UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

TONI CESAR MARINHO

TRIÂNGULOS QUAISQUER (SOLUÇÃO LOGARÍTMICA)

CAMPINA GRANDE – PB
2014

TONI CESAR MARINHO

TRIÂNGULOS QUAISQUER
(SOLUÇÃO LOGARÍTMICA)

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências legais para a obtenção do título de graduado em Matemática.

Orientador: Prof. Ms. Fernando Luiz Tavares da Silva

CAMPINA GRANDE – PB
2014

M338t Marinho, Toni Cesar.

Triângulos quaisquer [manuscrito] : Solução logaritmica / Toni Cesar Marinho. - 2014.

52 p. : il.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2014.

"Orientação: Prof. Me. Fernando Luiz Tavares da Silva, Departamento de Matemática".

1. História da matemática. 2. Trigonometria. 3. Problemas matemáticos. I. Título.

21. ed. CDD 516.24

TONI CESAR MARINHO

TRIÂNGULOS QUAISQUER (SOLUÇÃO LOGARÍTMICA)

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento as exigências legais para a obtenção do título de graduado em Matemática.

Aprovada em 04 /08 /2014

Prof. Ms. Fernando Luiz Tavares da Silva / UEPB
Orientador

Prof. Francisco de Sá Ribeiro
Examinador

Prof. Onildo dos Reis Freire
Examinador

DEDICATÓRIA

A minha mãe Maria de Lourdes e meu pai Antônio Marinho pelo apoio e compreensão durante a jornada de minha vida.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por me dar a cada dia a perseverança e a força para continuar buscando novos conhecimentos e aprendizados.

A minha noiva Diana Bernardino de Araújo por ter me acompanhado nesta trajetória, e por ter contribuído no meu modo de pensar. A minhas irmãs Cristina, Angélica e Patrícia e ao meu sobrinho Wallysson por fazerem parte da minha vida.

Agradeço aos meus amigos José do Patrocinio, Erlandson e em especial Anderson Kélio da Silva que aprendi muito convivendo com eles.

Agradeço aos professores, em especial, ao meu orientador Prof. Ms. Fernando Luiz Tavares da Silva que foi um dos melhores professores que tive durante a graduação, pela amizade, dedicação, atenção, e pela imensa paciência tida comigo durante o desenvolvimento desse trabalho.

RESUMO

O seguinte trabalho apresenta um estudo de como aplicar os conceitos da trigonometria e do logaritmo para a resolução de problemas envolvendo triângulos quaisquer. Aborda as razões pelas quais o triângulo quaisquer (solução logarítmica) é importante, bem como suas características e definições, além de mostrar como muitos cálculos ficam simplificados para a resolução e compreensão.

Algumas situações ou problemas do nosso cotidiano que envolva triângulos quaisquer, vamos precisar da trigonometria, em específico triângulo quaisquer (solução logarítmica), para encontramos as medidas precisas, são de grande importância ressaltar que, os procedimentos para encontramos a solução dos problemas em questão serão feitos passo a passo, para facilitar o entendimento do leitor.

PALAVRA-CHAVE: História, Matemática e triângulos.

ABSTRACT

The following paper presents a study how to apply the concepts of trigonometry and logarithms to solve any problems involving triangles. Discusses the reasons why the any triangle (logarithmic solution) is important as well as their characteristics and definitions, and show how many calculations are simplified to solving and understanding.

Some situations or problems of everyday life involving all triangles, we need trigonometry in any triangle specific (logarithmic solution), to find the precise measurements are extremely important to emphasize that the procedures to find the solution of the problems in question are made step by step, to facilitate the understanding of the reader.
KEYWORDS: History, Math and triangles.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

O estudo das funções trigonométricas é de grande importância para o ensino da matemática, pois constitui importante ferramenta para resolução de questões lógicas e quantitativas encontradas em nosso cotidiano, na alta tecnologia e na ciência.

Neste Trabalho de Conclusão de Curso encontramos situações do nosso cotidiano em que precisamos da trigonometria para encontrar alguma medida ou distância inacessível, onde se tornam necessários atribuímos noções e definições de *seno*, *cosseno* e *tangente*.

Não faremos exposições longas a respeito de cada assunto, tendo em vista os conceitos e relações principais que serão utilizadas nos estudos de Triângulos Quaisquer com Aplicação Logarítmica.

Apresentaremos um breve relato sobre a história da matemática sem deixar de ressaltar alguns conceitos básicos e fatos históricos da trigonometria e do logaritmo. Por fim, expomos alguns casos em que se fazem necessárias resoluções através de aplicações logarítmicas.

1.1 Objetivos.

Aprofundar os conhecimentos sobre a trigonometria em particular Triângulos Quaisquer com Aplicação Logarítmica, abordando os principais conceitos e teoria precedente de *seno*, *cosseno* e *tangentes*.

Aplicar os conhecimentos da trigonometria nos problemas encontrados no cotidiano ou nas áreas de estudo e pesquisa.

1.2 Estruturas do trabalho.

Este é composto por três capítulos, a saber:

No capítulo I, apresentamos aspectos históricos da origem da matemática até o especifico da trigonometria.

No capitulo seguinte, faremos uma fundamentação teórica abordando as principais teorias trigonométricas relevantes para o estudo sobre Triângulos Quaisquer com aplicação Logarítmica.

No terceiro e último capítulo, apresentamos algumas resoluções de problemas utilizando conceito de Triângulos Quaisquer com aplicação Logarítmica.

2. ASPECTOS HISTÓRICOS

2.1 Um pouco sobre a história da Matemática.

A pré-história é um período que compreende desde o surgimento do "homem primitivo" até a invenção da escrita. Toda história dessa época é relatada com base em artefatos arqueológicos encontrados, tais como: os fósseis, pinturas nas cavernas, ferramentas rudimentares. Muito do que se sabe sobre os conhecimentos matemáticos partem desse período. Não se sabe ao certo quando a matemática de fato surgiu, já que, não existem documentos que comprovem sua origem, não sendo descoberta de um único povo, mas, alguns estudiosos acreditam que essa ciência tenha surgido pelas necessidades práticas do dia-dia do homem ao delimitar áreas, controle do rebanho, etc. Outros defendem que a matemática tenha surgido de rituais religiosos ou do laser de uma classe de sacerdotes.

Os períodos entre 30.000 e 20.000 a.C. segundo as pesquisas arqueológicas, compreende os registros mais antigos acerca da matemática. Os homens da pré-história já conviviam com quantidades, mesmo sem saber contar, se utilizando se alguns artifícios para representar suas quantificações, como: fazer pequenos riscos em ossos, agrupar gravetos ou pedras e até mesmo fazer nós em cordões para representar um grupo ou quantia, muitos só contavam de "um", "dois", quantidades maiores eram tidos como "muitos". Com o passar dos tempos, gravar riscos nos ossos, contar nos dedos das mãos e dos pés tornou-se insuficiente, pois, o homem agora precisava lidar com grandes quantidades, além disso, ele sentiu a necessidade de comunicar-se, surgindo daí a simbologia para essas representações, ou seja: sistema de numeração. Várias civilizações desenvolveram seus sistemas de numeração, dentre elas: as civilizações Egípcias, os Maias e os Romanos. Os Egípcios foram uma das primeiras civilizações a desenvolver o sistema de numeração. Baseado em agrupamento com base dez, desconheciam o zero, e os símbolos eram dispostos um ao lado do outro sem posição definida. Esse sistema era representado por sete figuras cada uma com seu sentido.

Outra civilização a usar esse sistema foram os Maias. Nesse sistema os símbolos eram apenas três: uma concha que representava o zero, uma bolinha ou ponto que representava o 1 (um) e uma barra horizontal representando o 5 (cinco). Era um sistema de numeração vigésima, ou seja, tem base 20, com base na soma dos dedos das mãos e dos pés. Desenvolvido na Antiga Roma e fortemente utilizado por todo império, o sistema de numeração romano era quinaria, ou seja, com base 5 (cinco). Os números eram simbolizados por algumas letras pertencentes ao alfabeto, são elas: I, V, X, L, C, D e M, todas em forma maiúscula (não havia representações para letras minúsculas), não havendo representação para o símbolo zero (0). As letras devem estar dispostas do maior valor para o menor valor, ainda, os símbolos não devem ser repetidos mais do que três vezes. Para números elevados bastava colocar um hífen acima da letra, indicando a multiplicação por 1000. Esse sistema serve apenas para representações de quantidade, não sendo possível efetuar cálculos.

Por volta do século V, nasceu na Índia o sistema de numeração hindu. Tal acontecimento não surgiu de imediato. Foi necessária muita criatividade e imaginação. Os hindus nesta época já conheciam diferentes símbolos para representar as quantidades de 1 a 9. Mas, foi a partir do século seguinte que os hindus criaram símbolos para representar o zero, inicialmente, um pequeno círculo ou um ponto.

A partir do século VIII, os árabes tiveram conhecimentos e passaram a adotar o sistema de numeração criado pelos hindus, pois além de prático também facilitava os cálculos. Os símbolos hindus foram introduzidos para os povos, devido à povoação dos árabes ocidentais no norte da África e em uma parte da Espanha, mais conhecidos atualmente como símbolos indo – arábicos.

Com a criação do sistema indo – arábico, ficou fácil efetuar cálculos e medidas, mas as descobertas matemáticas estavam apenas começando, muitos povos e estudiosos em suas descobertas e curiosidades contribuíram bastante, fazendo com que a matemática se expandisse para as áreas da Geometria, Álgebra e Trigonometria.

A Geometria era bastante utilizada pelos agrimensores e construtores no Egito Antigo, pois as usavam para medir terrenos e para grandes construções como, por exemplo, as famosas pirâmides. Os egípcios ganharam admiração e fama pelas suas edificações geométricas atraindo muitos matemáticos gregos que iam ao Egito em busca de novos conhecimentos e aplicações geométricas. Um dos principais nomes que organizou a parte lógica da Geometria foi o matemático grego Euclides, cuja obra de 13 volumes, clamadas Os Elementos, não só foi importante para sua época, bem como aos estudos voltados para a Geometria.

A parte da matemática que estuda os cálculos envolvendo incógnitas, entre outros conceitos, é a álgebra. O primeiro a idealizar o uso de símbolos para representação de ideias ou números foi Diofante de Alexandria, mas seus estudos não foram bem sucedidos, devido à época da queda do império romano. Com o passar do tempo após a guerra, os estudos e pesquisas tornaram a se desenvolver. O matemático Al-khwarizmi foi o primeiro a escrever um livro que falando sobre a álgebra, também escreveu vários tratados sobre o cálculo, envolvendo as quatro operações, raiz quadrada, os números inteiros e outros cálculos algébricos. Muitos nomes contribuíram para o avanço da álgebra, dentre eles o francês François Viète que desenvolveu a álgebra simbólica, escrita na sua obra In artem, que contém álgebra bastante parecida com os cálculos algébricos atuais. Outro grande nome que usava variáveis ou símbolos em seus estudos era John Napier, que apesar de não ser um matemático profissional, foi considerado o inventor dos logaritmos. Napier não usava bases em sua definição de logaritmos, que tinha como objetivo facilitar os cálculos, principalmente os que envolviam produtos ou quocientes.

Em trigonometria por sua vez, faremos um estudo mais específico, que vai desde sua história até suas aplicações atuais.

2.2 A origem da Trigonometria.

Desde o homem primitivo muitas descobertas e criações sugiram através das necessidades e com a Trigonometria não foi diferente. Até hoje não se sabe ao certo sua origem, porém os antigos povos gregos, babilônios e os egípcios em seus estudos voltados para a Astrologia, Agrimensura e Navegações já se deparavam com alguns problemas que envolviam triângulos, e para sobressair e prosseguir com seus objetivos e estudos desenvolviam artifícios para resolver os problemas em questão. No papiro de Rhind como também em tabulas babilônicas, estão registrados alguns problemas que se relacionam com triângulos.

fragmento do papiro de Rhind

Desde a antiguidade quando ainda acreditavam na teoria babilônica que afirmava que o Sol levava 360 dias para girar em torno da Terra numa orbita circular, ou seja, o Sol percorria por 1/360 da órbita denominado também na época como “grau”, muitos matemáticos, astrônomos e pesquisadores de muitas áreas desenvolveram teoremas e tratados que não só contribuíram para a base da Trigonometria, mas também, serviram como ferramenta para muitos cálculos gerados na época. Um dos grandes nomes que contribuiu com seus teoremas ricos, não só na geometria, mas em conhecimento que envolvia triângulos e ângulos foi Tales de Mileto, que além de ter sido um homem de negócio, desenvolveu bastante atividade na matemática, engenharia, astronomia e em outras áreas, sendo considerado um dos “sete sábios”. Acreditava que por ele ter tornado- se rico como mercador, dedicou sua vida aos estudos voltados para diversas áreas, para satisfazer suas vontades e curiosidades e preencher seu tempo vago. Com tantas características, Mileto despertou admiração, servindo como referência para muitos astrônomos e matemáticos, dentre eles Pitágoras, matemático e filosofo, vivendo por volta de 572 A.C. Natural da Ilha Igeia de Samos, ele viajava para diversos lugares como Egito, Pérsia, Crotona, atual Itália, onde fundou a Escola Pitagórica, que além de ser um centro de estudos filosófico e matemático, era uma irmandade. Segundo algum relato, é provável que Pitágoras tenha sido discípulo de Tales de Mileto. Reconhecido por muitos como um grande matemático, Pitágoras foi quem desenvolveu um dos mais famosos teoremas da matemática, que envolve todo triângulo retângulo cujo “o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos”.

Mas, foi por volta da segunda metade do século II a.c, que o astrônomo Hiparco de Niceia para prosseguir com seus estudos astrológicos, desenvolveu um tratado em doze livros que se constituía na primeira tabela Trigonométrica registrada. Tal feito lhe deu a consideração de ser chamado “pai da Trigonometria”. Também surgiram outros nomes que contribuíram na construção e no desenvolvimento da Trigonometria como Ptolomeu, com suas obras “alma gesto” e o “guia de geografia” que se baseava principalmente na geografia matemática e na cartografia. Além de Menelau de Alexandria que desenvolveu um tratado em seis livros, e por mais que muitos deles tenham sido perdidos, ainda há o tratado Shaerica em três livros, numa versão árabe, porém, o mais antigo trabalho sobre a Trigonometria esférica, que é a ideia de um triangulo escrito em esfera. A Trigonometria foi reforçada por Joseph Fourier, em 1822, com as suas geniais descobertas nos seus estudos sobre funções Trigonométricas.

3. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

3.1 Triângulos retângulos e seus elementos.

Os estudos voltados para triângulos inscritos em uma circunferência foram indiscutivelmente essenciais para os avanços da Trigonometria, que por sua vez iniciou através dos problemas gerados pelos triângulos retângulos. Por isso, é de melhor compreensão estudar os elementos da Trigonometria com base em um triangulo retângulo. Primeiramente é de grande importância consideramos os três possíveis casos sobre triângulos semelhantes:

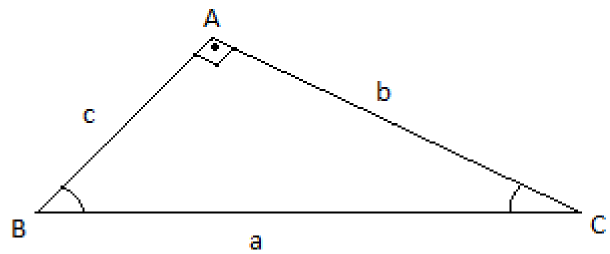
1º caso; lado, ângulo, lado (LAL). Dois triângulos são semelhantes quando possuem dois lados correspondentes proporcionais e pelo menos um ângulo congruente.

2º caso; ângulo, lado, ângulo (ALA). Dois triângulos são semelhantes quando possuem um lado e os dois ângulos a ele adjacentes respectivamente congruentes.

3º caso; lado, lado, lado (LLL). Dois triângulos são semelhantes quando eles possuem os três lados correspondentes proporcionais.

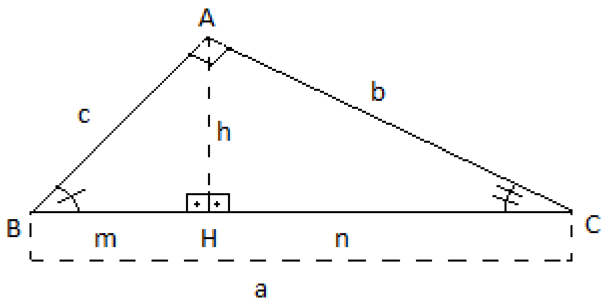
Os triângulos equiláteros, cujos lados são congruentes, destacam a congruência dos ângulos internos. De maneira semelhante, os triângulos isósceles apresentam dois lados congruentes, com dois ângulos de 45°.

Vamos considerar o triângulo retângulo ABC abaixo, e destacar alguns dos seus elementos.



Os lados **b** e **c** são chamados catetos e **a** é a hipotenusa.

Agora, vejamos que podemos obter três triângulos retângulos ao traçamos a altura **h** relativa à hipotenusa.

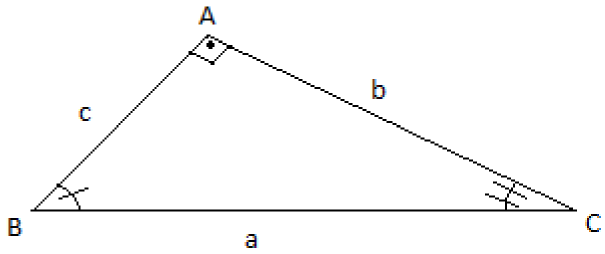


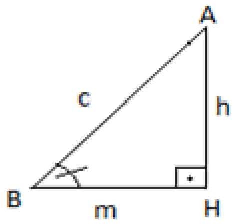
Se **m** e **n** correspondem as medidas das projeções dos catetos sobre a hipotenusa, então:

$$m + n = a$$

Com base nos três casos de semelhança de triângulo podemos destacar algumas relações métricas:

Nos triângulos ABC e ABH seguem que:



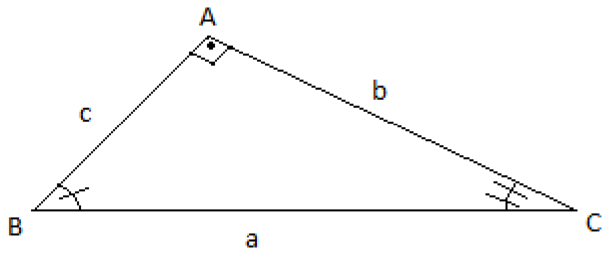


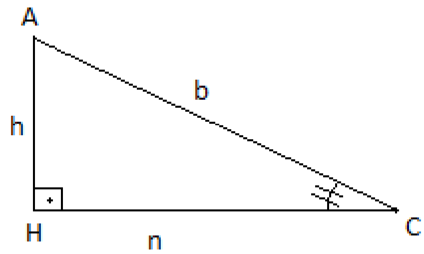
$$\frac{a}{c} = \frac{b}{h} \rightarrow a.h = b.c$$

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{m} \rightarrow c^2 = a.m$$

$$\frac{c}{m} = \frac{b}{h} \rightarrow c.h = b.m$$

Agora, nos triângulos ABC e ABH seguem que:

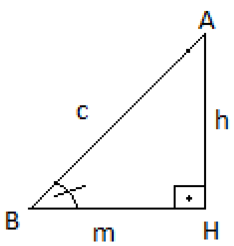


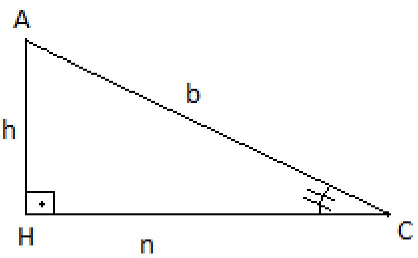


$$\frac{a}{b} = \frac{b}{n} \rightarrow b^2 = a.n$$

$$\frac{c}{h} = \frac{b}{n} \rightarrow c.n = b.h$$

Nos triângulos ABH e AHC, segue que:





$$\frac{h}{n} = \frac{m}{h} \rightarrow h^2 = n.m$$

Agora, vamos usar algumas destas relações métricas para demonstrarmos um resultado importante: O Teorema de Pitágoras. cujo nome é dado por ter sido o primeiro teorema a ser demonstrado.

Sabendo – se que:

$b^2 = a.n$ e $c^2 = a.m$, segue que:

$b^2 + c^2 = a.n + a.m$

$b^2 + c^2 = a.(n + m)$

Como $n + m = a$, temos:

$a^2 = b^2 + c^2$

O Teorema de Pitágoras é de grande utilidade quando se quer conhecer a medida de um lado de um triângulo retângulo conhecendo os outros dois lados do triângulo em questão.

3.2 Origem da palavra *seno*.

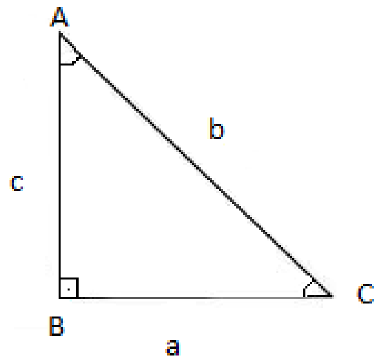
Os estudos voltados para triângulo retângulo e seus elementos destacam apenas, a relação entre as medidas dos lados do triângulo. Veremos então as relações que envolvem não só as medidas dos lados do triângulo, mas também seus ângulos internos. Antes de conhecemos as relações classificadas como seno, cosseno e tangente veremos um pouco do aspecto histórico do seno e sua classificação.

A palavra seno na verdade trata-se de uma tradução equivocada do árabe para o latim, quando se confundiu o termo *jiba* (corda) com *jaib* (dobra curva, cavidade, *sinus* em latim).

A mais antiga tábua do seno foi descoberta na Índia graça ao trabalho dos Hindus que traduziram o *seno* de um ângulo. Por volta do ano 500, tendo a mesma ideia do *seno*, surgiu o *cosseno* por meio das cordas. Já a função *tangente* veio por caminho diferente, também conhecida como função sombra, pois era associada à sombra projetada por vara posicionada na vertical. Uns dos principais nomes que usou a função sombra foi Tales de Mileto em seus estudos sobre a altura das pirâmides com base nos triângulos semelhantes. Entretanto as primeiras tabelas da função sombra foram escritas pelos árabes, por volta do ano 860. E o padrinho do nome tangente foi Thomas Fincke, em 1583.

3.3 Estudo sobre as razões Trigonométricas.

Consideremos o triângulo retângulo ΔABC.



Sendo que, a soma dos ângulos internos é igual a 180°, ou seja, $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180°$.

Com relação ao ângulo interno $\widehat{A}$, podemos destacar em principio três razões cujos nomes serão *seno*, *cosseno* e *tangente*, observe.

$$\text{sen } \hat{A} = \frac{a}{b} \quad , \qquad \cos \hat{A} = \frac{c}{b} \qquad \text{e} \qquad \text{tg } \hat{A} = \frac{a}{c}$$

Com base ao ângulo interno $\widehat{C}$, temos:

$$\text{sen } \widehat{C} = \frac{c}{b} \quad , \qquad \cos \widehat{C} = \frac{a}{b} \qquad \text{e} \qquad \text{tg } \widehat{C} = \frac{c}{a}$$

Logo, *seno* de um ângulo é a razão entre o cateto oposto ao ângulo em questão e a hipotenusa.

Cosseno de um ângulo é a razão entre o cateto adjacente ao ângulo em questão e a hipotenusa.

Tangente de um ângulo é a razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente ao ângulo em questão.

Podemos ter mais três razões denominadas: *secante*, *cossecante* e *cotangente* como seguem:

Com relação ao ângulo interno Â. Temos:

$$\sec \hat{A} = \frac{b}{c} \, , \qquad \text{cossec } \hat{A} = \frac{b}{a} \qquad \text{e} \qquad \text{cotg } \hat{A} = \frac{c}{a}$$

De maneira analógica temos também as razões com relação ao ângulo interno $\widehat{C}$.

$$\sec \hat{A} = \frac{1}{\cos \hat{A}} \quad , \qquad \text{cossec } \hat{A} = \frac{1}{\text{sen } \hat{A}} \qquad \text{e} \qquad \text{cotg } \hat{A} = \frac{1}{\text{tg } \hat{A}}$$

Observe também a razão entre sen Â e cos Â:

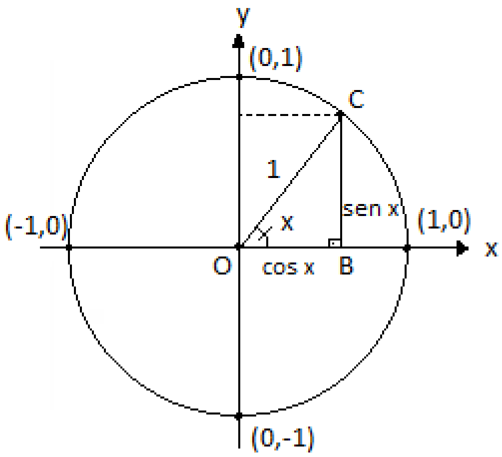
$$\frac{\text{sen } \hat{A}}{\cos \hat{A}} = \frac{a}{b} \text{ x } \frac{b}{c} = \frac{a}{c} = \text{Tg } \hat{A}, \text{ logo:}$$

$$\text{tg } \hat{A} = \frac{\text{sen } \hat{A}}{\cos \hat{A}} \qquad \text{e}$$

$$\text{cotg } \hat{A} = \frac{\cos \hat{A}}{\text{sen } \hat{A}}$$

3.4 Circunferências Trigonométricas e relações fundamentais.

Considere a circunferência Trigonométrica de centro O arco $\widehat{AC}$ e o raio $\overline{OP} = 1$.



Como o triângulo OBC é retângulo em B, logo pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$(\overline{OC})^2 = (\overline{OB})^2 + (\overline{BC})^2.$$

Associando os valores: $\overline{OC} = 1$ (raio unitário), $\overline{OB} = \cos x$, $\overline{BC} = \operatorname{sen} x$, obtemos a seguinte equação:

$$(\operatorname{sen} x)^2 + (\cos x)^2 = 1^2, \text{ logo: } \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

Com base na relação trigonométrica fundamental, podemos encontrar outras relações:

Dividido membro a membro de $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ por $\cos^2 x$, $\cos x \neq 0$, temos:

$$\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2} \rightarrow \operatorname{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x.$$

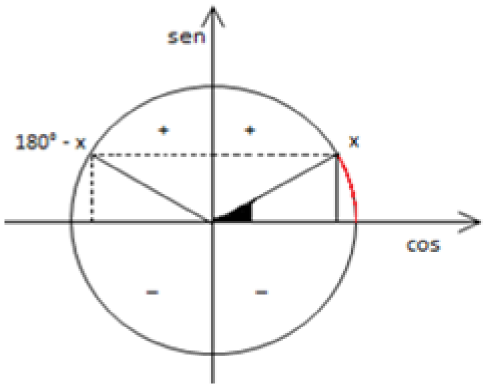
Analogamente, dividindo ambos os membros da relação $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ por $\operatorname{sen}^2 x$, onde $\operatorname{sen} x \neq 0$, temos:

$$\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \rightarrow 1 + \operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cossec}^2 x$$

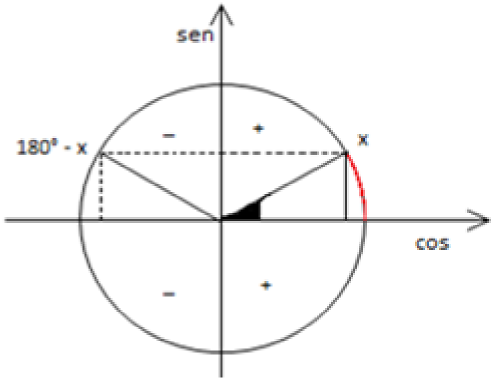
3.5 Redução ao 1º quadrante no estudo do seno e cosseno (simetria).

É de fácil compreensão se usamos a simetria para relacionar o *seno* e o *cosseno* de um arco de qualquer quadrante com os valores do primeiro quadrante.

1º caso. Redução do segundo quadrante para o primeiro quadrante



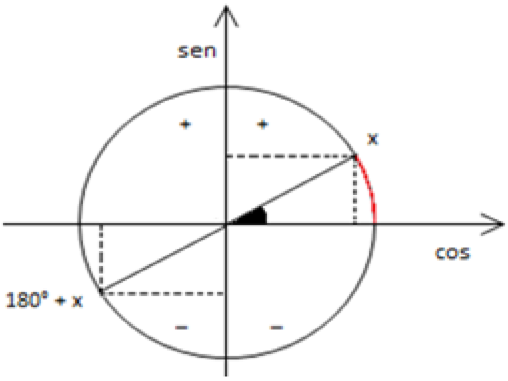
sen (180° - x) = sex



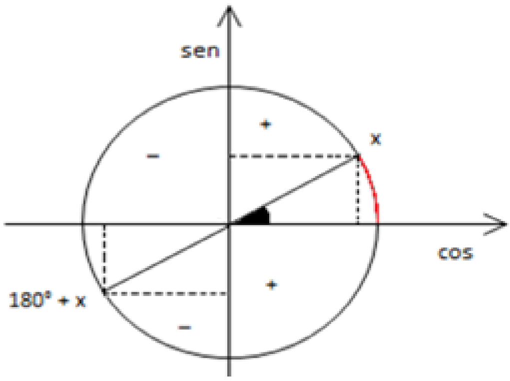
cos (180° - x) = - cos x

Neste caso, x e (180° - x) são arcos suplementares e como o *seno* e o *cosseno* no segundo quadrante são respectivamente positivo e negativo, temos *senos* iguais e *cossenos* simétricos.

2º caso. Redução do terceiro quadrante para o primeiro quadrante



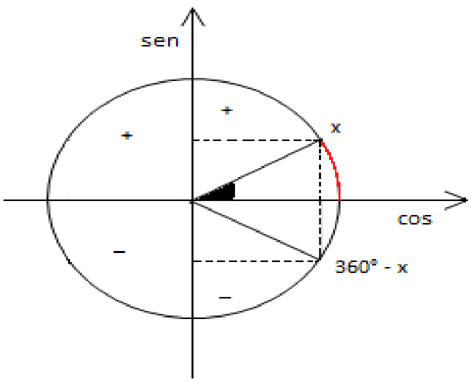
sen (180° + x) = - sen x



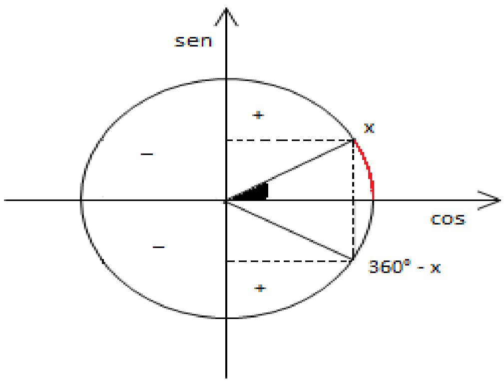
cos (180° + x) = - cos x

Para os arcos x e (180° + x), temos os senos simétricos e os *cossenos* também simétricos.

3º caso. Redução do quarto quadrante para o primeiro quadrante



sen (360° - x) = - sen x



cos (360° - x) = cos x

Os arcos x e (360° - x) possuem os *senos* simétricos e os *cossenos* iguais.

Podemos observar também que (360° - x) e (-x) são côngruos, ou seja, podemos obter as seguintes condições:

sen (360° - x) = sen (-x) = - sen x

O *seno* é uma função ímpar.

cos (360° - x) = cos (-x) = cos x

O *cosseno* é uma função par.

De maneira análoga para os casos I, II e III de modo geral, para x ϵ R temos as seguintes relações:

$\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\operatorname{sen} x$, $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x$,

$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \operatorname{sen} x$, $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$,

$\cos(x + \pi) = -\cos x$, $\operatorname{sen}(x + \pi) = -\operatorname{sen} x$,

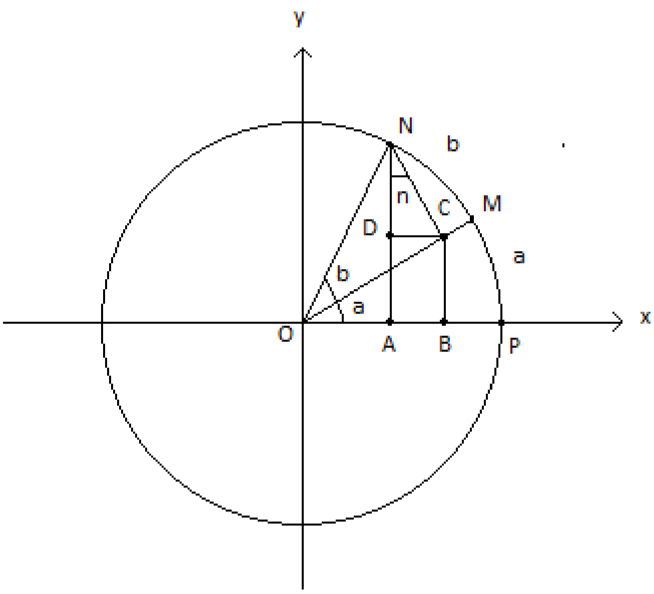
$\cos(\pi - x) = -\cos x$, $\operatorname{sen}(\pi - x) = \operatorname{sen} x$.

3.6 *Seno*, *cosseno* e *tangente* da soma e da diferença.

Com base na circunferência trigonométrica vamos demonstra sequentemente o cos (a + b) e o sen (a + b) e em seguida tg (a + b).

Há diversas fórmulas que demonstra a adição de arcos. Entretanto daremos a prova que nos perece de simples compreensão.

Vamos considerar uma circunferência cujo, possui dois arcos positivos a e b, como mostra a figura abaixo:



Na figura, a e n são ângulos agudos de lados perpendiculares logo, a = n.

AD = BC e DC = AB (lados opostos de um triângulo). Com base nestas informações e tendo alguns conhecimentos precedentes, vamos calcular sen (a + b), cos (a + b) e tg (a + b).

No triângulo OAN: sen (a + b) = $\overline{NA} = \overline{AD} + \overline{DN}$, logo; sen (a + b) = $\overline{BC} + \overline{DN}$ (I)

No triângulo retângulo OBC: sen a = $\frac{\overline{BC}}{\overline{OC}}$., logo: $\overline{BC} = \overline{OC}$. sen a (II)

No triângulo retângulo NCD: cos a = $\frac{\overline{DN}}{\overline{NC}}$, logo: $\overline{DN} = \overline{NC}$. cos a (III)

Substituindo (II) e (III) em (I), temos: sen (a + b) = $\overline{OC}$. sen a + $\overline{NC}$. cos a (IV)

No triângulo retângulo OCN: $\overline{OC}$ = cos b e $\overline{NC}$ = sen b

Portanto podemos escrever a igualdade (IV) da seguinte maneira:

sen (a + b) = cos b . sen a + sen b . cos a, de modo temos:

sen (a + b) = sen a . cos b + sen b . cos a

Com base nas relações de simetria temos:

sen ($\frac{\pi}{2}$ + a) = cos a e cos ($\frac{\pi}{2}$ + a) = - sen a, logo aplicando o seno da soma obtemos:

sen ($\frac{\pi}{2}$ + a + b) = sen ($\frac{\pi}{2}$ + a) . cos b + sen b . cos ($\frac{\pi}{2}$ + a) =

= sen ($\frac{\pi}{2}$ + a + b) = cos a . cos b + sen b . (- sen a) =

= cos (a + b) = cos a . cos b + (- sen a) . sen b

= cos (a + b) = cos a . cos b - sen a . sen b

De modo equivalente:

sen [a + (- b)] = sen a . cos (- b) + sen (- b) . cos a =

= sen (a – b) = sen a . cos b - sen b . cos a

Com base no cosseno da soma temos:

cos [a + (- b)] = cos a . cos (- b) - sen a . sen (- b) =

= cos (a - b) = cos a . cos b - sen a . (- sen b) =

= cos (a - b) = cos a . cos b + sen a . sen b

Para o cálculo de tg (a + b) e tg (a – b), temos:

$$\text{tg } (a + b) = \frac{\text{sen } (a + b)}{\cos(a + b)} = \frac{\text{sen } a . \cos b + \text{sen } b . \cos a}{\cos a . \cos b - \text{sen } a . \text{sen } b};$$

Dividindo o numerador e o denominador onde, cos a . cos b ≠ 0, obtemos:

$$\text{tg } (a + b) = \frac{\left(\frac{\text{sen } a . \cos b}{\cos a . \cos b} + \frac{\text{sen } b . \cos a}{\cos a . \cos b}\right)}{\left(\frac{\cos a . \cos b}{\cos a . \cos b} - \frac{\text{sen } a . \text{sen } b}{\cos a . \cos b}\right)} =$$

$$= \text{tg}\ (a + b) = \frac{\frac{\text{sen a}}{\cos a} + \frac{\text{sen b}}{\cos b}}{1 - \frac{\text{sen a}}{\cos a} \cdot \frac{\text{sen b}}{\cos b}}$$

$$\text{tg a} = \frac{\text{sen a}}{\cos a}$$

$$\text{tg b} = \frac{\text{sen b}}{\cos b}$$, temos:

$$\text{tg}\ (a + b) = \frac{\text{tg a} + \text{tg b}}{1 - \text{tg a} \ . \ \text{tgb}}$$

Sabendo – se que:

$\text{tg}\ (-\ b) = \frac{\text{sen}\ (-b)}{\cos\ (-b)} = \frac{-\ \text{sen b}}{\cos b} = -\ (\frac{\text{sen b}}{\cos b})$, segue que:

$$\text{tg}\ [a + (-\ b)] = \frac{\text{tg a} + \text{tg}\ (-b)}{1 - \text{tg a} \ . \ \text{tg}(-\ b)}$$,

Portanto, $\text{tg}\ (a - b) = \frac{\text{tg a} - \text{tg b}}{1 + \text{tg a} \ . \ \text{tg b}}$

3.7 Arco duplo do *seno, cosseno* e *tangente*.

sen (2a) = sen (a + a) = sen a . cos a + sen a . cos a

sen (2a) = 2 . sen a . cos a

cos (2a) = cos (a + a) = cos a . cos a - sen a . sen a

cos (2a) = $\cos^2$ a - sen^2 a

cos (2a) = (1 - sen^2 a) - sen^2 a

cos (2a) = 1 - 2 . sen^2 a

De maneira análoga temos que:

cos (2a) = 2 . $\cos^2$ a - 1

De forma semelhante temos tg (2a):

$$\text{tg}\ (a + a) = \frac{\text{tg a} + \text{tg a}}{1 - \text{tg a} . \text{tg a}}$$

$$\text{tg}\ (2a) = \frac{2 . \text{tg a}}{1 - \text{tg}^2\ a}$$

Com base nesse procedimento podemos encontrar arco enésimo, $\forall\ n \in N$.

Agora vejamos,

sen^2 a = 1 - $\cos^2$ a,

Se somamos ambos os membros por sen^2 a, temos:

sen^2 a + sen^2 a = 1 – $\cos^2$ a + sen^2 a

$2 \,.\, \text{sen}^2\, a = 1 - (\cos^2 a - \text{sen}^2\, a) =$

$2 \,.\, \text{sen}^2\, a = 1 - \cos(2a)$

$\text{sen}^2\, a = \frac{1 - \cos(2\,a)}{2}$

De forma análoga temos:

$\cos^2 a = 1 - \text{sen}^2\, a,$

Somando ambos os membros por $\cos^2 a$, temos:

$\cos^2 a + \cos^2 a = 1 - \text{sen}^2\, a + \cos^2 a$

$2 \,.\, \cos^2 a = 1 + \cos(2a)$, logo:

$\cos^2 a = \frac{1 + \cos(2a)}{2}$

3.8 *Seno*, *cosseno* e *tangente* do meio arco.

Seno do meio arco; se $\cos 2a = 1 - 2 \,.\, \text{sen}^2\, a$.

Vamos considerar $2a = x \rightarrow a = \frac{x}{2}$, logo podemos escrever da seguinte maneira:

$\cos x = 1 - 2 \,.\, \text{sen}^2 \left(\frac{x}{2}\right)$

$2 \,.\, \text{sen}^2 \left(\frac{x}{2}\right) = 1 - \cos x$

$\text{sen}^2 \left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos x}{2}$, logo:

$\text{sen} \left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$

Cosseno do meio arco; se $\cos 2a = 2 \,.\, \cos^2 a - 1$, logo considerando $2a = x \rightarrow a = \frac{x}{2}$

Logo podemos obter a seguinte equação:

$\cos x = 2 \,.\, \cos^2 \left(\frac{x}{2}\right) - 1$

$2 \,.\, \cos^2 \left(\frac{x}{2}\right) = 1 + \cos x$

$\cos^2 \left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 + \cos x}{2}$, logo:

$\cos \left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$

Para *tangente* do meio arco, temos:

$\text{tg} \left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\pm\sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}}{\pm\sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}} = \pm \sqrt{\frac{\frac{1 - \cos x}{2}}{\frac{1 + \cos x}{2}}}$, logo:

$$\text{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}};$$

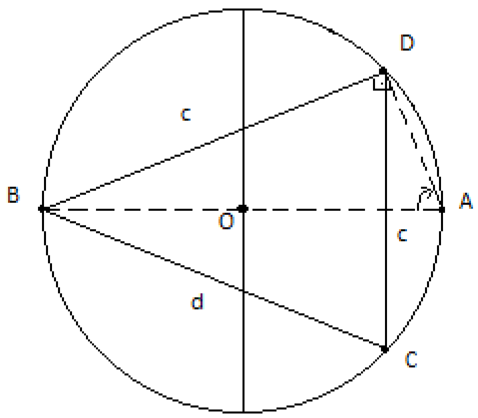
Para $1+\cos x \neq 0 \rightarrow \cos x \neq -1$.

4. TRIÂNGULOS QUAISQUER

Os estudos apresentados até aqui, se baseavam em triângulo retângulo, dando prosseguimento, iremos não só estudar triângulos retângulos, mas também triângulos obtusângulos ou acutângulos. Para tais é preciso estabelecer importantes relações.

4.1 Lei dos *senos*.

Consideremos o triângulo CBD inscrito numa semicircunferência de diâmetro $\overline{BA}$. Como mostra a figura abaixo:



Se o arco $\widehat{DB}$ corresponde aos ângulos $\hat{C}$ e $\hat{A}$, logo temos que $\hat{C} \equiv \hat{A}$.

$$\text{sen}\,\hat{C} = \text{sen}\,\hat{A} = \frac{c}{2R}$$

$$\text{sen}\,\hat{C} = \frac{c}{2R}$$

$$\frac{c}{\text{sen}\hat{C}} = 2R$$

Temos também de forma análoga:

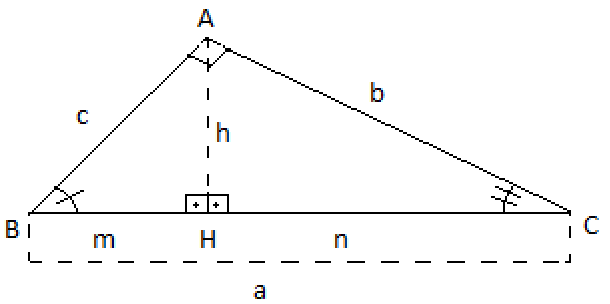
$$\frac{b}{\text{sen}\hat{B}} = \frac{d}{\text{sen}\,\hat{D}} = 2R, \text{ assim temos:}$$

$$\frac{c}{\text{sen}\,\hat{C}} = \frac{b}{\text{sen}\,\hat{B}} = \frac{d}{\text{sen}\,\hat{D}} = 2R$$

Onde R é o raio da circunferência.

4.2 Lei dos *cossenos*.

Tendo base em triângulo retângulo e seus elementos, temos:



No triângulo ABH, temos pelo teorema de Pitágoras:

$c^2 = h^2 + m^2 \rightarrow h^2 = c^2 - m^2$ (I)

$\cos \hat{B} = \frac{m}{c} \rightarrow m = c \cdot \cos \hat{B}$ (II)

No triângulo AHC, temos:

$b^2 = n^2 + h^2$ (III)

Substituindo (I) em (III), vamos obter a seguinte equação.

$b^2 = n^2 + (c^2 - m^2)$

Mas, como $a = n + m \rightarrow n = a - m$, podemos escrever da seguinte maneira:

$b^2 = (a - m)^2 + c^2 - m^2$

$b^2 = a^2 - 2.a.m + m^2 + c^2 - m^2$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.m$ (IV)

Substituindo (II) em (IV), temos:

$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \hat{B}$

Teremos também de forma análoga, mais duas equações:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A}$

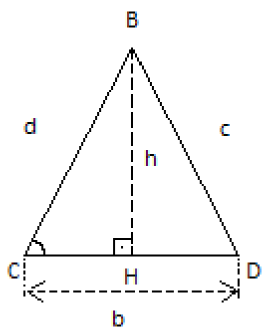
$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \hat{C}$

4.3 Área de um triângulos quaisquer.

Podemos estabelecer três casos de triângulo qualquer:

1º caso: triângulo acutângulo, ou seja, onde todos os ângulos são menores de 90°.

Seja BCD um triângulo acutângulo, onde A é sua área e $\hat{C} < 90°$. Logo:



Temos que: $A = \frac{b.h}{2}$ (I)

E através do triângulo BCH, podemos tem a seguinte relação:

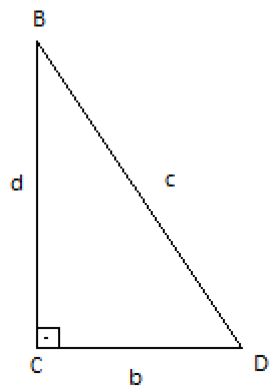
$$\text{sen}\ \widehat{C} = \frac{h}{d} \rightarrow h = d \cdot \text{sen}\ \widehat{C}\ \text{(II)}$$

Substituindo (II) em (I), temos: $\widehat{C}$

$$A = \frac{b \cdot (d \cdot \text{sen}\ \widehat{C})}{2} \rightarrow A = \frac{b \cdot d \cdot \text{sen}\ \widehat{C}}{2}$$

2º caso: triângulo retângulo, ou seja, triângulo que possui um ângulo reto.

Consideremos o triângulo retângulo BCD onde C = 90°. Temos:



Logo, podemos escrever a área da seguinte maneira:

$$A = \frac{bd}{2}$$

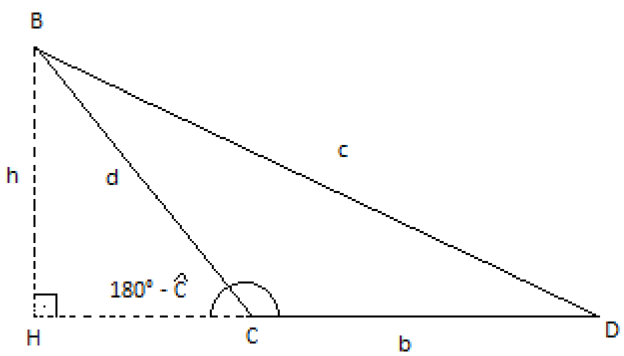
Mas, $A = \frac{bd}{2} = A = \frac{bd}{2} \cdot 1$ e $\hat{C} = 90°$, logo sen $\widehat{C} = 1$. Temos:

$$A = \frac{bd}{2} \cdot 1$$

$$A = \frac{bd}{2} \cdot \text{sen}\ \widehat{C}$$

3º caso: triângulo obtusângulo, ou seja, que possui um ângulo maior que 90°.

Seja o triângulo obtusângulo BCD onde $\widehat{C} > 90°$, temos:



No triângulo BCD, temos:

$$A = \frac{bh}{2} \text{ (I)}$$

No triângulo CHB, retângulo em H, temos:

$$\text{sen}\,(180° - \hat{C}) = \frac{h}{d}$$

Mas, vimos em redução ao primeiro quadrante que;

$$\text{sen}\,(180° - \hat{C}) = \text{sen}\,\hat{C}.$$

Logo: $\text{sen}\,\hat{C} = \frac{h}{d}$

$$h = d \,.\, \text{sen}\,\hat{C} \text{ (II)}$$

Substituindo (II) em (I), vamos obter:

$$A = \frac{b\,.(d\,.\text{sen}\,\hat{C})}{2}$$

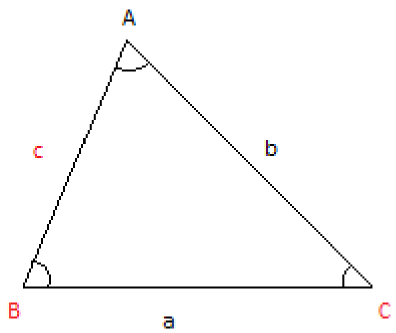
$$A = \frac{b\,.d\,.\text{sen}\,\hat{C}}{2}$$

4.4 Triângulos quaisquer (solução logarítmica)

1° caso: Dados um lado e dois ângulos.

Dado um triângulo ABC, cujo soma dos ângulos, A + B + C = 180°. Aplicando a lei dos *senos*, duas vezes e verificando a solução usando uma das fórmulas de Mollweide, temos:

Exemplo 1. Sejam c, B e C, os elementos dados, logo:



$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$$

$$\hat{A} = 180° - (\hat{B} + \hat{C})$$

Pela lei dos *senos*, temos:

$$\frac{b}{\text{sen}\,\hat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\,\hat{C}}$$

$$b = \frac{c\,.\text{sen}\,\hat{B}}{\text{sen}\,\hat{C}} \text{ (I)}$$

$$\frac{a}{\text{sen}\,\hat{A}} = \frac{c}{\text{sen}\,\hat{C}}$$

$$a = \frac{c\,.\text{sen}\,\hat{A}}{\text{sen}\,\hat{C}} \text{ (II)}$$

Somando (I) e (II) membro a membro, temos:

$$b + a = \frac{c\,.\text{sen}\,\hat{B} + c\,.\text{sen}\,\hat{A}}{\text{sen}\,\hat{C}}$$

$$b + a = \frac{c\,.(\text{sen}\,\hat{B} + \text{sen}\,\hat{A})}{\text{sen}\,\hat{C}}$$

$$\frac{b + a}{c} = \frac{\text{sen}\,\hat{B} + \text{sen}\,\hat{A}}{\text{sen}\,\hat{C}} \text{ (I)}$$

Observe que:

$$\text{sen}\,\hat{B} = \text{sen}\,\left(\frac{\hat{B} + \hat{A}}{2} + \frac{\hat{B} - \hat{A}}{2}\right)$$

Se aplicamos o seno da soma temos:

$$\text{sen}\,\hat{B} = \text{sen}\,\left(\frac{\hat{B} + \hat{A}}{2}\right).\cos\left(\frac{\hat{B} - \hat{A}}{2}\right) + \cos\left(\frac{\hat{B} + \hat{A}}{2}\right).\,\text{sen}\,\left(\frac{\hat{B} - \hat{A}}{2}\right) \text{ (II)}$$

De forma análoga temos:

$$\text{sen}\,\hat{A} = \text{sen}\,\left(\frac{\hat{A} + \hat{B}}{2} + \frac{\hat{A} - \hat{B}}{2}\right) =$$

$$= \text{sen}\,\left(\frac{\hat{A} + \hat{B}}{2}\right).\cos\left(\frac{\hat{A} - \hat{B}}{2}\right) + \cos\left(\frac{\hat{A} + \hat{B}}{2}\right).\,\text{sen}\,\left(\frac{\hat{A} - \hat{B}}{2}\right)$$

Com base na simetria temos:

$$\text{sen}\,\hat{A} = \text{sen}\,\left(\frac{\hat{A} + \hat{B}}{2} + \frac{\hat{A} - \hat{B}}{2}\right) =$$

$$= \text{sen}\,\left(\frac{\hat{B} + \hat{A}}{2}\right).\cos\left(-\frac{\hat{B} - \hat{A}}{2}\right) + \cos\left(\frac{\hat{A} + \hat{B}}{2}\right).\,\text{sen}\,\left(-\frac{\hat{B} - \hat{A}}{2}\right), \text{ logo;}$$

$$\text{sen}\,\hat{A} = \text{sen}\,\left(\frac{\hat{B} + \hat{A}}{2}\right).\cos\left(\frac{\hat{B} - \hat{A}}{2}\right) - \cos\left(\frac{\hat{A} + \hat{B}}{2}\right).\,\text{sen}\,\left(\frac{\hat{B} - \hat{A}}{2}\right) \text{ (III)}$$

Somando (II) com (III), temos:

$$\text{sen}\,\hat{B} + \text{sen}\,\hat{A} = 2\,.\,\text{sen}\,\left(\frac{\hat{B} + \hat{A}}{2}\right).\cos\left(\frac{\hat{B} - \hat{A}}{2}\right) \text{ (IV)}$$

seja $\hat{A} + \hat{B} = 180° - \hat{C}$,logo:

$$\text{sen}\,\hat{C} = \text{sen}\,\left(\frac{\hat{C}}{2} + \frac{\hat{C}}{2}\right).$$

Aplicando o seno da soma e da subtração temos:

$$\text{sen}\,\left(\frac{\hat{C}}{2} + \frac{\hat{C}}{2}\right) = 2\,.\,\text{sen}\,\left(\frac{\hat{C}}{2}\right).\cos\left(\frac{\hat{C}}{2}\right) =$$

$= 2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\hat{C}}{2}\right)$. [sen 90° . cos $\left(\frac{\hat{C}}{2}\right)$ – cos 90° . sen $\left(\frac{\hat{C}}{2}\right)$]

$\operatorname{sen}\left(\frac{\hat{C}}{2}+\frac{\hat{C}}{2}\right) = 2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\hat{C}}{2}\right) \cdot \left[\operatorname{sen}\left(90° - \frac{\hat{C}}{2}\right)\right] = 2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\hat{C}}{2}\right) \cdot \left[\operatorname{sen}\left(\frac{180° - \hat{C}}{2}\right)\right]$

$\operatorname{sen}\left(\frac{\hat{C}}{2}+\frac{\hat{C}}{2}\right) = 2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\hat{C}}{2}\right) \cdot \left[\operatorname{sen}\left(\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}\right)\right]$ (V)

Substituindo (IV) e (V) em (I), temos:

$$\frac{b+a}{c} = \frac{2 \cdot \operatorname{Sen}\left(\frac{\hat{B}+\hat{A}}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\hat{B}-\hat{A}}{2}\right)}{2 \cdot \operatorname{Sen}\left(\frac{\hat{B}+\hat{A}}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\hat{C}}{2}\right)}$$

$$\frac{b+a}{c} = \frac{\cos\left(\frac{\hat{B}-\hat{A}}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\hat{C}}{2}\right)} \quad (1)$$

De forma análoga podemos ter;

$$\frac{b-a}{c} = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\hat{B}-\hat{A}}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\hat{C}}{2}\right)} \quad (2)$$

Verificação:

$(b + a) \operatorname{sen} \frac{\hat{C}}{2} = c \cdot \cos\left(\frac{\hat{B}-\hat{A}}{2}\right)$, se $\hat{B} > \hat{A}$;

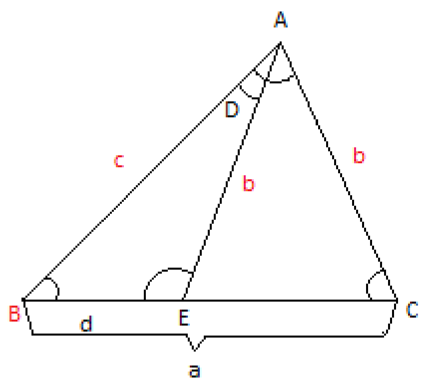
De forma análoga temos:

$(a + b) \operatorname{sen} \frac{\hat{C}}{2} = c \cdot \cos\left(\frac{\hat{B}-\hat{A}}{2}\right)$se $\hat{A} > \hat{B}$;

2° caso: Dados dois lados e o ângulo oposto a um deles.

De forma semelhante ao caso I, temos: a lei dos senos e a relação dos ângulos, e verificaremos a solução usando uma das formulas de Mollweide.

Exemplo 2. Sejam b, c e A conhecidos e b < c. Logo:



$$\frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}}$$

$\text{sen } \hat{C} = \frac{c \,.\text{sen } \hat{B}}{b}$, onde; $\hat{A} = 180° - (\hat{B} + \hat{C})$, também temos:

$$\frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{a}{\text{sen } \hat{A}}$$

$$a = \frac{b \,.\text{sen } \hat{A}}{\text{sen } \hat{B}},$$

Podemos também ter mais duas soluções:

$$\hat{E} = 180° - \hat{C},\ \hat{D} = 180° - (\hat{B} + \hat{C}) \text{ e } d = \frac{b \,.\text{sen } \hat{D}}{\text{sen } \hat{B}}$$

Com base no caso (I) podemos verificar que:

$$(c + b) \,.\, \text{sen } \frac{\hat{A}}{2} = a \,.\, \cos (\hat{C} - \hat{B}),$$

$$(b + c) \,.\, \text{sen } \frac{\hat{D}}{2} = d \,.\, \cos (\hat{E} - \hat{C}).$$

4.5 Lei das *tangentes*.

Vimos que em qualquer triângulo ABC, temos as fórmulas de Mollweide

$$\frac{b + a}{c} = \frac{\cos \left(\frac{\widehat{B - A}}{2}\right)}{\text{sen } \left(\frac{\hat{C}}{2}\right)} \ (1)$$

$$\frac{b - a}{c} = \frac{\text{sen } \left(\frac{\widehat{B - A}}{2}\right)}{\cos \left(\frac{\hat{C}}{2}\right)} \ (2).$$

Se dividirmos a segunda pela primeira, temos:

$$\frac{b - a}{c} \,.\, \frac{c}{b + a} = \frac{\text{sen } \left(\frac{\widehat{B - A}}{2}\right)}{\cos \left(\frac{\hat{C}}{2}\right)} \,.\, \frac{\text{sen } \left(\frac{\hat{C}}{2}\right)}{\cos \left(\frac{B - A}{2}\right)}$$

$$\frac{b - a}{b + a} = \text{tg } \left(\frac{\hat{B} - \hat{A}}{2}\right),\ \ .\ \text{tg } \left(\frac{\hat{C}}{2}\right)$$

Sendo $\hat{C} = 180° - (\hat{A} + \hat{B})$, se dividimos ambos os membros por 2, vamos obter a seguinte solução;

$$[\hat{C} = 180° - (\hat{A} + \hat{B})] \,.\, \frac{1}{2} \rightarrow \frac{\hat{C}}{2} = 90° - \frac{(\hat{B} + \hat{A})}{2}$$

$$\text{tg } \left(\frac{\hat{C}}{2}\right) = \text{cotg } \left(\frac{\hat{B} + \hat{A}}{2}\right),$$

$$\text{cotg } \left(\frac{\hat{B} + \hat{A}}{2}\right) = \frac{1}{\text{tg } \left(\frac{\widehat{B + A}}{2}\right)}, \text{ temos:}$$

$$\frac{b-a}{b+a} = tg\left(\frac{\hat{B}-\hat{A}}{2}\right) . cotag\left(\frac{\hat{B}+\hat{A}}{2}\right)$$

$$\frac{b-a}{b+a} = \frac{tg\left(\frac{\hat{B}-\hat{A}}{2}\right)}{tg\left(\frac{\hat{B}+\hat{A}}{2}\right)}$$

Pela permutação das letras temos;

$$\frac{a-c}{a+c} = \frac{tg\left(\frac{\tilde{A}-\hat{C}}{2}\right)}{tg\left(\frac{\hat{A}+\hat{C}}{2}\right)}$$

$$\frac{c-a}{c+a} = \frac{tg\left(\frac{\hat{C}-\hat{A}}{2}\right)}{tg\left(\frac{\hat{C}+\hat{A}}{2}\right)}$$

3° caso: Dados dois lados e o ângulo formado por eles.

Para determinar os ângulos desconhecidos o triângulo é resolvido pela lei das *tangentes* e para determinar o lado desconhecido usaremos a lei dos senos. A solução é verificada por meio da fórmula de Mollweide.

Exemplo 3. Dados os lados a e c,onde c > a e o ângulo B, Temos:

$$\frac{\hat{C}+\hat{A}}{2} = 90° - \frac{\hat{B}}{2}$$

$$\frac{c-a}{c+a} = \frac{tg\left(\frac{\hat{C}-\hat{A}}{2}\right)}{tg\left(\frac{\hat{C}+\hat{A}}{2}\right)}$$

$$tg\left(\frac{\hat{C}-\hat{A}}{2}\right) = \frac{c-a}{c+a} . tg\left(\frac{\hat{C}+\hat{A}}{2}\right)$$

$$b = \frac{c .sen\ \hat{B}}{sen\ \hat{C}}$$

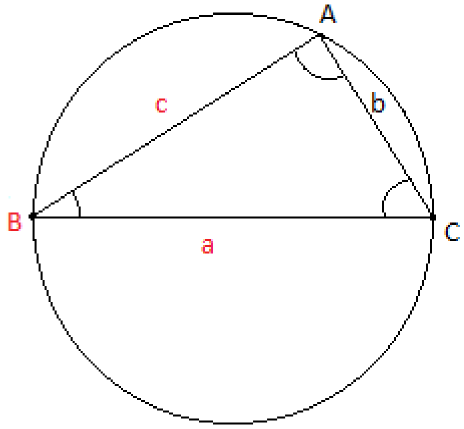
Verificação:

$$\frac{c+a}{b} = \frac{cos\left(\frac{\hat{C}-\hat{A}}{2}\right)}{sen\left(\frac{\hat{B}}{2}\right)}$$

$$(c+a) . sen\left(\frac{\hat{B}}{2}\right) = b . cos\left(\frac{\hat{C}-\hat{A}}{2}\right).$$

4.6 Fórmulas do arco metade.

Seja ABC um triângulo qualquer inscrito em uma circunferência, temos:



Onde; $2s = a + b + c$, é o semi – perímetro do triângulo.

$$r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

r é o raio do círculo inscrito.

$$tg\left(\frac{\hat{A}}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos\hat{A}}{1+\cos\hat{A}}} \text{ (I)},$$

Uma vez que $\left(\frac{\hat{B}}{2}\right)$ é sempre agudo, então pela lei dos *cossenos*, temos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos\hat{A}$$

$$\cos\hat{A} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$

Se multiplicamos ambos os membros por (-1) e somamos por 1, vamos obter;

$$1 - \cos\hat{A} = 1 - \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc} = \frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}, \text{ logo;}$$

$$1 - \cos\hat{A} = \frac{(a-b+c)(a+b-c)}{2bc} \text{ (II)}$$

Temos também;

$$1 + \cos\hat{A} = 1 + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}, \text{ logo;}$$

$$1 + \cos\hat{A} = \frac{(b+c-a)(b+c+a)}{2bc} \text{ (III)}$$

Seja, $a + b + c = 2s$, logo;

$a – b + c = (a + b + c) – 2b = 2s – 2b = 2(s – b)$

$a + b – c = 2(s – c)$ e $b + c – a = 2(s – a)$, no geral temos:

$2(s – a) = b + c – a;$

$2(s – b) = a + c – b$ e $2(s – c) = a + b – c$.

Substituindo (II) e (III) em (I), temos;

$$tg\left(\frac{\hat{A}}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}} = \sqrt{\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{2bc} \cdot \frac{2bc}{(b+c-a)(b+c+a)}}\text{ , logo;}$$

$$tg\left(\frac{\hat{A}}{2}\right) = \sqrt{\frac{2(s-b).2(s-c)}{2(s-a).2s}} = \sqrt{\frac{(s-b).(s-c)}{(s-a).s} \cdot \frac{(s-a)}{(s-a)}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(s-b).(s-c)\ (s-a)}{(s-a)^2.s}} = \frac{1}{(s-a)}\sqrt{\frac{(s-b).(s-c)\ (s-a)}{s}}$$

Portanto;

$$tg\left(\frac{\hat{A}}{2}\right) = \frac{1}{(s-a)}\sqrt{\frac{(s-b).(s-c)\ (s-a)}{s}}\text{ , sabendo que } r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}\text{ , então:}$$

$$tg\left(\frac{\hat{A}}{2}\right) = \frac{r}{(s-a)}$$

Pela permutação das letras temos;

$$tg\left(\frac{\hat{B}}{2}\right) = \frac{r}{(s-b)} \text{ e } Tg\left(\frac{\hat{C}}{2}\right) = \frac{r}{(s-c)}$$

4º caso. Dados os três lados.

O triângulo é resolvido usando – se as fórmulas do arco metade visto no 3°caso e a verificação é feita pela relação dos ângulos. Adiante veremos alguns problemas envolvendo o 4°caso .

5. LOGARITMOS

5.1 Logaritmos e suas definições

Antes de iniciamos os estudos sobre triângulos quaisquer (aplicação logarítmica), é importante temos conhecimentos básicos da definição de logaritmos e suas propriedades.

Definições:

Sejam **a** e **b** números reais tais que a > 0, b > 0 e b ≠ 1. Onde:

a é o logaritmando, **b** é a base do logaritmo e **x** é o logaritmo, temos:

$\log_b a = x \leftrightarrow b^x = a$, com $a > 0$, $b > 0$ e $b \neq 1$.

Com base na definição de logaritmo e suas condições de existência, temos:

1) $\log_b 1 = 0$, pois $b^0 = 1$.

2) $\log_b b = 1$, pois $b^1 = b$.

3) $\log_b b^n = n$, porque $b^n = b^n$.

4) $b^{\log_b a} = a$, pois $\log_b a = x \rightarrow b^x = a$.

5.2 Propriedades dos logaritmos

Logaritmo da potência.

Sejam **a** e **b** números reais tais que $a > 0$, $b > 0$, $b \neq 1$ e **n** um número real, temos:

$$\log_b a^n = n \cdot \log_b a$$

Demonstração:

$$\log_b a = x \rightarrow b^x = a \text{ (I)}$$

$$\log_b a^n = y \rightarrow b^y = a^n \text{ (II)}$$

Substituindo (I) em (II), temos:

$$b^y = (b^x)^n \rightarrow b^y = b^{x \cdot n} \therefore y = n \cdot x, \text{ logo:}$$

$$\log_b a^n = n \cdot \log_b a$$

Logaritmo do produto.

Sejam **a**, **b** e **c** números reais tal que, $b \neq 1$, temos:

$$\log_b (a \cdot c) = \log_b a + \log_b c$$

Demonstração:

Sejam **x**, **y** e **z** números reais, tais que:

$$\log_b a = x \rightarrow b^x = a \text{ (I)}$$

$$\log_b c = y \rightarrow b^y = c \text{ (II)}$$

$$\log_b (a \cdot c) = z \rightarrow b^z = a \cdot c \text{ (III)}$$

Substituindo (I) e (II) em (III), temos:

$$b^z = b^x \cdot b^y \rightarrow b^z = b^{x+y} \therefore z = x + y, \text{ logo:}$$

$$\log_b (a \cdot c) = \log_b a + \log_b c$$

Logaritmo do quociente.

Sejam **a**, **b** e **c** números reais tal que, $b \neq 1$, temos:

$$\log_b \left(\frac{a}{c}\right) = \log_b a - \log_b c$$

Demonstração:

Sejam **x**, **y** e **z** números reais, tais que:

$$\log_b a = x \rightarrow b^x = a \text{ (I)}$$

$\log_b c = y \rightarrow b^y = c$ (II)

$\log_b (\frac{a}{c}) = z \rightarrow b^z = \frac{a}{c}$ (III)

Substituindo (I) e (II) em (III), temos:

$b^z = \frac{b^x}{b^y} \rightarrow b^z = b^{x-y} \therefore z = x - y$, logo:

$\log_b (\frac{a}{c}) = \log_b a - \log_b c.$

5.3 Cologaritmo.

Sejam **a** e **b** números reais tais que a > 0, b > 0 e b ≠ 1, chamamos de cologaritmo de **a** na base **b** o oposto do logaritmo de **a** na base **b**:

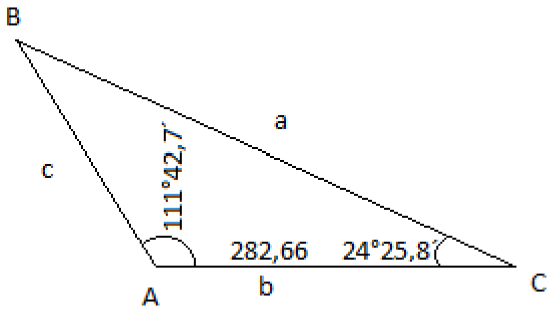
$\text{colog}_b\, a = -\log_b a.$

6. PROBLEMAS ENVOLVENDO TRIÂNGULOS QUAISQUER (SOLUÇÃO LOGARÍTMICA)

6.1 Aplicação do 1° caso.

1. Resolver o triângulo ABC, sendo dados b = 282,66; $\hat{A}$ = 111° 42,7´ e $\hat{C}$ =24° 25,8´.

$\hat{B}$ = 180° - ($\hat{C}$ + $\hat{A}$) = 43° 51,5´



Pela lei dos *senos*, temos:

$$\frac{a}{\text{sen}\,\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\,\hat{B}}$$

$$a = \frac{b\,\text{sen}\,\hat{A}}{\text{sen}\,\hat{B}},$$

Aplicando o log em ambos os lados, temos:

$$\log a = \log\left(\frac{b\,\text{sen}\,\hat{A}}{\text{sen}\,\hat{B}}\right),$$

Com base na propriedade do produto e do quociente do logaritmo, vejamos:

$\log a = \log b + \log \text{sen}\,\hat{A} - \log \text{sen}\,\hat{B}$

b = 282,66

log b = log 282,66 = 2,45127

log sen $\hat{A}$ = log sen 111°42,7´ = 9,96804 – 10

log sen $\widehat{B}$ = log sen 43°51,5´ = - 0,15934

log a = 2,45127 + 9,96804 – 10 + 0,15934 = 2,57865

log a = 2,57865

a = $10^{2,57865}$ = 379,01

$\frac{c}{\text{sen}\,\widehat{C}} = \frac{b}{\text{sen}\,\widehat{B}}$

log $\left(c = \frac{b\,.\text{sen}\,\widehat{C}}{\text{sen}\,\widehat{B}}\right)$, logo: log c = log b + log sen $\widehat{C}$ – log $\widehat{B}$

log b = 2,45127

log sen $\hat{C}$ = log sen 24°25,8´ = 9,61656 – 10 e log sen $\widehat{B}$ = log sen 43°51,5´ = - 0,15934

log c = 2,45127 + 9,61656 – 10 + 0,15934 = 2,22717

log c = 2,22717

c = $10^{2,22717}$ = 168,72

Verificacão:

(a + c)sen $\frac{1}{2}\,\widehat{B}$ = b cos $\frac{1}{2}\,(\hat{A} - \hat{C})$

a + c = 379,01 + 168,72 = 547,73;

$\frac{1}{2}\,\widehat{B}$ = 21°55,8´

log (a + c) = log 547,73 = 2,73856

log sen $\frac{1}{2}\,\widehat{B}$ = log sen 21°55,8´ = 9,57226 – 10

log (a + c) + log sen $\frac{1}{2}\,\widehat{B}$ = 2,73856 + 9,57226 – 10 = 2,31082

b = 282,66; log b = 2,45127

$\frac{1}{2}\,(\widehat{A} - \hat{C})$ = 43°38,4´

log cos $\frac{1}{2}\,(\widehat{A} - \hat{C})$ = log cos 43°38,4´ = 9,85955 – 10

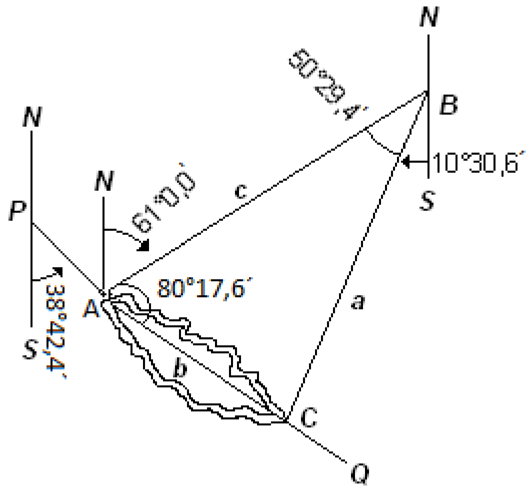
log b + log cos $\frac{1}{2}\,(\widehat{A} - \hat{C})$ = 2,45127 + 9,85955 – 10 = 2,31082

2. Ao visar o ponto Q, do ponto P, o agrimensor verifica que PQ atravessa um pântano. A linha PQ tem a orientação 38°42,4 SE no ponto P. Na borda do pântano, sobre PQ,

em A o agrimensor visa o ponto B, orientado aos 61°0,0 NE a 1 500,0m. De B visa a outra borda do pântano, em C, situado na linha PQ, orientado 10°30,6 SW. Achar a distância BC, o ângulo que deve o agrimensor girar o seu aparelho em C para prosseguir na direção primitiva da linha PQ e, finalmente,a distância AC, através do pântano.

No triângulo ABC:

$\hat{A}$ = 80°17,6; $\hat{B}$= 50°29,4 e c =1500,0m



Pela lei dos *senos*, temos:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}}$$

log (a = $\frac{c \operatorname{sen}\hat{A}}{\operatorname{sen}\hat{C}}$), temos:

log a = log c + log sen $\hat{A}$ – sen $\hat{C}$

$\hat{C}$ = 180° - ($\hat{A}$ + $\hat{B}$) = 49°13,0´

log c = log 1500 = 3,17609

log sen $\hat{A}$ = log sen 80°17,6´ = 9,99374 – 10

log sen $\hat{C}$ = log sen 49°13,0´ = - 0,12080

log a = 3,17609 + 9,99374 – 10 + 0,12080 = 3,29063

log a = 3,29063 → a = $10^{3,29063}$ = 1952,7

log (b = $\frac{c \operatorname{sen}\hat{B}}{\operatorname{sen}\hat{C}}$), temos:

log b = log c + log sen $\hat{B}$ - log sen $\hat{C}$

log c = log 1500 = 3,17609

log sen $\hat{B}$ = log sen 50°29,4´ = 9,88734 – 10

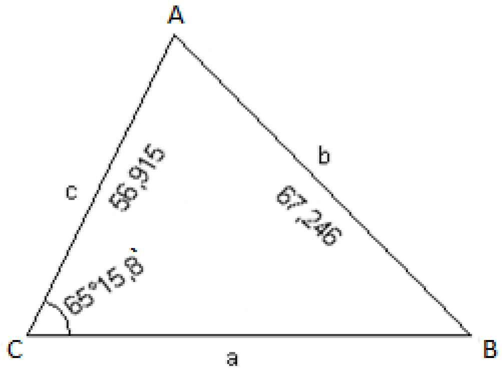
log sen $\hat{C}$ = log sen 49°13,0´ = - 0,12080 log b = 3,17609 + 9,88734 – 10 + 0,12080 = 3,18423

log b = 3,18423 → b = $10^{3,18423}$ = 1528,4

A distância de B a C é de 1952,7 m. O ângulo que deve ser colocado no "vernier" do aparelho, em C, é $\widehat{BCQ}$ = 180° - $\widehat{ACB}$ = 130°47,0´. A distância AC, através do pântano é de 1528,4m.

6.2 Aplicação do 2° caso.

3. Resolver o triângulo ABC, sendo dados, b = 67,246 e c = 56,915 e $\widehat{B}$ = 65°15,8´.



Uma vez que $\widehat{B}$ é agudo e b > c, há uma solução:

$\frac{c}{\text{sen}\,\hat{C}} = \frac{b}{\text{sen}\,\widehat{B}}$

log (sen $\hat{C} = \frac{c\ \text{sen}\,\widehat{B}}{b}$), temos:

log sen $\hat{C}$ = log c + log sen $\widehat{B}$ - log b

log c = log 56,915 = 1,75522

log sen $\widehat{B}$ = log sen 65°15,8´ = 9,95820 – 10

log b = log 67,246 = 1,82767

log sen $\hat{C}$ = log c + log sen $\widehat{B}$ + colog b =

= 1,75522 + 9,95820 – 10 – 1,82767 = 9,88575 – 10

log sen $\hat{C}$ = 9,88575 – 10 → sen $\hat{C}$ = $10^{9,88575-10}$ = 0,76868782

$\hat{C}$ = 50°14,2´

$\hat{A}$ = 180° - ($\widehat{B}$ + $\hat{C}$) = 64°30,0´

log (a = $\frac{b\ \text{sen}\,\hat{A}}{\text{sen}\,\widehat{B}}$), temos:

log a = log b + log sen $\hat{A}$ – log sen $\widehat{B}$

log b = log 67,246 = 1,82767

log sen $\hat{A}$ = log sen 64°30,0´ = 9,95549 – 10

log sen $\widehat{B}$ = log sen 65°15,8´ = - 0,04180

log a = 1,82767 + 9,95549 – 10 + 0,04180 = 1,82496

log a = 1,82496

a = $10^{1,82496}$ = 66,828

Verificação:

(b + c) sen $\frac{1}{2}$ $\hat{A}$ = a .cos $\frac{1}{2}$ ($\widehat{B}$ - $\hat{C}$)

b + c = 67,246 + 56,915 = 124,16

$\frac{1}{2}$ $\hat{A}$ = 32°15,0´

log (b + c) = log 124,16 = 2,09398

log sen $\frac{1}{2}$ $\hat{A}$ = log sen 32°15,0´ = 9,72723 – 10

log (b + c) + log sen $\frac{1}{2}$ $\hat{A}$ = 2,09398 + 9,72723 – 10 = 1,82121

a = 66,828; $\frac{1}{2}$ ($\widehat{B}$ - $\hat{C}$) = 7°30,8´

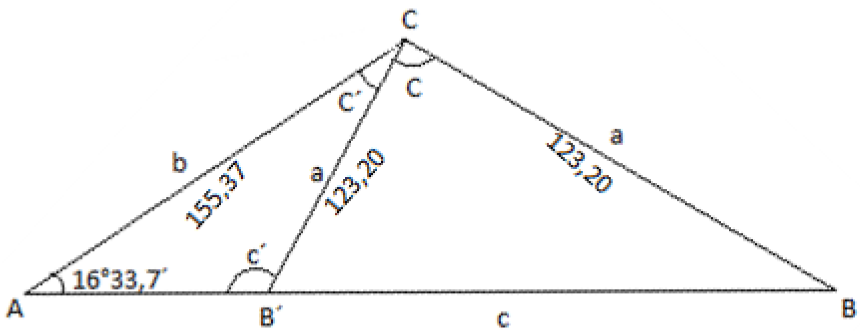
log a = log 66,828 = 1,82496

log cos $\frac{1}{2}$ ($\widehat{B}$ - $\hat{C}$) = log cos 7°30,8´ = 9,99625 – 10

log a + log cos $\frac{1}{2}$ ($\widehat{B}$ - $\hat{C}$) = 1,82496 + 9,99625 – 10 = 1,82121

4. Resolver o triângulo ABC, sendo dados:

a = 123,20; b = 155,37 e $\widehat{A}$ = 16°33,7´.



Uma vez que $\hat{A}$ é agudo e a $<$ b, deve haver duas soluções.

$$\frac{a}{\text{sen }\widehat{A}} = \frac{b}{\text{sen }\widehat{B}}$$

log (sen $\widehat{B} = \frac{b \operatorname{sen} \hat{A}}{a}$), temos:

log sen $\widehat{B}$ = log b + log sen $\hat{A}$ – log a

log b = log 155,37 = 2,19137

log sen $\hat{A}$ = log sen 16°33,7´ = 9,45491 – 10

log a = log 123,20 = 2,09061

log sen $\widehat{B}$ = log b + log sen $\hat{A}$ + colog a =

= 2,19137 +9,45491 – 10 - 2,09061 = 9,55567 – 10

log sen $\widehat{B}$ = 9,55567 – 10

sen $\widehat{B}$ = $10^{9,55567-10}$ = 0,3595, logo; $\widehat{B}$ = 21°4,1

$\hat{C}$ = 180° - ($\hat{A}$ + $\widehat{B}$) = 142°22,2´

$\widehat{B}$´ = 180° - $\widehat{B}$ = 158°55,9´

$\widehat{C}$´ = 180° - ($\widehat{A}$ + $\widehat{B}$) = 4°30,4´

$\frac{a}{\operatorname{sen} \widehat{A}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}}$

log (c = $\frac{a \operatorname{sen} \hat{C}}{\operatorname{sen} \hat{A}}$), temos:

log c = log a + log sen $\hat{C}$ – log sen $\widehat{A}$

log a = log 123,20 = 2,09061

log sen $\hat{C}$ = log sen 142°22,2´= 9,78573 – 10

log sen $\hat{A}$ = log sen 16°33,7´ = - 0,54509

log c = 2,09061 + 9,78573 – 10 + 0,54509 = 2,42143

log c = 2,42143

c = $10^{2,42143}$ = 263,89

De forma análoga, temos:

log (c´ = $\frac{a \operatorname{sen} \hat{C}'}{\operatorname{sen} \hat{A}}$); temos:

log c´ = log a + log sen $\widehat{C}$´ - log sen $\widehat{A}$

log a = log 123,20 = 2,09061

log sen $\hat{C}$´ = log sen 4°30,4´= 8,89528 – 10

log sen $\hat{A}$ = log sen 16°33,7´ = - 0,54509

log c´ = 2,09061 + 8,89528 – 10 + 0,54509 = 1,53098

log c´ = 1,53098

c´ = $10^{1,53098}$ = 33,961

Verificação 1.

(b + a) sen $\frac{1}{2}\hat{C}$ = c cos $\frac{1}{2}(\hat{B} - \hat{A})$

b + a = 155,37 + 123,20 = 278,57

$\hat{C}$ = 142°22,2´

$\frac{1}{2}\hat{C}$ = 71°11,1´

c = 263,89; $\frac{1}{2}(\hat{B} - \hat{A})$ = 2°15,2´

log (b + a) = log 278,57 = 2,44494

log sen $\frac{1}{2}\hat{C}$ = log sen 71°11,1´ = 9,976515 -10

log (b + a) + log sen $\frac{1}{2}\hat{C}$ = 2,44494 + 9,976515 – 10 = 2,42109

log c = 2,42143

log cos $\frac{1}{2}(\hat{B} - \hat{A})$ = log cos 2°15,2´ = 9,99967 – 10

log c + log cos $\frac{1}{2}(\hat{B} - \hat{A})$ = 2,42143 + 9,99967 – 10 = 2,42110

Verificação 2.

(b + a) sen $\frac{1}{2}\hat{C}'$ = c´ cos $\frac{1}{2}(\hat{B}' - \hat{A})$

b + a = 155,37 + 123,20 = 278,57;

$\hat{C}'$ = 4°30,4´

$\frac{1}{2}\hat{C}'$ = 2°15,2´

c´ = 33,961;

$\frac{1}{2}(\hat{B}' - \hat{A})$ = 71°11,1´

log (b + a) = log 278,57 = 2,44494

log sen $\frac{1}{2}\hat{C}'$ = log sen 2°15,2´ = 8,59459 -10

log (b + a) + log sen $\frac{1}{2}\hat{C}'$ = 2,44494 + 8,59459 – 10 = 1,03953

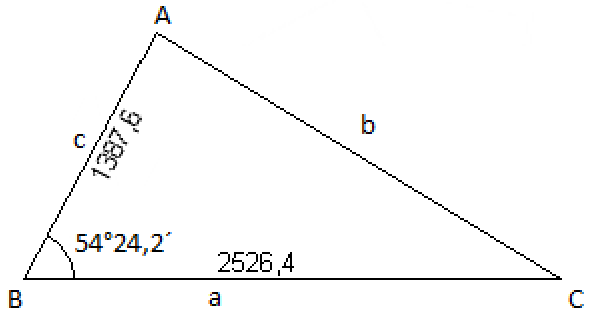
log c´ = 1,53098

log cos $\frac{1}{2}(\hat{B}' - \hat{A})$ = log cos 71°11,1 = 9,50854 – 10

log c´ + log cos $\frac{1}{2}(\hat{B}' - \hat{A})$ = 1,53098 + 9,50854 – 10 = 1,03952

6.3 Aplicação do 3° caso.

5. Resolver o triângulo ABC, sendo dados a = 2526,4; c = 1387,6 e $\widehat{B}$ = 54° 24,2´.



$\widehat{A} + \widehat{C} = 180° - \widehat{B} = 125°35{,}8´$,

$\frac{1}{2}(\widehat{A} + \widehat{C}) = 62°47{,}9´$

a – c = 2526,4 – 1387,6 = 1138,8

a + c = 2526,4 + 1387,6 = 3914,0

$tg\,\frac{1}{2}(\widehat{A} - \widehat{C}) = \frac{a-c}{a+c}\,tg\,\frac{1}{2}(\widehat{A} + \widehat{C})$

log (a – c) = log 1138,8 = 3,5644

colog (a + c) = colog 3914,0 = 6,40738 – 10

$\log tg\,\frac{1}{2}(\widehat{A} + \widehat{C}) = \log tg\ 62°47{,}9´ = 0{,}28907$

$\log\ tg\,\frac{1}{2}(\widehat{A} - \widehat{C}) = 3{,}5644 + 6{,}40738 - 10 + 0{,}28907 = 9{,}75289 - 10$

$tg\,\frac{1}{2}(\widehat{A} - \widehat{C}) = 10^{9{,}75289\,-10} = 0{,}5661$, logo;

$\frac{1}{2}(\widehat{A} - \widehat{C}) = 29°30{,}8´$

$\widehat{A} = \frac{1}{2}(\widehat{A} - \widehat{C}) + \frac{1}{2}(\widehat{A} + \widehat{C}) = 29°30{,}8´ + 62°47{,}9´ = 92°18{,}7´$

$\widehat{C} = 33°17{,}1´$

$\frac{b}{\text{sen}\,\widehat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\,\widehat{C}}$

$b = \frac{c\ \text{sen}\,\widehat{B}}{\text{sen}\,\widehat{C}}$;

log c = log 1387,6 = 3,14227

log sen $\widehat{B}$ = log sen 54°24,2´ = 9,91016 – 10

colog sen $\widehat{C}$ = colog sen 33°17,1´ = 0,26058

log b = 3,14227 + 9,91016 – 10 + 0,26058 = 3,31301

log b =3,31301, logo; $b = 10^{3{,}31301} = 2055{,}94$

Verificação:

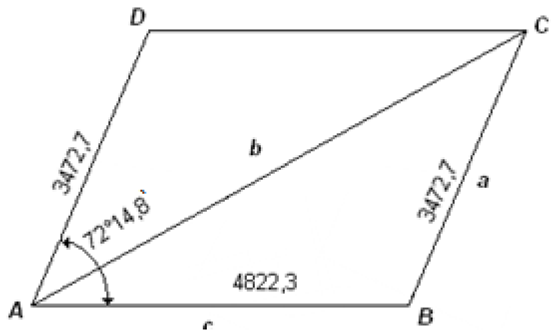
(a + c) sen $\frac{1}{2}\hat{B}$ = b cos $\frac{1}{2}(\hat{A} - \hat{C})$

log (a + c) = 3,59262 e log b = 3,31301

log (a + c) sen $\frac{1}{2}\hat{B}$ = log b cos $\frac{1}{2}(\hat{A} - \hat{C})$ =

log (a + c) + log sen $\frac{1}{2}\hat{B}$ = log b + log cos $\frac{1}{2}(\hat{A} - \hat{C})$

6. Dois lados adjacentes de um paralelogramo têm 3472,7 e 4822,3 metros respectivamente, e o ângulo entre eles mede 72°14,8´. Achar o comprimento da diagonal maior.



a = 3472,7

c = 4822,3

No triângulo ABC:

$\hat{B}$ = 180° - 72°14,8´ = 107°45,2´

$\hat{C} + \hat{A}$ = 72°14,8´; $\frac{1}{2}(\hat{C} + \hat{A})$ = 36°7,4´

c – a = 4822,3 – 3472,7 = 1349,6

c + a = 4822,3 + 3472,7 = 8295,0

tg $\frac{1}{2}(\hat{C} - \hat{A}) = \frac{c - a}{c + a}$ tg $\frac{1}{2}(\hat{C} + \hat{A})$

log (c –a) = 3,13020;

colog (c +a) = 6,08118 – 10

log tg $\frac{1}{2}(\hat{C} + \hat{A})$ = log tg 36°7,4´ = 9,86322 – 10

log tg $\frac{1}{2}(\hat{C} - \hat{A})$ = 3,13020 + 6,08118 – 10 + 9,86322 – 10 = 9,07460 – 10

tg $\frac{1}{2}(\hat{C} - \hat{A}) = 10^{9,07460 - 10}$ = 0,118741

$\frac{1}{2}(\hat{C} - \hat{A})$ = 6°46,3´

$\frac{1}{2}(\hat{C} + \hat{A}) = 36°7{,}4´$, logo;

$\hat{C} = 6°46{,}3´ + 36°7{,}4´ = 42°53{,}7´$ e $\hat{A} = 29°21{,}1´$

$$\frac{b}{\text{sen}\,\hat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\,\hat{C}}$$

$b = \frac{c\,\text{sen}\,\hat{B}}{\text{sen}\,\hat{C}}$;

log c = log 4822,3 = 3,68326

log sen $\hat{B}$ = 9,97881 – 10

colog sen $\hat{C}$ = 0,16707

log b = 3,68326 + 9,97881 – 10 + 0,16707 = 3,82914

$b = 10^{3,82914} = 6747{,}45$ m

Verificação:

$(c + a)\,\text{sen}\,\frac{1}{2}\hat{B} = b\cos\frac{1}{2}(\hat{C} - \hat{A})$

log (c + a) = 3,91882

log sen $\frac{1}{2}\hat{B}$ = 9,90727 – 10

log (c + a) + Log sen $\frac{1}{2}\hat{B}$ = 3,82609

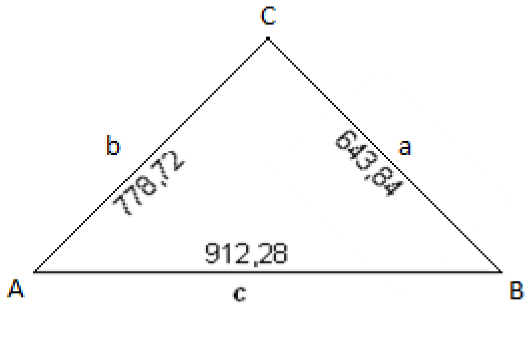
log b = 3,82914

log cos $\frac{1}{2}(\hat{C} - \hat{A})$ = 9,99696 – 10

log b + log cos $\frac{1}{2}(\hat{C} - \hat{A})$ = 3,82610

6.4 Aplicação do 4 ° caso.

7. Resolver o triângulo ABC, sendo dados a = 643,84; b = 778,72 e c = 912,28



$s = \frac{1}{2}(a + b + c)$; a = 643,84; b =778,72 e c = 912,28

$s = \frac{1}{2}(643{,}83 + 778{,}72 + 912{,}28) = 1167{,}42$

(s – a) = 523,58; (s – b) = 388,70 e (s – c) = 255,14

$r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$

log (s – a) = log 523,58 = 2,71898; log (s – b) = 2,58961

log (s – c) = 2,40678

colog s = colog 1167,42 = 6,93278 – 10

2 log r = log (s – a) + log (s – b) + log (s – c) + colog s = 4,64815

Log r = 2,32408

tg $\frac{1}{2}\hat{B} = \frac{r}{s-b}$

log tg $\frac{1}{2}\hat{B}$ = log r - log (s – b) = 2,32408 - 2,58961 = 9,73447 – 10

tg $\frac{1}{2}\hat{B} = 10^{9{,}73447\,-\,10}$ = tg $\frac{1}{2}\hat{B}$ = 0,5426

$\frac{1}{2}\hat{B}$ = 28°29,0´

$\hat{B}$ = 56°58,0´

tg $\frac{1}{2}\hat{A} = \frac{r}{s-a}$

log tg $\frac{1}{2}\hat{A}$ = log r – log (s – a) = 2,32408 - 2,71898 = 9,60510 - 10

tg $\frac{1}{2}\hat{A} = 10^{\,9{,}60510\,-\,10}$ = tg $\frac{1}{2}\hat{A}$ = 0,40281

$\frac{1}{2}\hat{A}$ = 21°56,4´

$\hat{A}$ = 43°52,8´

tg $\frac{1}{2}\hat{C} = \frac{r}{s-c}$

log tg $\frac{1}{2}\hat{C}$ = log r – log (s – c) = 2,32408 - 2,40678 = 9,91730 – 10

tg $\frac{1}{2}\hat{C} = 10^{\,9{,}91730\,-\,10}$ = 0,826608

$\frac{1}{2}\hat{C}$ = 39°34,7´

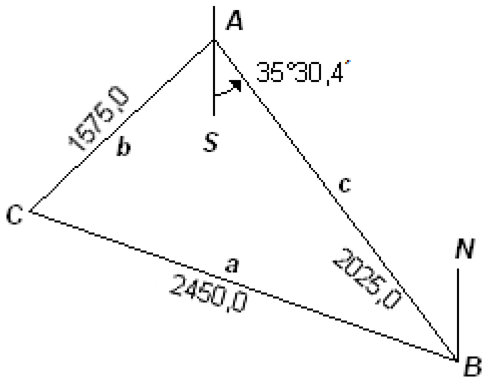
$\hat{C}$ = 79°9,4´

Verificação:

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}$ = 43°52,8´ + 56°58,0´ + 79°9,4´ = 180°0,2´

8. As dimensões de um campo triangular são: 2025,0; 2450,0 e 1575,0 metros respectivamente, como mostra afigura.

Se a orientação de AB é 35°30,4 SE, achar s orientação dos outros dois lados.



s = $\frac{1}{2}$ (a + b + c); a = 2450,0; b = 1575,0

c = 2025,0.

s = $\frac{1}{2}$ (2450,0 + 1575,0 + 1575,0) = 3025,0

(s – a) = 575; (s – b) = 1450

(s – c) = 1000

r = $\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$

log (s – a) = log 575 = 2,75967

log (s – b) = 3,16137

log (s – c) = 3,00000

colog s = colog 3025,0 = 6,51927 – 10

2 log r = log (s – a) + log (s – b) + log (s – c) + colog s = 5,44031

log r = 2,72016

tg $\frac{1}{2}\hat{B} = \frac{r}{s-b}$

log tg $\frac{1}{2}\hat{B}$ = log r - log (s – b) = 2,72016 – 3,16137 = 9,55879 – 10

tg $\frac{1}{2}\hat{B} = 10^{9,55879-10}$ = 0,36207

$\frac{1}{2}\hat{B}$ = 19°54,2´

$\hat{B}$ = 39°48,4´

tg $\frac{1}{2}\hat{A} = \frac{r}{s-a}$

log tg $\frac{1}{2}\widehat{A}$ = log r – log (s – a) = 2,72016 - 2,75967 = 9,96049 – 10

tg $\frac{1}{2}\widehat{A} = 10^{9,96049 - 10}$ = 0,91298

$\frac{1}{2}\widehat{A}$ = 42°23,8´

$\widehat{A}$ = 84°47,6´

tg $\frac{1}{2}\hat{C} = \frac{r}{s-c}$

log tg $\frac{1}{2}\hat{C}$ = log r – log (s – c) = 2,72016 – 3 = 9,72016 - 10

tg $\frac{1}{2}\hat{C} = 10^{9,72016 - 10}$ = 0,525001

$\frac{1}{2}\hat{C}$ = 27°42,0´

$\hat{C}$ = 55°24,0´

$\widehat{SAC}$ = 84°47,6´ - 35°30,4´ = 49°17,2´.

Concluímos que; a orientação de AC é 49°17,2´SW.

$\widehat{NBC}$ =35°30,4´ + 39°48,4´ = 75°18,8´.

Logo, a orientação BC é 75°18,8´ NW.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Determinar medidas ou distâncias não acessíveis ou buscar interpretar e encontrar solução para situações não convencionais, foram os principais motivos que nos levaram a estudar os triângulos obliquângulos. Iniciamos o desenvolvimento do tema em tela através de uma abordagem sobre alguns aspectos históricos, tais como: datas significativas, fatos relevantes, personagens importantes, etc. Em seguida, selecionamos e revisamos os conteúdos necessários às demonstrações das fórmulas e resoluções de problemas. Por fim, apresentamos os casos onde se fazem necessários o emprego da solução logarítmica.

Dessa forma, procuramos conduzir esse trabalho na perspectiva de contribuir com a melhoria do ensino em trigonometria, na expectativa de que o mesmo sirva como fonte de consulta, estimulando novas investigações. Sugerimos também, sua leitura aos colegas professores responsáveis pelas Práticas de Ensino, Laboratórios/Oficinas de Matemática.

8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Cologaritmo.
Disponivel em> http://www.infoescola.com/matematica/cologaritmo/ <. Acesso em 11 de Fevereiro de 2014**.**

DANTE, L. R. Coleção Matemática, São Paulo: Ática, p. 269-276, 2008.

GENTIL, N.; SANTOS, C. A. M.; GRECO, A. C.; FILHO, A. B.; GRECO, S. E. Matemática Para o 2^0 Grau, São Paulo: Ática, v. 2, p. 35-143, 1996.

GIOVANNI, J. R.; BONJORNO, J. R. Matemática Completa, São Paulo: FTD, ed. 2, p. 14-67, 2005.

GIOVANNI, J. R.; JUNIOR, G. Matemática para Pensar e Descobrir, São Paulo: FTD, p. 13-35, 2000.

História da Trigonometria.
Disponivel em>http://www.infoescola.com/matematica/historia-da-trigonometria/ <. Acesso em 02 de Fevereiro de 2014.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. A Matemática do Ensino Médio, Rio de Janeiro: SBM, v. 1, p. 213-236, 1999.

SANTOS, C. A. M.; GENTIL, N.; GRECO, S. E. Matemática Novo Ensino Médio, São Paulo: Ática, ed. 6, p. 100-196, 2002.

Um pouco da História da Trigonometria.
Disponivel em> http://ecalculo.if.usp.br/historia/historia_trigonometria.htm <. Acesso em 21 de Janeiro de 2014.