, 0)$  e  $F_2(c, 0)$

Por definição:

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

Então,

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{(x+c)^2 + y^2})^2 = (2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2})^2$$

$$\Leftrightarrow (x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$\Leftrightarrow 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 + (x-c)^2 + y^2 - (x+c)^2 - y^2$$

$$\Leftrightarrow 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 + x^2 - 2cx + c^2 - x^2 - 2cx - c^2$$

$$\Leftrightarrow 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 - 4cx$$

$$\Leftrightarrow a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx$$

$$\Leftrightarrow (a\sqrt{(x-c)^2 + y^2})^2 = (a^2 - cx)^2$$

$$\Leftrightarrow a^2[(x-c)^2 + y^2] = (a^2 - cx)^2$$

$$\Leftrightarrow a^2[x^2 - 2cx + c^2 + y^2] = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

$$\Leftrightarrow a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

$$\Leftrightarrow a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Como na elipse temos

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 - c^2 = b^2$$

Substituindo na equação,

$$\Leftrightarrow b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

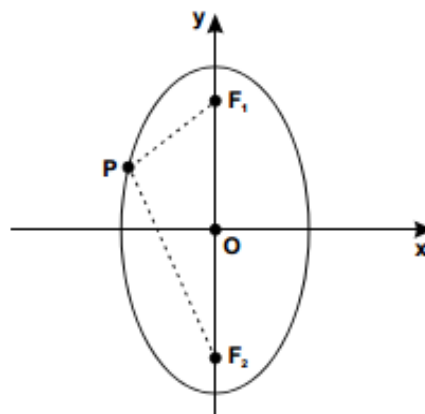
$$\Leftrightarrow \frac{b^2x^2}{a^2b^2} + \frac{a^2y^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Essa equação é conhecida como **canônica** ou **reduzida** da elipse de centro na origem e focos sobre o eixo x.

### 3.4.2. Eixo maior coincidente com o eixo y

**Figura 22** - Elipse com o eixo maior coincidente com o eixo y



**Fonte:** VENTURI, 2003, pg. 72.

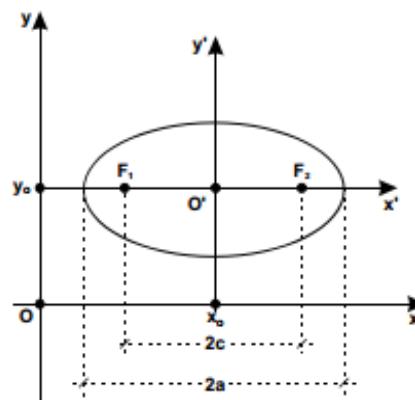
- $P(x, y)$  = um ponto genérico na elipse
- $F_1(c, 0)$  e  $F_2(0, -c)$

De modo análogo a demonstração da equação de 3.4.1, temos a seguinte equação:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

### 3.4.3. Eixo maior paralelo ao eixo x

Figura 23 - Elipse com o eixo maior paralelo ao eixo x



Fonte: VENTURI, 2003, pg. 82.

Fazendo uma translação de eixos, obtemos um novo sistema  $x'O'y'$ , onde  $O' = (x_0, y_0)$  é o centro da elipse. Então temos que,

$$\begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \end{cases}$$

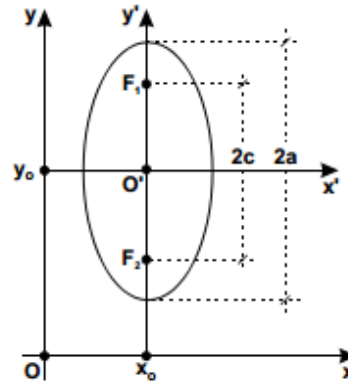
A equação da elipse do nosso novo sistema  $x'O'y'$  será,

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

### 3.4.4. Eixo maior paralelo ao eixo y

**Figura 24** - Elipse com o eixo maior paralelo ao eixo y



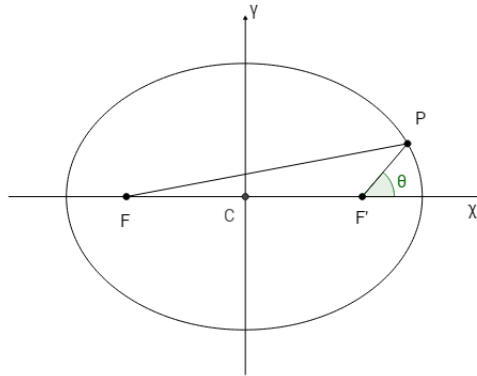
**Fonte:** VENTURI, 2003, pg. 82.

De modo análogo ao raciocínio de **3.4.3**, temos

$$\frac{(x - x_0)^2}{b^2} + \frac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1$$

#### 4. EQUAÇÃO DA ELIPSE EM COORDENADAS POLARES

Figura 25 - Elipse em coordenadas polares



Fonte: Autoria própria

Pela definição da elipse temos que,  $d(P, F) + d(P, F') = 2a$ . Temos também da trigonometria que,

- $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta$
- $a^2 = b^2 + c^2 - 2ab \cos \hat{A}$  (Lei dos cossenos)

Por definição sabemos também que,

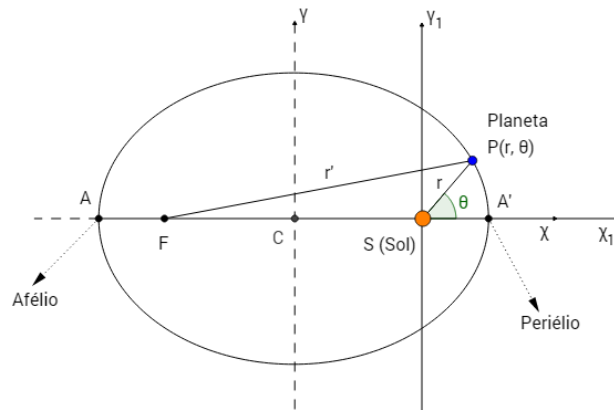
$$e = \frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow c = ae$$

Agora, sendo  $r' = d(P, F)$  e  $r = d(P, F')$ , podemos considerar o ponto P de coordenadas  $(r, \theta)$  como a posição de um planeta, cuja sua trajetória é uma elipse com o Sol (S) em um de seus focos, vamos considerar  $S = F'$ . Agora se centralizarmos o centro do eixo da coordenadas sobre um dos focos, neste caso  $F'$ . Teremos o seguinte,



**Figura 26** - Elipse em coordenadas polares com o centro em um dos focos



**Fonte:** Autoria própria

Por definição observe que,

$$d(P, F) + d(P, S) = 2a$$

$$\Leftrightarrow r' + r = 2a$$

$$\Leftrightarrow r' = 2a - r$$

Então no triângulo SFP, usando a Lei dos Cossenos teremos,

$$r'^2 = r^2 + (2ae)^2 + 2r(2ae)\cos\theta$$

$$\Leftrightarrow (2a - r)^2 = r^2 + (2ae)^2 + 2r(2ae)\cos\theta$$

$$\Leftrightarrow 4a^2 - 4ar + r^2 = r^2 + (2ae)^2 + 2r(2ae)\cos\theta$$

$$\Leftrightarrow 4a^2 - 4ar = 4a^2e^2 + 4are\cos\theta$$

$$\Leftrightarrow a^2 - a^2e^2 = ar + are\cos\theta$$

$$\Rightarrow a^2(1 - e^2) = r(a + a\cos\theta)$$

$$\Rightarrow r = \frac{a^2(1 - e^2)}{(a + a\cos\theta)}$$

$$\Rightarrow r = \frac{a^2(1 - e^2)}{a(1 + \cos\theta)}$$

$$\Rightarrow r = \frac{a(1 - e^2)}{(1 + \cos\theta)}$$

Esta é a equação da elipse em coordenadas polares, a qual nos fornece a distância de um planeta ao Sol, de acordo com a *anomalia verdadeira* ( $\theta$ )<sup>12</sup>, ou seja, o ângulo formado entre a direção do Planeta e a direção do Periélio na elipse.

---

<sup>12</sup> Anomalia verdadeira é o ângulo entre as direções foco da elipse – periélio e foco da elipse - posição do astro, na órbita kepleriana. Este ângulo deve ser medido de forma orientada, ou seja, varia de 0 a 360 graus. Permite localizar o astro em sua órbita.

## 5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Durante o período em que cursei a graduação observei que os professores davam início ao assunto de secções cônicas da mesma forma, ou seja, a abordagem inicial do conteúdo era sempre feita de forma clássica como trazem quase todos os livros didáticos de Matemática. Os quais abordam o assunto de forma generalizada como sendo a intersecção de um plano com uma superfície cônica, onde de acordo com a posição que o plano intersecta o cone podemos gerar as secções cônicas: elipse, hipérbole e parábola. Sempre achei a forma como era abordado o assunto muito superficial, haja vista, que a geometria é sempre um assunto que possui um campo muito vasto de aplicações práticas, as quais poderiam ser usadas para dar uma ideia inicial sobre o assunto. Então com esse pensamento, e como tanto a história da Matemática, quanto a Física sempre foram duas matérias que sempre gostei, observei na Primeira Lei de Kepler a possibilidade de unificar essas três paixões, a geometria analítica, a história da Matemática e a Física. Logo dei início a uma pesquisa bibliográfica incluindo o nome de estudiosos que deram contribuições relevantes para a evolução do pensamento do homem, no que diz respeito a um modelo de sistema solar, entre eles estão: Aristóteles, Claudio Ptolomeu, Nicolau Copérnico, Tycho Brahe e Johannes Kepler. Meu intuito nunca foi esmiuçar a obra e vida de cada um desses pensadores, mas sim escrever uma espécie de linha do tempo que explicasse forma simples e prática como o pensamento do homem evoluiu ao longo do tempo, e como foi difícil e minuciosa a explicação para o modelo planetário que temos hoje. Acredito eu que esta forma de abordagem contextualizada feita em sala de aula com os alunos de ensino médio, e porque não usar nos cursos de graduação também, pode ser muito mais atrativa, pois o aluno pode observar de forma prática a utilidade de um assunto tão importante quanto as secções cônicas, mas especialmente a elipse.

## 6. REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- ÁVILA, Geraldo. REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA. São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, n. 13. 1989.
- ÁVILA, Geraldo. REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA. São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, n. 15. 1989.
- BERTRAND, Joseph. *Os fundadores da astronomia moderna: Copérnico, Tycho Brahe, Kepler, Galileu, Newton*. 1ª ed. Rio de Janeiro: Editora Contraponto, 2008. 217.
- KOESTLER, Arthur. *Os sonâmbulos: Histórias das concepções do homem sobre o universo*. São Paulo: Editora Ibrasa, 1961. 598 p.
- MOURÃO, Ronaldo R. de F. *Kepler: A descoberta das leis do movimento planetário*. 2ª ed. São Paulo: Odysseus Editora, 2007. 241 p.
- PIRES, Antonio S. T. *Evolução das ideias da Física*. 1ª ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2008. 478 p.
- VENTURI, Jacir J. *Cônicas e Quádricas*. 5ª ed. Curitiba, PR, 2003. Disponível em: <[www.geometriaanalitica.com.br](http://www.geometriaanalitica.com.br)>. Acesso em: 10 dez. 2014.