



Universidade Estadual da Paraíba

Campus I

Centro de Ciências e Tecnologias – CCT

Departamento de Física

Graduação em Licenciatura Plena em Física

Cosmologia Newtoniana e Lagrangeana: aplicações e limitações

Leonardo Ribeiro Colaço

Campina Grande – PB

2014

Leonardo Ribeiro Colaço

Cosmologia Newtoniana e Lagrangeana: aplicações e limitações

Monografia Referente à disciplina Trabalho de Conclusão de Curso (TCC), como registro de conclusão de curso, requisito à obtenção do título Licenciatura Plena em Física pela Universidade Estadual da Paraíba.

Orientador: Rodrigo Fernandes Lira de Holanda

UEPB

Campina Grande – PB

Julho – 2014

É expressamente proibida a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano da dissertação.

C683c Colaço, Leonardo Ribeiro.
Cosmologia Newtoniana e Lagrangeana [manuscrito] :
limitações e aplicações / Leonardo Ribeiro Colaço. - 2014.
59 p. : il. color.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Física) -
Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e
Tecnologia, 2014.
"Orientação: Prof. Dr. Rodrigo Fernandes Lira de Holanda,
Departamento de Física".

1. Cosmologia Newtoniana. 2. Potencial Lagrangeano. 3.
Modelos cosmológicos. I. Título.

21. ed. CDD 523.1

Leonardo Ribeiro Colaço

Cosmologia Newtoniana e Lagrangeana: aplicações e limitações

Monografia Referente à disciplina Trabalho de Conclusão de Curso (TCC), como registro de conclusão de curso, requisito à obtenção do título Licenciatura Plena em Física pela Universidade Estadual da Paraíba.

Aprovado em 18/07/14

Rodrigo Fernandez Lira de Holanda

Professor Dr. Rodrigo Fernandez Lira de Holanda

Orientador

Camilla dos Santos Rodrigues Leite

Professora Mestre Camila dos Santos Rodrigues Leite

Examinador

Elialdo Andriola Machado

Professor Dr. Elialdo Andriola Machado

Examinador

À minha família e amigos.

[...] Não existe lutas e vitórias, sem dor.

Jacob Hemphill

Agradecimentos

Ao Senhor Deus por tudo que Ele me proporcionou para conseguir realizar um sonho de vida.

Aos meus pais Leonardo Colaço e Elza Ribeiro por me incentivarem e me ajudarem a concretizar essa realização.

Aos meus irmãos(ãs): Alexandre, Gerlana, Germana, Gitana e Rosa Colaço pelo carinho e incentivo.

Aos meus amigos “faxas” Djayr Bispo, Pedro Arthur e Welligton Raphael por todo apoio, incentivo e companheirismo durante toda a jornada do meu curso e vida.

Aos meus amigos Adrian Dinoá, Aurélia Lunguinho, Caio Everton, Daniel França, Dayane Rodrigues, Deborah Castro, Elder Renê, Emília Lima, Francielly Araújo, Henistay Frasão, Jaqueline Venâncio, Jéssica Gomes, Karol Moraes, Kleiton Oliveira, Larissa Venâncio, Manoel Junior, Marcelo Eduardo, Mariana Ramos, Méridge Ariens, Samuel Robson, Rayana Franklin, Rejane Alves, Renata Neilutes e Walter Cavalcanti por todo apoio e incentivo.

Ao meu orientador Professor Dr. Rodrigo Fernandes Lira de Holanda por todo incentivo, paciência, conselho, amizade, orientação e aprendizado que tive durante esses dois últimos anos de experiência, o que proporcionou uma boa amizade.

Aos meus professores do departamento de Física da UEPB que me proporcionaram conhecimento, maturidade e profissionalismo, e aos meus professores do Ensino Médio que me inspiraram a esse curso.

A minha Psicóloga Jailma Tavares pelo excelente trabalho profissional a qual me ajudou a encarar os problemas e pelo incentivo para terminar meu trabalho.

Ao ilustre Albert Einstein o qual foi o principal motivo inspirador ao me inserir e incentivar na carreira científica na referida área de estudo, junto a toda teoria desencadeada e desenvolvida graças aos seus estudos.

A UEPB/CNPq pela bolsa concedida.

A todos que me incentivaram a essa jornada magnífica.

Resumo

A Cosmologia é a ciência que estuda a dinâmica do Universo em grandes escalas. Em vista disso, o principal objetivo da cosmologia é elaborar um modelo padrão que explique e prediga todos os fenômenos astronômicos que ocorrem em nosso Universo. Do ponto de vista teórico, a cosmologia moderna tem seu embasamento na teoria da relatividade geral (TRG), de forma que é frequentemente associada à complexidade matemática inerente a geometria *Riemanniana*, isto é, álgebra tensorial, variedades diferenciáveis, grupos contínuos de simetria, etc. Neste trabalho de conclusão de curso tem-se como objetivo revisar os modelos cosmológicos surgidos após a publicação da TRG: Modelo de Milne e McCrea, os quais obtiveram as equações dinâmicas, em 1934, para um Universo sem pressão, utilizando a hidrodinâmica clássica; e o modelo de McCrea que, em 1951, utilizando métodos clássicos junto a dois conceitos relativísticos obtiveram análogos semi-clássicos para um Universo com pressão não nula. Por fim, investigamos como uma descrição Lagrangeana clássica, ou tipo-partícula, pode ser usada para obter análogos clássicos para modelos cosmológicos relativísticos com e sem pressão.

Palavras-chave: Cosmologia Newtoniana; Potencial Lagrangeano; Modelos Cosmológicos.

Abstract

Cosmology is the science that studies the dynamics of the universe on large scales. In view of this, the main objective of cosmology is to develop a standard model to explain and predict all astronomical phenomena occurring in our Universe. From the theoretical point of view, modern cosmology has its foundation in the theory of general relativity (TRG), so that is often associated with the inherent mathematical complexity Riemannian geometry, namely, tensor algebra, differentiable varieties, continuous symmetry groups, etc. . In this work of completion course we have as objective, reviewing the cosmological models emerged after publication of TRG: Model Milne and McCrea, who obtained the dynamical equations, in 1934, for a Universe without pressure, using classical hydrodynamics; and the model that McCrea in 1951, using classical methods with two relativistic concepts obtained similar semi-classics for a universe with non-zero pressure. Finally, we investigate how a classical Lagrangian description, or particle-type, can be used to obtain analogues to classical relativistic cosmological models with and without pressure.

KEYWORDS: Newtonian cosmology; Potential Lagrangian; Cosmological Models.

Lista de Figuras

- 1.1 Princípio da equivalência mostrando que não há experimento local que o observador consiga discernir se o mesmo se encontra em um campo gravitacional ou se está sendo acelerada, principal base da Teoria da Relatividade Geral de Albert Einstein. Sendo assim, ao imaginarmos dentro de uma caixa fechada, no caso o elevador, não podemos dizer se estamos em repouso num campo gravitacional terrestre ou se estamos sendo acelerados por um foguete no espaço livre.
- 1.2 Movimento de um satélite em torno da Terra, localmente curvo. Einstein imaginou que o espaço-tempo era curvo e qualquer agente externo que tendesse a se deslocar numa trajetória retilínea, elas seriam obrigadas a seguir a curvatura do espaço-tempo sobre o qual se movem.
- 1.3 Representação do espectro de galáxias de acordo com o respectivo *redshift*, com velocidade 0,07 da velocidade da luz.
- 1.4 Uma relação entre distância e velocidade radial entre nebulosas extragalácticas. Procedimento da Academia Nacional de Ciências, 1929, 15 (3), 168-173.
- 1.5 A lei de Hubble e as velocidades de dois observadores relativos a um observador A. A Lei de Hubble é a única lei de expansão compatível com a homogeneidade e isotropia.
- 1.6 Fator de escala em função do tempo para um Universo apenas preenchido por matéria para um espaço plano ($k = 0$), fechado ($k = +1$) e hiperbólico ($k = -1$). Os modelos que partem de $t = 0$ e $a = 0$, ou seja, no instante inicial, do modelo chamado de *Big Bang*, corresponde ao próprio surgimento do espaço-tempo. Para os modelos aberto e hiperbólico, vemos que eles se expandem ao infinito. Já o modelo fechado possui um tamanho máximo, a partir do qual passa a colapsar até atingir novamente quando $a = 0$, instante chamado de *Big Crunch*.
- 1.7 Composição do Universo segundo as observações com *Supernovas*. 0,03% de elementos pesados; 0,3% de neutrinos; 0,5% de estrelas; 4% de hidrogênio e hélio livres; 25% de matéria escura; 70% de energia escura.
- 1.8 Curva de rotação da galáxia Andrômeda observada e a constatação da possível inclusão da matéria escura, através da relação da velocidade de rotação com a distância até o centro da galáxia.
- 1.9 Anisotropias da CMB medida pelo *WMAP*.
- 1.10 Genealogia da energia escura segundo os dados observacionais obtidos, com parâmetro de desaceleração negativo, parâmetro de matéria escura indicando a presença de 30% da composição do Universo e assim por diante.
- 2.1 Corpo extenso de massa m contida no volume V , sobre a qual as linhas de campo estão saindo do corpo, nunca se cruzam e expressam a lei da gravitação Universal de Newton.

2.2 Esfera de massa distribuída uniformemente. Cinemática da nuvem do gás cosmológico com o movimento das partículas sendo restritamente radial.

3.1 Comportamento do potencial V para diferentes valores de Ω_{0i} . Identificando também $x_0/x = 1 + z$, observa-se o comportamento do potencial para diferentes valores de Ω_{0i} .

Lista de Tabela

Tabela 1.1 historia térmica do Universo	31
Tabela 3.1 Relação entre a $\gamma - lei$ e o potencial Homogêneo	49

Sumário

Introdução	12
Capítulo 1:	15
Cosmologia Relativística:	15
1.1 Introdução	15
1.2 Modelo Padrão da Cosmologia	16
1.2.1 Teoria da Relatividade Geral	16
1.2.2 A Lei de Hubble	18
1.2.3 Princípio Cosmológico	20
1.2.4 Tensor energia-momento	21
1.2.5 A Dinâmica	22
1.2.6 Observáveis da Cosmologia	25
• <i>Redshifts</i>	25
• Distancia-Luminosidade	26
• Supernovas tipo Ia	28
1.2.7 Matéria Escura Fria	28
1.2.8 Aceleração do Universo e a Energia Escura	29
1.2.9 Constante Cosmológica	30
1.2.10 Nucleossíntese Primordial	31
1.2.11 Radiação Cósmica de Fundo	32
1.2.12 Conclusões	33
Capítulo 2:	35
Cosmologia Newtoniana:	35
2.1 Introdução	35
2.2 Equação de Poisson	35
2.2.1 Limitações da Cosmologia Newtoniana	38
2.3 Modelos do tipo FRW sem pressão ($P = 0$)	39
2.4 Modelos do tipo FRW com pressão ($P \neq 0$)	43
2.5 Conclusões	44
Capítulo 3:	45
Formulação Lagrangeana para modelos do tipo FRW com mistura	45
de fluidos.	
3.1 Introdução	45
3.2 Mecânica Lagrangeana	45

3.2.1 Princípio da Ação Mínima	46
3.2.2 Equação de Euler-Lagrange	46
3.3 Formulação Lagrangeana para Modelos do tipo FRW com	47
Mistura de Fluidos	
3.3.1 Metodologia e Discussões	48
3.3.2 Matéria X + Matéria Escura (CDM):	49
Considerações Finais	53
Referencias Bibliográficas	55

Introdução

O objetivo principal da cosmologia é criar uma teoria simples que explique e prediga todos os fenômenos que regem o Universo, ou seja, elaborar uma teoria simples e fácil para poder explicar toda a dinâmica Cósmica (Busti, 2013). O primeiro modelo cosmológico na era moderna só foi possível com o advento da teoria da relatividade geral, uma vez que Einstein mostrou que a equação de Poisson não é um perfeito substituto para a lei de gravitação da ação à distância e que também apresentava dificuldades ao ser utilizadas para criar modelos cosmológicos. Assim, em 1915, coube a Einstein buscar uma nova teoria que pudesse explicar os fenômenos gravitacionais sem infringir o eletromagnetismo nem a relatividade restrita. Tal teoria fundamental da gravitação é a Teoria da Relatividade Geral, formulada por Einstein, onde a equação de campo de Einstein é a equação fundamental, que recai na equação de Poisson para limites de campo gravitacionais fracos (Busti, 2013), para isso teve que adotar que o Universo era Isotrópico e homogêneo em grandes escalas.

Em 1917, Einstein propôs o primeiro modelo cosmológico baseado em sua teoria da gravitação: modelo estático, finito e com curvatura positiva. Entretanto, verificou-se um problema de estabilidade. Assim, foi incluída na sua teoria uma chamada *constante cosmológica* (Λ), a qual atuaria junto à força gravitacional de forma a equilibrar as forças, garantindo a estabilidade. Com a descoberta da expansão do Universo por Edwin Hubble em 1929 ao estudar o espectro de nebulosas, levou Einstein à declarar que essa inserção da constante cosmológica foi o pior erro da sua vida (Weinberg, 1972). Em 1922 e 1927, A. Friedmann e G. Lemaître, respectivamente, utilizaram as equações de campo de Einstein para descrever como um universo espacialmente homogêneo e isotrópico, expande ou contrai em função do tempo.

Hoje, a teoria mais aceita para explicar a origem e evolução do Universo é a Teoria do *Big Bang*, a qual permite explicar os fenômenos que aconteceram desde frações de segundo de vida do Universo até o presente momento, cenário onde o Universo se expande adiabaticamente a partir de um estado inicial extremamente quente e denso, com bastantes fótons e partículas sendo aniquiladas e criadas a todo instante. Com a Teoria do *Big Bang* descrevendo a evolução do Universo desde as suas primeiras frações de segundo de existência até o nosso estágio presente, podemos estudar e entender o Universo. Resumidamente a Teoria do *Big Bang* é defendida e sustentada sobre quatro pilares: A Teoria da Relatividade Geral; A descoberta de Edwin Hubble em 1929 da expansão do Universo; Nucleossíntese primordial (Alpher, Bethe e Gamow, 1948) e a Radiação cósmica de fundo (CMB) (Penzias e Wilson, 1965; Spergel *et al.*, 2003).

Diante dessa discussão, podemos dizer que a cosmologia moderna é fundamentada sobre o contexto da TRG, teoria de gravitação formulada em uma geometria *Riemanniana* quadri-dimensional espaço-temporal, associada à complexidade matemática presente a geometria *Riemanniana*, isto é, álgebra tensorial, variedades diferenciáveis, grupos contínuos de simetria, etc. Entretanto, Milne (1934) e Milne & McCrea (1934), 17 anos após o trabalho inicial da cosmologia relativística feito por Einstein, demonstraram que as equações cosmológicas não perturbadas para modelos sem pressão (só matéria) poderiam ser obtidas utilizando as noções de tempo absoluto, gravitação newtoniana, hidrodinâmica clássica e o espaço Euclidiano, fato conhecido como Cosmologia Newtoniana. O fenômeno da expansão universal, analisada por meio da expansão do espaço na cosmologia relativística, é substituído pelo movimento de um fluido auto gravitante num espaço euclidiano e estático.

Com o objetivo de estender a abordagem clássica para modelos com pressão, McCrea em 1951 e, posteriormente, Harrison em 1965, adotaram dois conceitos relativísticos na hidrodinâmica clássica: a equivalência de massa e energia e a redefinição de massa de um sistema, fato conhecido como Cosmologia Neo-Newtoniana. A necessidade de se misturar conceitos clássicos com conceitos relativísticos para se obter análogos semi-clássicos de modelos cosmológicos relativísticos é simples: uma pressão não-nula e uniforme não desempenha qualquer papel dinâmico na equação de Poisson ou nas equações da hidrodinâmica clássica.

Por outro lado, para contornar as limitações da abordagem baseada na hidrodinâmica clássica, Lima *et al.*, em 1998, propuseram uma descrição Lagrangeana para modelos relativísticos com fluidos simples (apenas uma componente) com e sem pressão. Eles mostraram que o comportamento dinâmico do fator de escala $a(t)$ é equivalente ao de uma partícula sob a ação de um potencial homogêneo $V(q) = \alpha q^n$, onde α e n são constantes e q é a coordenada generalizada unidimensional da partícula, que desempenha o "papel" do fator de escala. Neste cenário, a equação dinâmica de $a(t)$, para cada valor da pressão, pode ser associada com o índice " n " presente no potencial. A generalização do formalismo lagrangeano para misturas de fluidos foi proposto Holanda *et al.* em 2007

O presente trabalho tem por objetivo revisar os análogos clássicos de cosmologias relativísticas baseados nas abordagens da hidrodinâmica e Lagrangeana clássicas. O presente trabalho também tem por objetivo adquirir conhecimentos mais gerais sobre a cosmologia, com interesses profissionais e educacionais. Pra tal fim, o trabalho foi dividido e apresentado da seguinte sequência.

O Capítulo 1 será feito uma revisão da cosmologia relativística padrão, mostrando todos os fatos observacionais e teóricos que consolidam a teoria, suas quantidades físicas e os possíveis resultados dinâmicos. Ainda nesse capítulo, é revisada a parte do problema da matéria escura, como um possível integrante da energia escura, concretizando em um Universo Homogêneo e Isotrópico.

O capítulo 2 é subdividido em duas partes: Cosmologia newtoniana, mostrando as possíveis hipóteses onde essa teoria pode ser construída e defendida através do auxílio da Hidrodinâmica clássica; e Cosmologia Neo-newtoniana, mostrando também as hipóteses básicas por onde a temática pode ser construída, através da hidrodinâmica clássica junto a dois conceitos relativísticos. O objetivo desse capítulo é mostrar que as soluções da equação de campo de Einstein podem ser obtidas através de métodos clássicos junto a poucos conceitos relativísticos.

Por fim, no capítulo 3 discutiremos como os análogos da mecânica Lagrangeana podem ser obtidos para modelos cosmológicos mais realistas, isto é, contendo matéria escura e energia escura.

Capítulo 1.

Cosmologia Relativística

1.1 Introdução

O principal objetivo da cosmologia é elaborar um modelo padrão que explique e prediga todos os fenômenos astronômicos que acontecem em nosso Universo. Com tal objetivo em mente, diversos estudos estão sendo realizados em busca de compreender qual deverá ser a possível dinâmica que rege todo os cosmos. Por enquanto, o que sabemos é que o Universo é um grande laboratório onde cerca de 95% de toda a sua constituição é puramente desconhecida.

Em 1915, Albert Einstein elaborou uma teoria que unificou os efeitos gravitacionais com o mundo relativístico sem alterar o caráter do eletromagnetismo, fato conhecido como a Teoria da Relatividade Geral (TRG), onde a geometria do espaço-tempo se distorce devido à presença da matéria-energia (Einstein, 1917). Utilizando sua teoria gravitacional, Einstein elaborou um modelo cosmológico para tentar descrever os fenômenos que acontecem no Universo. Para Einstein, o Universo era espacialmente homogêneo, isotrópico, finito e estático. Para assegurar a estabilidade no seu modelo estático, ele inseriu o termo conhecido por constante cosmológica.

Em 1929, o Astrônomo Edwin Hubble mostrou que o Universo se encontra em expansão através de estudos de *redshifts* em galáxias próximas (Hubble, 1929). Essa descoberta fez com que a Teoria de Einstein a respeito de um Universo estático fosse desconsiderada, ou seja, a ideia de inclusão de uma constante cosmológica que justifica o estado estacionário do Universo estava equivocada. Essa descoberta fez com que Einstein declarasse que pensar em um Universo estático foi o pior erro da sua vida. De certa forma, Einstein não estava errado, pois estudos posteriores constataram que inserir uma constante cosmológica na TRG aliviaria o problema da idade do universo encontrada no modelo só com matéria proposta por ele e de Sitter em 1932 (Einstein e de Sitter, 1932).

Atualmente, o cenário cosmológico do Universo mais aceito é o modelo de Concordância Cósmica ou Λ CDM, com Λ sendo a constante cosmológica e CDM é a Matéria Escura Fria. Essa composição corresponde cerca de 95% da composição do Universo, atualmente desconhecidas. Os outros 5% da composição do Universo são de componentes conhecidas pelo homem (Riess *et al.*, 1998; Perlmutter, 1998).

O presente capítulo 1 mostrará uma revisão nos conceitos de cosmologia relativística associados ao atual cenário cósmico conhecido como modelo do *Big Bang*.

1.2 Modelo padrão da cosmologia

O nosso entendimento a respeito do Universo se baseia na Teoria do *Big Bang* (TBB), cenário onde o Universo se expande adiabaticamente a partir de um estado inicial extremamente quente e denso. Com a Teoria do *Big Bang* descrevendo a evolução do Universo desde as suas primeiras frações de segundo de existência até o nosso estágio presente, podemos estudar e entender o Universo. Resumidamente, a Teoria do *Big Bang* é defendida e sustentada sobre quatro pilares: a teoria da reatividade geral; a descoberta de Edwin Hubble em 1929 da expansão do Universo; A nucleossíntese primordial (Alpher, Bethe e Gamow, 1948) e a radiação cósmica de fundo (CMB) (Penzias e Wilson, 1965; Spergel *et al.*, 2003). No que segue, vamos discutir sobre estes quatro pilares.

1.2.1 Teoria da Relatividade Geral

Existem quatro tipos de força na natureza: a força forte, fraca, eletromagnética e a gravitação. Porém, a única força que age no nosso Universo entre corpos separados por grandes distâncias é a força Gravitacional, uma vez que as estruturas astronômicas não estão eletricamente carregadas e as forças forte e fraca só atuam em nível atômico. Entretanto, a teoria da relatividade restrita de Albert Einstein estava de acordo com a teoria do eletromagnetismo de Maxwell, porém, sua teoria não estava compatível com a teoria gravitacional de Newton. Para poder estudar interações de efeitos gravitacionais, foi elaborada uma teoria que pudesse explicar fenômenos gravitacionais em um mundo relativístico.

A teoria mais aceita é a teoria da relatividade geral, proposta por Albert Einstein em 1915, o qual estendeu o seu princípio de relatividade para referenciais em um campo gravitacional, envolvendo espaço, tempo e gravidade. As concepções de espaço e tempo mudam, pois segundo Einstein o espaço-tempo é distorcido pela presença de energia-matéria. Um dos maiores *insights* da TRG é chamado de *princípio da equivalência*, o qual afirma que sistemas acelerados e sistemas sob a ação de um campo gravitacional são equivalentes. Por causa disso, para um observador típico, não existe experimento local que permita ao observador discernir se o próprio experimento é realizado em uma região que sofre interações gravitacionais ou se é um referencial acelerado (Einstein, 1917).

Assim, se imaginarmos-nos dentro de uma caixa fechada, por exemplo, num elevador, não podemos dizer se estamos em repouso num campo gravitacional terrestre ou se estamos sendo acelerados por um foguete no espaço livre, como mostra a seguinte figura (Lima, 2013):

ACELERAÇÃO UNIFORME SIMULA A GRAVIDADE

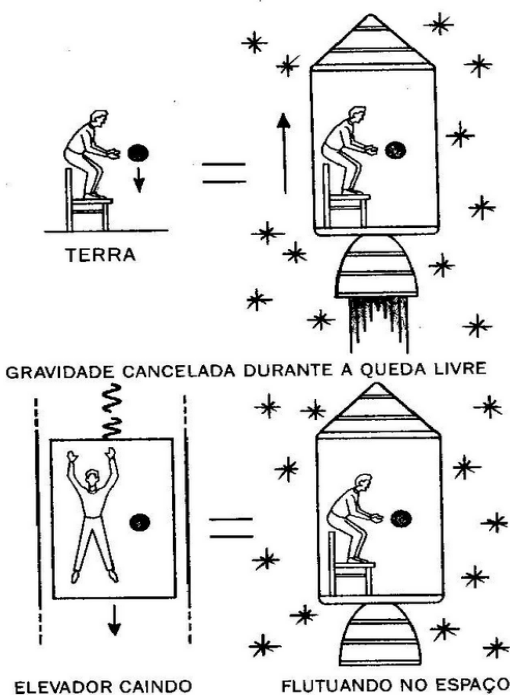


Figura 1.1: princípio da equivalência nos mostra que não há experimento local que o observador consiga discernir se o mesmo se encontra em um campo gravitacional ou se está sendo acelerado. Lima, 2013.

Einstein imaginou que se o espaço-tempo fosse curvo (Ver figura abaixo) então por mais que as partículas livres da ação de qualquer agente externo tendessem a se deslocar numa trajetória retilínea, elas seriam obrigadas a seguir a curvatura do espaço-tempo sobre o qual se movem, dando origem aos diversos tipos de movimento que se pode ter num campo gravitacional.

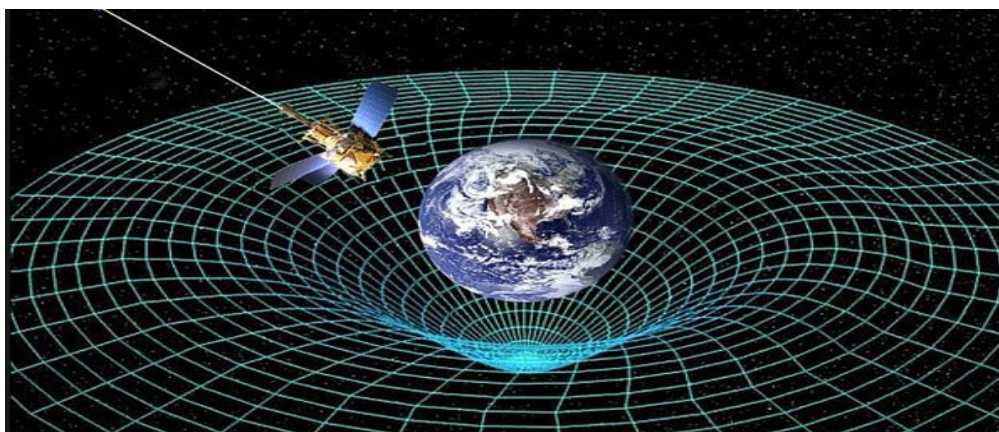


Figura 1.2: Movimento de um satélite em torno da Terra, localmente curvo. Suiseiseki, 2008.

Como falado anteriormente, na TRG a geometria do espaço-tempo é curva. Podemos escrever o elemento de linha em tal geometria em forma tensorial (Weinberg, 1972) como:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad [1.1]$$

onde $g_{\mu\nu}$ é a métrica que representa um espaço-tempo. Na teoria da relatividade especial a geometria é plana ou *Minkowski* e $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1)$.

Apesar de todo esse avanço teórico, Einstein passou cerca de dez anos buscando por equações de campo que lhe permitisse descrever o espaço-tempo na presença de matéria. Segundo a teoria da relatividade geral, matéria-energia e curvatura estão relacionadas pela equação de campo de Einstein (Weinberg, 1972):

$$G_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \Lambda g_{\mu\nu} = \chi T_{\mu\nu}, \quad [1.2]$$

onde $G_{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein, $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento e $\chi = \frac{8\pi G}{c^4}$ é a constante de Einstein, encontrada quando se toma o limite de campos fracos a baixas velocidades (Landau e Lifshitz, 1975). É no tensor de energia-momento que devemos considerar todas as fontes de energia e pressão. Essa equação de campo de Einstein (1.2) pode ser escrita em função do tensor de Ricci, ligada as derivadas de $g_{\mu\nu}$, o que está relacionado à geometria do espaço:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}, \quad [1.3]$$

onde R é o escalar de curvatura de Ricci (R^μ_μ).

A consagração desta teoria deu-se em 1919, com a observação, em Sobral, Ceará, e na Ilha do Príncipe, na costa da África, do extraordinário fenômeno do desvio gravitacional da luz, que permitiu a observação de uma estrela que se encontrava atrás do Sol durante um eclipse. Hoje, a teoria explica convincentemente várias outras observações e fenômenos, sendo muito bem testada em nível de sistema solar, nas medidas de movimento radial de *Pulsares Binários*, via nucleossíntese primordial, constituindo o arcabouço teórico da cosmologia moderna (Holanda, 2007).

1.2.2 A lei de Hubble

Os estudos básicos a respeito da nossa galáxia levaram a uma lenta e controvertida convergência para admitir que o Universo do Século XVIII, onde estrelas estavam distribuídas uniformemente, não correspondia com a realidade observada. Teve-se que abandonar o conceito de um Universo Uniforme e visível para admitir que a distribuição de estrelas em torno do

Sistema Solar era muito inhomogêneo e distorcida (Anisotrópica) pela presença de poeira cósmica (Horvath et al., 2007).

Contudo, a descoberta mais marcante do Século XX estava a caminho. Em 1917, uma série de estudos devido a W. de Sitter (de Sitter, 1917) tinham mostrado que os espectros de algumas nebulosas, o mesmo espectro obtido quando difratava a luz sobre um prisma, mostravam posições deslocadas (ver figura 1.3 abaixo). Devido ao avanço dos telescópios, Sitter conseguiu em laboratório identificar esse deslocamento do espectro de nebulosas, a qual tinha um deslocamento para o vermelho, ou seja, para comprimentos de onda maiores (ver figura 1.4 abaixo). Foi identificado por W. de Sitter como o *Efeito Doppler*, chamado *redshifts*, ou simplesmente, desvio para o vermelho. Mais a frente, na parte 1.2.6, descreveremos com mais detalhes o *redshift*.

Com a constatação dos *redshifts*, em 1929 o Astrônomo Edwin Hubble (Hubble, 1929) observou diversas galáxias e verificou que os *redshifts* resultantes eram proporcionais às distâncias estimadas para as galáxias. Com isso, Hubble mostrou pela primeira vez uma correlação entre a velocidade de expansão e a distância às galáxias:

$$v = H_0 x D, \quad [1.4]$$

onde H_0 é a constante de proporcionalidade de Hubble, medida hoje.

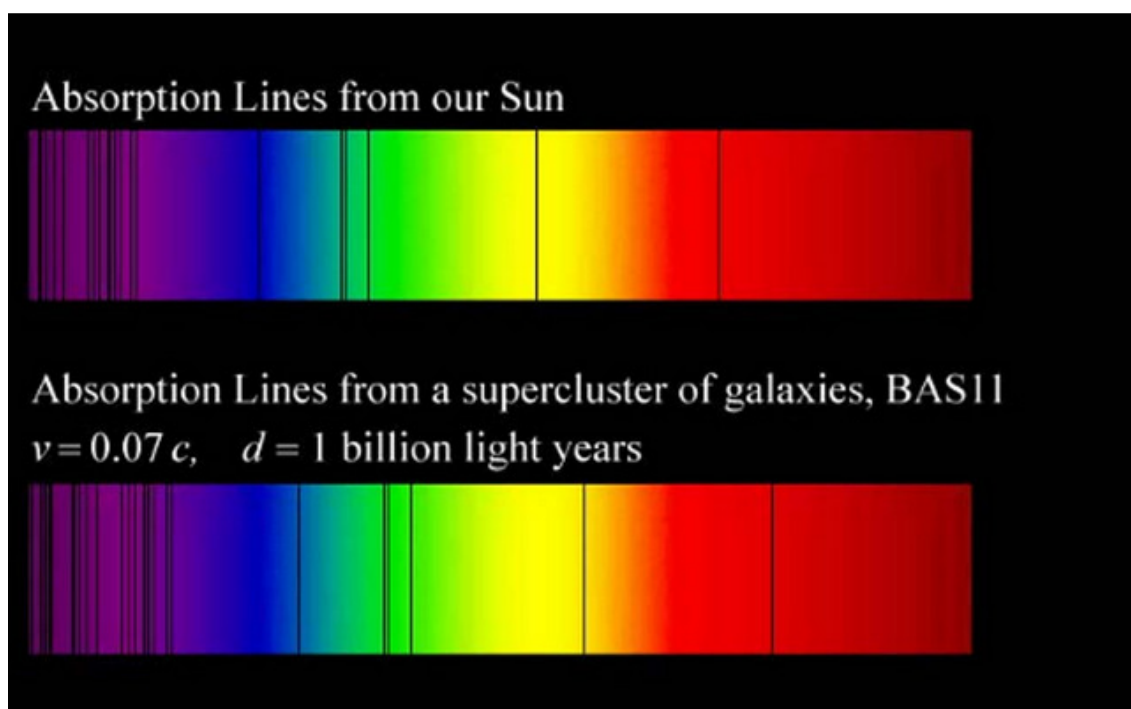


Figura 1.3: Representação do espectro de galáxias de acordo com o respectivo *redshift*, com velocidade 0,07 da velocidade da luz. Antonellis, 2012.

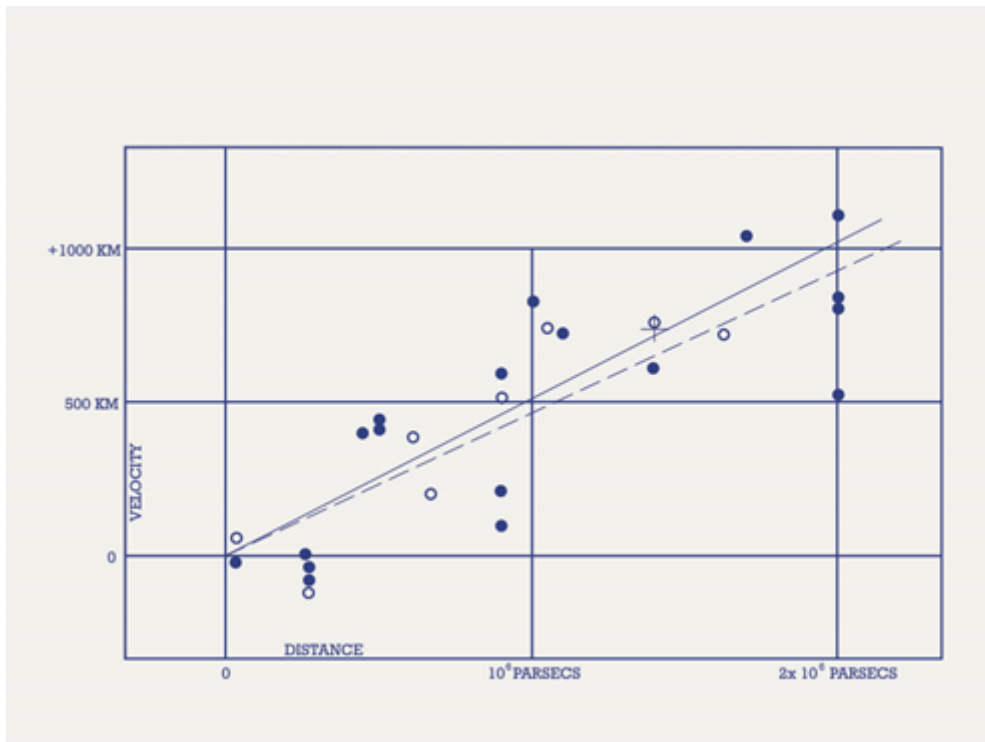


Figura 1.4: Uma relação entre distância e velocidade radial entre nebulosas extragalácticas. Procedimento da Academia Nacional de Ciências, 1929, 15 (3), 168-173.

1.2.3 O princípio de Copérnico ou cosmológico

Até 1917, não se tinha qualquer evidência de que o Universo estaria se expandindo. Por essa razão, Einstein elaborou um modelo baseado na TRG que explicasse a estrutura do Universo em tempo, espaço e gravidade, acreditando que o Universo fosse estático, ou seja, imutável. Porém, Einstein foi o primeiro a afirmar que o Universo era Homogêneo e Isotrópico em grandes escalas. Hoje, estas grandes escalas correspondem àquelas além dos aglomerados de galáxias (100 Mpc ou $3,08 \times 10^{24}$ m). O princípio de Copérnico, ou princípio cosmológico, diz que não ocupamos um local privilegiado no Universo, ou seja, somos referenciais típicos (Einstein, 1917).

Se considerarmos o princípio de Copérnico válido, a métrica utilizada na cosmologia é a de *Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW)* (Robertson, 1936; Walker, 1944), com o elemento linha sendo composto da seguinte forma:

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \left\{ \frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \text{Sen}^2 \theta d\phi^2 \right\}, \quad [1.5]$$

onde r , θ e ϕ são as coordenadas esféricas comóveis, isto é, coordenadas onde o sistema de referência comóvel é válido, observadores que acompanham a expansão ou observadores típicos; $a(t)$ é o fator de escala que mede distâncias físicas no Universo e k é o parâmetro de Curvatura, definindo por:

$$k = \begin{cases} 0, & \text{Universo Plano} \\ -1, & \text{Universo Hiperbólico} \\ +1, & \text{Universo fechado} \end{cases} \quad [1.6]$$

A dinâmica cósmica é determinada através da obtenção do fator de escala $a(t)$. Para tal fim, é preciso dizer qual será o tensor de Energia-Momento para que seja possível resolver as equações de campo de Einstein.

Neste ponto, é interessante discutir como a lei de Hubble (1.4) satisfaz o princípio cosmológico. Consideremos que a lei de Hubble especifica as velocidades de dois observadores relativos a um observador A (ver figura 1.5 abaixo), ou seja,

$$\vec{v}_{B(A)} = H(t)\vec{r}_{BA} \quad \text{e} \quad \vec{v}_{C(A)} = H(t)\vec{r}_{CA}, \quad [1.7]$$

e destas relações, nós podemos verificar que a velocidade do observador C com respeito ao observador B é

$$\vec{v}_{C(B)} = \vec{v}_{C(A)} - \vec{v}_{B(A)} = H(t)(\vec{r}_{CA} - \vec{r}_{BA}) = H(t)\vec{r}_{CB}. \quad [1.8]$$

O resultado é que o observador B ver precisamente a mesma lei de expansão que o observador A. Na verdade, a lei de Hubble é a única lei de expansão compatível com a homogeneidade e isotropia (Mukhanov, 2005).

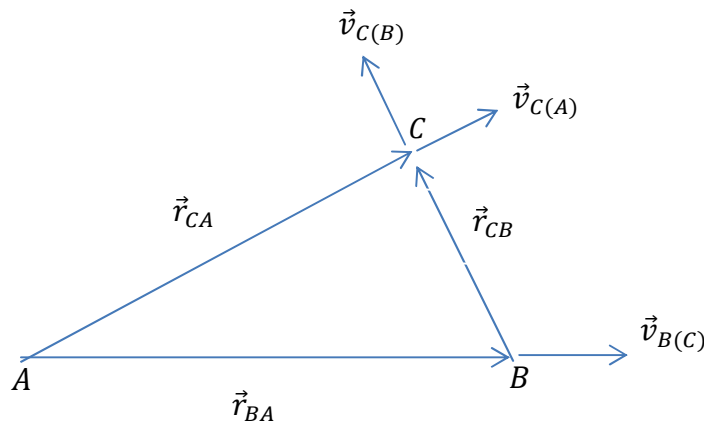


Figura 1.5: A lei de Hubble e as velocidades de dois observadores relativos a um observador A.

1.2.4 Tensor Energia-Momento

Como visto anteriormente, é no tensor de Energia-Momento ($T_{\mu\nu}$) que se deve inserir todas as componentes do Universo, como matéria, vácuo e radiação. Pode-se supor que tais componentes podem se aproximar de um fluido perfeito (Fluido sem viscosidade, sem tensão de cisalhamento e não conduz calor, representado algebricamente por $T^{i0} = T^{0i} = 0$) (Schutz, 1985).

Se não há condução de calor nem viscosidade, só há fluxo de energia se houver fluxo de partículas. Como o número de partículas é conservado na evolução, a expansão é do tipo adiabático.

Se transformarmos as coordenadas de um referencial comóvel para um referencial que se move com velocidade \vec{v} , obtemos o tensor de energia-momento para um fluido perfeito de uma forma geral (Weinberg, 1972):

$$T_{\mu\nu} = (p + \rho)u_{\mu}u_{\nu} + pg_{\mu\nu}, \quad [1.9]$$

onde $u^{\mu} = \delta_0^{\mu}$ é o tensor quadrivelocidade dos elementos comóveis na métrica *FLRW*, p é a pressão, ρ é a densidade de matéria, $g_{\mu\nu}$ é o tensor que indica a métrica do espaço-tempo e u_{μ} e u_{ν} são os vetores covariantes.

1.2.5 A Dinâmica Cósmica

Ao adicionar as hipóteses de um fluido perfeito nas equações de campo de Einstein e utilizando a geometria *FLRW* para um Universo Homogêneo e Isotrópico, podemos assim obter as equações que regem a dinâmica cósmica do Universo:

$$\begin{cases} 3\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 3\frac{k}{a^2} = 8\pi G\rho + \Lambda \\ -2\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{k}{a^2} = 8\pi Gp - \Lambda' \end{cases} \quad [1.10; 1.11]$$

as quais são as equações de Friedmann-Lemaître com quatro incógnitas p, ρ, k e a . São as soluções da equação de Campo de Einstein, onde os pontos são derivadas temporais.

Para poder fechar o sistema, deve-se especificar a equação de estado do fluido em questão e a sua curvatura. As maiorias dos fluidos de interesse cosmológico podem ser descritos pela equação de estado $P = w\rho$, com w sendo uma constante. Ao manusear com as equações (1.10) e (1.11), pode-se obter:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0. \quad [1.12]$$

A equação (1.12) é chamada de Equação da Continuidade para fluidos perfeitos. Ela representa a conservação de energia. Ao substituir na equação da continuidade a equação de estado $P = w\rho$, teremos:

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^{3(w+1)}, \quad [1.13]$$

onde a_0 é o fator de escala hoje, assim como ρ_0 é a densidade medida hoje.

No modelo padrão temos como componentes principais: matéria, bariônica e escura, radiação e a constante cosmológica. A matéria é tratada como poeira, com pressão nula, não relativística. Logo sua equação de estado torna-se, devido à $w = 0$:

$$\rho_m = \rho_{m_0} \left(\frac{a_0}{a} \right)^3, \quad [1.14]$$

com ρ_{m_0} sendo a densidade de energia para matéria medida hoje.

Sabemos que o volume é proporcional a $a(t)^3$ e a densidade de energia da matéria é inversamente proporcional ao volume. Com isso, no caso para radiação, a equação de estado é $P = \frac{1}{3}\rho$ ($w = 1/3$). Ao substituir na equação (1.13), temos:

$$\rho_r = \rho_{r_0} \left(\frac{a_0}{a} \right)^4, \quad [1.15]$$

onde ρ_{r_0} é a densidade de energia da radiação medida hoje. Além de se diluir com o volume, também ocorre perda de energia devido ao “estiramento” dos comprimentos de onda junto com a expansão, daí a densidade cai com $a(t)^4$ (Lima e Alcaniz, 2004).

A constante cosmológica é interpretada como sendo um fluido cosmológico com equação de estado $P = -\rho$ (Zel’dovich, 1968). Ao substituir a equação de estado na equação (1.13), tem-se:

$$\rho_{\Lambda 0} = \rho_{\Lambda} = \frac{\Lambda}{8\pi G}, \quad [1.16]$$

ou seja, a densidade de energia da constante cosmológica permanece constante durante toda a expansão.

Assim, se soubermos como a densidade de energia varia com o fator de escala, saberemos interpretar os modelos cosmológicos. Para tal fim, precisamos definir algumas grandezas importantes para que possam ajudar nas interpretações do Universo. O primeiro é o parâmetro de Hubble em função do fator de escala:

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}, \quad [1.17]$$

onde seu valor medido hoje é conhecido como constante de Hubble H_0 . Em segundo, a densidade crítica, definido por:

$$\rho_{cr}(t) = \frac{3}{8} \frac{H(t)^2}{\pi G}. \quad [1.18]$$

Por fim, o parâmetro de densidade da componente i é definido por:

$$\Omega_i(t) = \frac{\rho_i(t)}{\rho_{cr}(t)}. \quad [1.19]$$

Ao utilizarmos as três definições acima e substituí-las na primeira equação de Friedmann (1.10), teremos:

$$H(t)^2 = H_0^2 \left[\Omega_m \left(\frac{a_0}{a(t)} \right)^3 + \Omega_r \left(\frac{a_0}{a(t)} \right)^4 + \Omega_\Lambda + \Omega_k \left(\frac{a_0}{a(t)} \right)^2 \right], [1.20]$$

com $\Omega_k = -\frac{k}{a_0^2 H_0^2}$. É definido por parâmetro de densidade de curvatura, medido hoje.

Ao analisarmos a equação (1.20), podemos ver qual é o termo predominante durante a expansão em cada fase do Universo. Para valores pequenos do fator de escala $a(t)$, a radiação é o termo dominante e o universo passa por uma fase conhecida por a era da radiação. Posteriormente, o termo de matéria passa a ser o principal fator dominante, logo, teremos a era da matéria. Seguem-se a essas fases a era da curvatura e da constante cosmológica, até a presente fase do universo.

Ao adotar os valores para a equação acima em $t = t_0$, ou seja, hoje, obtemos o seguinte vínculo entre os parâmetros:

$$\Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda + \Omega_k = 1. [1.21]$$

Ao Consideremos agora a soma das densidades de energia por $\rho_T = \rho_r + \rho_m + \rho_\Lambda$ o parâmetro de densidade correspondente é:

$$\Omega_T = \frac{\rho_T}{\rho_{cr}}. [1.22]$$

Portanto, podemos concluir que:

$$\begin{cases} \Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda + \Omega_k = 1 & \text{Universo Plano} \\ \Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda + \Omega_k > 1 & \text{Universo Fechado.} \\ \Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda + \Omega_k < 1 & \text{Universo Hiperbolico} \end{cases} [1.23]$$

Logo, todos os modelos que partem de $t = 0$ e $a = 0$, ou seja, no instante inicial, do modelo *Big Bang*, corresponde ao próprio surgimento do espaço-tempo. Para os modelos aberto e hiperbólico, vemos que eles se expandem ao infinito. Já o modelo fechado possui um tamanho máximo, a partir do qual passa a colapsar até atingir as condições iniciais novamente quando $a = 0$, instante chamado de *Big Crunch* (Ver figura 1.6 a seguir).

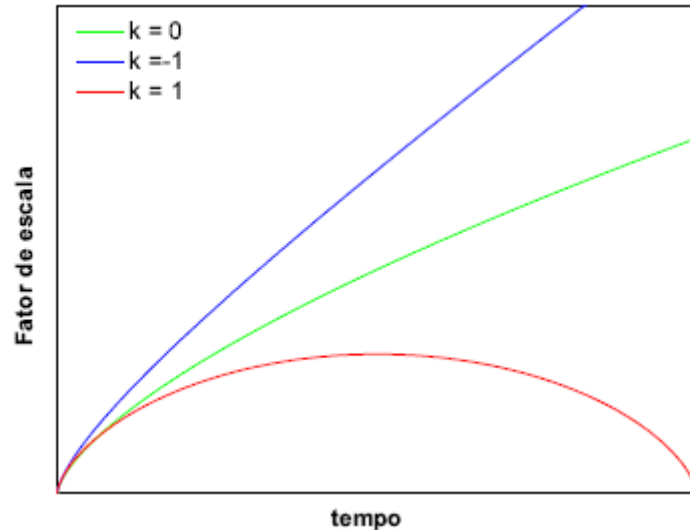


Figura 1.6: Fator de escala em função do tempo para um Universo apenas preenchido por matéria para um espaço plano ($k = 0$), fechado ($k = +1$) e hiperbólico ($k = -1$). (Busti, 2013)

1.2.6 Observáveis da Cosmologia

A seguir, iremos definir alguns parâmetros que podemos observar na cosmologia e apresentar resultados atuais das observações. Seguimos com *redshifts*, Supernovas tipo Ia e Distancia-Luminosidade.

- **Redshifts**

É um parâmetro muito importante na cosmologia, pois o próprio permite determinar a razão entre o fator de escala entre dois instantes distintos. Ao considerarmos um feixe de luz que se propaga até nós na direção $-r$, com θ e \varnothing constantes, a equação de movimento é uma geodésica nula, tomando a forma (Busti, 2013):

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \frac{dr^2}{1-kr^2} \equiv 0. \quad [1.24]$$

Considerando que o raio saiu de uma fonte em t_1, r_1, θ_1 e \varnothing_1 , ele nos atingira no tempo t_0 dado por:

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = f(r_1), \quad [1.25]$$

onde

$$f(r_1) = \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}}. \quad [1.26]$$

Suponha também que a próxima crista de onda será emitida em $t_1 + \delta t_1$ e seja recebido em $t_0 + \delta t_0$. Logo, a equação de movimento torna-se:

$$\int_{t_1+\delta t_1}^{t_0+\delta t_0} \frac{dt}{a(t)} = f(r_1). \quad [1.27]$$

Logo, ao subtrair a equação (1.27) da (1.26), notando também que o fator de escala varia pouco entre o tempo típico de emissão entre duas cristas, teremos:

$$\frac{\delta t_0}{a(t_0)} = \frac{\delta t_1}{a(t_1)}. \quad [1.28]$$

Podemos concluir que, a frequência observada hoje está relacionada à frequência emitida pelo inverso da razão entre as diferenças de tempo, o que implica:

$$\frac{\nu_0}{\nu_1} = \frac{a(t_1)}{a(t_0)}. \quad [1.29]$$

Definindo o parâmetro de *redshift* por:

$$z = \frac{\lambda_1 - \lambda_0}{\lambda_1}, \quad [1.30]$$

a qual pode ser reescrita em função do fator de escala

$$z = \frac{a(t_0)}{a(t_1)} - 1. \quad [1.31]$$

Portanto, vemos que através da medição do *redshift* da fonte podemos relacionar o fator de escala medido hoje com o fator de escala medido no instante em que a luz foi emitida. Entretanto, é importante ressaltar que a dedução aqui apresentada considerou que o emissor e o observador eram comóveis com a expansão.

- **Distancia-Luminosidade**

Podemos determinar a distância física, real, de um objeto se soubermos sua luminosidade absoluta, pois sabemos que a luminosidade pode nos fornecer seu fluxo de luz. Esta relação pode ser obtida através do cálculo da luminosidade aparente:

$$l = \frac{L}{4\pi d^2}, \quad [1.32]$$

onde L é a luminosidade absoluta, l é a luminosidade aparente e d a distancia do objeto.

Com o Universo em expansão, t_0 (tempo que a luz atinge a Terra), a área própria do objeto que passa pela Terra é $4\pi r_1^2 a(t_0)^2$, sendo r_1 a coordenada radial. Ao substituímos d^2 por $r_1^2 a(t_0)^2$, tendo uma taxa de fótons que chega a Terra de $1 + z$, teremos:

$$l = \frac{L}{4\pi r_1^2 a(t_0)^2 (1+z)^2} \quad [1.33]$$

e ao compararmos as equações (1.33) e (1.32), nota-se que:

$$d_l = a(t_0)(1+z)r_1. \quad [1.34]$$

A coordenada radial $r(z)$ de uma fonte que é observada hoje com o *redshift* z pode ser calculada da seguinte forma:

$$r(z) = S \left[\left(\int_{t(z)}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} \right) \right], \quad [1.35]$$

onde:

$$S = \begin{cases} \text{sen } y & k = +1 \\ y & k = 0 \\ \text{senh } y & k = -1 \end{cases} . \quad [1.36]$$

Pode-se colocar a equação (1.35) na forma integral do *redshift* z :

$$r(z) = S \left[\left(\int_0^z \frac{dz'}{a_0 H(z')} \right) \right], \quad [1.37]$$

ainda pode-se usar a equação $\Omega_{0k} = \frac{k}{a_0^2 H_0^2}$ para expressarmos $a_0 H_0$ em relação à Ω_{0k} e assim obter:

$$a_0 r(z) = \frac{(1+z)}{H_0 \Omega_{0k}^{1/2}} \text{senh} \left(\Omega_{0k}^{1/2} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right), \quad [1.38]$$

onde $E(z) = H(z)/H_0$. A equação (1.38) é uma forma geral e válida de escrever qualquer curvatura. Quando $\Omega_{0k} \rightarrow 0$, temos uma curvatura plana. Quando $\Omega_{0k} < 0$, podemos usar $\text{senh } ix = i \text{sen } x$. Logo, podemos escrever a equação da distancia luminosidade, de uma fonte observada hoje, com um *redshift* z , na métrica *FLRW* (Weinberg, 2008):

$$d_L(z) = \frac{(1+z)}{H_0 \Omega_{0k}^{1/2}} \text{Senh} \left(\Omega_{0k}^{1/2} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right). \quad [1.39]$$

- **Supernovas tipo Ia:**

Uma supernova tipo Ia é caracterizada observacionalmente por não apresentar linhas de hidrogênio no seu espectro e por possuir linha de silício II (Si II) em seu espectro na fase inicial (Filippenko, 1997). Existe uma maneira simples de explicar o fenômeno.

Quando anãs brancas, estrelas com até 10 massas solares, vão adquirindo massa, até chegar próximo ao limite de *Chandrasekhar*, o suficiente para que a temperatura em seu núcleo seja alta o bastante, capacitando-o para fundir o carbono em reações de nucleossíntese (Hoyle e Fowler, 1960). Com isso, a estrela vai tornando-se instável com a temperatura e a densidade continua aumentando, criando condições para a queima de carbono e oxigênio em Níquel, o que gera por seguinte uma explosão que tem um brilho enorme capaz de brilhar mais que uma galáxia.

As observações de Supernovas indicam a seguinte composição para o Universo:

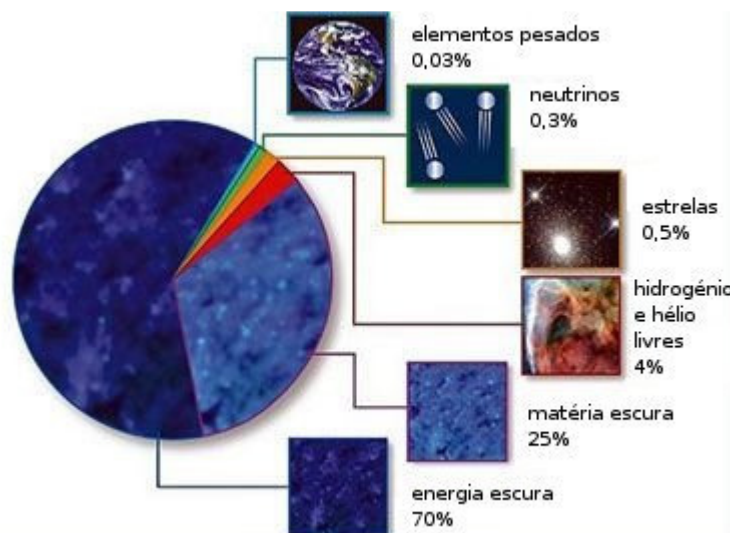


Figura 1.7: composição do Universo. NASA, 2008.

São dois os componentes dominantes do universo: a matéria escura e a constante cosmológica. Embora contribuam com cerca de 95% do conteúdo energético (Λ CDM), ainda sabemos muito pouco sobre a natureza destas.

1.2.7 Matéria Escura Fria (CDM)

Apesar da TBB indicar que o Universo no passado foi extremamente homogêneo, nós sabemos que hoje ele está longe da homogeneidade ao observar galáxias, aglomerados e superaglomerados em largas escalas. Estas estruturas surgiram de inhomogeneidades primordiais muito pequenas, originadas sobre perturbações da própria métrica que cresceram com o tempo via instabilidade gravitacional. Essas perturbações deixaram anisotropias na radiação cósmica de fundo, as quais foram detectadas pela primeira vez pelo satélite COBE em 1992 (Smoot et al., 1992).

Em 1970, Rubin e Ford mediram a curva de rotação da galáxia Andrômeda e constataram uma possível necessidade de incluir uma componente não-bariônica para poder explicar a curva de rotação para grandes distâncias do centro das galáxias. Para grandes distâncias do centro da galáxia, ao invés de uma curva Kepleriana (ver figura 1.8 abaixo), observou-se que a curva se mantém constante, indicando a presença de grande quantidade de matéria escura.

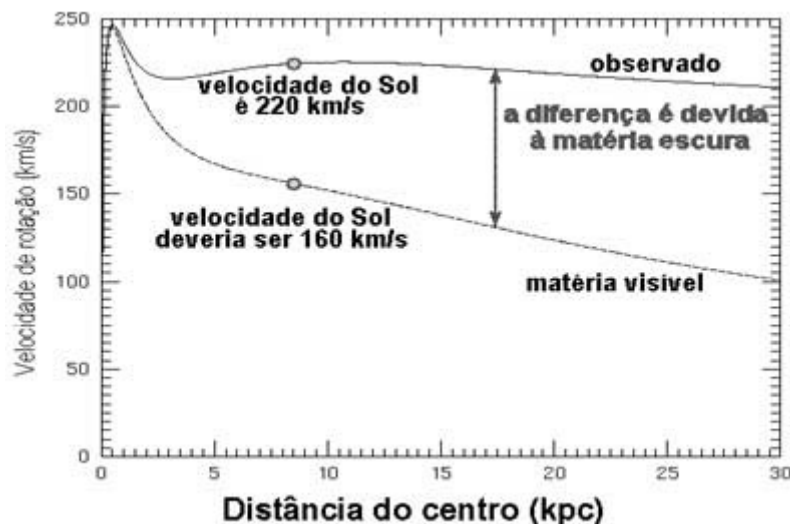


Figura 1.8: Curva de rotação da galáxia Andrômeda observada e constatação da possível inclusão da matéria escura, através da relação da velocidade de rotação com a distância até o centro da galáxia. Holanda, 2007.

É uma componente vital no modelo padrão da cosmologia. Ela não interage eletromagneticamente, mas influencia gravitacionalmente sobre a dinâmica das componentes do Universo. A primeira indicação da existência da CDM foi de Zwicky, em 1933 ao analisar a dinâmica de aglomerados de galáxias (Busti, 2013).

Através desse conhecimento que a determinação empírica de Ω_m pode-se ser feita de diversas maneiras: através do estudo da razão massa/luminosidade de diversos objetos; das curvas de rotação de galáxias; da estatística de micro lentes; da busca direta pelos objetos massivos compactos (MACHOs); da dispersão de velocidades de aglomerados com o uso do teorema do virial; da fração de bárions via raio-X do gás de aglomerados; da distribuição de matéria observada no Universo via espectro de potência; das anisotropias da radiação cósmica de fundo, etc. O valor médio encontrado é $\Omega_m = 0,25 \pm 0,07$ com 95% de confiança estatística (Holanda, 2007).

1.2.8 Aceleração do Universo e a Energia Escura

Até meados da década de 90, tinha-se como modelo cosmológico padrão de Einstein-deSitter, composto por matéria escura e radiação com constante cosmológica nula ($\Lambda = 0$). Essa visão foi mudada em 1998 quando grupos de pesquisa concluíram que o estágio atual do Universo é expansão

acelerada (Riess et al., 1998). Isso foi possível graças ao auxílio de supernovas tipo Ia como velas padrão. Dentro da TRG, tal fato é interpretado como uma evidência da existência de um fluido cosmológico com pressão negativa chamada energia escura. Ao combinar as equações de Friedmann-Lemaître (1.10) e (1.11), adotando a constante cosmológica nula ($\Lambda = 0$), teremos:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p). \quad [1.40]$$

Para poder alterar o sinal negativo da equação (1.40), do lado direito, temos que assumir que o valor da expressão $(\rho + 3p)$ precisa assumir valores negativos, ou seja, $(\rho + 3p) < 0$. Por isso, para um Universo preenchido por um fluido cosmológico com a equação de estado $\rho = wp$, devemos ter $w = -1/3$, ou seja, temos uma pressão negativa para que haja aceleração.

Para um modelo do Universo plano, o melhor ajuste do parâmetro de matéria do Universo foi de $\Omega_m = 0,28$, o que resulta em um parâmetro de desaceleração $q_0 = -0,58$, indicando assim que o Universo está em uma fase de expansão acelerada (Busti, 2013). Fora as evidências de Supernovas, existem outros fatores que levam a inferir a existência de energia escura, como as anisotropias do espectro de potência da radiação cósmica de fundo, estruturas em grandes escalas, entre outros.

1.2.9 Constante Cosmológica Λ

Existem diversos candidatos à energia escura. A constante cosmológica é candidato mais simples, representada por Λ . É a energia associada ao vácuo. É uma componente escura espacialmente uniforme e independente do tempo. Foi proposta por Einstein em 1917 quando ele propôs um modelo cosmológico com soluções estáticas. Na Teoria da Relatividade Geral, a constante cosmológica é um parâmetro livre. Pode pertencer ao tensor energia-momento ($T_{\mu\nu}$), a qual passa a ser associada à energia do vácuo dos campos quânticos (Weinberg, 1989).

Devido à implicação em um Universo aproximadamente plano, constatou-se que Λ deve ser da ordem da densidade crítica hoje (Busti, 2013):

$$\rho_{cr} = \frac{H_0^2}{8\pi G} \approx 10^{-47} GeV. \quad [1.41]$$

Esse valor obtido na equação (1.41) é o valor obtido observacionalmente, o que podemos comparar com o valor teórico. Teoricamente, a energia do vácuo é a energia de ponto zero para um conjunto de infinitos osciladores independentes, sendo preciso considerar a escala de Planck para poder calcular o valor desta energia. Com isso, obtém-se uma diferença entre os valores da densidade crítica, teórico e observacional, em 120 ordens de grandeza para a escala Planck. Essa discrepância é conhecida como O Problema da Constante Cosmológica.

Apesar de que a Constante Cosmológica sofre por tal problema entre o Modelo Teórico e o Modelo Observacional, a própria ainda sofre outro

problema, chamado de O Problema da Coincidência Cósmica. Devido à expansão do Universo, a densidade de energia da matéria diminui, enquanto que a densidade de energia do vácuo permanece constante. Entretanto, é curioso e intrigante que hoje ambas as componentes tenham a mesma ordem de grandeza. Com valores mais altos da densidade de energia do vácuo, a formação das estruturas do Universo seria inviável e valores mais baixos impossibilitariam a sua detecção (Holanda, 2007).

1.2.10 Nucleossíntese Primordial

A tabela abaixo representa uma breve historia térmica do Universo (Holanda, 2007):

Evento	Idade	z	T(K)	kT
Hoje	$(0.6 - 1,0)9,8 \times 10^9 h^{-1}$ anos	0	2,728	$\approx 10^{-4}$ eV
Reionização	$(20 - 300) \times 10^6 h^{-1}$ anos	10-50	30-150	$\approx 10^{-3}$ eV
Desacoplamento dos fótons	$1,8 \times 10^5 (\Omega_M h^2)^{-1/2}$ a	1100	3000	0,26 eV
Recombinação	$1,4 \times 10^5 (\Omega_M h^2)^{-1/2}$ anos	14000	3800	0,33 eV
Equipartição Mat.-Rad.	$1800 (\Omega_M h^{3/2})^{-2}$ anos	$2,3 \times 10^4 \Omega_M h^2$	6200	5,4 eV
Nucleossíntese	1-500 s	$10^8 - 10^9$	$10^8 - 10^9$	1-0,1 eV
Aniquilação de e^+				
Desacoplamento dos neutrinos	1s	4×10^9	10^{10}	1 MeV
Transição quark-hádron	5×10^{-6} s	4×10^{12}	10^{13}	1 GeV
Unificação eletro-fraca				
Bariogênese	5×10^{-10} s	4×10^{14}	10^{15}	100 GeV
GUT/Inflação	5×10^{-33} s	4×10^{26}	10^{13}	10^{14} GeV
Época de Planck				
Desacopl. dos grávitons	5×10^{-43} s	10^{32}	3×10^{32}	2×10^{19} GeV

Tabela 1.1: evolução térmica do Universo.

De acordo com o cenário apresentado acima, para a Teoria do *Big Bang*, o Universo se expande de um estágio inicial extremamente quente e denso (Alpher et al., 1948). De acordo com o cenário padrão os estágios iniciais são: era de Planck ($t \sim 10^{-45}$ s); era de Compton (10^{-43} s $< t < 10^{-23}$ s); era dos *Hádrons* (10^{-35} s $< t < 10^{-6}$ s). Depois dos primeiros estágios, o Universo entra numa série de períodos que caracterizam vários processos mais bem compreendidos. O primeiro deles é a Nucleossíntese ($t = 1 - 100$ s, $T \sim 10^9 - 10^{10}$ K), época de formação dos elementos mais leves (*D*, He^3 , He^4 e *Li*) (Holanda, 2007).

Portanto, é de grande interesse entre os físicos saber e prever a abundância dos elementos desde a formação do Universo até hoje, utilizando a TBB como base. Devido às altas temperaturas nos instantes iniciais, toda a matéria formava uma “sopa” cósmica, contendo prótons, elétrons, nêutrons,

fótons e neutrinos em equilíbrio. Assim, devido à expansão, o Universo resfriava-se e os elementos começam a surgir, formando matéria bariônica quando a temperatura caiu para 0,1 MeV. A síntese dos elementos formados é mostrada pelo trabalho de Longair, em 2008 (Longair, 2008). Com isso, os cientistas concluíram que a maior parte dos elementos leves foi formada quando o Universo atingiu cerca de 300 segundos de vida, são eles: D , He^3 , He^4 e Li .

1.2.11 Radiação Cósmica de Fundo

Como o universo era quente e denso no passado, a radiação estava acoplada aos bárions através do espalhamento Compton. Conforme prosseguiu a expansão, o universo foi se resfriando até o momento em que os fótons não tinham mais energia para ionizar o hidrogênio. Esse evento é conhecido como recombinação, determinando o momento que os fótons passaram a se propagar livremente (Peebles, 1995). O Universo inicial era composto por um plasma quente, designado como “sopa” no item anterior, o qual era composto por fótons, elétrons e bárions. Os fótons interagem constantemente como plasma através do efeito Compton, pois para temperaturas maiores que 400K, os fótons tinham energia acima da necessária para poder ionizar a matéria. Devido à expansão, o Universo ia resfriando-se até que fosse possível aos elétrons combinar-se com os núcleos atômicos formando átomos.

Toda essa radiação liberada pelo plasma quente do Universo, durante a expansão, é chamada de Radiação Cósmica de Fundo (do inglês *Cosmic Matter Background*) ou CMB. A CMB nos traz consigo impressões de como era o Universo naquela época, nos últimos bilhões de anos, relacionando tempo com temperatura.

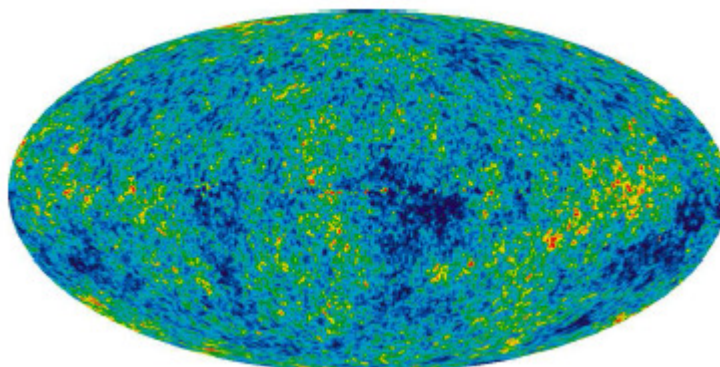


Figura 1.9: Anisotropias da CMB medida pelo WMAP (Larson et al., 2011).

A radiação cósmica de fundo, CMB, é altamente Isotrópica. Possui o mesmo espectro de emissão do corpo negro. Entretanto, essa radiação foi prevista por Alpher *et al.*, em 1948, com seus estudos a respeito da nucleossíntese primordial (Alpher *et al.*, 1948). A CMB foi detectada de maneira inesperada por engenheiros do Laboratório *Bell*, em 1965, quando os respectivos engenheiros identificaram um sinal isotrópico maior que os erros sistemáticos (Penzias e Wilson, 1965). Grandes esforços foram feitos como intuito de medir o espectro do corpo negro da CMB. Quando o satélite COBE foi lançado no espaço, resultados das pesquisas mostraram que a CMB possui uma temperatura hoje de $T_0 = 2725 \pm 0,001K$, sendo isotrópico com variações de temperatura na razão $\frac{\Delta T}{T} \sim 10^{-5}K$ (Smoot *et al.*, 1992). Nestas pequenas variações estão contidas diversas informações sobre o passado do cosmos.

Sendo assim, Foi preciso adicionar ao modelo do *Big Bang*, o paradigma inflacionário, o qual considera que o Universo teve uma era inflacionária junto a sua expansão dirigida por um campo escalar, o *Ínflaton*. Isso foi proposto por Guth, em 1981 para poder explicar 3 problemas que da TBB: O problema dos monopólios; O problema do horizonte; O problema da planura (Guth, 1981). Com as flutuações quânticas foi possível amplificar o espaço e assim constituiu as sementes para a formação das estruturas atuais do Universo.

1.2.12 Conclusões

O modelo teórico mais aceito que explica toda a estrutura do Universo é o modelo de concordância cósmica ou simplesmente Λ CDM, com Λ (densidade de energia associada ao vácuo) sendo a constante cosmológica e CDM sendo a Matéria Escura Fria.

Porem, o modelo da Concordância Cósmica exige a existência de um setor escuro no Universo (Matéria Escura) o qual passa a ser muito importante nos estudos sobre a dinâmica do Universo, além de toda a matéria bariônica, neutrinos e radiação. O Universo é composto de $\Lambda + CDM$, sendo que ambas não interagem entre si (Busti, 2013).

Há um Princípio presente na Teoria do *Big Bang*, o princípio de Copérnico, o qual nos diz que todos nós somos observadores típicos, ou seja, não estamos no centro do Universo. Ao juntar-se com os princípios da isotropia observada pela CMB, temos como observar que o Universo é homogêneo e isotrópico em grandes escalas e com a métrica *FLRW* podemos descrever as propriedades do Universo.

De posse dos dados da CMB, supernovas, nucleossíntese primordial e matéria escura em sistemas dinâmicos que podemos criar a seguinte genealogia para a energia escura:

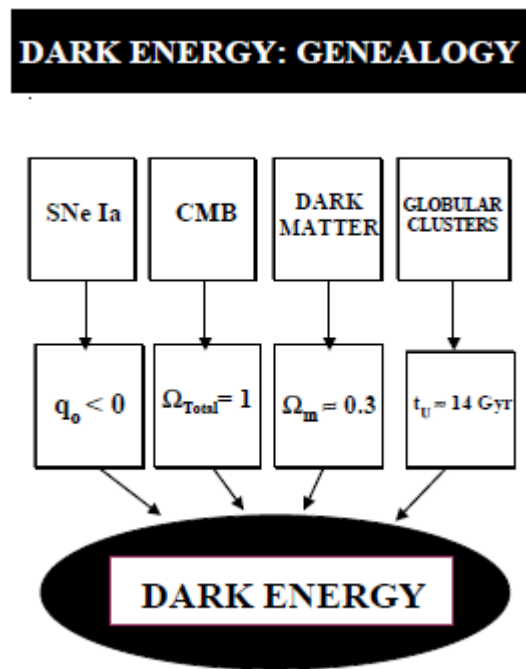


Figura 1.10: Genealogia da Energia Escura. Lima, 2004.

Capítulo 2

Cosmologia newtoniana

2.1 Introdução

Diante da discussão do capítulo anterior, podemos dizer que a cosmologia moderna é usualmente estudada no contexto da TRG, teoria de gravitação formulada em uma geometria *Riemanniana* quadri-dimensional espaço-temporal. Assim, a cosmologia é frequentemente associada à complexidade matemática inerente a geometria *Riemanniana*, isto é, álgebra tensorial, variedades diferenciáveis, grupos contínuos de simetria, etc. Entretanto, Milne (1934) e Milne & McCrea (1934), 17 anos após o trabalho inicial da cosmologia relativística feito por Einstein, demonstraram que as equações cosmológicas de *background* (não perturbadas) para modelos sem pressão (só de matéria) poderiam ser obtidas utilizando as noções de tempo absoluto, gravitação newtoniana, hidrodinâmica clássica e o espaço Euclidiano. O fenômeno da expansão universal, analisada por meio da expansão do espaço na cosmologia relativística, é substituído pelo movimento de um fluido auto gravitante num espaço euclidiano e estático. Vamos neste capítulo estudar as abordagens de Milne e McCrea, bem como verificar as limitações da cosmologia newtoniana baseada na equação de Poisson.

2.2 Equação de Poisson:

A gravitação newtoniana possui em sua base a idéia de um espaço e tempo absolutos, o que significa a independência do espaço e do tempo diante a matéria entre si. Portanto, a teoria gravitacional de Newton estabelece que dois corpos massivos, separados por uma distância \vec{r} , tendem a se atrair através de interações gravitacionais. Quanto mais próximo um corpo estiver do outro maior será a interação e quanto mais distante estiver um corpo do outro menor será a interação gravitacional entre si. A expressão matemática para a Lei Gravitacional de Newton é (Symon, 1986):

$$\vec{F}_G = - \frac{Gm_1m_2}{r^3} \vec{r} . \quad [2.1]$$

Outra equação importante para a teoria gravitacional de Newton, além da (2.1), é a equação de Poisson, que deduziremos em seguida.

Observe a figura a seguir:

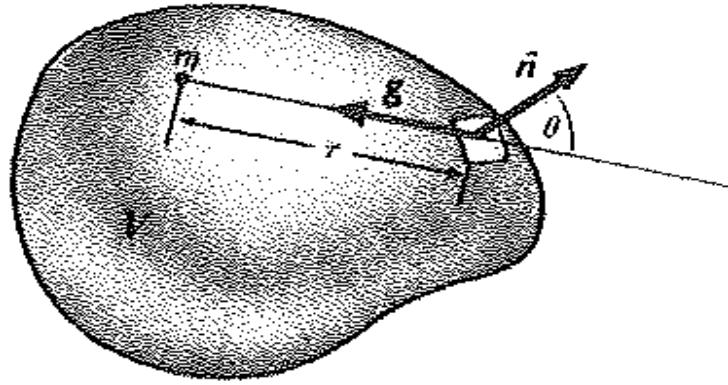


Figura 2.1: massa m contida no volume V . Symon, 1986.

De acordo com a figura acima e com a gravitação de Newton, as linhas do campo gravitacional são irrotacionais ($\vec{\nabla} \times \vec{g} = 0$).

Entretanto, para determinar o campo gravitacional, é preciso obter uma equação que relacione \vec{g} com a distribuição de matéria envolvida no sistema. Para tal fim, se tivermos um corpo extenso de volume V , que contém sua massa m dentro dele, com \hat{n} um vetor normal perpendicular à superfície S que limita V , o número de linhas I de campo na direção da aceleração \vec{g} , ou simplesmente fluxo de \vec{g} através de S , será (Symon, 1986):

$$I = \iint_S \hat{n} \cdot \vec{g} \, dS. \quad [2.2]$$

Quando lidamos com campo gravitacional, a primeira conclusão que tiramos é dele ser um campo do tipo irrotacional, visto anteriormente, e que o somatório do número de linhas é o próprio campo gravitacional, ou seja, $\sum I = \vec{g}(r)$.

Um elemento de ângulo Ω é a área varrida sobre uma esfera de raio unitário, por um raio que varre um elemento de área dS , dado pela seguinte expressão:

$$d\Omega = \frac{dS \cos\theta}{r^2}, \quad [2.3]$$

e

$$\hat{n} \cdot \vec{g} = -\frac{Gm \cos\theta}{r^2}. \quad [2.4]$$

Substituindo (2.3) e (2.4) em (2.2), temos:

$$I = -4\pi m_i G, \quad [2.5]$$

ou seja, existem 4π linhas de força saindo de cada carga unitária. Para uma distribuição contínua de massa, temos:

$$I = \iint_S \hat{n} \cdot \vec{g} dS = \iiint_V -4\pi G \rho dV, \quad [2.6]$$

com

$$\iiint_V -4\pi G \rho dV = -\sum 4\pi m_i G. \quad [2.7]$$

Utilizando o Teorema da Divergência de Gauss para a equação (2.7), teremos:

$$\iint_S \hat{n} \cdot \vec{g} dS = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{g} dV, \quad [2.8]$$

com $\vec{\nabla} \cdot \vec{g}$ sendo o fluxo das linhas de campo que sai pelo volume V .

Portanto, teremos:

$$\iiint_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{g} + 4\pi G \rho) dV = 0, \quad [2.9]$$

sendo que a integral da equação (2.9) só é satisfeita caso:

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{g} + 4\pi G \rho) = 0. \quad [2.10]$$

Passando $4\pi G \rho$ para o segundo membro, teremos:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{g} = -4\pi G \rho. \quad [2.11]$$

Se Definirmos o potencial gravitacional como sendo a energia potencial por unidade de massa, de uma partícula de massa m , no ponto r , com sinal negativo, e sendo a aceleração o gradiente do potencial, teremos:

$$\vec{g}(r) = -\vec{\nabla} U. \quad [2.12]$$

Substituindo a equação (2.12) na equação (2.11), teremos:

$$\nabla^2 U = -4\pi G \rho, \quad [2.13]$$

sendo essa equação (2.13) chamada de equação de Poisson. É a equação encontrada para estudar e descrever o potencial gravitacional diante as circunstâncias dos fenômenos do Universo em relação a distâncias e distribuição continua de massa. Ela determina o potencial univocamente, pois $V \rightarrow 0$ quando $|\vec{r}| \rightarrow \infty$.

2.2.1 Limitações da Cosmologia newtoniana:

Einstein mostra que essa equação não é um perfeito substituto para a lei de gravitação da ação à distância. A teoria fundamental da gravitação é a relatividade geral, onde a equação de campo de Einstein é a equação fundamental, que recai na equação de Poisson para limites de campo gravitacionais fracos. A equação (2.13) dá uma relação matemática entre o potencial gravitacional em um ponto no espaço e a densidade de massa no ponto. Ao tomar o gradiente do potencial, pode-se determinar a aceleração e, em seguida, pode-se calcular a trajetória de objetos que se movem livremente pelo espaço. Foram levantadas algumas objeções contra a teoria cosmológica newtoniana baseada na equação de Poisson (Berman e Gomide, 1927):

- O universo é homogêneo e isotrópico em grandes escalas. Assim, se $\rho = \text{constante}$, U fica indeterminado, segundo a equação de Poisson.
- A pressão P de um fluido não desempenha nenhum papel gravitacional nesta equação, o que limita sua aplicabilidade apenas para o caso de matéria não relativística ($P = 0$).
- Se o Universo não for homogêneo e isotrópico, observa-se que um Universo onde $\rho \sim r^{-3}$ é contraditória com a física estatística. A condição de contorno impõe à equação de Poisson que o potencial tenda a um valor fixo finito à grandes distancias ($U \rightarrow \text{valor fixo}$ quando $r \rightarrow \infty$). Pela física estatística, qualquer objeto astronômico pode adquirir energia cinética o suficiente para vencer o valor do potencial U e com isso desaparecer no infinito. Portanto, $\rho \sim r^{-3}$ não seria obedecida, e a equação de Poisson seria inviável.
- Além disso, como observa Einstein, a energia radiante dos corpos provém da massa e ela perde-se no infinito, o que também é incompatível com $\rho \sim r^{-3}$.

A gravitação de Newton prevê que a interação entre corpos a distância era dada instantaneamente, o que contrariava a constância da velocidade da luz imposta pela relatividade restrita. Assim, coube a Einstein buscar uma nova teoria que pudesse explicar os fenômenos gravitacionais sem infringir o eletromagnetismo nem a relatividade restrita. Em 1913, Einstein junto a Grossman publicaram um artigo no qual propuseram que o que se entendia de interações gravitacionais era mais uma evidência de que o espaço-tempo era curvo (Lima, 2013). Em 1915, Einstein obteve a equação final, a equação de campo que descreve a dinâmica do universo:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad [2.14]$$

Lodo adiante, em 1917, Einstein propôs o primeiro modelo cosmológico baseado em sua teoria da gravitação: modelo estático, finito e com curvatura positiva. Entretanto, verificou-se um problema de estabilidade. Assim, foi incluída na sua teoria uma chamada *constante cosmológica* (Λ), a qual atuaria junto à força gravitacional de forma a equilibrar as forças, garantindo a estabilidade. Portanto, a equação (2.14) torna-se:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - g_{\mu\nu}\Lambda = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad [2.15]$$

a qual é a equação de campo mais geral.

Com a descoberta da expansão do Universo, Einstein declarou que essa inserção da constante cosmológica foi o pior erro da sua vida. Portanto, a Equação de campo de Einstein proporciona uma relação matemática entre a métrica de espaço-tempo em um ponto e da energia e da pressão nesse ponto do espaço-tempo. As trajetórias dos objetos que se movem livremente correspondem às geodésicas no espaço-tempo curvo.

Em um contexto cosmológico, as equações de campo de Einstein podem ser utilizadas para encontrar a relação entre $a(t)$, k e R_0 , as quais descrevem a curvatura do universo, e a densidade de energia $\varepsilon(t)$ e pressão $P(t)$ dos conteúdos energéticos do universo. A equação que une $a(t)$, k , R_0 e $\varepsilon(t)$ é conhecida como a equação de Friedmann que foi o primeiro derivado da equação em 1922 (Berman e Gomide, 1927) e apresentada no capítulo 1.

Friedmann utilizou as equações de campo de Einstein para descrever como um universo espacialmente homogêneo e isotrópico, expande ou contrai em função do tempo, 7 anos antes de Hubble publicar a Lei de Hubble, em 1929 (Busti, 2013). Mesmo sem trazer a relatividade em jogo, alguns aspectos da equação Friedmann podem ser compreendidos pela utilização da dinâmica puramente newtoniana. Para estudar como a expansão ou contração do universo ocorreu a partir de um ponto de vista newtoniano, estudaremos o Modelo do tipo *FRW* de McCrea e Milne para um Universo sem pressão, 1934, e o Modelo do tipo *FRW* de McCrea e Harrison para um Universo com pressão, em 1951.

2.3 Modelos do tipo FRW sem pressão ($P = 0$):

A descrição hidrodinâmica foi formulada em 1934 por Milne & McCrea, na qual por meio das equações da hidrodinâmica clássica e gravitação newtoniana estes autores encontraram as soluções não perturbadas de Friedmann-Lemaître da cosmologia relativística para modelos sem pressão. Por essa descrição, temos um Universo preenchido por um fluido auto gravitante em expansão, não relativístico, formado por uma grande nuvem

esférica gasosa homogênea onde as galáxias são as partículas desse gás (Holanda, 2007).

Nesta abordagem é considerada apenas a cinemática da nuvem desse gás cosmológico e o movimento dessas partículas é estritamente radial.

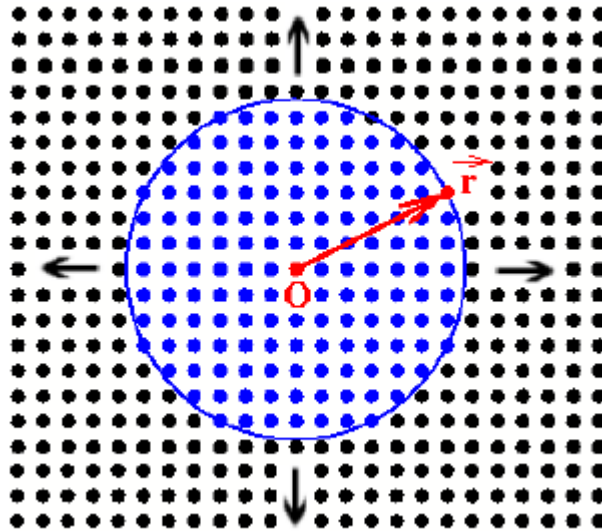


Figura 2.2: esfera de massa distribuída uniformemente. Holanda, 2007.

Consideramos uma partícula com velocidade $|\vec{v}| = v$, que percorreu uma distância $|\vec{r}| = r$, vista por um observador no instante t . Tomando base junto à lei da gravitação de Newton, a equação do movimento onde a velocidade da partícula desacelera no decorrer do tempo e da distância, poderá ser expressa por:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{4}{3} G \pi \rho r, \quad [2.16]$$

onde ρ é a densidade de massa em função do tempo, satisfazendo assim ao princípio cosmológico. A equação de continuidade para fluidos perfeitos é:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) = 0, \quad [2.17]$$

e em coordenadas esféricas torna-se:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 v)}{\partial r} = 0, \quad [2.18]$$

a qual equação acima pode ser resolvida pelo método de separação de variáveis.

Entretanto, para satisfazer o princípio cosmológico, onde as quantidades dependem apenas do tempo, supomos que ambos os termos são iguais a uma função apenas do tempo, escolhida $3H(t)$, o que torna:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = -3H(t), \quad [2.19]$$

e

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 v)}{\partial r} = 3H(t). \quad [2.20]$$

Integrando a equação (2.20):

$$v = H(t)r + \frac{G(t)}{r^2}. \quad [2.21]$$

Ao inserir a equação (2.21) na equação (2.16), resulta em:

$$r\dot{H}(t) + \frac{\dot{G}(t)}{r^2} + \left(H(t)r + \frac{G(t)}{r^2}\right) \left(H(t) - \frac{2G(t)}{r^3}\right) = -\frac{4}{3}\pi\rho Gr. \quad [2.22]$$

Considerando $G(t) = 0$, pois devemos eliminar qualquer dependência radial teremos:

$$\dot{H}(t) + H^2(t) = -\frac{4}{3}\pi\rho G, \quad [2.23]$$

e

$$v = H(t)r. \quad [2.24]$$

Podemos escrever a equação (2.24), da forma $\frac{dr}{rdt} = H(t)$, e redefinir a quantidade r por $r = fa(t)$, onde f defini a partícula do fluido e $a(t)$ é uma função apenas do tempo. A quantidade $H(t)$ satisfaz então:

$$H(t) = \frac{1}{a} \frac{da}{dt} = -\frac{1}{3\rho} \frac{d\rho}{dt}, \quad [2.25]$$

logo

$$\rho(t) = \rho_0 \frac{a_0^3}{a^3}. \quad [2.26]$$

Ao substituírmos as equações (2.26) e (2.25) em (2.23), chega-se a:

$$2\ddot{a} = -\frac{8\pi G\rho_0 a_0^3}{3a^2}. \quad [2.27]$$

Ao multiplicar a equação (2.27) por \dot{a} e integrando, obtemos:

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G\rho_0 a_0^3}{3a} + 2E, \quad [2.28]$$

onde E é uma constante de integração. Dividindo a equação (2.27) por a e (2.28) por a^2 , somando o resultado delas, obteremos:

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{2E}{a^2} = 0. \quad [2.29]$$

A equação (2.29) é análoga equação de Friedmann vista no capítulo 1, para um Universo sem pressão e sem constante cosmológica ($\mathbf{P} = \mathbf{0}$ e $\Lambda = 0$), considerando que $E = -k/2$. É usualmente considerado na descrição hidrodinâmica que a equação (2.28) é a equação de energia total de uma partícula do fluido, de massa unitária, em expansão, uma vez que resulta de uma integração primeira da equação de movimento. Substituindo $A^2 = \frac{8}{3}\pi G a_0^3 \rho_0$, tem-se um análogo da energia total da partícula:

$$\frac{\dot{a}^2}{2} - \frac{A^2}{2a} = E. \quad [2.30]$$

Fisicamente, pode-se concluir da equação (2.30) que $\frac{\dot{a}^2}{2}$ representa a medida da energia cinética da partícula, $-\frac{A^2}{2a}$ como uma medida da sua energia potencial e E como medida da sua energia total, ou da sua energia mecânica. Comparando com a equação de Friedmann com $p = 0$, notemos que o potencial independe da curvatura K e $E = -mk/2$. Se $K = -1$, a energia total é positiva e a partícula possui velocidade maior que a velocidade de escape da massa contida no "raio" a (quando $t \rightarrow \infty$ temos $a \rightarrow \infty$ e $\dot{a} \rightarrow 1$). Se $K = 0$, a energia total é zero e o universo se comporta como uma partícula com velocidade igual à de escape (quando $t \rightarrow \infty$ temos $a \rightarrow \infty$ e $\dot{a} \rightarrow 0$). Se $K = +1$, a energia total é negativa e o universo se comporta como uma partícula com velocidade menor que a de escape, a expansão ocorrerá até $\dot{a} = 0$ (quando $a = A^2$), contraindo-se em seguida (Holanda, 2007).

Os três destinos possíveis de uma bola atirada para cima da superfície da Terra são análogas aos destinos possíveis de uma esfera que se expande num Universo newtoniano. Na primeira situação, a bola pode ser lançada para

cima com uma velocidade maior do que a velocidade de escape onde neste caso a bola continua para cima para sempre. Na segunda situação, a bola pode ser atirada para cima com uma velocidade menor que a velocidade de escape, neste caso, a bola atinge uma altura máxima, em seguida, cai de volta para baixo. Na terceira, e, finalmente ultima situação, a bola pode ser atirada para cima quando a velocidade da bola se aproxima de zero quando $t \rightarrow \infty$.

2.4 Modelos do tipo FRW com pressão ($P \neq 0$):

Modelos para um Universo com pressão foi inicialmente abordado por McCrea em 1951 e só depois foi abordado por Harrison em 1965. No nosso trabalho, apenas analisaremos a abordagem feita por McCrea em 1951.

O trabalho de McCrea foi um trabalho estendido da hidrodinâmica clássica, para fluidos com pressão, com a adoção de dois conceitos relativísticos (Holanda, 2007):

- **A equivalência de massa e energia:** O fluido se expande com pressão uniforme perdendo energia interna de modo a realizar trabalho a uma taxa $4\pi r^2 p \frac{dr}{dt}$. Pelo principio da equivalência massa-energia, da mesma forma que o fluido realiza trabalho e perde energia, o fluido também perde massa, com o passar do tempo, na razão $\frac{4}{3}\pi\rho r^3$. Assim:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{4}{3}\pi\rho r^3 \right) = -4\pi r^2 p \frac{dr}{dt}, \quad [2.31]$$

e partindo dessa equação (2.31), teremos:

$$\dot{\rho} + \frac{3\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0, \quad [2.32]$$

onde a equação (2.32) é a equação da continuidade relativística geral.

- **A redefinição de massa de um sistema:** a densidade de massa gravitacional σ de um sistema é agora dada por:

$$\sigma = \rho + 3p, \quad [2.33]$$

onde ρ é a densidade de massa inercial e p é a pressão do sistema.

Se utilizarmos os dois conceitos relativísticos, vistos anteriormente, junto à lei da velocidade obtida por Milne & McCrea em 1934, equação (2.24), e da densidade de massa gravitacional (2.33), a equação (2.23) pode ser reescrita na forma:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4}{3}\pi G(\rho + 3p). \quad [2.34]$$

Ao isolar a pressão p da equação da continuidade (2.32) e substituir na equação (2.34), tem-se:

$$\dot{a}\ddot{a} = \frac{4}{3}\pi G(2a\dot{a}\rho + \dot{\rho}a^2), \quad [2.35]$$

a qual é integrável que resulta em:

$$8\pi G\rho = 3\left(\frac{\dot{a}^2+k}{a^2}\right), \quad [2.36]$$

onde k é uma constante de integração. Ao substituir $8\pi G\rho$ na equação (2.35), tem-se:

$$-2\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{k}{a^2} = 8\pi Gp. \quad [2.37]$$

A equação (2.37) é análoga à equação de Friedmann-Lemaître com pressão não nula e constante cosmológica nula, vista no capítulo 1. Vimos anteriormente que no caso de $p = 0$ o sinal da curvatura correspondia ao fato do fluido em qualquer ponto ter velocidade maior, igual ou menor que a velocidade de escape, pois a equação era interpretada newtonianamente como a equação de energia total de uma partícula do fluido. Esta analogia não é estendida para o caso da pressão ser não nula, $p \neq 0$ (Holanda 2007).

2.5 Conclusões

A física newtoniana lida com partículas que se movem ao longo de linhas retas em um espaço euclidiano até que uma força atue sobre ela. O espaço absoluto sem relação com qualquer coisa que seja exterior, permanece sempre semelhante e imóvel. O tempo absoluto, real e matemático, flui uniformemente, sem relação com qualquer coisa externa. Esta teoria mostrou-se incompatível com a teoria da relatividade especial. Sua forma de equação de campo, dada pela equação de Poisson, mostrou-se incompatível na descrição do universo, uma vez que é incompatível com uma distribuição homogênea e isotrópica de distribuição de matéria. A solução exige que para r tendendo ao infinito, o potencial deve ter um limite fixo. Desta forma, o estudo do universo apenas foi possível com o desenvolvimento da relatividade geral e, curiosamente, com a cosmologia newtoniana aparecendo depois da cosmologia relativística.

Capítulo 3

Formulação Lagrangeana para modelos do tipo FRW

3.1 Introdução

Neste capítulo, nós estudaremos a abordagem “tipo-partícula” de modelos cosmológicos relativísticos com uma única componente, proposto originalmente por Lima *et al.*, em 1998. Também discutiremos como é possível obter análogos lagrangeanos para modelos cosmológicos mais realistas contendo as componentes de bárions, matéria escura e energia escura (Holanda, 2007). O tratamento é estendido para o seguinte cenário cosmológico acelerado: matéria- Λ + CDM (Λ CDM).

3.2 Mecânica Lagrangeana

Na mecânica Lagrangeana, cada sistema mecânico é caracterizado por uma determinada função, chamada Função Lagrangeana. Essa função depende de:

- Coordenadas Generalizadas: q_i
- De suas derivadas temporais: \dot{q}_i
- Do tempo: t .

Logo, a função Lagrangeana pode descrita por:

$$L = L(q_i, \dot{q}_i, t). \quad [3.1]$$

O formalismo Lagrangeano permite obter as equações de movimento de um sistema por um meio mais elegante e sistemático. Contrariante aos métodos utilizados nas leis de Newton, esse formalismo não exige identificação das forças envolvidas, o que torna a análise mais abstrata. Entretanto, é possível simplificar o tratamento de sistemas de maior complexidade, utilizando a Mecânica Lagrangeana (Carvalho e Matos, 2002).

Quando se quer falar a respeito de um sistema físico, descrito por um sistema de coordenadas generalizadas, sem especificar quais são estas coordenadas, designa-se por q com um índice numérico. Uma partícula, por exemplo, que se move no plano possui suas coordenadas generalizadas por q_1 e q_2 . Uma partícula que se move no espaço tem suas coordenadas generalizadas por q_1, q_2 e q_3 , e assim por diante.

Um sistema de coordenadas generalizadas é aquele em que as posições da partícula no sistema podem ser especificadas. Seria desejável e coerente um método geral que estabeleça diretamente as equações de movimento em termos de um conjunto de coordenadas generalizadas apropriadas. É importante usar um referencial inercial para definição das coordenadas generalizadas.

Por fim, a Lagrangeana é escrito da diferença entre a energia cinética e a energia potencial do sistema em particular:

$$L = T - U, \quad [3.2]$$

onde T é a energia cinética total do sistema e U é a energia potencial total do sistema. Em U encontramos as forças conservativas. Com isso, nota-se que por ela há conservação da energia do sistema.

3.2.1 Princípio da Ação Mínima

Ou simplesmente princípio de Hamilton, a evolução do sistema, $q(t)$, entre dois instantes t_1 e t_2 , desde uma posição $q(t_1)$ até outra posição $q(t_2)$, é tal que (Carvalho e Matos, 2002):

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt, \quad [3.3]$$

toma um valor mínimo possível.

3.2.2 Equação de Euler Lagrange

De acordo com o princípio de Hamilton, a evolução de um sistema com uma configuração 1 a uma configuração 2 é um valor mínimo possível. Se a ação entre essas duas configurações toma um valor mínimo sua variação deverá ser um valor muito pequeno, próximo à zero. Logo:

$$\delta S = 0. \quad [3.4]$$

Utilizando técnicas de calculo variacional, a variável infinitesimal da equação (3.4) será:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = 0, \quad [3.5]$$

logo:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt = 0, \quad [3.6]$$

e separando as componentes, temos:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i dt = 0. \quad [3.7]$$

Se integrarmos a segunda componente da equação (3.7), utilizando o método integral por partes, teremos o seguinte resultado baseando-se no princípio de Hamilton:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i dt = - \int_{t_1}^{t_2} \delta q_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) dt. \quad [3.8]$$

Substituindo a equação (3.8) na equação (3.7), resultará em:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0, \quad [3.9]$$

a qual equação (3.9) é a equação que determina os movimentos de um sistema físico qualquer, ou melhor, é a equação de movimento para um sistema físico que possuem coordenadas generalizadas com n graus de liberdade, que caracterizam a mecânica de Euler-Lagrange. Logo, essa é a equação de um sistema com as equações diferenciais de segunda ordem, habitualmente chamadas de equações diferenciais de movimento (Carvalho e Matos, 2002).

3.3 Formulação Lagrangeana para Modelos do tipo FRW

A descrição Lagrangeana para modelos cosmológicos de fluidos simples foi proposta inicialmente por Lima et al., em 1998. Tomando base nessa proposta, podemos discutir os análogos lagrangeanos para modelos cosmológicos mais realistas, contendo as componentes de bárions, matéria escura, ou mesmo qualquer forma de interação entre elas.

Em 1998, visando evitar as dificuldades presentes na descrição Hidrodinâmica Clássica de Euler para Universo $FLRW$ com $p \neq 0$, que Lima et al., por meio do formalismo Lagrangeano clássico, propuseram uma descrição "tipo partícula" para os modelos cosmológicos com fluido simples do tipo $FLRW$ com a equação de estado geral $p = (\gamma - 1)\rho$. Eles mostraram que o comportamento dinâmico do fator de escala $a(t)$ é equivalente ao de uma partícula sob a ação de um potencial homogêneo $V(q) = \alpha q^n$, onde α e n são constantes e q é a coordenada generalizada unidimensional da partícula, que desempenha o "papel" do fator de escala.

Neste cenário, a equação dinâmica de $a(t)$, para cada valor da pressão, pode ser associada com o índice " n " presente no potencial. O parâmetro γ assume os valores:

- Vácuo ($p = -\rho; \gamma = 0$)
- Cordas ($p = -1/3\rho; \gamma = 2/3$)
- Poeira ($p = 0; \gamma = 1$)
- Radiação ($p = 1/3, \gamma = 4/3$)
- Matéria dura de Zeldovich ($p = \rho; \gamma = 2$).

3.3.1 Metodologia e Discussões:

De acordo com o apresentado no capítulo 1, podemos utilizar as equações de Friedmann para obter a equação diferencial para o fator de escala em modelos com uma equação de estado parametrizada por $p = (\gamma - 1)\rho$:

$$a\ddot{a} + \left(\frac{3\gamma-2}{2}\right)\dot{a}^2 + \left(\frac{3\gamma-2}{2}\right)k = 0, \quad [3.10]$$

logo, a lagrangiana clássica para uma partícula sob a ação de um potencial unidimensional $V(q) = \alpha q^n$ é:

$$L(x, \dot{x}) = \frac{\dot{x}^2}{2} - \alpha q^n, \quad [3.11]$$

onde α é uma constante arbitrária negativa, uma vez que a força gravitacional é atrativa, q é a coordenada linear da partícula.

A equação de movimento (Euler-Lagrange) para a Lagrangeana é:

$$m\ddot{q} + n\alpha q^{n-1} = 0, \quad [3.12]$$

com a energia total conservada da partícula sendo:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + \alpha q^n, \quad [3.13]$$

e ao multiplicar a equação (3.11) por q e inserindo na lei de conservação de energia (3.13), obtêm-se a equação resultante:

$$q\ddot{q} - \frac{n}{2}\dot{q}^2 + \frac{nE}{m} = 0. \quad [3.14]$$

Ao comparar esta equação com a equação (3.10), pode-se identificar o fator de escala $a(t)$ com a coordenada generalizada q . Vemos que as equações descreverão o mesmo comportamento dinâmico apenas se duas condições forem satisfeitas:

$$n = 2 - 3\lambda, \quad [3.15]$$

com

$$E = -\frac{mk}{2}. \quad [3.16]$$

A primeira relação implica que a potencia n está diretamente relacionada com a natureza da matéria que preenche o modelo relativístico (Ver tabela 3.1 abaixo).

γ	Vácuo (0)	Cordas (2/3)	Poeira (1)	Radiação (4/3)	Matéria Dura (2)
n	2	0	-1	-2	-4
$V(q)$	αq^2	α	αq^{-1}	αq^{-2}	αq^{-4}

Tabela 3.1: Relação entre a γ – lei e o potencial Homogêneo.

Da segunda relação, percebe-se que a curvatura do espaço não depende do valor de n . Ela está associada ao valor da energia para uma partícula teste, da mesma forma que na hidrodinâmica clássica.

Modelos com constante cosmológica não nula podem ser incorporados o método descrito. Portanto, a equação (3.14) na presença de um termo cosmológico não nulo torna-se:

$$a\ddot{a} + \left(\frac{3\gamma-2}{2}\right)\dot{a}^2 + \left(\frac{3\gamma-2}{2}\right)\epsilon - \frac{\gamma}{2}\Lambda a^2 = 0. \quad [3.16]$$

Considerando um potencial da forma $V(q) = \alpha q^{n-1} - \frac{1}{6}\Lambda q^2$ e repetindo os mesmos passos anteriores, chega-se a:

$$q\ddot{q} - \frac{n}{2}\dot{q}^2 + \frac{nE}{m} + \left(\frac{n-2}{6}\right)\Lambda q^2 = 0. \quad [3.17]$$

Como feito no caso anterior, se identificarmos n e E podemos obter a equação relativística do movimento.

Na próxima seção o formalismo lagrangeano será generalizado para o caso de mistura de fluidos: matéria- X + matéria escura fria (CDM).

3.3.2 Matéria X + Matéria Escura (CDM):

Ao manusearmos com as equações diferenciais de Friedmann (1.10; 1.11), analogamente à sessão anterior, e utilizando a equação de estado para o caso da cosmologia com energia escura tipo Matéria- X e Matéria Escura Fria (CDM) $p_x = w_x \rho_x$, teremos a equação diferencial relativística para o caso de cosmologia com Matéria- X junto a Matéria Escura Fria (CDM):

$$a\ddot{a} + \left(\frac{3w+1}{2}\right)(\dot{a}^2 + k) = \left(\frac{4\pi G w \rho_{m_0} a_0^3}{a}\right), \quad [3.18]$$

ou simplesmente:

$$\left(\frac{3w+1}{2}\right) (\dot{a}^2 + k) = \left(\frac{4\pi G w \rho_{m_0} a_0^3}{a}\right) - a\ddot{a}. \quad [3.19]$$

Fazendo a integral primeira da equação (3.19) e organizando-a, pode-se obter:

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G \rho_{x_0} a_0^{3(w+1)}}{3a^{3w+1}} + \frac{8\pi G \rho_{m_0} a_0^3}{3a} - k, \quad [3.20]$$

e ao substituirmos a equação (3.20) em (3.19), pode-se obter:

$$a\ddot{a} + (3w + 1) \frac{4\pi G \rho_{x_0} a_0^{3(w+1)}}{3a^{3w+1}} + \frac{4\pi G \rho_{m_0} a_0^3}{3a} = 0. \quad [3.21]$$

Por outro lado, utilizando a mecânica lagrangeana, visto nas sessões anteriores, a lagrangeana clássica para uma partícula é:

$$L(x, \dot{x}) = \frac{\dot{x}^2}{2} - V(x). \quad [3.22]$$

Logo, partindo da equação de movimento de Euler-Lagrange (3.9), podemos ter, utilizando a equação (3.22):

$$x\ddot{x} + x \frac{dV}{dx} = 0. \quad [3.23]$$

Identificando o fator de escala $a(t)$ com a coordenada linear x , podemos igualar as equações (3.21) com a (3.23), obtendo:

$$a\ddot{a} = -a \frac{dV}{da}, \quad [3.24]$$

e

$$a \frac{dV}{da} = (3w + 1) \frac{4\pi G \rho_{x_0} a_0^{3(w+1)}}{3a^{3w+1}} + \frac{4\pi G \rho_{m_0} a_0^3}{3a}. \quad [3.25]$$

Ao integrarmos a equação (3.25) em integral definida de $V_0 \rightarrow V$ e de $x_0 \rightarrow x$, sendo o índice 0 indicando a medida hoje, obtemos:

$$V(x) = -\frac{4\pi G \rho_{x_0} x_0^{3(w+1)}}{3x^{3w+1}} - \frac{4\pi G \rho_{m_0} x_0^3}{3x}, \quad [3.26]$$

e

$$V(x_0) = V_0 = -\frac{4\pi G \rho_{x_0} x_0^2}{3} - \frac{4\pi G \rho_{m_0} x_0^2}{3}. \quad [3.27]$$

Portanto, obtivemos um potencial $V(x)$ sobre a qual descreve a partícula com o mesmo comportamento dinâmico que o fator de escala da equação (3.21). Se resolvermos a equação (3.23) com a equação (3.26), obtém-se:

$$x\ddot{x} + \frac{4\pi G \rho_{x_0} x_0^{3(w+1)}}{3x^{3w+1}} (3w + 1) + \frac{4\pi G \rho_{m_0} x_0^3}{3x} = 0. \quad [3.28]$$

A equação (3.28) não possui o termo da curvatura k . Para ter uma descrição tipo partícula completa, devemos obter um análogo da equação geral relativística (3.19). Para tal fim, devemos isolar o termo $\frac{4\pi G \rho_{m_0} x_0^3}{3x}$ da equação (3.26), junto à equação da conservação da energia $E = \frac{\dot{x}^2}{2} + V(x)$ e substituindo ambas na equação (3.28), obtém-se:

$$x\ddot{x} + (3w + 1) \left(\frac{\dot{x}^2}{2} - E \right) = \frac{4\pi G \rho_{m_0} w x_0^3}{x}. \quad [3.29]$$

A equação (3.29) fornecerá (3.21) se $E = -\frac{k}{2}$, como foi obtido por Lima et al., em 1998, para o caso de fluidos simples.

Neste ponto é interessante reescrever os potenciais em termos das quantidades da cosmologia observacional: os parâmetros de densidade. Isto pode ser feito lembrando que $\Omega_{0i} = \frac{8\pi G \rho_{i0}}{3H_0^2}$. Assim a equação (3.26) torna-se:

$$\frac{V(x)}{H_0^2 x_0^2} = -\frac{\Omega_{0x}}{2} \left(\frac{x_0}{x} \right)^{3\omega+1} - \frac{\Omega_{0m}}{2} \left(\frac{x_0}{x} \right), \quad [3.30]$$

com

$$\frac{V(x_0)}{H_0^2 x_0^2} = -\frac{\Omega_{0x}}{2} - \frac{\Omega_{0m}}{2}. \quad [3.31]$$

Identificando também $x_0/x = 1 + z$, observa-se no gráfico abaixo o comportamento do potencial para diferentes valores de Ω_{0i} :

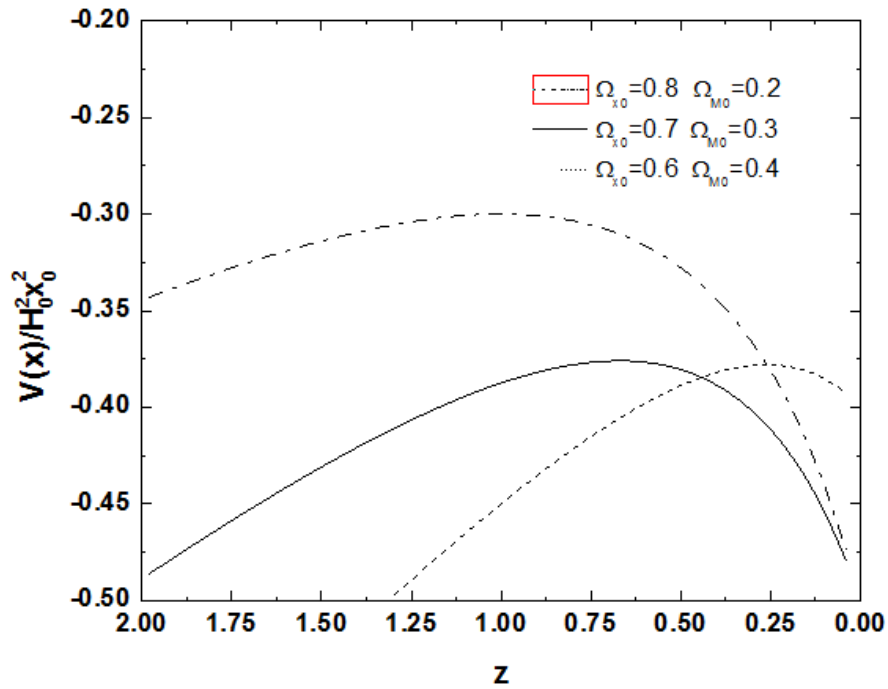


Figura 3.1: Comportamento do potencial V para diferentes valores de z . Holanda, 2007.

As diferentes curvas dos potenciais possuem um máximo, indicando uma região de transição no movimento da partícula: movimento desacelerado para um acelerado, entretanto, para diferentes modelos este região encontra-se em pontos diferentes, dados por:

$$\frac{d \frac{V(x)}{x_0^2 H_0^2}}{dz} = 0. \quad [3.32]$$

Desta forma, é notório e marcante como a abordagem Lagrangeana clássica ou “tipo-partícula” descreve a dinâmica de modelos relativísticos do tipo *FRW* mais realistas, em oposto a descrição baseada nas equações da hidrodinâmica clássica. Os potenciais como visto na figura 3.1, podem ser utilizados de forma pedagógica para demonstrar o comportamento de modelos *FRW* para diferentes valores das quantidades de matéria escura fria e a constante cosmológica.

Considerações Finais

Ao longo de todo esse Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) foi apresentada uma ampla discussão a respeito da cosmologia moderna sobre o ponto de vista teórico e observacional, assim como também foi apresentado as duas abordagens clássicas, a hidrodinâmica clássica e a Lagrangeana, para poder obter a dinâmica cósmica que rege todo o Universo para modelos cosmológicos do tipo FRW.

Dentro do capítulo 1, foi apresentado as bases observacionais e teóricas da matéria escura e energia escura, as quais dão suporte ao cenário expansionista do Universo. Para tal fim, mostra-se como a aceleração cósmica é explicada sobre a presença da energia escura para cosmologias do tipo FRW.

Em seguida, no capítulo 2 foi apresentado uma revisão em cima dos modelos do tipo FRW utilizando a hidrodinâmica clássica, baseada na equação de Poisson, gravitação newtoniana e espaço euclidiano. Sendo assim, nota-se que para descrever modelos com pressão não nula, não se faz necessário a adoção de nenhum conceito relativístico, mesmo para diferentes tipos de curvatura. Nesta abordagem, o termo da curvatura do espaço foi associado à energia total da partícula do gás cosmológico em questão. Com base nisso, pode concluir que a partir dos possíveis valores da curvatura do espaço $(-1,0,1)$, identifica-se que a energia total da partícula inserida no gás cosmológico, assume valores $E_T > 0$, $E_T < 0$ e $E_T = 0$, ou seja, as velocidade da partícula no fluido são maior, menos ou igual a velocidade de escape do sistema, respectivamente. Sendo assim, os três destinos possíveis de uma bola atirada para cima da superfície da terra são análogas aos destinos possíveis de uma esfera que se expande num Universo newtoniano.

Logo adiante, vimos que para modelos com pressão não nula ($p \neq 0$) foi preciso abordar conceitos relativísticos na hidrodinâmica clássica, como massa gravitacional e a equivalência da massa energia. Abordagem conhecida cosmologia neo-newtoniana, elaborado por McCrea, em 1951. Nessa abordagem, não foi possível fazer a mesma analogia da curvatura com a energia total da partícula do gás.

Em seguida, no capítulo 3, foi feita uma abordagem Lagrangeana de acordo com o método original feito por Lima, Moreira & Santos, em 1998, o qual referencia o problema da descrição hidrodinâmica para modelos cosmológicos com pressão não nula (Lima, Moreira & Santos, 1998). Nesta abordagem, é considerada a dinâmica do fator de escala com a fonte da curvatura sendo um fluido cosmológico com equação de estado $p = (\gamma - 1)\rho$ substituído pelo movimento de uma partícula teste sob a ação de um potencial unidimensional $V = \alpha q^n$ (Lima, Moreira e Santos, 1998). Com isso, é possível generalizar o formalismo lagrangeano para fluidos. Tomando base nessa

proposta, podemos discutir os análogos lagrangeanos para modelos cosmológicos mais realistas, contendo as componentes de bárions, matéria escura, ou mesmo qualquer forma de interação entre elas. O tratamento é estendido para o seguinte cenário cosmológico acelerado: matéria- x + CDM (Λ CDM). Logo, o potencial Unidimensional obtido de acordo com parâmetros cosmológicos foi:

$$\bullet \frac{V(x)}{H_0^2 x_0^2} = -\frac{\Omega_{0x}}{2} \left(\frac{x_0}{x}\right)^{3\omega+1} - \frac{\Omega_{0m}}{2} \left(\frac{x_0}{x}\right).$$

Referências Bibliográficas

- Alpher, R. A.; Bethe, H.; Gamow, G., 1948, Phys. Rev., 73, 803.
- Alpher, R. A.; Herman, R. C., 1949, Phys. Rev., 75, 1089.
- Berman, Marcelo S. e Gomide, Fernando de Mello, 1927 – Introdução à cosmologia relativística. Curitiba, A. Einstein, 1986. 215 p.
- Busti, Vinícius Consolini. – Tese de Doutorado pela USP. Cosmologia na era da Precisão: O Método de Dyer-Roedere e a Influência das Homogeneidades nos Testes Cosmológicos. São Paulo, 2013.
- Carvalho, J. C. et al., 1992, Phys. Rev.D., 45, 3497.
- Carvalho, Maria I. B. de e Matos, Anibal C. C. de. Mecânica Lagrangeana. Apresentação à disciplina Introdução à Mecânica Clássica pela Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto. Portugal, 2002.
- de Sitter, W., 1917, MNRAS, 91, 483.
- Einstein, A., 1917, Preuss Akad. Wiss. Berlin Sitzber. 142; Impresso em português pela Fundação Calouste Gulbenkian - Coleção de Textos Especiais da Física Moderna, Vol. I, 1980, 234.
- de Sitter, W., 1917, MNRAS, 78, 3-28.
- Einstein, A. e de Sitter, W., 1932, Proc. Nat. Acad. Sci. USA.
- Filippenko, A. V., Optical Spectra of Supernovae, ARA&A, 1997, Vol. 35, p. 309.
- Friedmann, A., 1922, Zeitschrift für Physik 10, 377.
- Gamow, G., 1946, Phys. Rev., 70, 572.
- Gamow, G., 1948, Phys. Rev., 74, 505.
- Guth, A. H., Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems, Phys. Rev. D, 1981, Vol. 23, p. 347.
- Holanda, Rodrigo Fernandes de Lira. – Dissertação de Mestrado pela USP. Análogos Clássicos para Cosmologias Relativísticas Aceleradas: Uma Abordagem Lagrangeana. São Paulo, 2007.
- Horvath, J. E., Lugones, G., Scarano, S. Jr., Texeira, R., Allen, M. P., Cosmologia Física – São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007.
- Hubble, E., 1929, Proceedings of the Royal Academy of Science, 15, 168.
- Hoyle, F. e Fowler, W. A., Nucleosynthesis in Supernovae., ApJ, 1960, Vol. 132, p. 565.
- Landau, L. D. e Lifshitz, E. M., The Classical Theory of Fields, 1975.
- Larson D., Dunkley J., Hinshaw G., et al. Seven-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Power Spectra and WMAP-derived Parameters, ApJS, 2011, vol. 192, p. 16.
- Lemaître, G., 1931, MNRAS, 91, 483.
- Lima, Felix Silva de, 2013. – Um breve estudo sobre a Teoria da Relatividade Geral e sua Importância para a Física Moderna. Publicado no 1º Congresso Universitário da Universidade Estadual da Paraíba, 2013.

- Lima, J. A. S., Moreira, J. A. M. e Santos, J., 1998, *Gen. Relativity and Grav.*, 30, 425.
- Lima, J. A. S. e Alcaniz, J. S., Thermodynamics, spectral distribution and the nature of dark energy, *Physics Letters B*, 2004, Vol. 600, p. 191.
- Longair, M. S., *Galaxy Formation*, 2008.
- McCrea, W. H. e Milne, E. A., 1934, *Quart. J. Math.* 5, 73.
- McCrea, W. H., 1951, *Proc. Roy. Soc. Lond. A* 206, 562.
- Milne, E. A., 1934, *Quart. J. Math.* 5, 73.
- Mukhanov, V., *Physical Foundations of Cosmology*, 2005.
- Peebles, P. J. E. - *Principles of Physic Cosmological*, 1995, Princeton.
- Penzias, A. A.; Wilson, R. W., 1965, *ApJ*, 142,419.
- Perlmutter, S. J. *et al.*, 1999, *ApJ*, 517, 565.
- Riess, A. G. et al., 1998, *Astronomical J.*, 116, 1009. Perlmutter, S. J. et al., 1998, *nature*, 391, 51.
- Robertson, H.P., 1936, *ApJ*, 83, 185 Walker, A.G., 1944, *J. Lond. Math. Soc.*, 19, 219.
- Rubin, V. C. e Ford, W. K. Jr., Rotation of Andromeda Nebula from of Spectroscopic Survey of Emission Regions, *ApJ*, 1970, Vol. 159, p. 379.
- Schutz, B. F., *A First Course in General Relativity*, 1985.
- Smoot G. F., Bennett C. L., Kogut A., et al. Structure in the COBE differential microwave radiometer first-year maps, *ApJ*, 1992, vol. 396, p. L1.
- Spergel, D.N. *et al.*, 2003[astro-ph/0302209]. WMAP Collaboration 2003, Disponível em <http://map.gsfc.nasa.gov>.
- Symon, Keith R., *Mecânica / Keith R. Symon*; tradução de Gilson Batista. – 2. Ed. – Rio de Janeiro: Campus, 1986.
- Weinberg, S. - *Cosmology and Gravitation*, 1972, John Wiley, NY.
- Weinberg, S., The Cosmological Constant Problem, *Reviews of Modern Physics*, 1989, Vol. 69, p. 1.
- Weinberg, S., *Cosmology*. Oxford University Press, 2008.
- Zel'dovich, Y. B., Special Issue: The Cosmological Constant and the Theory of Elementary Particles, *Soviety Physics Uspekhi*, 1968, Vol. 11, p. 381.
- Zwicky, F., Die Rotverschiebung von extragalaktischen Nebeln, *Helvetica Physica Acta*, 1933, Vol. 6, p. 110.