



UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

GISELE MAGALY DE OLIVEIRA MELO

**O ENSINO DE PRODUTOS NOTÁVEIS A PARTIR DE
MATERIAIS DIDÁTICOS MANIPULÁVEIS**

Campina Grande-PB

Dezembro/2010

GISELE MAGALY DE OLIVEIRA MELO

**O ENSINO DE PRODUTOS NOTÁVEIS A PARTIR DE MATERIAIS
DIDÁTICOS MANIPULÁVEIS**

Trabalho de Conclusão do Curso
Licenciatura Plena em Matemática
da Universidade Estadual da
Paraíba. Em cumprimento às
exigências para obtenção do Título
de Licenciada em Matemática.

Orientador: Prof. Ms. Aníbal de Menezes Maciel

Campina Grande-PB

Dezembro/2010

M528e

Melo, Gisele Magaly de Oliveira

O ensino de produtos notáveis a partir de materiais didáticos manipuláveis [manuscrito] / Gisele Magaly de Oliveira Melo. – 2010.

55 f. :il. color.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) – Centro de Ciências e Tecnologias, 2010.

“Orientação: Prof. Me. Aníbal de Menezes Maciel, Departamento de Matemática e Estatística ”.

1. Matemática. 2. Ensino. 3. Ensino Fundamental. I. Título.

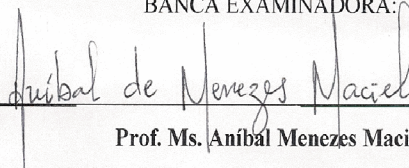
21. ed. CDD 372.704 4

GISELE MAGALY DE OLIVEIRA MELO

**O ENSINO DE PRODUTOS NOTÁVEIS A PARTIR DE MATERIAIS
DIDÁTICOS MANIPULÁVEIS**

Trabalho de Conclusão do Curso
Licenciatura Plena em Matemática
da Universidade Estadual da
Paraíba. Em cumprimento às
exigências para obtenção do Título
de Licenciada em Matemática.

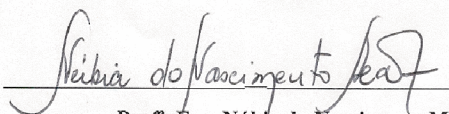
BANCA EXAMINADORA:



Prof. Ms. Aníbal Menezes Maciel

Departamento de Matemática – CCT/UEPB

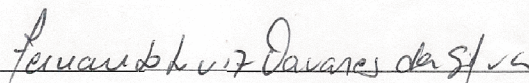
Orientador



Prof. Esp. Núbia do Nascimento Martins

Departamento de Matemática – CCT/UEPB

Examinadora



Prof. Ms. Fernando Luiz Tavares da Silva

Departamento de Matemática – CCT/UEPB

Examinador

Campina Grande, 13 de Dezembro de 2010

“A matemática revela seus segredos apenas àqueles que a abordam com puro amor, por sua própria beleza.”
(Arquimedes)

Dedico este trabalho primeiramente a Deus, aos meus pais que com todo o seu carinho e apoio sempre me ajudaram ao decorrer deste curso, ao meu namorado que também esteve ao meu lado me ajudando em todos os momentos, aos meus irmãos, aos meus amigos e professores.

AGRADECIMENTOS

Agradeço este trabalho primeiramente a Deus, por ter sempre me iluminado durante esta etapa da minha vida.

Em especial aos meus pais por terem sempre me proporcionado oportunidades proveitosas para o meu futuro através dos estudos.

Ao meu namorado por ter me apoiado sempre, aos meus familiares, amigos, ao motorista do transporte por sua dedicação durante esses anos e aos professores.

Em especial ao meu professor orientador Aníbal Menezes Maciel por ter depositado sua confiança, paciência e dedicação durante toda a evolução deste trabalho e durante a realização deste curso.

SUMÁRIO

RESUMO.....	09
INTRODUÇÃO.....	10
OBJETIVOS.....	12
Objetivo Geral.....	12
Objetivo Específico.....	12
CAPÍTULO I.....	14
1 UM POUCO DA HISTÓRIA SOBRE A VIDA DE ALGUNS MATEMÁTICOS QUE CONTRIBUÍRAM COM O DESENVOLVIMENTO DA ÁLGEBRA.....	14
1.1- EUCLIDES –SÉC.III a.C.....	14
1.2- DIOFANTE –SÉC.III d.C.....	16
1.3- MOHAMMED IBU-MUSA AL-KHOWARIZMI –SÉC.IX d.C.....	17
1.4- FRANÇOIS VIÈTE –SÉC.XVI d.C.....	18
1.5- O SIGNIFICADO DA PALAVRA ÁLGEBRA.....	19
1.6- CONTRIBUIÇÕES DADAS POR ALGUNS MATEMÁTICOS.....	20
1.7- EQUAÇÃO E NOTAÇÃO ALGÉBRICA.....	21
1.8- A ÁLGEBRA NO EGITO.....	21
1.9- A HISTÓRIA DA ÁLGEBRA GREGA ANTIGA.....	22
1.10- IDENTIDADES ALGÉBRICAS E A ÁLGEBRA GEOMÉTRICA GREGA.....	23
1.11- ÁLGEBRA GEMÉTRICA.....	26
1.12- A ÁLGEBRA NA EUROPA.....	28
1.13- O INÍCIO DO SIMBOLISMO ALGÉBRICA.....	29
CAPÍTULO II.....	30
2 A UTILIZAÇÃO DOS MATERIAIS MANIPULÁVEIS.....	30
2.1- A IMPORTÂNCIA DO USO DO MATERIAL MANIPULATIVO.....	30
2.2-CONSIDERAÇÕES SOBRE PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS ADOTADOS POR ALGUNS AUTORES MATEMÁTICOS.....	34
2.2.1- Giovanni, Castrucci e Giovanni Jr.....	34
2.2.2- Luiz Roberto Dante.....	35
2.2.3- Bonjorno & Ayrton.....	35
2.2.4- Projeto Araribá.....	36

CAPÍTULO III.....	37
ASPECTOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA.....	37
3.1-PROCEDIMENTOS DAS AULAS.....	38 à 48
CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	49
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	50
ANEXOS.....	52

RESUMO

O presente trabalho aborda a importância da utilização dos materiais manipuláveis no capítulo sobre Produtos Notáveis visto pelos alunos do oitavo ano, abordando assim mais uma metodologia a ser aplicada em sala de aula. Dando espaço nas aulas aos materiais manipuláveis, tem-se como característica estimular a prática da pesquisa em sala de aula, baseada em uma sólida formação teórica e prática. Esses materiais são instrumentos facilitadores na aprendizagem do aluno. O capítulo sobre Produtos notáveis é passado para os alunos na forma de memorização das fórmulas apresentadas. A Educação Matemática consiste nas múltiplas relações e determinações entre ensino, aprendizagem e conhecimento matemático. Um dos objetivos da Educação Matemática é a melhoria da qualidade do ensino e da aprendizagem da matemática. E a utilização, de modo geral dos materiais concretos como estratégia de aprendizagem, é um recurso que vem trazendo excelentes resultados, uma vez que os materiais manipuláveis voltados aos conhecimentos matemáticos acabam possibilitando ao aluno a capacidade de promover a comunicação de idéias matemáticas, além também do aluno adquirir estratégias de resolução de problemas, desenvolver a capacidade de resolver cálculos mentais, estimular sua concentração, perseverança, raciocínio e criatividade.

PALAVRAS-CHAVE: Produtos Notáveis, material concreto, ensino da Matemática.

INTRODUÇÃO

A Matemática originalmente surgiu como parte da vida diária do homem, através de suas necessidades práticas. Afirmções sobre as origens da Matemática, seja da aritmética, ou seja da geometria, são necessariamente arriscadas, pois os primórdios do assunto são mais antigos que a arte de escrever. Foi somente nos últimos seis milênios, numa carreira que pode ter coberto milhares de milênios, que o homem se mostrou capaz de por seus registros e pensamentos em forma de escrita.

Essa disciplina está presente em nossas vidas, desde uma simples contagem até o uso em complexos computadores.

Pode parecer em princípio, que algum tema da Matemática não tenha aplicação imediata no mundo em que vivemos; isso pode nos gerar um certo desapontamento. Na verdade, a aplicação da Matemática no cotidiano ocorre como resultado do desenvolvimento e do aprofundamento de certos conceitos nela presentes.

A Matemática é capaz de formar um ser capaz de resolver situações-problema colocadas pelo mercado, tais como o uso das diversas formas do dinheiro, as vantagens e desvantagens do sistema do mercado, a organização de orçamentos, tudo isso e muito mais é importante para o homem e claro, são baseados na Matemática.

Antigamente o desenvolvimento que a humanidade alcançou na Matemática era de forma lenta. Sabe-se que nos últimos tempos essas mudanças se dão de forma acelerada e com ela se alcançou um grande desenvolvimento caracterizado com o advento do computador.

Um dos grandes destaques do desenvolvimento tecnológico é a invenção dos computadores, os quais são envolvidos várias táticas matemáticas. A Matemática é uma das responsáveis pelo desenvolvimento tecnológico e conseqüentemente das Ciências Exatas assim como também das Ciências Humanas e da Saúde, pois a mesma está presente em várias situações cotidianas.

Sob o nome de “globalização”, reúnem-se fenômenos diversos que refletem novas formas de organização econômicas baseadas na Matemática.

Quanto às ferramentas tecnológicas nas aulas de Matemática, nenhuma das inovações substituiu o trabalho clássico na disciplina, centrado na resolução de problemas.

Entretanto saber usar calculadoras e conhecer os princípios de planilhas eletrônicas do tipo Excel são hoje demandas sociais.

Algumas características desse processo podem ser compreendidas a partir das transformações provocadas pelo desenvolvimento da informática, das telecomunicações, que modificam por sua vez, a organização e a capacidade de produção econômica, dentro do sistema capitalista de produção. Notamos a presença da disciplina também na área profissional, seja ela uma licenciatura até uma área de saúde, além também no meio artístico ou até mesmo político.

A lógica é bastante trabalhada na Matemática, pois desenvolvendo esse tema, o aluno é capaz de resolver várias situações cotidianas.

A Matemática tem sido um somatório de pesquisas, de deduções e de experiências executadas desde as primeiras civilizações e que às vezes se reformulam, dadas as deficiências na transmissão de conhecimentos ou por fundamentar-se na aplicação de novos métodos na solução de suas questões. A evolução dos processos da Matemática, o estabelecimento de novos conceitos, o aprimoramento de sua fundamentação e a implantação de novas estruturas fizeram com que as conquistas do passado tivessem nova feição.

Em Matemática, a primeira aproximação está em reconhecer que o conhecimento matemático é fruto do trabalho humano e surge como resposta a necessidades e problemas com os quais os homens se deparam. Os conteúdos matemáticos fornecem o instrumental necessário para a compreensão dos dados e informações colhidas em atividades sobre a situação de trabalho e emprego, salários, estudos comparativos de preços de produtos, verificação de vantagens e desvantagens das compras a crédito etc.

Diante dessas constatações, temos por base da realidade que a disciplina Matemática é considerada pela maioria dos alunos uma matéria detestada. Isso se deve ao fato das aulas, serem realizadas na forma do ensino tradicional, ou seja, baseadas em aulas rotineiras e em forma de memorização e às vezes pelo seu caráter abstrato.

Temos como principal disciplina desse método, a Matemática, por ser apresentada de forma à memorização. E tem-se como alternativa de ensino moderno, o construtivista. Seguindo esse modelo nas aulas de Matemática, surgirão novas idéias.

A concepção construtivista da aprendizagem e do ensino parte do fato óbvio de que a escola torna acessíveis aos seus alunos aspectos da cultura que são fundamentais para seu desenvolvimento pessoal.

A aprendizagem contribuiu para o desenvolvimento na medida em que aprender não é copiar ou reproduzir a realidade. Para a concepção construtivista, aprendemos quando somos capazes de elaborar uma representação pessoal sobre um objeto da realidade ou conteúdo que pretendemos aprender. Essa elaboração implica aproximar-se de tal objeto ou conteúdo com a finalidade de aprendê-lo; não se trata de uma aproximação vazia, a partir do nada, mas a partir das experiências interessantes e conhecimentos prévios que, presumivelmente, possam dar conta da novidade.

Neste contexto, surgiu de forma renovadora no ensino nas aulas de Matemática, o Movimento da Matemática Moderna no Brasil, no qual esse trabalho se propõe a arrecadar novas idéias dos professores através de congressos. No Brasil o ensino da Matemática vem se apresentando, desde as décadas de 60, como uma alternativa ao ensino tradicional, demonstrando certa estabilidade nos conteúdos e metodologias em livros e programas de ensino. Dessa forma esse tipo de ensino tradicional acabou recebendo críticas, afirmando que esse método acabava adestrando os alunos com fórmulas e cálculos sem aplicações.

Então a partir daí, começaram a ser realizados congressos para discutir novas propostas com respeito à metodologia, baseadas em aperfeiçoamentos e formações de professores, currículos, material didático, etc.

O Movimento de Educação Matemática trouxe ao ensino dessa disciplina muitas descobertas, novos desafios e novas perspectivas sobre o que é aprender matematicamente.

Baseados em maneiras novas de se expor conhecimentos matemáticos, foi realizado este trabalho tendo como objetivo geral promover a melhoria da compreensão do conteúdo matemático *Produtos Notáveis*, através de uma visão geométrica utilizando o material concreto. Tendo como objetivos específicos fazer revisão no conteúdo de base, utilizando recursos do novo ensino de matemática; construção de materiais concretos; diminuir a aversão pela Matemática.

Foi montada uma turma de reforço, na qual foi trabalhado desde o assunto sobre cálculo algébrico até o tema escolhido. A turma confeccionou o seu próprio material concreto, abordando assim outros assuntos matemáticos como, por exemplo, dobraduras, poliedros, ângulos e seus conceitos.

Logo após esta turma de reforço formada por oito alunas, apresentou a uma turma do nono ano o desenvolvimento de seus novos conhecimentos matemáticos.

É importante sempre procurarmos novas formas de se passar um assunto ao aluno, para que assim pelo menos aos poucos, essa disciplina tão repleta de conceitos, táticas e assuntos diversos, deixe para trás essa imagem de uma matéria detestada, pois se nos

dedicarmos com carinho e atenção a ela poderemos encontrar coisas magníficas que irão sem dúvidas alguma, fascinar os alunos.

Não podemos também deixar de dizer que a metodologia aplicada acaba influenciando bastante o modo como os alunos enxergam as aulas. Então fazendo com que as aulas se tornem mais lúdicas, também acaba influenciando a opinião de cada um. É importante que nós professores, estejamos sempre voltados às novas idéias matemáticas.

O ensino da Matemática é bastante importante, pois ele pode oferecer ao cidadão uma nova maneira de enfrentar os problemas sociais de maneira lógica e racional, cabendo a nós educadores, buscarmos novas metodologias de ensino, sempre com o intuito de melhorar o ensino da Matemática.

CAPÍTULO I

1 UM POUCO DA HISTÓRIA SOBRE A VIDA DE ALGUNS MATEMÁTICOS QUE CONTRIBUÍRAM COM O DESENVOLVIMENTO DA ÁLGEBRA

1.1- EUCLIDES – SÉC. III a.C

Infelizmente, pouco se sabe sobre a vida e a personalidade de Euclides. Desconhecem-se também a data e o local do seu nascimento. Provavelmente, sua formação matemática tenha se dado na escola platônica de Atenas. Euclides foi o fundador da famosa e duradoura escola de Alexandria, no Egito, na qual foi também professor ficando conhecido como Euclides de Alexandria.

Proclus Diadocus enriqueceu seu **Sumário Eudemiano** com a história de que Ptolomeu Haia indagando Euclides, sobre se não havia um caminho mais curto para o conhecimento geométrico, que o estudo de *Os elementos*, a atenção foi a resposta do mestre: “Não há estradas reais na geometria”.

Evidentemente Euclides não dava ênfase aos aspectos práticos do assunto, pois há uma estória contada sobre ele que diz que quando um estudante perguntou para que servia o estudo da geometria, Euclides disse a seu escravo que desse três moedas ao estudante, “pois ele precisa ter lucro com o que aprende”.(Boyer,1996,pág.69)

Euclides, foi o autor do texto de matemática *Os elementos* (Stoichia) mais bem sucedido de todos os tempos. O autor empregou figuras e palavras para resolver problemas algébricos.

Os elementos de Euclides foi composto em 300 a.C. aproximadamente; copiado e recopiado várias vezes depois. Trata-se de uma das obras matemáticas grega mais antiga e importante.

Teon de Alexandria (comentador grego que viveu quase 700 anos depois do tempo de Euclides) e alguns editores posteriores tentaram melhorar a obra original, no fim do quarto século.

Chegaram até nós, cópias de “Os elementos”, em traduções árabes, no século doze em latim e no século dezesseis em vernáculo.

A primeira versão impressa de “Os elementos”, surgiu em Veneza em 1482 e desde então, estima-se que cerca de pelo menos mil edições foram publicadas.

Com relação ao conteúdo dos “Elementos”, a obra não tratava-se apenas da geometria plana, mas também de bastante teorias dos números e da álgebra elementar.

O livro é composto por 465 proposições distribuídas em treze livros.

- O Livro I inicia com definições, postulados e axiomas.
- O Livro II é relativamente pequeno, contendo apenas quatorze proposições, nenhuma delas desempenha papel em textos modernos, mas nos dias de Euclides esse livro tinha grande significado.

É nele que se encontram os equivalentes geométricos de muitas identidades algébricas. Na Seção 3-6, por exemplo, mostramos como as proposições II 4, II 5 e II 6 estabelecem respectivamente as identidades

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2,$$

$$4ab + (a - b)^2 = (a + b)^2 \text{ (Eves, 2004, pág.170)}$$

- O Livro III é composto por trinta e nove proposições, no qual contêm teoremas sobre círculos, cordas, secantes e medidas de ângulos, além também de conter os trabalhos dos pitagóricos.

- No Livro IV são expostas dezesseis proposições e discuti-se a construção, com régua e compasso, de polígonos regulares de três, quatro, cinco, seis e quinze lados. Além da inscrição e a circunscrição desses mesmos polígonos em um determinado círculo. E também alguns trabalhos pitagóricos.

- O Livro V contém a teoria das proposições de Eudoxo. É neste livro em que as proposições são de importância fundamental em toda a matemática.

- O Livro VI aplica a teoria das proposições eudoxiana à geometria plana.

- O Livro VII inicia com duas proposições que constituem a teoria dos números conhecida como “algoritmo de Euclides”, para achar a medida do máximo divisor comum de dois números.

- O Livro VIII traz proposições sobre números em porção continuada e progressões geométricas relacionadas.

- O Livro IX contém vários teoremas interessantes.

Os Livros VII, VIII e IX, contêm no total cento e duas proposições e tratam-se da teoria elementar dos números.

- O Livro X trata dos números irracionais, contendo 115 proposições.

- O Livro XI contém trinta e nove proposições, as definições sobre retas e planos no espaço e teoremas sobre paralelepípedos.

- O Livro XII contém dezoito proposições, todas referentes à medida de figuras, usando o método da exaustão.

- O Livro XIII é inteiramente dedicado a propriedades dos cinco sólidos regulares.

Os Livros XI, XII e XIII referem-se à geometria sólida.

Dentre as obras de Euclides que sobreviveram até hoje temos *Os elementos*, *Os dados*, *Divisão de figuras*, *Os fenômenos* e *Óptica*.

“Talvez nenhum livro, além da Bíblia, possa se gabar de tantas edições, e certamente nenhuma obra matemática teve influência comparável à de *Os elementos* de Euclides”. (Boyer, 1996, pág. 82)

1.2- DIOFANTE – SÉC. III d.C

Pouco se sabe sobre a vida de Diofante. A sua nacionalidade é incerta assim como também a época exata em que viveu. Alguns historiadores acreditam que Diofante tenha vivido no século III de nossa era.

Sua principal contribuição foi introduzir a chamada **álgebra sincopada**, que faz uso de abreviações para designar quantidades e operações.

Realizou durante sua vida três trabalhos: *Arithimética* ao qual recorreu largamente ao sistema de álgebra sincopada para melhorar o desenvolvimento dos problemas; *Sobre Números Poligonais e Prismas*.

A obra *Aritmética* teve um grande destaque por fazer com que a álgebra retórica se transformasse na álgebra sincopada. Essa obra continha a resolução de 130 problemas nos quais continham equações do primeiro, do segundo e do terceiro grau. Ela era composta por treze livros, além de uma mistura de problemas determinados e indeterminados.

Diofante só aceitava as respostas dos problemas, apenas com números racionais positivos. Ele ficou conhecido como o pai da álgebra. Desempenhou um papel semelhante ao que Euclides teve na Geometria e Ptolomeu na Astronomia.

Ficaram conhecidos como *problemas diofantinos*, os problemas algébricos indeterminados em que se deviam achar com as soluções racionais.

Quase tudo que conhecemos sobre a vida pessoal de Diofante está contido no seguinte sumário de um epitáfio que aparece na *Antologia Grega*: “Diofante passou $\frac{1}{6}$ de sua vida como criança, $\frac{1}{12}$ como adolescente e mais $\frac{1}{7}$ na condição de solteiro. Cinco anos depois de se casar nasceu-lhe um filho que morreu 4 anos antes de seu pai, com metade da vida idade (final) de seu pai. (Eves,2004,pág.225)

Ou seja, Diofante morreu com oitenta e quatro anos de idade.

1.3- MOHAMMED IBU-MUSA AL-KHOWARIZMI – SÉC. IX d.C

Foi estabelecido em Bagdá uma “Casa da Sabedoria” (Bait al-hikma), comparável ao antigo Museu de Alexandria. Dentre a composição de seus mestres, havia um matemático e astrônomo chamado de Mohammed ibu-Musa al-Khowarizmi.

Ele foi o autor de meia dúzia de obras sobre a astronomia e a matemática. Escreveu também livros sobre a aritmética e a álgebra que tiveram papéis importantes na história da matemática.

Na álgebra de al-Khowarizmi, explicam-se as quatro operações elementares, além também de se expor aritmética e geometricamente as equações lineares e quadráticas.

Dentre suas obras, ele realizou também tratados sobre astrolábio e relógio de sol. al-Khowarizmi morreu algum tempo antes de 850.

Em um de seus livros, cuja obra possuía o título de *Al-jabr Wa'l muqabalah* está exposto, um tipo mais próximo, da álgebra elementar de hoje. Foi através deste título que surgiu o termo *álgebra*.

Nesta obra há problemas expostos claramente compreensíveis, pois os árabes em geral gostavam de uma boa e clara apresentação indo do início ao fim, além de uma boa organização sistemática. Com isso dar para se perceber que os seus leitores não tiveram muitas dificuldades em aprender as soluções.

Não se sabe ao certo os significados dos termos *al-jabr* e *muqabalah*. Uma tradução literal seria “restauração” ou “complementação”, mas matematicamente seria “a transposição de termos subtraídos para o outro membro da equação” de acordo com a palavra *al-jabr*. Já com relação à palavra *muqabalah*, significa “redução” ou equilíbrio”, ou seja, “o cancelamento de termos semelhantes (iguais) em membros opostos da equação”.

“A exposição de al-Khowarizmi era tão sistemática que seus leitores não devem ter tido dificuldade para aprender as soluções. Nesse sentido, pois, al-Khowarizmi merece ser chamado “o pai da álgebra”. (Boyer, 1996, pág.157)

Apesar de ter tido contato com a obra de Diofante, al-Khowarizmi não usou a notação algébrica mais elementar desenvolvida por ele, preferindo expressões escritas totalmente com palavras (Álgebra retórica).

1.4- FRANÇOIS VIÈTE – SÉC. XVI d.C

Sua maior contribuição para a Matemática foi o desenvolvimento da *Álgebra simbólica*, apresentada na obra *In artem*, muito próxima da Álgebra usada hoje.

O maior matemático francês do século XVI foi François Viète, mais conhecido como Vieta. Ele nasceu em Fontenay no ano de 1540, na juventude estudou advocacia e tornou-se membro do parlamento da Bretanha. Faleceu em Paris, em 1603.

Há fatos de sua vida que os livros relatam como, por exemplo, a história de que Viète foi convocado a ver uma equação, na época do rei Henrique IV. Essa equação tinha um

grau de quarenta e cinco, o rei desafiou-o, pois o mesmo afirmava que não havia nenhum matemático que era capaz de resolver esse problema proposto por Adrianus Romanus (15612-1615). Viète por sua vez, percebeu ligações trigonométricas subjacentes e foi capaz de em poucos minutos, descobrir duas raízes e logo após mais vinte e uma. Então Viète, desafiou Adrianus Romanus a resolver com os instrumentos euclidianos um problema de Apolônio. O matemático dos Países Baixos (Apolônio) não conseguiu resolver o desafio. Foi aí que Apolônio fez questão de viajar até Fontenay para conhecer Viète. Outra história, foi que Viète teve sucesso ao decifrar as mensagens em códigos, formado por aproximadamente seiscentos caracteres, do inimigo.

Dentre seus trabalhos desenvolvidos com o uso da trigonometria, álgebra e geometria, tem-se como destaque principal *Canon mathematicus seu ad triagula* (1579), *In artem analyticam isagoge* (1591), *Supplementum geometriae* (1593), *De numerosa potestatum resolutione* (1600) e *De aequationum recognitione et emendatione* (1615).

O seu trabalho mais famoso foi *In artem*, baseado no simbolismo, Viète utilizava as vogais para representar as incógnitas e as consoantes para representar as constantes.

Na álgebra, Viète deu suas mais importantes contribuições, pelo fato de ser ela a que chegou mais perto das idéias modernas.

Foi no ano de 1594, que Viète se envolveu em uma polêmica com o astrônomo Clavius, por causa da reforma gregoriana do calendário. Sua ação diante a polêmica, deixou-o com uma imagem notadamente negativa, pois sua atitude não se revestiu de caráter científico.

1.5- O SIGNIFICADO DA PALAVRA ÁLGEBRA

A origem da palavra “álgebra” é desconhecida, ela não se sujeita a uma origem de palavra clara, como por exemplo, a palavra “aritmética” que é derivada do grego *arithmos* (número). Provavelmente a álgebra se originou na Babilônia.

Na verdade, a álgebra é uma variante latina da palavra, frequentemente abreviada, como *Al-jabr*.

Foi escrito em Bagdá por volta do ano 825 pelo matemático árabe Mohammed ibn-Musa AL-Khowarizmi, um livro cujo título é Hisab AL-jabr W'al-muqabalah, simplesmente abreviado por *Al-jabr*.

A álgebra é a parte da Matemática que estuda, entre outros conceitos, as equações, e os cálculos com incógnitas e variáveis por meio do emprego de letras. Ao longo do desenvolvimento da Matemática, muitos estudiosos contribuíram para o desenvolvimento da Álgebra. Mas seu desenvolvimento foi irregular e muitas das contribuições levaram longos anos para serem incorporadas no trabalho de outros matemáticos.

A palavra álgebra, embora hoje em tenha um significado mais amplo e uma definição satisfatória, foi dividida em duas fases.

1) A álgebra antiga (elementar) = é o estudo das equações e métodos de resolvê-las.

2) A álgebra moderna (abstrata) = é o estudo das estruturas matemáticas tais como grupos, anéis e corpos - para mencionar apenas algumas.

1.6- CONTRIBUIÇÕES DADAS POR ALGUNS MATEMÁTICOS

As melhores contribuições dadas pelos matemáticos mulçumanos verificam-se no campo da álgebra geométrica.

Na álgebra grega dos pitagóricos e de Euclides, seu método de resolução, era à base de figuras geométricas e por meio de segmentos de retas e áreas. Alguns séculos depois, outro grego, Diofanto, também utilizou os mesmos métodos em seu trabalho com equações “diofantinas”. Foi ele quem utilizou na resolução da álgebra, abreviações de palavras para representar quantidades e operações.

Já os matemáticos árabes (inclusive al-Khowarizmi) resolviam os problemas algébricos, descartando as abreviações das palavras, preferindo expressar tudo em termos de palavras e números. Eles tinham uma capacidade plena em resolver uma variedade de equações, inclusive as do tipo cúbicas e quárticas.

1.7- EQUAÇÃO E NOTAÇÃO ALGÉBRICA

No período de 1700 a.C a 1700 d.C, aproximadamente, foi caracterizado pela fase antiga (elementar), baseada na invenção do simbolismo e pela resolução de equações por vários métodos. Nessa época veio à importante contribuição para a álgebra, do matemático francês do século XVI François Viète, freqüentemente conhecido como Vieta. Ele desenvolveu a resolução das equações polinomiais.

O desenvolvimento da notação algébrica passou pelos seguintes estágios:

*Álgebra retórica: Os argumentos da resolução de um problema eram descritos em prosa, sem abreviações ou símbolos específicos.

Como por exemplo:

“O quadrado do dobro da idade mais um é igual ao quádruplo do quadrado da idade mais o quádruplo da idade mais um”.

*Álgebra sincopada: São adotadas abreviações para as quantidades e operações que aparecem com maior freqüência.

Por exemplo:

$$i\epsilon\tau M\Delta\square\xi^{\circ}\beta\check{\zeta}\sigma\zeta\beta M\zeta$$

*Álgebra simbólica: São estabelecidos símbolos arbitrários, sem relação direta com os entes que representam.

Por exemplo:

$$“(2x + 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1”$$

1.8- A ÁLGEBRA NO EGITO

A Matemática babilônica foi mais sofisticada que a do Egito antigo. Esse fato pode ser consequência do desenvolvimento econômico mais avançado da Babilônia. A Babilônia se localizava numa região que era rota de grandes caravanas, já o Egito se mantinha semi-isolado. E também o fato de que o rio Nilo, necessitava de obras de engenharia e esforços administrativos na mesma extensão dos rios Tigre e Eufrates, ajudou para essa consequência.

Por volta de 1650 a.C, surgiu o papiro de Rhind. Que é na realidade um texto matemático. O papiro foi adquirido no Egito pelo egiptólogo escocês A. Henry Rhind, ao qual mais tarde foi comprado pelo Museu Britânico. É no papiro de Rhind que tem uma fonte rica sobre a matemática egípcia antiga, a qual foi publicada em 1927.

Na álgebra egípcia há um simbolismo para *mais* e *menos*, no qual se encontram no papiro de Rhind. O símbolo *mais* representa um par de pernas caminhando da esquerda para direita. Já o símbolo *menos* representa o contrário, ou seja, um par de pernas caminhando da direita para a esquerda. Também haviam símbolos para *igual* e para a *incógnita*.

Assim como a álgebra da Babilônia, a álgebra do Egito era retórica. Para as equações lineares, os egípcios as resolviam por meio de uma estimativa inicial seguida de uma correção final, a qual posteriormente os europeus chamaram esse método de “**regra da falsa posição**”.

Foi justamente esse método, um dos responsáveis por mostrar a origem da prática de lidar com esses tipos de problemas, desenvolvidas por Rhind e Moscou. A mais famosa foi à questão sobre o quão substanciosos eram o pão e a cerveja. Eles faziam um balanceamento de rações para gado e aves domésticas e armazenamento de grãos. Por exemplo:

“Assim, para resolver: $X + x/7 = 24$ assumi-se um valor conveniente para x , digamos $x = 7$. Então $x + x/7 = 8$, em vez de 24. Como 8 deve ser multiplicado por 3 para se obter 24, o valor correto de x deve ser $3(7)$ ou 21”. (Eves,2004,pág.73)

1.9- A HISTÓRIA DA ÁLGEBRA GREGA ANTIGA

Os três estágios da notação algébrica, como já vimos, a álgebra retórica em que os argumentos da resolução dos problemas eram descritos em prosa, sem abreviações ou símbolos específicos; a álgebra sincopada em que as abreviações para as quantidades e operações aparecem frequentemente; e a álgebra simbólica em que se baseava em símbolos arbitrários, sem relação direta com os entes que representavam, todos eles foram caracterizados em 1842 por G.H.F Nesselmann. A álgebra anterior a de Diofanto era retórica e uma de suas principais contribuições que Diofanto deixou para a matemática foi

a sincopação da álgebra grega. A álgebra retórica percussou bastante generalizada durante centenas de anos em todo o mundo, exceto na Índia. Na Europa Ocidental ela permaneceu até o século XV. Já no século XVI, apareceu a álgebra simbólica, mas apenas na metade do século XVII, foi que ela acabou se impondo.

Foi o gramático Metrôdoro que reuniu, por volta de 500 d.C, uma coleção de quarenta e seis problemas numéricos, em forma epigramática. Ela ficou conhecida como *Palatine* ou *Antologia Grega*, considerada uma das melhores fontes de problemas algébricos gregos antigos. Alguns de seus problemas são parecidos a alguns dos problemas do papiro de Rhind. A resolução dos seus problemas é considerada bastante fácil de resolver, baseados no nosso moderno simbolismo algébrico. Porém vale salientar, que não era nada fácil de se resolver os problemas na época da álgebra retórica, mas acredita-se que eles foram resolvidos aritmeticamente, talvez até pela *regra da falsa posição*. Acredita-se também, que foi no tempo de Euclides em que a álgebra grega passou da forma geométrica para a forma aritmética.

1.10- IDENTIDADES ALGÉBRICAS E A ÁLGEBRA GEOMÉTRICA GREGA

Diante das dificuldades em encontrar uma forma mais clara para a representação de números ou comprimentos desconhecidos e necessitando de uma notação algébrica adequada, os antigos gregos idealizaram certos processos algébricos engenhosos.

Foi através do desenvolvimento da álgebra geométrica, realizado pelos pitagóricos, que os estudos dos gregos se aprofundaram. Baseados também nas proposições que estavam expostas nos primeiros livros de “Os Elementos” de Euclides.

Acredita-se que os primeiros pitagóricos desenvolveram as proposições do Livro II de Os Elementos, que na realidade são identidades algébricas, através dos métodos de decomposição.

Através de algumas proposições do Livro II, ilustra-se os seguintes métodos, de acordo com o autor Howard Eves:

A proposição 4 do Livro II estabelece geometricamente a identidade

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Decompondo o quadrado de lado $a + b$ em dois quadrados e dois retângulos de áreas a^2 , b^2 , ab e ba , como mostra a figura 01.

O enunciado de Euclides para essa proposição é:

Dividindo-se uma reta em duas partes, o quadrado sobre a reta toda é igual à soma dos quadrados sobre as partes juntamente com o dobro do retângulo contido pelas partes.

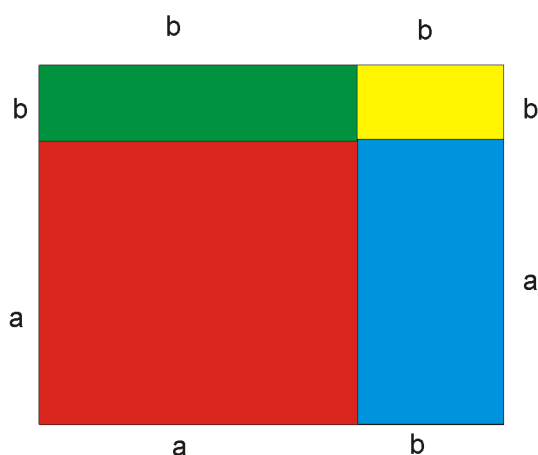


Figura 01

O enunciado da Proposição 5 do Livro II é: *Dividindo-se uma reta em partes iguais e em partes desiguais, o retângulo contido pelas partes desiguais, junto com o quadrado sobre a reta entre os pontos de secção, é igual ao quadrado sobre a metade da reta.* Seja **AB** o segmento de reta dado e suponhamos que ele esteja dividido igualmente em **P** e desigualmente em **Q**. Então a proposição diz que

$$(AQ)(QB) + (PQ)^2 = (PB)^2.$$

Fazendo-se **AQ = 2a** e **QB = 2b**, obtém-se a identidade algébrica

$$4ab + (a - b)^2 = (a + b)^2,$$

ou, fazendo-se **AB = 2a** e **PQ = b**, a identidade

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

A decomposição dada nos *Elementos* para estabelecer esse teorema aparece na Figura 02. É mais complicada que aquela para a Proposição 4. Na figura, **PCDB** e **QFLB** são quadrados construídos sobre **PB** e **QB** como lados. Então:

$$\begin{aligned} (AQ)(QB) + (PQ)^2 &= AGFQ + HCEF = AGHP + PHFQ + HCEF \\ &= PHLB + PHFQ + HCEF \\ &= PHLB + FEDL + HCEF = (PB)^2 \end{aligned}$$

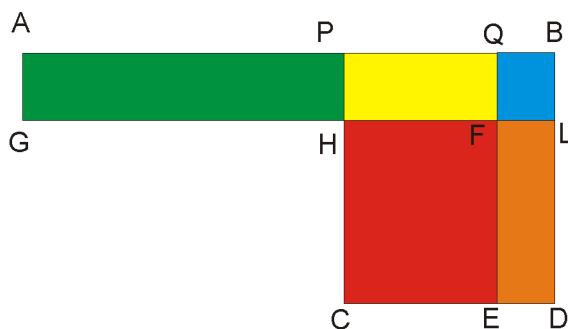


FIGURA 02

O enunciado da Proposição 6 do Livro II é: *Efetuando-se a bissecção de uma reta prolongando-se até um ponto qualquer, o retângulo contido pela reta assim prolongada e a parte que lhe foi acrescida, junto com o quadrado sobre metade da reta, é igual ao quadrado sobre a reta formada da metade e da parte acrescida.* Neste caso (ver figura 02) se, o segmento de reta dada **AB**, de ponto médio **P**, é prolongado até **Q**, devemos mostrar que

$$(AQ)(BQ) + (PB)^2 = (PQ)^2$$

Se fizermos **AQ = 2a** e **BQ = 2b**, obteremos outra vez a identidade

$$4ab + (a - b)^2 = (a + b)^2,$$

podendo-se usar uma decomposição semelhante à usada para a Proposição 5.

A Figura 03, com $AB = a$ e $BC = b$, sugere uma demonstração menos trabalhosa da identidade

$$4ab + (a - b)^2 = (a + b)^2.$$

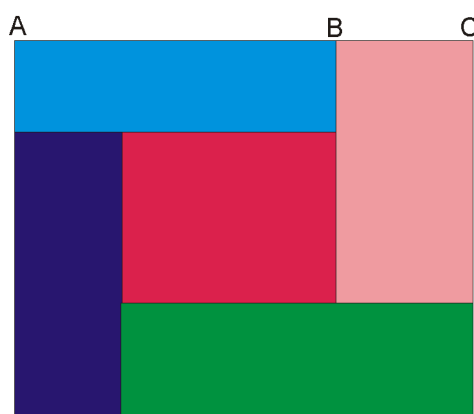


FIGURA 03

O fato de que os gregos tinham dificuldades conceituais com frações e números irracionais, levou-os a dominar os conceitos matemáticos baseados em um conjunto de segmentos de reta.

1.11- ÁLGEBRA GEOMÉTRICA

A matemática grega, na época de Platão, sofreu por modificações drásticas. A álgebra geométrica tomara o lugar da álgebra aritmética. Diante das resoluções de certos problemas, como por exemplo, dada a soma e o produto de dois lados de um retângulo no qual se pediam as suas dimensões, tinham que serem tratados de um modo diferente dos algoritmos numéricos da Babilônia. A partir daí, deveria haver homogeneidade em equações e formas normais do tipo $xy = a$, $x \pm = b$, eles deveriam ser interpretadas geometricamente.

A conclusão óbvia, a que o leitor pode chegar eliminando y , é que se deve construir sobre um segmento dado b um retângulo cuja altura desconhecida x deve ser tal que a área do retângulo, excede a área dada A pelo quadrado x^2 ou (no caso do sinal menos), é inferior a A pelo quadrado x^2 (Figura 04) (Boyer, 1996, pág. 53)

Através do processo conhecido pelos gregos de “a aplicação de áreas”, os gregos construíram o conhecimento sobre as equações quadráticas já estudadas em “Os elementos” de Elementos.

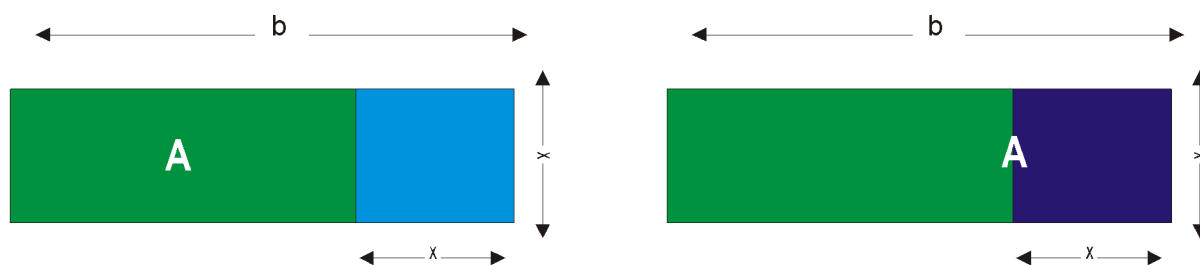
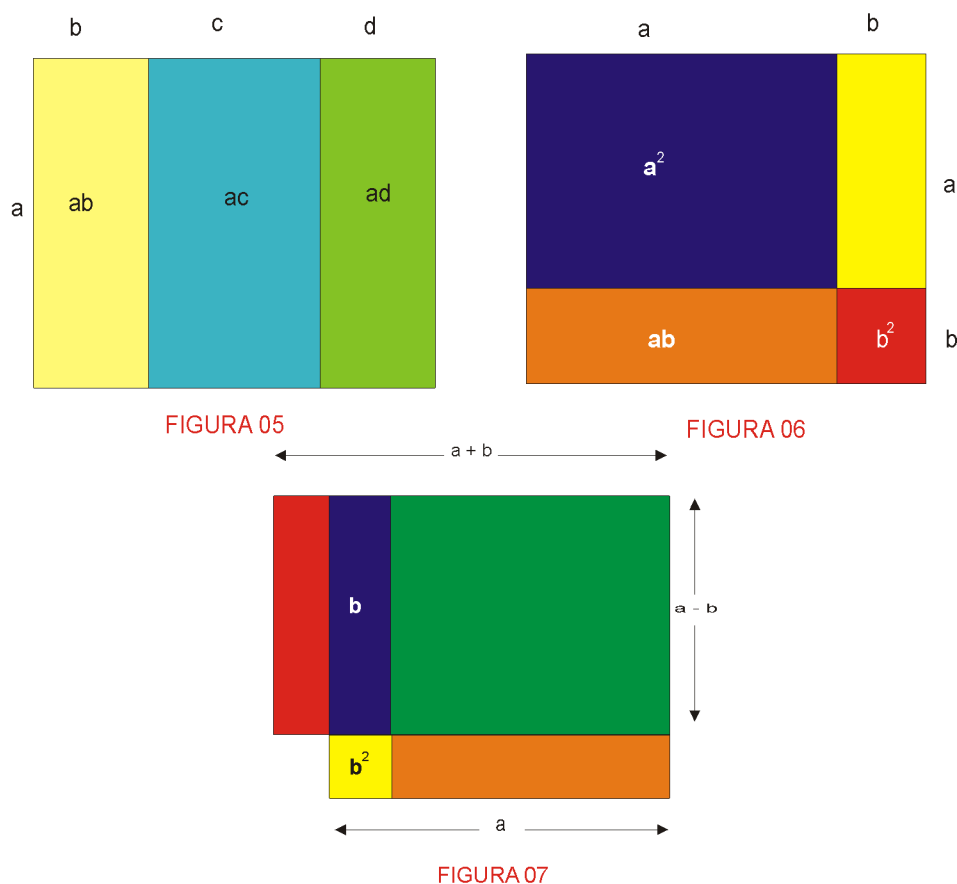


FIGURA 04

Hoje em dia, a álgebra geométrica grega, ao tentar encará-la, nos parece uma tarefa difícil. Mas para as pessoas as quais a utilizaram no trato de suas operações, as questões eram fáceis. Como por exemplos:

- Os antigos gregos, diante da lei distributiva $a(b + c + d) = ab + ac + ad$, eles iriam representar as áreas dos retângulos nesse teorema, “o retângulo sobre a e a soma dos segmentos b, c, d é igual à soma dos retângulos sobre a e cada um dos seus segmentos b, c, d tomados separadamente” (Figura 05) (Boyer, 1996, pág. 54)

- Tornam-se mais fáceis, entender as identidades $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (Figura 06) e $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ (Figura 07), se mostradas geometricamente. A primeira identidade mostra os três quadrados e os dois retângulos iguais na identidade. Já a segunda identidade mostra uma diferença de dois quadrados.



Figuras são construídas facilmente utilizando apenas régua e compasso. Assim como somas, diferenças, produtos e quocientes, figuras que envolvam raízes quadradas também podem ser construídas, apenas com uma régua e um compasso; os famosos instrumentos de Euclides.

1.12- A ÁLGEBRA NA EUROPA

A álgebra da Europa, em vez de progredir, ela se mantinha estável. Além dos europeus estarem háptos com os conhecimentos organizados por Diofanto e Brahmagupta, eles não estavam destinados a contribuir para uma eventual progressão na álgebra.

Foi através do comércio em crescimento, que a álgebra nascia aos poucos. A facilidade de manipular trabalhos numéricos através do sistema de numeração indo-arábico, a invenção da imprensa que muito mais contribuiu com a renovação da álgebra.

Cidades na Itália, tornaram-se fortes comercialmente e foi justamente lá que o renascimento algébrico da Europa efetivamente foi tendo o seu início.

1.13- O INÍCIO DO SIMBOLISMO ALGÉBRA

Na época, antes de Maomé, os árabes não tinham simbolismos para os números e escreviam apenas por palavras.

O simbolismo abreviado foi, em parte, consequência da administração dos extensos territórios conquistados; pelo fato de que a maioria das vezes, adotavam-se sistemas de numerações locais.

Robert Record escreveu um texto sobre geometria impressa em 1551 e chamado *The Pathewai to Knowledge* contendo uma condensação de *Os Elementos* de Euclides.

Foi na obra *The Whetstone of Witte*, publicada em 1557, que Robert Record fez o uso pela primeira vez do moderno símbolo de igualdade.

Um outro símbolo algébrico moderno, conhecido como radical (adotado talvez porque lembra um r “de raiz” maiúsculo), foi introduzido por *Christoff Rudolf* em seu livro de álgebra com o título de *Die Coss*, divulgado em 1525.

CAPÍTULO II

2 A UTILIZAÇÃO DOS MATERIAIS MANIPULÁVEIS

2.1- A IMPORTÂNCIA DO USO DO MATERIAL MANIPULATIVO

Foram poucos os educadores que nos últimos tempos, defenderam a importância do apoio visual-tático como facilitador para a aprendizagem. Assim, por exemplo, segundo Lorenzato, por volta de 1650, Comenius escreveu que o ensino deveria dar-se do concreto ao abstrato, justificando que o conhecimento começa pelos sentidos e que só se aprende fazendo. Rousseau recomendou a experiência direta sobre objetos, visando à aprendizagem. Por cerca de 1800, Pestalozzi e Froebel também reconheceram que o ensino deveria começar pelo concreto. Piaget deixou claro que o conhecimento se dá pela ação refletida sobre o objeto, Vygostky e Bruner concordaram que as experiências no mundo real constituem o caminho para a criança construir seu raciocínio. Enfim, cada educador ao seu modo, reconheceu que a ação do indivíduo sobre o objeto é básica para a aprendizagem.

Arquimedes, um dos grandes matemáticos, percebeu a influência do ver e do fazer na aprendizagem. Ele deixou este registro, quando escreveu a Eratóstenes, por cerca do ano 250 a.C., dizendo que “é meu dever comunicar-te particularidades de certo método que poderás utilizar para descobrir, mediante a mecânica, determinadas verdades matemáticas [...] as quais eu pude demonstrar, depois, pela Geometria” (Nicolet, apud Lorenzato, 2006, p. 5). Dessa forma, Arquimedes revelou que ao passo em que ele ia realizando descobertas matemáticas, confirmou a importância das imagens e dos objetos no processo de construção de novos saberes.

Para Lorenzato “nessa mesma linha de pensamento está um artigo provérbio chinês, que diz: se ouço, esqueço; se vejo, lembro; se faço, compreendo o que é confirmado plenamente pela experiência de todos, especialmente daqueles que estão em sala de aula.”

Portanto não faltam argumentos favoráveis para que as escolas sejam dotadas em materiais didáticos, para que assim nas aulas os objetos e imagens tornem-se grandes facilitadores da aprendizagem.

Segundo Rêgo, as novas demandas sociais educativas apontam para a necessidade de um ensino voltado para a promoção do desenvolvimento da autonomia intelectual, criatividade e capacidade de ação, reflexão e crítica pelo aluno. Para tanto, faz-se necessário a introdução da aprendizagem de novos conteúdos de conhecimentos e de metodologias que, baseadas na concepção de que o aluno deve ser o centro do processo de ensino-aprendizagem, reconheça, identifique e considere seus conhecimentos prévios como ponto de partida e o prepare para realizar-se como cidadão em uma sociedade submetida a constantes mudanças.

Dando espaço nas aulas aos materiais manipuláveis, tem-se como característica estimular a prática da pesquisa em sala de aula, baseada em uma sólida formação teórica e prática.

Rêgo & Rêgo (2006, p. 42) destaca o pensamento de Manoel Jairo Bezerra abordando as principais funções do Laboratório de Matemática, quais sejam:

- i) auxiliar o professor a tornar o ensino da matemática mais atraente e acessível;
- ii) acabar com o medo da matemática que, criado por alguns professores e alimentado pelos pais e pelos que não gostam de matemática, está aumentando cada vez mais a dificuldade do ensino dessa matéria e
- iii) interessar maior número de alunos no estudo dessa ciência.

Com a utilização dos materiais didáticos, dar-se um grande passo aos objetivos educacionais a serem atingidos.

Acredita-se, até então há poucos tempos, que os alunos aprendiam de igual maneira, ou seja, acumulando informações e regras. Porém, sabemos que cada aluno tem um modo próprio de pensar e que este varia em cada fase de sua vida, estando seu pensamento em constante processo de mudança.

Rêgo afirma que a aprendizagem pela compreensão é um processo pessoal e único que acontece no interior do indivíduo, embora relacionado a fatores externos, exigindo do raciocínio o que quase sempre é deixado apenas como tarefa para a memória. As interações

do indivíduo com o mundo possibilitam-lhe relacionar fatos, estruturar idéias e organizar informações, internalizando-os. Por meio de experiências pessoais bem-sucedidas, o aluno desenvolve o gosto pela descoberta, a coragem para enfrentar desafios e para vencê-los, desenvolvendo conhecimentos na direção de uma ação autônoma. Nessa concepção de aprendizagem, o material concreto tem fundamental importância, pois, a partir de sua utilização adequada, os alunos ampliam sua concepção sobre o que é como e para que aprender matemática, vencendo os mitos e preconceitos negativos, favorecendo a aprendizagem pela formação de idéias e modelos.

Assim, desenvolvendo nas aulas materiais manipuláveis voltados aos conhecimentos matemáticos, acaba possibilitando ao aluno a capacidade de ampliar sua linguagem e promover a comunicação de idéias matemáticas. Além também do aluno adquirir estratégias de resolução de problemas; desenvolver a capacidade de resolver cálculos mentais e fazer estimativas; promover a troca de idéias através de atividade em grupo; estimular sua concentração, perseverança, raciocínio e criatividade.

Maria e Perez afirmam que o material concreto exerce um papel importante na aprendizagem. Facilita a observação e a análise, desenvolve o raciocínio lógico, crítico e científico, é fundamental para o ensino fundamental e é excelente para auxiliar o aluno na construção de seus conhecimentos.

Reys (apud Matos & Serrazina, 1996) define materiais manipuláveis como “objetos ou coisas que o aluno é capaz de sentir, tocar, manipular e movimentar. Podem ser objetos reais que têm aplicação no dia-a-dia ou podem ser objetos que são usados para representar uma idéia”. Assim os materiais concretos são caracterizados pelo envolvimento dos alunos fisicamente em uma situação de aprendizagem ativa.

Para se utilizar materiais concretos em uma aula, é fundamental que o professor saiba envolver esses materiais no conteúdo matemático, para uma organização melhor do processo de ensino e aprendizagem. Portanto deve-se investir para que a formação de professores de Matemática, tanto inicial quanto a continuada, contemple essas questões.

De acordo com Brancaglione os resultados negativos com materiais concretos podem estar ligados à distância existente entre o material concreto e as relações matemáticas que temos a intenção que eles representem e também à seleção dos materiais na sala de aula. Durante a formação inicial do professor de matemática faz-se necessário criar momentos de reflexões e discussões sobre esses aspectos. Através de discussões em sala de aula, professor e alunos (futuros professores) podem refletir sobre as relações possíveis, e os

alunos, em interação com os materiais e com os colegas, provavelmente construirão as relações que o professor pretende que sejam construídas.

Qualquer material pode servir para apresentar situações nas quais os alunos enfrentam relações entre os objetos que poderão fazê-los refletir, conjecturar, formular soluções, fazer novas perguntas, descobrir estruturas. Entretanto, os conceitos matemáticos que eles devem construir, com a ajuda do professor, não estão em nenhum dos materiais de forma que possam ser abstraídos deles empiricamente. Os conceitos serão formados pela ação interiorizada do aluno, pelo significado que dão à suas ações, às formulações que enunciam, às verificações que realizam. (Passos, 2006, pág.81)

Reys (apud Matos & Serrazina, 1996) definiu alguns critérios para selecionar bons materiais manipuláveis, os quais poderão ser discutidos durante a formação dos professores:

- Os materiais devem proporcionar uma verdadeira personificação do conceito matemático ou das idéias a serem exploradas;
- Os materiais devem representar claramente o conceito matemático;
- Os materiais devem ser motivadores;
- Os materiais, se possível, devem ser apropriados para usar quer em diferentes anos de escolaridade, quer em diferentes níveis de formação de conceitos;
- Os materiais devem proporcionar uma base para a abstração;
- Os materiais devem proporcionar manipulação individual.

Portanto para que um professor escolha um material concreto, exige-se do mesmo reflexões teórico-pedagógicas sobre o papel histórico do ensino da matemática. E será justamente na formação inicial do professor de Matemática, que ele verá essas questões as quais deverão ser discutidas, refletidas e dimensionadas.

2.2-CONSIDERAÇÕES SOBRE PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS ADOTADOS POR ALGUNS AUTORES MATEMÁTICOS

Foi realizada uma pequena comparação entre a forma explanada do capítulo Produtos Notáveis por alguns autores. São eles: Giovanni . Castrucci . Giovanni Jr. (A conquista da Matemática-1998), Bonjorno & Ayrton (Matemática Fazendo a Diferença-2006); Projeto Araribá (Matemática-2007), Dante (Matemática é tudo-2007).

Os primeiros assuntos como o quadrado da soma e da diferença de dois termos, produto da soma pela diferença, vimos que todos abordavam as figuras geométricas. Outros traziam de forma resumida figuras com o fator em evidência e agrupamento. Raros foram os que explanaram o tópico o cubo da soma de dois termos e nenhum dos autores observados trouxeram de forma alguma figuras com o cubo da diferença de dois termos, a soma e diferença de dois cubos.

2.2.1- Giovanni, Castrucci e Giovanni Jr.

O livro de Giovanni do ano de 1998 traz a introdução do capítulo Produtos Notáveis, com uma experiência mostrando a decomposição dos números, podendo assim o professor trabalhar com o material dourado para explicar de forma mais clara aos alunos.

No tópico quadrado da soma de dois termos, o autor expõe o quadrado algebricamente, tendo uma parte com o título “explorando” no qual traz questões, para os alunos exercitarem algebricamente. Os tópicos quadrado da diferença de dois termos, produto da soma pela diferença de dois termos, fator comum, fatoração por agrupamento e a diferença nem o cubo da soma traz figuras.

Enquanto aos exercícios, apenas do tópico quadrado da soma de dois termos foi que cobrou mais a exercitação geométrica.

2.2.2- Luiz Roberto Dante

No livro do autor Dante no ano de 2002, encontramos uma pequena introdução do assunto. Quando se trata dos tópicos: quadrado da soma de dois termos, quadrado da diferença de dois termos, produto da soma pela diferença de dois termos, o autor explica resumidamente o processo geométrico, também revisando a propriedade comutativa e distributiva. Já no ano de 2007, Dante traz geometricamente mais uma fórmula: o cubo da soma de dois termos.

Ele exhibe no meio da seqüência sobre produtos notáveis assuntos do tipo divisão de polinômios por monômio, divisão de polinômio por polinômio e logo após vem o tema sobre fatoração, mas, nada de procedimentos geométricos. Nos exercícios não vem com situações geométricas, apenas em uma atividade em equipe, mostrando evolução do ano de 2002 a 2007.

Traz demonstrações ou provas de algumas propriedades numéricas em forma de exercícios.

2.2.3- Bonjorno & Ayrton

O livro de Bonjorno & Ayrton do ano de 2006, expõe de maneira clara e detalhada o quadrado da soma e diferença de dois termos geometricamente, além também do tópico: produto da soma pela diferença de dois termos. Traz de forma resumida em figuras no tópico fator comum e agrupamento. Ele não traz o assunto o cubo da soma e da diferença de dois termos. Seus exercícios abordam mais questões numéricas e são poucas as figuras trabalhadas.

2.2.4- Projeto Araribá

No livro do Projeto Araribá do ano de 2007, vem introduzindo o assunto com a decomposição numérica, podendo ser exposto aos alunos com o material dourado. Os assuntos quadrado e diferença de dois termos, produto da soma pela diferença, o cubo da soma de dois termos e diferença de dois quadrados vêm explanados geometricamente. Além também de se cobrar bastante nos exercícios, situações cotidianas envolvendo figuras.

CAPÍTULO III

3 ASPECTOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA

Para colocarmos em prática a metodologia proposta, foram escolhidas seis alunas do oitavo ano e uma aluna do nono ano da Escola Cenecista Severino Pereira (CENEC) da cidade de Taquaritinga do Norte-PE e foi montada uma turma especial.

Esse procedimento se deu em virtude do fato de nossa proposta envolver o conteúdo de Produtos Notáveis e no desenvolvimento da escola o referido assunto ainda não tinha sido dado. Desta forma decidimos antecipar o conteúdo para esse grupo piloto. As aulas foram realizadas em local distinto da escola, exatamente, numa casa desocupada, propriedade da minha família.

Ao todo, foram 26 encontros, onde tivemos a oportunidade de desenvolver diversas atividades, muitas delas de revisão de conteúdo a fim de preparar uma base sólida para lidarmos com o novo assunto. Assim, fizemos uma revisão minuciosa de medidas e de geometria plana e espacial, abordando o cálculo de área e volume.

No entanto, utilizamos recursos diversos para dinamizar essas aulas: *a história da matemática, resolução de problemas, jogos matemáticos* (envolvendo também uma *gincana e bingo matemáticos*) e a utilização de muito *material concreto*, entre eles o *dourado* e o *cuisinare*. Fizemos também a construção de outros poliedros.

Depois abordamos o cálculo algébrico, para depois entrarmos nos Produtos Notáveis. As aulas foram realizadas com dinâmicas, onde cada aluna confeccionou o seu material concreto, de ótima qualidade, possibilitando o desenvolvimento de várias habilidades.

Basicamente foi construído dois kit's pedagógicos, individualmente. Um que possibilitou trabalhar com: *a soma do quadrado de dois números, a diferença dos quadrados de dois números, o quadrado da soma de dois números e o quadrado da diferença de dois números*. O outro kit possibilitou trabalhar no mesmo sentido agora com o cubo. Podemos afirmar que dos encontros esse foi dos mais prazerosos.

A turma sempre fazia atividades extra de fixação, demonstrando disposição e interesse pelo trabalho. Tivemos poucos imprevistos, alguns de ordem externa.

Além do mais, construímos a cada aula uma apostila contendo todo conteúdo ilustrado, os exercícios e problemas propostos, que eram resolvidos tanto na classe como em atividades para casa. Vale salientar que ao tentarem resolver as questões em classe havia uma grande interação entre eles, debatendo a resolução das mesmas.

Finalizamos as aulas com a apresentação das meninas do oitavo ano na turma do nono ano, em caráter de revisão. Elas explanaram os conhecimentos adquiridos utilizando materiais construídos. Foi uma ótima apresentação, estavam bastante seguras do que faziam, sem falar no aspecto do aumento da auto-estima, haja vista que além de tudo estavam se expondo para alunos de uma série superior a delas. O trabalho foi bastante elogiado na escola por todos.

3.1-PROCEDIMENTOS DAS AULAS

3.1.1- 1º dia → A primeira aula foi marcada com uma revisão sobre o assunto de áreas nas figuras planas.

Sabe-se que uma das primeiras atividades matemáticas do homem foi o ato de medir.

Abordamos então um texto introdutivo com a história da unidade padrão: o metro. Para que assim, as alunas percebam a importância da história do dia-a-dia e das necessidades que os povos antigos tinham para sobreviver, baseadas na matemática.

Em um breve resumo vimos que por muitos séculos, os padrões de medida que seriam usados em determinado território geralmente eram estabelecidos pelo rei desse território. No entanto, com a expansão do comércio entre os povos, confusões e brigas eram inevitáveis. Surgindo então a necessidade de adotar padrões de medidas que valessem em todos os lugares. E que foi em 1793, que os cientistas reunidos na França propuseram a adoção de um sistema de medida mais prático e eficiente: o Sistema Métrico Decimal e apenas em 1862 foi que o Brasil havia aderido oficialmente a esse sistema.

Citaram-se como exemplos de medidas de superfície, situações presentes no cotidiano das alunas.

Pedi para que elas imaginassem que iríamos colocar carpete no piso da sala, sendo assim, forrariamos a superfície daquele determinado piso. À volta delas, elas poderiam

observar várias superfícies: como no tampo da mesa, na folha do caderno, no vidro da janela, nas paredes.

Sabendo a área da sala, por exemplo, poderíamos comprar a quantidade correta do carpete, evitando a falta ou o desperdício de material.

Esclarecemos que a área de uma figura plana é o número que expressa a medida da superfície dessa figura numa certa unidade de medida adotada.

Outro exemplo citado foi que se o Brasil ocupa uma área de 8.547.404 km², isso significa que se fosse possível “ferrar” o solo brasileiro com quadrados de 1 km de lado, seriam necessários 8.547.404 quadrados. E que podemos escolher outras superfícies como unidade de medida e que a fundamental área do Sistema Métrico Decimal é o metro quadrado (m²).

Foi distribuída para as meninas, uma apostila que explicava as áreas das figuras geométricas planas do retângulo e do quadrado. No qual se mostrava como calcular as áreas, destacando-se os desenhos em malhas quadriculadas, tendo como unidade de medida um quadrado com 1 cm de lado.

Logo após utilizamos o material cuicinere para que se tornasse mais fácil a compreensão das alunas.

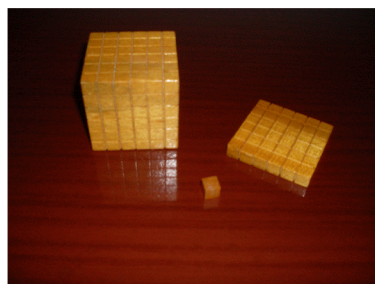


Foto 1: Material cuicinere

E no final foram expostos alguns exemplos, para que elas tivessem noção que não só através da soma de quadrinhos, elas poderiam enxergar a relação das multiplicações entre a quantidade de quadrinhos em cada lado do material também se obteria a área.

Percebi que através do material concreto as alunas entendem melhor as situações expostas.

3.1.2- **2º dia** → Introduzimos a aula com uma revisão do que foi a aula do dia anterior. Pra fixar mesmo a história apresentada sobre a importância da unidade de medida, fomos até a garagem da casa e pedi para que primeiras alunas dessem passadas ao redor do cômodo, às próximas duas medissem o cômodo utilizando como unidade de medida os pés, mais duas utilizando o cúbico (que era uma unidade de medida adotada pelos egípcios que media do cotovelo até o dedo médio do braço). Com isso, ficava provado que as unidades de medidas adotadas pelos povos antigos variavam de pessoa para pessoa.

As alunas aparentaram gostar mais do momento em que elas foram à garagem medir quantas passadas ou outra medida adotada, a garagem tinha pois havia uma aluna pequena e elas se divertiram deduzindo o número

Em seguida foi distribuída uma apostila com 04 questões, envolvendo problemas que eram baseados em situações cotidianas as quais se deixava em destaque o assunto sobre áreas de figuras geométricas planas.

As questões foram corrigidas com chamadas ao quadro para que assim a aluna esclarecesse bem suas dúvidas.

Foi passado para casa um desafio e um texto com perguntas que tinham haver com o assunto trabalhado.

3.3.3- **3º dia** → A terceira aula foi iniciada com construções de poliedros. Cada aluna escolheu um poliedro e confeccionou o mesmo com a técnica das dobraduras.

Logo após foi distribuído uma apostila a qual explicava alguns conceitos básicos relacionados aos sólidos geométricos.

A finalidade dessa metodologia, foi para que as alunas lembrassem o que vem a ser uma face, uma aresta e um vértice.

Foi passado como uma atividade de casa, para que as alunas registrassem em seus cadernos o número de faces, arestas e vértices presentes em cada um de seus poliedros escolhidos.

As meninas se descontraíram no momento da construção dos poliedros, ficaram comentando como iria ficar a planificação antes da contagem.

3.1.4- **4º dia** → A aula foi iniciada com um texto que abordava a introdução sobre como medir o volume e a capacidade. O texto trazia situações do cotidiano, como por exemplo, para realizar a construção da barragem de Itaipu foi preciso calcular com antecedência, o volume de concreto necessário para a obra, quando se enche de gasolina o tanque de um

automóvel, o líquido ocupa todo o espaço disponível dentro do tanque e toma toda a forma desse tanque.

Depois distribuí uma apostila, a qual tinha o assunto sobre como calcular o volume de alguns sólidos geométricos.

Deixamos em destaque como calcular o volume do paralelepípedo retângulo, o volume do cubo, o conceito sobre prismas e como calcular o volume do mesmo.

Nessa explicação veio ilustrado o volume dos paralelepípedos, baseados na contagem de cubinhos. Foi neste momento que apresentei a outra parte do material para a facilidade da aprendizagem.

Em algumas partes, as alunas preencheram na apostila alguns passos para a chegada das fórmulas.

Por último foi corrigido a interpretação de um texto passado para casa, abordando uma situação envolvendo a área, fizemos a correção da contagem do número de faces, arestas e vértices de cada poliedro confeccionado e desvendamos os desafios.

Na correção da contagem dos números de faces, arestas e vértices, houve empolgação das meninas, elas corrigiam os erros da aluna que havia errado a contagem.

OBS: A cada final da aula é apresentado dois desafios para as alunas, resolvendo-se através da lógica. Se por acaso não conseguirem resolver à tempo, os mesmos são levado para casa como exercício.

3.3.5- 5º dia → Assim quando duas alunas chegaram e esperavam as restantes chegarem, ficaram tentando desvendar o desafio que foi passado para casa. A aula foi realizada com uma atividade baseada em 04 questões as quais envolviam quesitos voltados ao assunto trabalhado na aula passada sobre o volume de um paralelepípedo retângulo e o cubo.

As alunas realizaram os exercícios em grupo, todas debatiam a maneira que iria ser respondida cada questão.

Quando a aula terminou realizamos um bingo com premiação aumentando assim a animação das alunas.

Logo após desvendamos o desafio passado para casa.

E elas antes de irem embora, fizeram questão de pedir para que eu passasse outro desafio para elas tentarem desvendarem em casa.

3.3.6- **6º dia** → Na sexta aula abordamos a introdução para a álgebra. Foi lido um breve texto histórico sobre o cálculo algébrico.

Vimos a representação de números desconhecidos, expressões algébricas e valor numérico. Em seguida as alunas responderam alguns exercícios sobre o assunto e foi feita a correção.

Em várias partes, tanto na apostila da explicação tanto nos exercícios, foi abordado bem as figuras do quadrado e do retângulo.

3.3.7- **7º dia** → Na sétima aula vimos o assunto sobre monômios e adição algébrica. Com o objetivo das alunas dominarem bem a parte de termos semelhantes e a adição dos mesmos.

Logo após a explicação e a exposição de exemplos as alunas responderam alguns exercícios e foi realizada a correção dos mesmos.

3.3.8- **8º dia** → No oitavo dia vimos o assunto multiplicação de monômios. Trabalhamos com figuras planas como o quadrado e o retângulo, realizamos exercícios e fizemos a correção dos mesmos.

Logo após, vimos apenas uma introdução sobre divisão e potenciação de monômios, não foi mais aprofundado o assunto pelo fato de não se trabalhar tanto com ele no assunto produtos notáveis.

3.3.9- **9º dia** → A aula nove foi realizada com base no assunto polinômios, no qual foi explicado como se reduz os termos semelhantes e como se encontra o seu determinado grau. Foram realizados exercícios e a correção dos mesmos.

3.3.10- **10º dia** → Na aula dez foi distribuído uma apostila que abordava o assunto sobre adição e multiplicação de polinômios. Foi explicado o assunto, logo em seguida foi realizado alguns exercícios sobre os assuntos.

Essa aula foi importante para as alunas, porque foi nela em que elas aprenderam alguns dos passos a serem seguidos em algumas das fórmulas no assunto produtos notáveis.

No final da aula foi feita uma pequena revisão.

3.3.11- **11º dia** → Nessa aula nós fizemos a correção dos exercícios passados na última aula.

A correção foi realizada com chamada ao quadro, no qual as alunas foram ao quadro responder os quesitos e ao passo em que elas iam respondendo, elas iam também explicando como se fazia respondia os quesitos às colegas.

No final da aula foi feito uma pequena revisão e uma brincadeira tipo passa ou repassa para distrair um pouco!

3.3.12- **12º, 13º, 14º dia** → Nesses três dias, trabalhamos com a construção dos materiais de cada aluna. No qual cada uma construiu seu próprio material, abordando o tema sobre dobraduras.

Elas gostaram muito dessas aulas, mostrando bem atenciosas no que se fazia.



Foto 2: Alunas cortando os poliedros



Foto 3: Alunas desenhando e realizando a técnica das dobraduras

3.3.13- **15º dia** → A décima quinta aula foi marcada com o primeiro assunto do capítulo Produtos Notável, o quadrado da soma de dois termos e o quadrado da diferença de dois termos.

Foi distribuído para cada aluna, o material que era tipo um quebra cabeça, no qual contém a planificação das figuras que constituíam a área de um quadrado.

Através das cores diversificadas elas puderam compreender o que vinha a ser a soma e a diferença de dois termos.

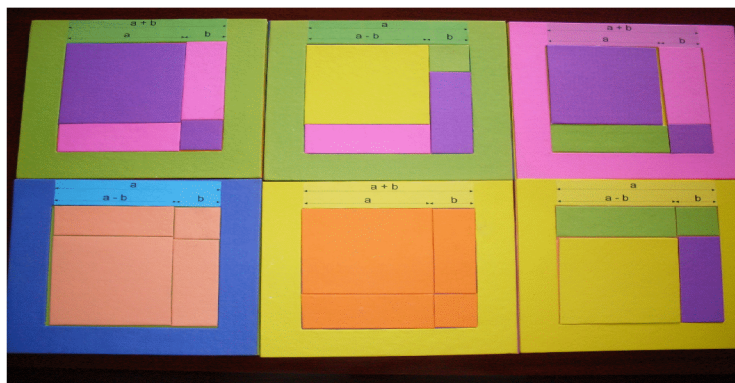


Foto 4: Material abordando o conteúdo “quadrado da soma e da diferença de dois termos”

Percebi que na fórmula da soma, as alunas compreenderam logo, mas na diferença foi necessário mais explicações.



Fotos 5 e 6: Alunas utilizando o material que determinava a soma e a diferença de dois termos

Estava presente uma aluna do 9º ano, que acabou afirmando no final da aula que achava melhor de entender o assunto na maneira da memorização. Isso se deve ao fato, dela estar acostumada ao método do ensino tradicional.

Enquanto às meninas do 8º ano, percebi que precisaria de na próxima aula, dar mais uma reforçada no assunto.

3.3.14- **16º dia** → A décima sexta aula foi realizada com a resolução de quatro questões, às quais eram para se representar algebricamente duas da soma de dois termos e duas da diferença.

Resolvi um exemplo de cada caso.

E depois da correção das questões as meninas começaram a comentar que estavam começando a achar fácil o assunto.

3.3.15- **17º dia** → Na décima sétima aula foi exposto uma apostila ao qual havia decomposições de números. De acordo com o tema quadrado da soma de dois termos, foi explicado o que vem a ser o primeiro e o segundo termo, além também de ser apresentado como trabalhar com produtos baseados no material dourado para melhor compreensão do assunto.

3.3.16- **18º dia** → Nossa décima oitava aula resolvemos algumas questões sobre o quadrado da soma e da diferença de dois termos e fizemos a correção das mesmas.

E no final da aula foi realizada uma gincana, às quais as alunas se divertiram com as perguntas baseadas na lógica.



Foto 7: Um dos jogos preparado para a gincana

3.3.17- **19º dia** → Fizemos uma revisão das aulas passadas com as fórmulas.

3.3.18- **20º dia** → No vigésimo dia vimos a fórmula produto da soma pela diferença de dois termos.

As alunas trabalharam com o mesmo material ao que elas utilizaram com as fórmulas soma e diferença de dois termos. E aprenderem com facilidade!

3.3.19- **21º dia** → Nesse dia foi apresentado à fórmula o cubo da soma e da diferença de dois termos. Cada aluna utilizou o seu material manipulável confeccionado por elas mesmas.



Foto 8: Kit que possibilitou trabalhar com as fórmulas do cubo e figuras planas



Foto 9: Alunas utilizando o material manipulável, para as fórmulas do cubo da soma e da diferença de dois termos.

As alunas compreenderam com rapidez o cubo da soma de dois termos e antes da exposição da fórmula citada foi feito uma revisão das primeiras aulas, as quais trabalharam com volume de um prisma, área de um quadrado e de um retângulo.

Já o cubo da diferença de dois termos, as meninas até que no início estavam resolvendo bem, porém quando chegaram ao desenvolvimento da fórmula se confundiram um pouco; acabaram também se assustando com o tamanho da fórmula.

3.3.20- **22º dia** → Fizemos uma revisão da aula passada.

3.3.21- **23º dia** → Foi apresentada a fórmula “diferença de dois quadrados”. Esta fórmula também foi trabalhada com o material que explicava a soma e a diferença de dois termos e produto da soma pela diferença. As alunas entenderam rapidamente e elas comentaram que perceberam que se tratava da “volta” do produto da soma pela diferença.

3.3.22- **24º dia** → No vigésimo quarto dia vimos o assunto sobre diferença de dois cubos, e essa foi uma das fórmulas mais complicada para as alunas. Percebi que elas tiveram dificuldade em aplicar a divisão de três termos pelo fator comum $a - b$.

3.3.23- **25º dia** → Realizamos uma revisão com o assunto da aula passada.

3.3.24- **26º dia** → Fizemos uma revisão geral, abordando todos os assuntos do tema Produtos Notáveis: quadrado da soma de dois termos, quadrado da diferença de dois termos, produto da soma pela diferença de dois termos, cubo da soma e cubo da diferença de dois termos, diferença de dois quadrados e diferença de dois cubos. Foi tipo uma preparação para a apresentação na turma do nono ano.

3.3.25- **27º dia** → Esta aula foi marcada pela finalização das aulas. Á quais, as alunas do oitavo ano esporam para os colegas do nono ano, todos os conhecimentos adquiridos no tema Produtos Notáveis.

Elas apresentaram cada uma das fórmulas com os materiais manipuláveis, ou seja, com objetos e imagens. E por sinal se saíram muito bem seguras no que estavam transmitindo, apesar do nervosismo.



Foto 10: Alunas apresentando as fórmulas aos alunos do nono ano

Enquanto aos alunos do nono ano ficaram muito atentos do início ao fim. Porém no final das apresentações, a professora deles me comunicou sobre os comentários: os alunos tiveram dificuldades em aprender, preferiram ver o assunto por base da memorização.

Tem dois aspectos que parecem serem óbvios pela consequência: o fato dos alunos não terem a oportunidade de manipular os materiais por ter sido apenas uma aula de apresentação e pelo fato dos alunos já terem em mente a memorização das fórmulas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Detectamos o testemunho dos alunos do 9º ano, que falaram que acharam o trabalho decorado mais simples, porém que agora é que estavam entendendo. Enquanto, as alunas do 8º ano, como não tinham experiência anterior com o conteúdo, não tiveram a mesma opinião e que na verdade gostaram muito da experiência. Ao nosso ver, os alunos possivelmente não se apropriaram bem do conteúdo primeiro porque foi só uma aula de apresentação, sem ter havido a oportunidade de manipulação do material. Depois, pelo fato deles já terem em mente a memorização das fórmulas.

Como a nossa metodologia visou em apresentar o capítulo às alunas do oitavo ano antes da escola expor, foi um ponto positivo para o entendimento das mesmas, pois caso contrário, elas teriam o mesmo resultado dos alunos do nono ano.

Os alunos do nono ano começaram a entender o porquê da existência de alguns termos algébricos, através dos prismas do material concreto.

Quando chegou o momento na turma do oitavo ano, de estudarem o capítulo, a professora da referida turma convidou as alunas para que explicassem a turma.

Elas trabalharam ao decorrer da semana, onde cada uma explicava as fórmulas concluindo as aulas com exercícios propostos.

A professora testemunhou que no momento da resolução dos exercícios, as alunas desenvolveram bem.

Sem esquecer também da empolgação das alunas, que tiveram ao ver que seus colegas de classe faziam perguntas e pediam ajuda a elas para a resolução dos exercícios em sala de aula.

Todavia, fica para turma do 8º ano uma grande experiência e para nós a certeza de que o uso do material manipulativo contribui e muito para a melhora da compreensão da essência dos produtos notáveis.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARROSO, Juliane Matsubara. **Produtos notáveis e fatoração**. In: BARROSO, Juliane Matsubara. Projeto Araribá: matemática. 2ª Ed. Editora Moderna, São Paulo, 2007.

BONJORNNO, José Roberto/ BONJORNNO, Regina Azenha/ OLIVARES, Ayrton. **Fatoração**. In: BONJORNNO, José Roberto. Matemática: fazendo a diferença. Coleção fazendo a diferença. Editora F.T.D S.A, São Paulo, 2006.

BOYER, Carl B. **Euclides de Alexandria**. In: BOYER, Carl B. História da Matemática. Revista por UTA C. Merzbach-2ª ed. Editora Edgard Blücher, São Paulo, 1996.

DANTE, Luiz Roberto. **Produtos Notáveis**. In: DANTE, Luiz Roberto. Tudo é Matemática. Editora ática, São Paulo, 2007.

EVES, Howard. **O Conteúdo dos “Elementos”**. In: EVES, Howard. Introdução à história da matemática. Editora da Unicamp, Campinas SP, 2004.

GIOVANI, José Ruy/ CASTRUCCI, Benedito/ GIOVANNI JR, José Ruy. **Os Produtos Notáveis**. In: GIOVANNI, José Ruy. A conquista da Matemática. Coleção a conquista da matemática. Editora F.T.D S. A., São Paulo, 1998.

LORENZATO, Sérgio. **Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis**. In: LORENZATO, Sérgio (org.). O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores. Coleção Formação de Professores. Ed. Autores Associados, Campinas SP, 2006.

PASSOS, Cármen Lúcia B. **Materiais manipuláveis como recursos didáticos na formação de professores de matemática**. In: LORENZATO, Sérgio (org.). O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores. Coleção Formação de Professores. Ed. Autores Associados, Campinas SP, 2006.

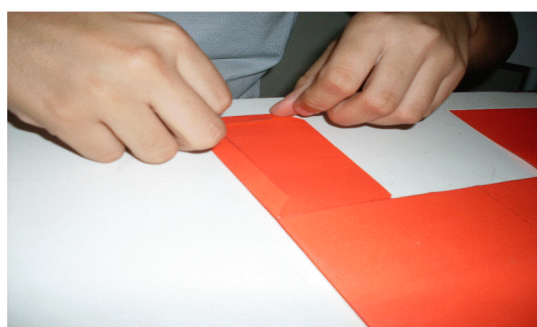
RÊGO, Rômulo Marinho & RÊGO, Rogéria Gaudêncio. **Desenvolvimento e uso de materiais didáticos no ensino de matemática**. In: LORENZATO, Sérgio (org.). O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores. Coleção Formação de Professores. Ed. Autores Associados, Campinas SP, 2006.

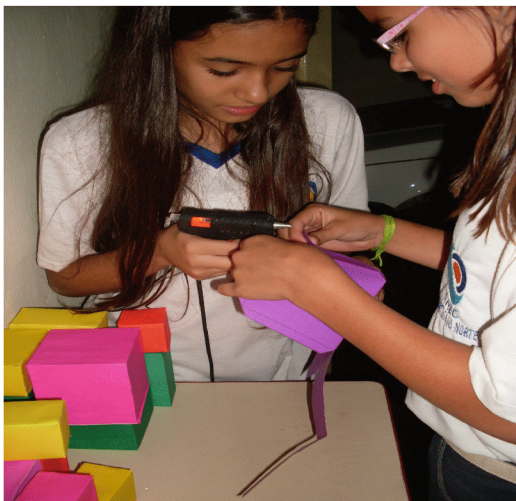
www.br.answers.yahoo.com/question/index?qid...

www.somatematica.com.br/algebra.php

ANEXOS

ALUNAS CONFECCIONANDO O SEU PRÓPRIO MATERIAL MANIPULATIVO





ALUNAS UTILIZANDO O MATERIAL PARA MELHOR ENTENDIMENTO DO ASSUNTO



ALUNAS EXPONDO SEUS NOVOS CONHECIMENTOS NA TURMA DO NONO ANO

