



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA**  
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA**

**JOSÉ ELIAS DA SILVA**

**EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS E APLICAÇÕES**

Campina Grande/PB  
Dezembro/2010

JOSÉ ELIAS DA SILVA

**EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS E APLICAÇÕES**

Trabalho de Conclusão do Curso de  
Licenciatura Plena em Matemática  
da Universidade Estadual da  
Paraíba. Em cumprimento às  
exigências para obtenção do Título  
de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. OSMUNDO ALVES DE LIMA

Campina Grande/PB  
Dezembro/2010

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL – UEPB

Si381e Silva, José Elias da.  
Equações Diferenciais Ordinárias e Aplicações  
[manuscrito] / José Elias da Silva. – 2011.  
26 f. : il.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) – Centro de Ciências Tecnológicas, 2011.

“Orientação: Prof. Dr. Osmundo Alves de Lima, Departamento de Matemática e Estatística”.

1. Equações Diferenciais - Aplicações. 2. Equações Diferenciais Ordinárias. 3. Aprendizagem – Matemática.  
I. Título.

21. ed. CDD 515.35

JOSÉ ELIAS DA SILVA

## EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS E APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão do Curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba. Em cumprimento às exigências para obtenção do Título de Licenciado em Matemática.

### BANCA EXAMINADORA

*Osmundo Alves de Lima*

---

**Prof. Dr. Osmundo Alves de Lima**  
Departamento de Matemática - CCT/UEPB  
Orientador

*Aldo Trajano Lourêdo*

---

**Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo**  
Departamento de Matemática - CCT/UEPB  
Examinador

*Manuel Milla Miranda*

---

**Prof. Dr. Manuel Milla Miranda**  
Departamento de Matemática - CCT/UEPB  
Examinador

Campina Grande, 07 de Dezembro/2010

## Dedicatória

Dedico este trabalho  
às minhas filhas  
Jenny, Mylla e Sarah.

## Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus.

Agradeço aos meus pais, Silva e Detinha, por estarem sempre ao meu lado me apoiando em cada decisão tomada, em cada caminho seguido. Não importando a minha escolha nunca me deixaram só e sempre acreditaram em mim.

Agradeço aos meus irmãos e a toda minha família, que sempre torceram por mim e nunca deixaram de acreditar no meu sucesso. Em especial as minhas filhas, Brenda, Camila e Sarah, que o simples fato de existirem é uma motivação a mais para que eu continue na minha caminhada.

Agradeço a todos os meus professores, que muito contribuíram para meu crescimento acadêmico. Em especial eu agradeço ao meu professor e orientador prof. Dr. Osmundo Alves de Lima.

Agradeço aos meus colegas de turma, que juntos formamos a melhor turma da UEPB de todos os tempos. Como não existe um carinho maior ou melhor por nenhum citos seus nomes em ordem alfabética: Arthur, Ewerton, Janaína, Joselito, Leandro, Luanna, Luciano, Melânia, Renata, Renato, Samara, Socorro, Waldênia.

Em fim, A todos que de uma forma ou outra sempre torceram por mim, o meu muito obrigado!

## Resumo

A maioria das leis da Física, Biologia, Química e Ciências Sociais encontram suas expressões naturais nas Equações Diferenciais. Se por um lado, inúmeros problemas em Topologia, Geometria e Cálculo das Variações são formulados através de Equações Diferenciais ou a elas se reduzem, por outro lado, até mesmo o método da separação das variáveis aplicado a determinadas Equações Diferenciais Parciais nos conduz a uma Equação Diferencial Ordinária. O estudo das Equações Diferenciais começou com os métodos do Cálculo Diferencial e Integral, descoberto simultaneamente por Newton e Leibniz, para resolver problemas modelados por lei físicas e geométricas. Em fins do século dezoito a teoria das Equações Diferenciais se transformou numa das ferramentas mais importante e eficaz para pesquisa científica e tecnológica. As contribuições de Euler, Lagrange, Laplace e outros foram decisivas no desenvolvimento do Cálculo das Variações, Mecânica Celeste, Teoria das Oscilações, Elasticidade, Dinâmica dos Flúidos e outros. No século dezenove com o advento da noção de limite pôde se fazer uma reformulação geral visando maior rigor e exatidão nos métodos. Enquanto que, antes a preocupação era obter uma solução geral para uma dada Equação Diferencial, agora tem-se como questão prioritária em cada problema a existência e unicidade de soluções satisfazendo condições iniciais dadas. Este problema é conhecido como problema de Cauchy.

**Palavras chave:** Existência, Unicidade, Problema da Cauchy.

## Abstract

Most laws of physics, biology, chemistry and social sciences find their natural expressions in Differential Equations. On the one hand, many problems in Topology, Geometry and Calculus of Variations are formulated by Equation Differential or they are basically on the other hand, even the method of separation variables applied to certain Partial Differential Equations leads to a ODE. The study of differential equations began with the methods of differential calculus and Integral, simultaneously discovered by Newton and Leibniz, to solve problems modeled by physical laws and geometric. At the end of the eighteenth century the theory of differential equations has become a most important and effective tools for scientific research and technological. The contributions of Euler, Lagrange, Laplace and others were instrumental in the development of Calculus of Variations, Celestial Mechanics, Oscillation Theory, Elasticity, Dynamics Fluid and others. In the nineteenth century with the advent of term limits might make a general overhaul for greater rigor in the methods and accuracy. While before the concern was to obtain a general solution to a given differential equation, now has as a priority in every problem and existence and uniqueness of solutions satisfying given initial conditions. This problem is known as problem Cauchy.

**Keywords:** Existence, Oneness, the Cauchy Problem.



# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Equações Diferenciais Ordinárias</b>	<b>3</b>
2.1	A Equação diferencial $y' = ay$ . . . . .	3
2.2	Equação Diferencial $y' = ay + b$ . . . . .	6
2.3	Equação Diferencial $y' = ay^2 + by + c$ . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Sistemas de Equações Diferenciais</b>	<b>15</b>
3.1	Sistemas de Equações Diferenciais Lineares . . . . .	15
3.2	Sistemas de Equações Diferenciais não Lineares . . . . .	21
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>25</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Quando é dada a derivada  $y' = f'(t)$  de uma função desconhecida  $y = f(t)$ , normalmente temos que encontrar a antiderivada. Às vezes, a derivada  $y'$  não é dada como uma função de  $t$ , mas está envolvida em uma equação que contém também a função desconhecida  $y = f(t)$ . Como exemplo temos a equação

$$y' = ay + bt + c$$

com coeficiente conhecidos  $a, b, c$ . Tais equações é chamada equação diferencial, já que ela contém não somente a função desconhecida, mas também na derivada. O problema consiste em encontrarmos uma função apropriada, que satisfaça à equação diferencial.

As equações diferenciais ocorrem frequentemente na análise de sistemas fisiológicos e de sistema ecológicos. Podemos falar brevemente sobre a análise de sistemas. Quando uma quantidade varia em uma parte de um sistema, sua taxa de variação normalmente depende de quantidades em outras partes dos sistema. Além disso, qualquer variação de uma quantidade pode influenciar indiretamente a própria quantidade, fenômeno este chamado feedback ou retroalimentação. O estudo dos sistemas de feedback originou-se na engenharia, mas sua aplicação nas biociências tornou-se mais frutífera.

A variável independente é normalmente o tempo. Portanto, representamo-lo por  $t$  na maior parte deste trabalho.

As variáveis dependentes são representadas por  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $m = m(t)$ ,  $N = N(t)$ ,  $Q = Q(t)$ , etc.

# Capítulo 2

## Equações Diferenciais Ordinárias

### 2.1 A Equação diferencial $y' = ay$

Uma das equações diferenciais mais simples é

$$\frac{dy}{dt} = ay \quad (2.1)$$

onde  $a$  é uma constante dada. A integração normalmente é feita por um procedimento um tanto simbólico. Sabemos que  $\frac{dy}{dt}$  é o limite do quociente de diferenças  $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ , quando  $\Delta t \rightarrow 0$ . Entretanto, não definimos  $\frac{dy}{dt}$  como um quociente de duas quantidades e  $dy$  e  $dt$  meramente como símbolos. Agora, negligenciamos este fato, multiplicamos a equação (2.1) por  $dt$  e temos simbolicamente

$$dy = ay \cdot dt.$$

Em seguida, dividindo-se por  $y$ , a equação se torna

$$\frac{dy}{y} = a \cdot dt$$

Aqui, a variável  $y$  ocorre somente no primeiro membro e  $t$  somente no segundo membro. Dizemos que separamos as variáveis. Por integração, temos:

$$\int \frac{dy}{y} = \int a \cdot dt$$

o que implica

$$\ln |y| = at + C \quad (y \neq 0)$$

onde  $C$  é uma constante arbitrária. Podemos remover o logaritmo natural, aplicando a função inversa. Conseqüentemente, a solução explícita da equação (2.1) é

$$|y| = e^{at+C}$$

Entretanto a solução é raramente escrita nesta forma. Já que  $e^{u+v} = e^u \cdot e^v$ , e já que  $y$  pode tomar valores positivos e negativos, reescrevemos a solução na forma

$$y = c \cdot e^{at} \quad \text{ou} \quad y = c \cdot \exp(at) \quad (2.2)$$

onde  $c$  substitui  $\pm e^C$ . A solução é uma função exponencial com coeficiente  $a$  dado e constante arbitrária  $c$ . Já que  $c$  é indeterminado, chamamos (2.2) de solução geral da equação diferencial  $y' = ay$ .

Como obtivemos a solução por um método simbólico, o resultado deve ser verificado. De (2.2) temos, por derivação, que

$$\frac{dy}{dt} = cae^{at}$$

que pode ser reescrita na forma  $\frac{dy}{dt} = ay$ . Consequentemente, a (2.2) satisfaz realmente a equação diferencial (2.1).

A figura a seguir ilustra o campo de inclinações para  $a = \frac{1}{2}$ . Dependendo da escolha de  $c$ , temos um número infinito de curvas integrais. Algumas delas estão representadas ( $c = 0$ ,  $c = \frac{1}{4}$ ,  $c = \frac{1}{2}$ )

A figura acima está representando o efeito da mudança de valores positivos para negativos de  $a$ . Para  $c > 0$  obtemos o crescimento no sentido usual, mas para  $a < 0$  obtemos o crescimento negativo (em casos especiais a redução, o decréscimo ou degradação).

**Exemplo 2.1 (Crescimento de uma célula.)** *Suponhamos que a massa de uma célula seja  $m_0$ . A célula cresce em um ambiente ideal. Então, sua massa é uma função do tempo, e podemos escrever  $m = m(t)$  com  $m = m_0$  em  $t = 0$ . Admitamos que substâncias químicas passem rapidamente através da parede celular, e que o crescimento seja determinado somente pela velocidade do metabolismo dentro da célula. Já que o rendimento do metabolismo depende da massa das moléculas participantes, é razoável admitirmos que a taxa de crescimento é proporcional à massa a cada instante, isto é,*

$$\frac{dm}{dt} = am \quad (2.3)$$

com uma certa constante positiva  $a$ .

É claro que existe uma limitação: se a massa  $m$  da célula alcançar um determinado tamanho, a célula se dividirá, ao invés de continuar a crescer. Então, adicionamos uma restrição,  $m < m_1$ .

A Equação diferencial (2.3) é da forma (2.1). Portanto, a solução geral é obtida a partir de (2.2):

$$m = c \cdot e^{at}.$$

Admitindo-se que  $m = m_0$ . Consequentemente, a integral particular de (2.3) é

$$m = m_0 e^{at}$$

com a restrição acima mencionada  $m < m_1$ .

Cpm nossas hipóteses fomos um pouco além da experiência. Introduzimos alguns argumentos teóricos. É costume dizer-se que estamos construindo um modelo. Se o nosso modelo é biologicamente significativo ou não, isto pode ser verificado por meio de experiências. Aqui, e nos modelos subsequentes, compartilhamos com o ponto de vista de G. F. Gause (Gause, 1934): "não há dúvida de que crescimento etc. é um problema biológico, e que deve ser solucionado por meio de experimentação e não na mesa de um matemático. Mas, de forma a penetrarmos profundamente na natureza desses fenômenos, temos que combinar o método experimental com a teoria matemática, uma possibilidade que foi criada por pesquisadores brilhantes. A combinação do método experimental com a teoria quantitativa é, em geral, uma das mais poderosas ferramentas nas mãos da ciência contemporânea".

**Exemplo 2.2 (Um processo de nascimento.)** Seja  $N$  o número de indivíduos em uma população animal ou vegetal. Esse número é dependente do tempo, de forma que podemos escrever  $N = N(t)$ . Estritamente falando,  $N(t)$  assume somente valores inteiros e é uma função descontínua de  $t$ . Entretanto,  $N(t)$  pode ser aproximado por uma função contínua e diferenciável desde que o número de indivíduos seja suficientemente grande.

Nos microorganismos, a reprodução ocorre por divisão celular simples. Nos indivíduos multicelulares distinguimos entre reprodução vegetativa e reprodução sexual. Incluiremos todas estas possibilidades no nosso estudo.

Admitimos que a proporção de indivíduos reprodutores permanece constante, durante o crescimento da população. Também admitimos a fertilidade constante. Então, a taxa de nascimento é proporcional ao número  $N(t)$  de indivíduos. Se finalmente excluirmos

a morte, a emigração e a imigração, a taxa de crescimento coincide com a taxa de nascimento. Então

$$\frac{dN}{dt} = \lambda N \quad (2.4)$$

onde  $\lambda$  (lambda) é uma constante. Podemos chamar  $\lambda$  a taxa de nascimento específico.

A Equação diferencial (2.4) é do tipo (2.1). Consequentemente, a solução é

$$N = N_0 \cdot e^{\lambda t}.$$

onde  $N_0$  representa o tamanho da população quando  $t = 0$ .

Este processo de nascimento torna-se bastante realístico em uma população grande que cresce em condições ideais, isto é, quando todos os fatores inibidores do crescimento estão ausentes.

Em uma pequena população, não podemos esperar que a ocorrência de nascimento seja distribuída regularmente durante todo o tempo. Ao invés disto, nos deparamos com flutuações aleatória. Então, o processo tem que ser modificado, à luz da teoria das probabilidades. Tal modelo refinado é chamado processo estatístico de nascimento. Para uma apresentação, ver Balliley (1964, Cap. 8).

## 2.2 Equação Diferencial $y' = ay + b$

Para  $b = 0$ , esta equação se reduz a  $y' = ay$ , a qual estudamos na seção anterior. Com  $b \neq 0$ , estamos lidando com a ligeira generalização. A equação diferencial é solucionada pelo mesmo método. Aqui estão as etapas:

$$\frac{dy}{dt} = ay + b \quad (a \neq 0) \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dt} = a \left( y + \frac{b}{a} \right) \quad (2.5)$$

Para simplificar, consideremos  $\frac{b}{a} = p$ . Então, separamos as variáveis

$$dy = a(y + p)dt \implies \frac{dy}{y + p} = a \cdot dt.$$

Por integração, temos:

$$\int \frac{dy}{y + p} = \int a \cdot dt$$

$$\ln |y + p| = at + C \implies |y + p| = e^{at+C} \implies y + p = c_0 \cdot e^{at}$$

onde  $c_0 = e^C$ . Finalmente,

$$y = c_0 \cdot e^{at} - \frac{b}{a} \quad (2.6)$$

Esta é a solução geral da Equação diferencial (2.5). Ela é válida para um valor arbitrário de  $c$ , como é mostrado pela verificação do resultado. Realmente, por derivação de (2.6) com relação a  $t$  temos

$$\frac{dy}{dt} = cae^{at} = a \left[ ce^{at} - \frac{b}{a} \right] + b = ay + b$$

que é a Equação dada (2.5)

**Exemplo 2.3 (Crescimento restrito)** *Nenhum organismo e nenhuma população cresce indefinidamente. Existem limitações estabelecidas pela disponibilidade de alimento ou abrigo, por falta de espaço, por condições físicas intoleráveis, ou por algum mecanismo de controle.*

*Suponhamos que exista um limite superior fixo para o tamanho  $y$  de um indivíduo, um tecido, uma população ou uma produção. O tamanho pode ser um volume, um peso, um diâmetro, um número etc. Representamos o limite superior por  $B$ . Então,  $y = y(t)$  pode aproximar-se de  $B$  assintoticamente. Isto implica que a taxa de crescimento  $\frac{dy}{dt}$  tenda para zero,  $B - y$  se torna cada vez menor. Uma formulação matemática plausível de tal modelo é dada pela equação diferencial*

$$\frac{dy}{dt} = k(B - y) \quad (2.7)$$

*onde  $k$  é uma constante positiva que determina a velocidade com que  $\frac{dy}{dt}$  tende a zero. Se  $y$  é pequeno em relação a  $B$ , então temos aproximadamente  $y' \approx kB = \text{constante}$ , isto é, o tamanho de  $y$  aumenta aproximadamente como uma função linear do tempo. Entretanto, se  $y$  está próximo de  $B$ , então  $B - y$  é uma quantidade positiva pequena, da mesma forma que a taxa de crescimento  $\frac{dy}{dt}$ .*

*A Equação (2.7) pode ser reescrita na forma*

$$y' = kB - ky = ay + b$$

*com  $a = -k$  e  $b = kB$ . Então, temos a solução geral:*

$$y = ce^{-kt} + B.$$

Já que  $y < B$ , a constante da integração,  $c$ , tem que ser negativa.

Uma solução particular é obtida admitindo-se que  $y = 0$  no instante  $t = 0$ .  
neste caso,  $c = -B$  e

$$y = B(1 - e^{-kt}). \quad (2.8)$$

Este modelo foi proposto por E. A. Mitscherlich em 1939. Ele se ajusta perfeitamente a alguns dados experimentais em agricultura. O leitor é convidado a traçar um gráfico da fórmula (2.8)

Para maiores detalhes, ver von Bertalanffy (1951, pág. 359).

**Exemplo 2.4 (Um processo de nascimento e imigração)** No exemplo da seção anterior, estudamos um processo de nascimento. Várias hipóteses foram feitas a respeito da população. Mantemos estas hipóteses com a diferença de que agora permitimos a imigração de indivíduos em uma taxa constante. A taxa é medida em número de indivíduos por unidade de tempo e representada por  $\nu$ . Então a equação se transforma em

$$\frac{dN}{dt} = \lambda N + \nu \quad (\lambda > 0, \nu > 0). \quad (2.9)$$

A Equação diferencial é obviamente da forma (2.5). Consequentemente, a solução geral é

$$N = ce^{\lambda t} - \frac{\nu}{\lambda}.$$

Admitindo que  $N = N_0$ , quando  $t = 0$ , obtemos  $c = N_0 + \frac{\nu}{\lambda}$ . Então, a solução particular da (2.9) é

$$N = N_0 e^{\lambda t} + \frac{\nu}{\lambda}(e^{\lambda t} - 1).$$

Aqui, o crescimento da população depende de dois termos. O primeiro é a uma função exponencial determinada apenas pela taxa específica de nascimento. O segundo aumenta também rapidamente, mas ele depende de ambas as taxas  $\nu$  e  $\lambda$ .

**Exemplo 2.5 (Resfriamento de um corpo)** Consideremos um corpo sem aquecimento interno, cuja temperatura é mais elevada do que a do meio circundante. O corpo então se esfriará. Queremos saber como a temperatura do corpo baixa com uma função do



tempo.

Seja  $T = T(t)$  a temperatura do corpo no instante  $t$ ,  $T_0$  sua temperatura quando  $t = 0$ , e  $T_s$  a temperatura constante do meio.

A derivada  $\frac{dT}{dt}$  é chamada a taxa de resfriamento. já que  $T$  decresce, esta taxa é negativa. Ela é dependente da diferença  $T - T_s$ . Sob condições favoráveis, a taxa de resfriamento é proporcional a  $T - T_s$ , isto é,

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_s) \quad (2.10)$$

onde  $k$  é uma constante positiva determinada pelas condições físicas da troca de calor. já que o segundo membro pode ser escrito como  $(-k)T + kT_s$ , a equação diferencial é da forma (2.5). A partir de (2.6) deduzimos a solução geral e obtemos

$$T = ce^{-kt} + T_s.$$

Finalmente, satisfazemos a condição  $T = T_0$  no instante  $t = 0$ . Isto leva a  $c = T_0 - T_s$  e

$$T = T_s + (T_0 - T_s)e^{-kt}$$

Como  $t$  tende para infinito, o segundo termo tende para zero, e  $T$  se aproxima de  $T_s$  assintoticamente. A Equação (2.10) é conhecida como a lei de Newton do resfriamento.

**Exemplo 2.6 (Um problema de difusão)** Admitimos que uma célula de volume constante está suspensa em um líquido homogêneo, que contém um soluto de concentração  $c_0$ , constante no tempo e no espaço. Seja  $c = c(t)$  a concentração de soluto dentro da célula no instante  $t$  e suponhamos que o soluto seja quase que uniformemente distribuído sobre a célula durante todo o tempo, de forma que  $c = c(t)$  depende somente do tempo.

Por difusão, as moléculas do soluto entrarão na célula, mas também existirão moléculas do soluto que sairão da célula. Então, existe um fluxo de moléculas através da membrana celular em ambas as direções. O fluxo resultante é do líquido para a célula, se  $c_0$  for maior do que  $c(t)$  e vice-versa. estamos interessados em encontrar a

função  $c(t)$ .

Seja  $m = m(t)$  a massa do soluto na célula,  $A$  a área da embrama celular, e  $V$  o volume da célula. Então, por definição de concentração

$$m(t) = V \cdot c(t) \quad (2.11)$$

A derivada  $\frac{dm}{dt}$  é a taxa de aumento de  $m$  e pode ser chamada a taxa de fluxo resultante do nosso problema. A lei de Fick estabelece que  $\frac{dm}{dt}$  é proporcional à área da membrana e à diferença de concentração nos dois lados da membrana. Logo,

$$\frac{dm}{dt} = kA(c_0 - c)$$

Se  $c < c_0$ , isto é, se o soluto tem uma concentração menor dentro da célula do que fora dela,  $m$  aumentará. Consequentemente,  $k$  é uma constante positiva. Esta constante é determinada pela estrutura e espessura da membrana. Ela é chamada a permeabilidade da membrana para o soluto particular.

Por meio de (2.11) podemos substituir  $\frac{dm}{dt}$  por  $V \cdot \frac{dc}{dt}$ , na nossa equação diferencial. Então, obtemos

$$\frac{dc}{dt} = \frac{kA}{V}(c_0 - c).$$

Integramos esta equação usando a solução explícita (2.6) e temos

$$c = K \cdot \exp\left(-\frac{kA}{V}t\right) + c_0$$

onde  $K$  representa a constante de integração. Quando  $t$  tende para o infinito,  $c(t)$  se aproxima assintoticamente de  $c_0$ . A constante  $K$  pode ser determinada por alguma condição inicial, seja  $c = c^*$  no instante  $t = 0$ . Deixamos para o leitor a discussão dos dois casos  $c^* > c_0$  e  $c^* < c_0$ .

*Esta aplicação foi adaptada de Thrall et al. (1967, CA 10).*

Devemos observar, entretanto, que este modelo é uma rude aproximação da realidade. A difusão através de membranas celulares é um processo complicado que não pode ser tratado adequadamente neste contexto.

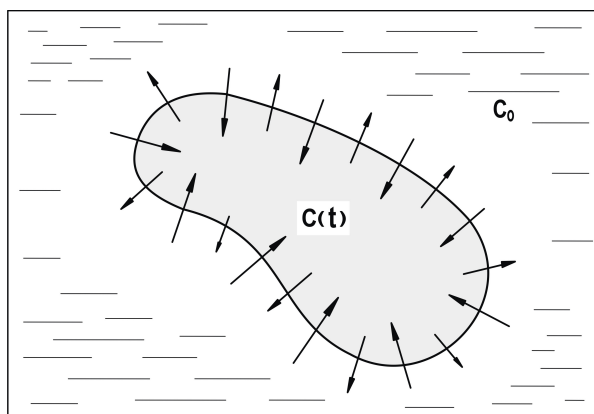


Figura 2.1: Difusão de moléculas através da parede celular. Na figura admitiu-se que  $c_0 > c(t)$  e que, portanto, entram mais moléculas na célula do que saem.

## 2.3 Equação Diferencial $y' = ay^2 + by + c$ .

Na equação diferencial  $y' = ay + b$ , que estudamos na seção anterior, os termos desconhecidos  $y = y(t)$  e  $y' = \frac{dy}{dt}$  estão na primeira potência. Portanto, a equação é dita linear. Na equação

$$\frac{dy}{dt} = ay^2 + by + c \quad (2.12)$$

ocorre o termo  $y^2$ . Por esta razão, (2.12) é chamada uma equação diferencial não linear.

Antes de solucionarmos a equação (2.12), consideramos o polinômio quadrático do segundo membro e a equação quadrática correspondente

$$ay^2 + by + c = 0.$$

Podemos resolver esta equação usando a Fórmula

$$x = \frac{-b \pm (b^2 - 4ac)^{1/2}}{2a}.$$

Representamos as duas raízes por  $A$  e  $B$  e admitimos que são dois números reais diferentes. O polinômio quadrático pode então ser reescrito na forma

$$ay^2 + by + c = a(A - y)(B - y). \quad (2.13)$$

Realmente, se  $y = A$ , o fator  $A - y$  desaparece e conseqüentemente a equação é satisfeita. O mesmo argumento é válido se  $y = B$ .

Com (2.13) em mente reescrevemos nossa equação diferencial original na forma

$$\frac{dy}{dt} = a(A - y)(B - y) \quad (A \neq B). \quad (2.14)$$

O método de separar as variáveis leva a

$$\frac{dy}{(A-y)(B-y)} = a dt. \quad (2.15)$$

Para simplificar a integração, reescrevemos a fração no primeiro membro na forma

$$\frac{1y}{(A-y)(B-y)} = \frac{1}{B-A} \left( \frac{1}{y-B} - \frac{1}{y-A} \right). \quad (2.16)$$

Esta fórmula pode facilmente ser verificada. Ela é válida somente sob a hipótese de que  $A \neq B$ . Os termos  $\frac{1}{y-B}$  e  $\frac{1}{y-A}$  são chamados frações parciais.

Agora, somos capazes de resolver (2.15). Em vista de (2.16) a equação diferencial se torna

$$\left( \frac{1}{y-B} - \frac{1}{y-A} \right) dy = a(B-A) dt.$$

Com a integração termo a termo, obtemos

$$\ln |y-B| - \ln |y-A| = a(B-A)t + C$$

onde  $C$  é uma constante de integração arbitrária.

Portanto

$$\ln \frac{|y-B|}{|y-A|} = a(B-A)t + C.$$

Aplicando a função exponencial a ambos os membros, temos:

$$\frac{y-B}{y-A} = -ke^{a(B-A)t}. \quad (2.17)$$

O sinal de menos, no segundo membro não é necessário, mas é conveniente em algumas aplicações. Finalmente, resolvemos (2.17) com relação a  $y$  e obtemos a solução explícita de (2.14):

$$y = A + \frac{B-A}{1 + ke^{a(B-A)t}}. \quad (2.18)$$

**Exemplo 2.7 (crescimento restrito)** *Retornamos ao estudo do crescimento de populações. Seja  $y = y(t)$  o número de indivíduos em uma população no instante  $t$ . Da equação diferencial  $y' = ay$  com  $a > 0$  resulta um crescimento exponencial não-restrito, enquanto que  $y' = a(B-y)$  com  $a > 0$ , e  $B > 0$  resulta em crescimento que é praticamente linear no início e se eleva mais tarde.*

*Para termos um modelo de crescimento que seja biologicamente mais significativo, podemos combinar as duas tentativas, isto é, admitir que  $y'$  é proporcional a  $y$  e a  $B-y$ . Esta idéia leva à equação diferencial*

$$\frac{du}{dt} = \lambda y(B-y) \quad (2.19)$$

onde  $\lambda$  é uma constante positiva.

Esta equação é um caso especial de (2.14) com  $A = 0$  e  $a = -\lambda$ . Consequentemente, a solução geral resulta imediatamente de (2.18):

$$y = \frac{B}{1 + ke^{-\lambda(B)t}}. \quad (2.20)$$

No nosso modelo,  $y$  nunca pode exceder  $B$ . Portanto, o denominador em (2.20) deve ser maior que 1, e  $k$  tem que ser restrito a valores positivos. A quantidade  $y$  aumenta monotonicamente já que a equação diferencial (2.19) implica em que  $dy/dt > 0$ . Para  $t \rightarrow -\infty$ ,  $y$  tende para zero, e para  $t \rightarrow +\infty$ ,  $y$  tende para  $B$ . O crescimento começa lentamente, depois se torna mais rápido e finalmente diminui. O crescimento é mais rápido na vizinhança do ponto de inflexão. Para determinarmos o seu local, temos que igualar a segunda derivada de  $y = y(t)$  a zero.

Derivando (2.19), obtemos:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \lambda \left[ \frac{dy}{dt}(B - y) - y \frac{dy}{dt} \right] = \lambda(B - 2y) \frac{dy}{dt}.$$

Esta expressão somente pode ser nula se  $B - 2y = 0$  ou  $y = B/2$ , isto é, o ponto de inflexão está na metade do caminho entre as retas  $y = 0$  e  $y = B$ . Para termos a abcissa, fazemos  $y = B/2$  na equação (2.20) e resolvermos com relação a  $t$ :

$$t = \frac{\ln k}{B\lambda}.$$

Esta abcissa particular é positiva ou negativa dependendo se  $k > 1$  ou  $k < 1$

A figura a seguir mostra um gráfico da função (2.20), em uma aplicação particular. A curva é em forma de  $S$  ou signóide. A Fórmula (2.20) é geralmente conhecida como função logística. Ela foi introduzida na dinâmica de populações, por Verhulst em 1838. O gráfico da função logística é chamado curva logística. Existem inúmeros dados experimentais sobre o crescimento especialmente para protozoários e bactérias, para os quais o estabelecimento de uma curva logística foi bem sucedido. Mas em algumas outras populações o ajustamento foi pobre e o prognóstico errôneo.

Para maiores detalhes e dados experimentais ver D'Ancora (1954, Págs 58-77), Gause (1934, Pág. 35 ff), Kostitzin (1939, Cap. 4), Lotka (1956, Cap. 7), Pielou.

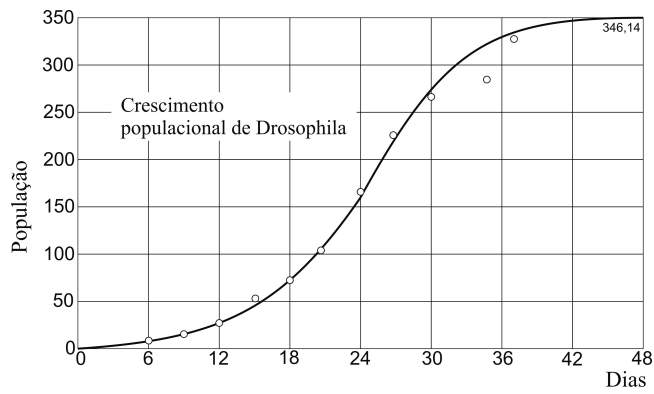


Figura 2.2: Crescimento de uma população de *Drosophila*, sob condições experimentais controladas. A figura foi reproduzida de Lotka (1956, Pág. 69). Os dados são atribuídos a R. Pearl e S. L. Parker.

# Capítulo 3

## Sistemas de Equações Diferenciais

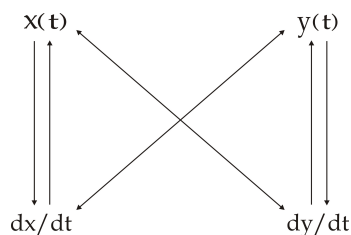
### 3.1 Sistemas de Equações Diferenciais Lineares

Em sistemas fisiológicos, bem como em populações, existem normalmente duas ou mais funções dependentes do tempo. Admitimos algum tipo de interação entre as quantidades  $x$  e  $y$ . Logo, as taxas de variação  $\frac{dx}{dt}$  e  $\frac{dy}{dt}$  podem depender ambas das quantidades  $x$  e  $y$ . Um caso relativamente simples consiste de duas equações simultâneas:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy \end{cases} \quad (3.1)$$

onde,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  são constantes dadas.

As funções incógnitas  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  e suas derivadas aparecem com potência 1, por isto o sistema (3.1) é chamada sistema de equações diferenciais lineares. As quantidades  $x$  e  $y$  interagem de tal forma que determinam completamente as taxas  $\frac{dx}{dt}$  e  $\frac{dy}{dt}$ . Conforme o tempo passa,  $x$  e  $y$  aumentarão ou diminuirão, de acordo com as taxas  $\frac{dx}{dt}$  e  $\frac{dy}{dt}$ . Logo, as taxas determinarão os futuros valores de  $x$  e  $y$ . Temos duas linhas de retroalimentação, como mostra a representação gráfica.



O sistema (3.1) é resolvido pelo método das funções testes.

tentemos as seguintes funções especiais:

$$x = Ae^{\lambda t} \quad e \quad y = Be^{\lambda t} \quad (3.2)$$

onde,  $A$ ,  $B$  e  $\lambda$  são constantes a serem determinadas mais tarde. Admitamos  $A \neq 0$  e  $B \neq 0$ .

Substituindo (3.1) e (3.2), obtém-se:

$$\begin{cases} A\lambda e^{\lambda t} = aAe^{\lambda t} + bBe^{\lambda t} \\ B\lambda e^{\lambda t} = cAe^{\lambda t} + dB e^{\lambda t} \end{cases}$$

e após cancelarmos  $e^{\lambda t}$ , resulta:

$$\begin{cases} A\lambda = aA + bB \\ B\lambda = cA + dB \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} (a - \lambda)A + bB = 0 \\ cA + (d - \lambda)B = 0 \end{cases}$$

donde se conclui que

$$\frac{A}{B} = -\frac{b}{a - \lambda} = -\frac{d - \lambda}{c} \quad (3.3)$$

e portanto, temos:

$$bc = (a - \lambda)(d - \lambda) = 0$$

ou na forma padrão

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0 \quad (3.4)$$

A equação algébrica (3.4) é chamada equação característica do sistema (3.1) e suas raízes são ditas raízes características.

O método varia de acordo com a natureza das raízes da equação (3.3), isto é, se são raízes reais e distintas, reais e iguais ou complexas.

1º Caso: Suponhamos que,  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são raízes reais e distintas da equação (3.4).

Com  $\lambda = \lambda_1$  encontramos constantes  $A_1$  e  $B_1$  adequadas, a partir de (3.3)

$$\frac{A_1}{B_1} = -\frac{b}{a - \lambda_1} = -\frac{d - \lambda_1}{c} \quad (3.5)$$

Os coeficientes  $A_1$  e  $B_1$  não são completamente determinados. um deles pode ser escolhido arbitrariamente.

Da mesma forma, com  $\lambda = \lambda_2$  encontramos  $A_2$  e  $B_2$ , tais que:

$$\frac{A_2}{B_2} = -\frac{b}{a - \lambda_2} = -\frac{d - \lambda_2}{c} \quad (3.6)$$

então observemos duas soluções particulares para (3.1), a saber:



$$x = A_1 e^{\lambda_1 t}, \quad y = B_1 e^{\lambda_1 t}$$

e

$$x = A_2 e^{\lambda_2 t}, \quad y = B_2 e^{\lambda_2 t}$$

Para obtermos a solução geral, combinamos as soluções particulares como se segue

$$\begin{cases} x = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} \\ y = B_1 e^{\lambda_1 t} + B_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases} \quad (3.7)$$

Em cada par de coeficientes  $A_1, B_1$  e  $A_2, B_2$  um coeficiente pode ser escolhido arbitrariamente. Então a solução geral contém duas constantes arbitrárias.

**Exemplo 3.1** Considere o sistema abaixo

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 2y \\ \frac{dy}{dt} = 2x - 2y \end{cases}$$

cuja equação característica é:

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

e cujas raízes são  $\lambda_1 = -1$  e  $\lambda_2 = 2$  logo as soluções particulares são da forma:

$$x = A_1 e^{-t}, \quad y = B_1 e^{-t}$$

e

$$x = A_2 e^{2t}, \quad y = B_2 e^{2t}$$

De (3.5) e (3.6), temos duas condições:

$$\frac{A_1}{B_1} = -\frac{b}{a - \lambda_1} = -\frac{-2}{3 - 1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

e

$$\frac{A_2}{B_2} = -\frac{b}{a - \lambda_2} = -\frac{-2}{3 - 2} = \frac{2}{1} = 2$$

Logo,  $B_1 = 2A_1$  e  $A_2 = 2B_2$ .

Se  $A_1 = k$  e  $B_2 = m$ , temos  $B_1 = 2k$  e  $A_2 = 2m$ , onde  $k$  e  $m$  são fixos arbitrários.

Assim, a solução geral é dada por:

$$\begin{cases} x = ke^{-t} + 2me^{2t} \\ y = 2e^{-t} + me^{2t} \end{cases}$$

Quando  $t \rightarrow +\infty$  então  $e^{-t} \rightarrow 0$  e  $e^{2t} \rightarrow +\infty$ , logo  $x$  e  $y$  tendem para  $+\infty$  se  $m > 0$  ou tendem para  $-\infty$  se  $m < 0$ . Em qualquer caso, o sistema  $(x, y)$  explode.

**Aplicação 3.1 (Biologia)** Consideremos uma área fechada, que contém duas espécies animais ou vegetais. Sejam  $N_1 = N_1(t)$  e  $N_2 = N_2(t)$  o número de indivíduos das duas espécies como função do tempo. Admitamos que existe alguma interação entre as duas espécies. A primeira espécie pode ser uma fonte de alimento para a segunda. Uma espécie pode envenenar o solo inibindo o crescimento de uma espécie vegetal, etc.

Podemos descrever o processo pelas seguintes equações:

$$\frac{dN_1}{dt} = \left\{ \begin{array}{l} \text{taxa de variação} \\ \text{na ausência de} \\ \text{interação} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{taxa de variação} \\ \text{devido a interação} \\ \text{com espécie 2} \end{array} \right\}$$

$$\frac{dN_2}{dt} = \left\{ \begin{array}{l} \text{taxa de variação} \\ \text{devido a interação} \\ \text{com espécie 1} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{taxa de variação} \\ \text{na ausência} \\ \text{de interação} \end{array} \right\}$$

Na ausência de interação, podemos supor que a taxa de variação da população seja proporcional ao tamanho da população. Também, para simplificar podemos admitir que a taxa de variação devido à interação é proporcional ao tamanho da população que interfere. Isto nos leva ao sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = aN_1 + bN_2 \\ \frac{dN_2}{dt} = cN_1 + dN_2 \end{cases} \quad (3.8)$$

onde,  $a, b, c, d$  são constantes.

i) Se as raízes características têm sinais contrários ou ambas são positivas o sistema ecológico explodirá.

ii) Se ambas as raízes são negativas, a população decrescerá.

iii) Se as raízes características não são reais o sistema oscilará.

**Exemplo 3.2 (Passagem de alimentos nos ruminantes)** Os ruminantes, tais como carneiros, cabras e bovinos, têm um estômago complicado. O alimento recém-ingerido, mas não mastigado, passa a um compartimento de estocagem chamado rume. Mais tarde, quando o alimento é mastigado, passa através do folhoso para coagulador, onde será digerido. A partir daí ele entra lentamente no intestino. Para termos uma descrição matemática da passagem de alimento através do trato digestivo, Blaxter, Graham e Wainman (1956) propuseram o seguinte modelo:

Seja  $r = r(t)$  a quantidade de alimento, no rume, num instante  $t$ . Quando  $t = 0$ , esta quantidade inicial é  $r_0$ . . Seja  $u = u(t)$  a quantidade de alimento no coagulador, num instante  $t$ . Quando  $t = 0$  temos  $u = 0$ . A taxa de decréscimo de  $r = r(t)$  é proporcional a  $\underline{r}$ .

Admitamos que,  $\frac{du}{dt}$  consiste de dois termos: uma taxa de aumento igual à taxa de decréscimo de  $\underline{r}$  e uma taxa de decréscimo proporcional a  $\underline{u}$ . Assim, obtemos o sistema de equações diferenciais lineares:

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = -k_1 r \\ \frac{du}{dt} = k_1 r - k_2 u \end{cases} \quad (3.9)$$

onde,  $k_1 \neq k_2$  são constantes positivas. Representamos ainda a quantidade total de alimento que entrou no duodeno, no tempo  $t$ , por  $v = v(t)$ . Desde que, o duodeno recebe exatamente a mesma quantidade que deixa o coagular, temos a equação diferencial:

$$\frac{dv}{dt} = k_2 u \quad (3.10)$$

onde,  $v = 0$  no instante  $t = 0$ .

Finalmente, admitimos que as fezes deixam o animal em um prazo de tempo constante, que representaremos por  $\tau$ . Desprezando a perda de matéria que entra nos vasos sanguíneos, temos:

$$w(t) = v(t - \tau) \quad \text{para} \quad t > \tau \quad (3.11)$$

O processo completo pode ser resumido graficamente por:

$$r \xrightarrow{k_1} u \xrightarrow{k_2} v \longrightarrow w$$

onde  $r =$  rume,  $u =$  coagulador,  $v =$  duodeno e  $w =$  fezes

Temos, a equação característica é:

$$\lambda^2 + (k_1 + k_2)\lambda + k_1 k_2 = 0 \quad (3.12)$$

então  $\lambda = -k_1$  e  $\lambda_2 = -k_2$ .

Logo, a solução geral pode ser escrita

$$\begin{cases} r = A_1 e^{-k_1 t} + A_2 e^{-k_2 t} \\ u = B_1 e^{-k_1 t} + B_2 e^{-k_2 t} \end{cases} \quad (3.13)$$

Os coeficientes devem satisfazer (3.5) e (3.6). Logo, temos:

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{k_2 - k_1}{k_1} \quad \frac{A_2}{B_2} = \frac{k_2 - k_2}{k_1} = 0$$

ou

$$B_1 = \frac{k_1}{k_2 - k_1} A_1 \quad e \quad A_2 = 0 \quad (3.14)$$

Das condições  $r(0) = r_0$  e  $u(0) = 0$ , temos

$$r_0 = A_1 + B_1 \quad e \quad 0 = B_1 + B_2 \quad (3.15)$$

Combinando (3.14) e (3.15), temos

$$\begin{aligned} A_1 &= r_0, & A_2 &= 0 \\ B_1 &= \frac{k_1}{k_2 - k_1} r_0, & B_2 &= -\frac{k_1}{k_2 - k_1} r_0 \end{aligned}$$

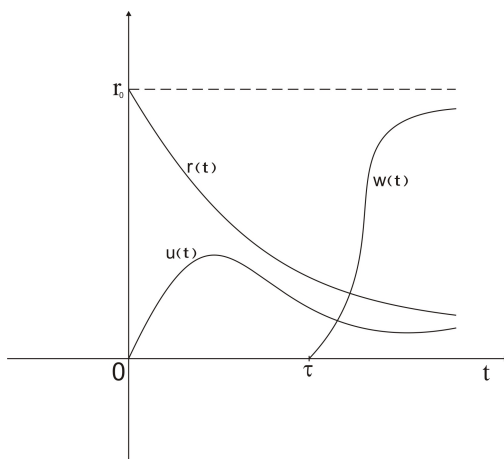
Então, obtemos a solução particular

$$\begin{aligned} r &= r_0 e^{-k_1 t} \\ u &= \frac{k_1}{k_2 - k_1} r_0 (e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}) \end{aligned}$$

De (3.2), decorre por integração, que

$$v = k_2 \int_0^t u(s) ds - r_0 - \frac{r_0}{k_2 - k_1} [k_2 e^{-k_1 t} - k_1 e^{-k_2 t}] \quad (3.16)$$

Finalmente, (3.15) dá uma fórmula para  $w = w(t)$  que se origina de (3.17) substituindo  $t$  por  $t - \tau$ . Este é um exemplo de Análise de compartimento.



## 3.2 Sistemas de Equações Diferenciais não Lineares

Durante a primeira guerra mundial. 1914-1918 a pesca no Mar Adriático foi suspensa. Após a guerra, os tubarões e outras espécies vorazes se tornaram mais numerosos em relação aos tipos herbívoros. D'Ancona concluiu que a proibição da pesca permitiu que a população de peixes crescesse e isto deu às espécies predadoras uma vantagem sobre as espécies predadas.

Esta observação estimulou um modelo matemático, sobre dinâmica de populações no caso em que uma espécie, chamada predadora, se alimenta de outra espécie, chamada presa. Admitimos que a população de presas encontra alimento em todas as épocas, mas o suprimento alimentar da população predadora depende inteiramente da população de presas. Também admitimos que durante o processo, o meio não muda em favor de uma espécie e que a adaptação genética é suficientemente lenta.

Quando a população de presas aumenta em tamanho, as espécies predadoras obtêm uma base alimentar maior. Consequentemente, com um certo atraso no tempo, elas também se tornarão mais numerosas. Como consequência, a crescente demanda por alimento reduzirá a população de presas. Algum tempo depois, o alimento se torna raro para as espécies predadoras, de forma que sua propogação é inibida. O tamanho da população de predadores declinará. A nova fase favorece a população de presas. Lentamente, ela crescerá novamente, e o padrão na variação do tamanho da população pode se repetir. Assim, o processo continua em ciclos.

Sejam  $x = x(t)$  e  $y = y(t)$  o numero de presas e predadores respectivamente, e admitamos que  $x(t)$  e  $y(t)$  são funções diferenciáveis.

A taxa de nascimento das presas é encarada como sendo proporcional a  $x$ , isto é, igual a  $ax$ , com  $a > 0$ . A taxa de destruição das presas depende de  $x$  e  $y$ . Quanto maior o numero de presas, mais fácil é caça-las, e quanto mais predadores, mais estômagos tem que ser alimentados. É razoável admitirmos que a taxa de destruição é proporcional a  $x$  e  $y$ , isto é, igual a  $bxy$ , com  $b > 0$ .

A taxa de nascimento da população predadora depende da fonte de alimento e também do seu tamanho. Podemos admitir que a taxa de nascimento é proporcional a  $x$  e a  $y$ , isto é, igual  $c \cdot xy$  com  $c > 0$ .

Finalmente, a taxa de morte nas espécies é encarada como proporcional a  $y$ , isto é, igual a  $dy$  com  $d > 0$ . Assim, temos o sistema não linear:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bxy \\ \frac{dy}{dt} = cxy - dy \end{cases} \quad (3.17)$$

onde  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  são constantes positivas. Note que, na ausência de predadores, isto é  $y=0$  temos e o numero de presas cresce exponencialmente, enquanto que na ausência de presas, isto é  $x=0$  temos e portanto, a população de predadores tendem a extinguir-se.

O modelo presa-predador foi descoberto por Lotkia e independentemente por Volterra em torno de 1925.

Não existe nenhuma solução explícita do sistema (3.17). Felizmente, é possível derivarmos uma relação bastante fácil entre  $x$  e  $y$ , que revelam algumas propriedades da solução. Para este propósito eliminamos usando a formula:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

e temos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cxy - dy}{ax - bxy} = \frac{y(cx - d)}{x(a - by)} \quad (3.18)$$

Separando as variáveis, temos:

$$\left(\frac{a}{y} - b\right) dy = \left(c - \frac{d}{x}\right) dx$$

e por integração, resulta:

$$\int \left(\frac{a}{y} - b\right) dy = \int \left(c - \frac{d}{x}\right) dx + C_0, \quad x > 0, \quad y > 0$$

ou seja,

$$a \ln y - by = cx - d \ln x + C_0 \quad (3.19)$$

onde,  $C_0$  é uma constante de integração.

Gráfico:

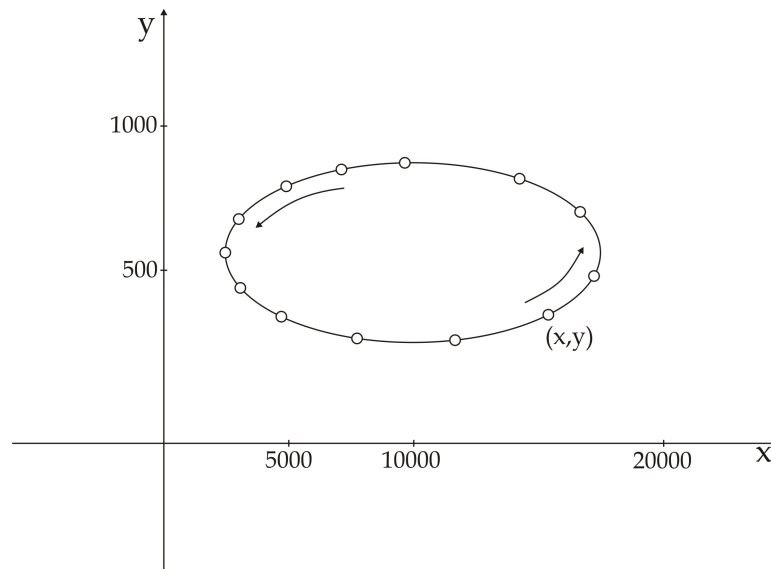


Gráfico duplamente logarítmo de curva integral  $a \ln y - by = cx - d \ln x + C_0$ , onde

- i)  $a = 1, b = 0,002, c = 0,00001, d = 0,08$  e  $C_0 = 5,8$
- ii)  $a = -1, b = 0,002, c = 0,00001, d = 0,08$  e  $C_0 = 5,8$
- iii)  $a = 0, b = 0,002, c = 0,00001, d = 0,08$  e  $C_0 = 5,8$

Para analisar o comportamento das soluções do sistema predador-presa vamos utilizar o Teorema da Linearização de Lyapunov-poincaré que transfere as características dos pontos de equilíbrio de sistemas linearizados correspondentes aos pontos de equilíbrio de sistemas quase-lineares.

Um sistema está em equilíbrio quando sua variação é nula, isto é, quando  $\frac{dx}{dt} = 0$  e  $\frac{dy}{dt} = 0$ . No caso do sistema predador-presa, temos

$$\frac{dx}{dt} = 0 \iff ax - bxy = 0 \iff x = 0 \text{ ou } y = \frac{a}{b}$$

e

$$\frac{dy}{dt} = 0 \iff cxy - dy = 0 \iff y = 0 \text{ ou } x = \frac{d}{c}$$

O resultado da estabilidade dos pontos de equilíbrio  $P_0(0, 0)$  e  $P_1\left(\frac{d}{c}, \frac{a}{b}\right)$  é realizado através de uma Linearização do Sistema.

O sistema linear

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax \\ \frac{dy}{dt} = -dy \end{cases} \quad (3.20)$$

corresponde à linearização de em torno do ponto  $P_0(0, 0)$ . Se  $x(0) = x_0$  e  $y(0) = y_0$  for a condição inicial, então a solução geral de (3.20) é dada por:  $x(t) = x_0 e^{at}$  e  $y(t) = y_0 e^{-dt}$ . Logo, se o ponto  $(x_0, y_0)$  for tal que  $x_0 > 0$  e  $y_0 > 0$ , a trajetória  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$  se afasta de  $P_0$ . Neste caso  $P_0$  é dito instável. Agora, transportemos o ponto  $P_1\left(\frac{d}{c}, \frac{a}{b}\right)$  no sistema  $XY$  para o sistema  $UV$ , através da mudança de variáveis:

$$u = x - \frac{d}{c} \quad e \quad v = y - \frac{a}{b}$$

obtendo-se:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -\frac{bd}{c}v - buv \\ \frac{dv}{dt} = \frac{ac}{b}u + cuv \end{cases} \quad (3.21)$$

O ponto  $P^*(0, 0)$  no sistema  $UV$  que corresponde ao ponto  $P_1\left(\frac{d}{c}, \frac{a}{b}\right)$  no sistema  $XY$ , pode ser analisado qualitativamente quando consideramos o sistema linearizado:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -\frac{bd}{c}v \\ \frac{dv}{dt} = \frac{ac}{b}u \end{cases} \quad (3.22)$$

Usando a regra da cadeia em (3.22), obtém-se:

$$\frac{du}{dv} = -\frac{\frac{bd}{c}v}{\frac{ac}{b}u} = -\frac{db^2}{ac^2} \frac{u}{v}$$

ou

$$u du = -\frac{db^2}{ac^2} v dv$$

e por integração, obtém-se:

$$\frac{u^2}{2} = -\frac{db^2}{ac^2} \frac{v^2}{2} + k_0$$

onde  $k_0$  é uma constante de integração,

ou ainda,

$$ac^2 u^2 + db^2 v^2 = k$$

onde  $k = k_0 ac^2$ , ou

$$\frac{u^2}{\frac{k}{ac^2}} + \frac{v^2}{kdb^2} = 1$$

E portanto, o ponto  $P^*(0,0)$  é um centro de todas as trajetórias (elipses). Neste caso, o ponto de equilíbrio  $P_1$  é dito estável.

As trajetórias fechadas em torno de  $P_1 \left( \frac{d}{c}, \frac{a}{b} \right)$ , descrevem o que se convencionou chamar de ciclo ecológico.



## Referências Bibliográficas

MATOS, Marivaldo P. Séries e Equações Diferenciais, printice Hall, São Paulo - 2002

DENNIS G.; CULLEN, Michael R. - Equações Diferenciais.

BASSANESI, R. C e FERREIRA, W. Equações Diferenciais com Aplicações, Ed Harba, São Paulo - 1988

FIGUEREDO D. G. & NEVES A. F, Equações Diferenciais Aplicadas, IMPA/Rio de Janeiro, 1997.

LIMA, Elon Lages, 1929 - Curso de Análise vol 2 - Rio de Janeiro IMPA/CNPq/1981.

LIMA, Elon Lages, 1929 - Espaços Métricos - Rio de Janeiro IMPA/CNPq/1977.

SIMMONS, G.F. - Introduction to Topology and Modern Analysis.