UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

ATAIZ SOUZA SILVA

# O TEOREMA DE EULER E ALGUMAS APLICAÇÕES

CAMPINA GRANDE – PB
JULHO - 2015

**ATAIZ SOUZA SILVA**

# O TEOREMA DE EULER E ALGUMAS APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências para obtenção do grau de licenciado.

Orientadora: Prof$^{a}$. Dra. Luciana Roze de Freitas.

**CAMPINA GRANDE – PB**
**JULHO - 2015**

É expressamente proibida a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano da dissertação.

S586t Silva, Ataiz Souza.
O Teorema de Euler e algumas aplicações [manuscrito] / Ataiz Souza Silva. - 2015.
40 p. : il. color.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2015.
"Orientação: Profa. Dra. Luciana Roze de Freitas, Departamento de Matemática".

1. Teorema de Euler. 2. Poliedros. 3. Grafos. I. Título.
21. ed. CDD 516.15

**ATAIZ SOUZA SILVA**

# O TEOREMA DE EULER E ALGUMAS APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências para obtenção do grau de licenciado.

Aprovada em 04/08/2015.

Profª. Dra. Luciana Roze de Freitas
Orientadora

Prof. Ms. Fernando Luiz Tavares da Silva / UEPB
Examinador

Prof. José Elias da Silva / UEPB
Examinador

## DEDICATÓRIA

À minha mãe e a minha irmã que sempre me deram apoio e me deram muita força pra seguir em frente.

**AGRADECIMENTOS**

A Deus, autor da minha existência, que sempre esteve ao meu lado me dando sabedoria, ânimo, proteção e força para enfrentar todas as dificuldades com as quais me deparei ao longo desta caminhada, e por ter permitido cursar matemática.

A minha irmã Antenouria, meu irmão Antenoges, minha mãe Nevinha, minha avó Chiquinha e a todos os meus familiares que sempre estiveram do meu lado, apoiando e dando todo o suporte e força para minha realização pessoal.

Ao meu professor no Ensino Básico, que marcou profundamente a minha vida, Flávio Franklin, que sempre me deu apoio e fez gostar da matemática, me motivando a fazer esse curso.

Aos meus colegas: Andréa Cristina, Juliette, Luciene, José Valber, Ellen, Junior Diniz, Janaina, Renilton, Weiller , Josênelle, Claudenor, Michelly, Fabiana, Ivania, Jocelina, Wilson, José Junior, Noemia, Edilma, Luciana Almeida , Fátima e Normanda pela amizade construída, apoio, bem como os bons momentos partilhados durante esses quatro anos e meio de curso.

Ao motorista Roberto, pela condução responsável, paciente e compreensiva, e aos amigos e colegas da minha cidade, com os quais viajei durante esse período pra Campina Grande, em um clima de companheirismo e união, principalmente nos momentos mais difíceis que enfrentamos juntos.

À minha orientadora, professora Dra. Luciana de Freitas, pelo acolhimento, competência e amizade construída ao longo do curso, assim também como os conselhos valiosos que vou levar para a vida.

Aos professores da banca examinadora, Ms. Fernando Luiz e José Elias, pela disponibilidade e sugestões dadas para o aprimoramento desse trabalho.

Agradeço aos professores José Elias, Dr. Vandenberg e Dr. José Fidelis, por suas significativas contribuições em minha trajetória acadêmica, sempre disponíveis nos momentos em que precisei.

Agradeço também ao professor Dr. Aldo Trajano pelas orientações e pelo tratamento amigo dispensado durante a disciplina de Álgebra linear I

Finalmente, agradeço ao corpo dos Servidores Técnicos Administrativos, juntamente aos Servidores Terceirizados, não menos importantes no conjunto de atividades desenvolvidas no CCT.

Muito obrigada.

“Minha energia é o desafio,
Minha motivação é o impossível,
e é por isso que eu preciso
ser a força e a esmo inabalável”.

**Augusto Branco.**

**R E S U M O**

Este Trabalho tem como tema central o Teorema de Euler e algumas aplicações. Inicialmente relatamos um pouco da história do teorema e do surgimento dos poliedros. E em seguida definimos os poliedros convexos e não convexos. Apresentamos a demonstração do Teorema de Euler para Poliedros convexos e duas maneira de ver a demonstração de Euler em um plano. E por fim faremos algumas aplicações, onde definimos os Poliedros regulares vistos em alguns livros didáticos e mostramos a existência de apenas cinco Poliedros regulares. Apresentamos também uma aplicação envolvendo Grafos.



**PALAVRAS-CHAVE**: Teorema de Euler. Poliedros. Grafos.

## A B S T R A C T

This work is focused on the Euler's theorem and its applications. Initially relations some of the history of the theorem and the emergence of polyhedra. And then define the convex polyhedra and non-convex. Here is the demonstration of Euler's theorem to convex polyhedra and two way to see the demonstration of Euler in a plane. Finally we will make some applications, where we define the regular polyhedra seen in some textbooks and show that there are only five regular polyhedra. We also present an application involving graphs.



**KEYWORDS**: Euler's Theorem. Polyhedra. Graphs

**SUMÁRIO**

# INTRODUÇÃO

O Teorema de Euler tem sido ensinado há bastante tempo nas escolas secundárias e nos cursos de Geometria. Por esse motivo a generalidade desse teorema tem despertado muito o interesse dos alunos quando o veem pela primeira vez.

O Teorema foi publicado em 1750, mas Euler não possuía uma prova satisfatória dessa identidade convencendo-se de sua validade pela consideração dos números de elementos. Segundo Descartes (1596-1650) por volta de 1639 mesmo tendo conhecimento sobre um poliedro referente ao número de V(vértices), A (arestas) e F (faces) ainda não tinham sido encontradas evidências do seu conhecimento na fórmula de Euler. O Teorema de Euler foi descoberto em 1758 em reconhecimento ao próprio Leonhard Euler (1707-1783). O resultado nos diz que se um poliedro possui V vértices, A arestas e F faces então V-A+F=2.

No início do século XIX apontaram-se evidências que indicavam que a relação de Euler não podia ser verdadeira, pois surgiram casos de exceções. Desde então, diversas demonstrações apareceram na literatura e algumas continham falhas (como a de Cauchy) que foram descobertas muitos anos mais tarde. Essas falhas ocorreram devido à falta de uma definição mais precisa e clara sobre a definição de um poliedro uma vez que Euler nunca se preocupou em definir o sentido da palavra. A demonstração mais divulgada desse teorema no caso de poliedros homeomorfos á esfera é devido a Cauchy (1813).

No primeiro capítulo definimos os poliedros convexos e não convexos, mostramos as primeiras relações de Euler e apresentamos algumas análises em suas definições nos livros didáticos.

No segundo capítulo apresentamos o Teorema de Euler e a demonstração do Teorema de Euler para poliedro convexo. Além disso, consideramos duas maneiras de demonstrarmos o Teorema de Euler sobre o plano.

E por fim no terceiro capítulo mostraremos as aplicações do Teorema de Euler, definindo os Poliedros regulares e uma aplicação envolvendo grafos.

O objetivo dessa pesquisa é fazer um aprofundamento dos estudos dos poliedros através dessas aplicações e ressaltar a importância de estudar o Teorema de Euler no ensino médio, assim também no ensino superior em que podemos perceber a utilidade da aplicação desse Teorema para o ensino da matemática onde podemos fazer descobertas fascinantes dos poliedros e suas relações com a geometria.

# 1. POLIEDROS E AS PRIMEIRAS RELAÇÕES DE EULER

Neste capítulo, iremos apresentar um pouco sobre os poliedros e suas principais definições, pois, ao dizermos que poliedros são sólidos geométricos formados pela união dos polígonos planos nos dá uma ideia do que eles realmente são, mas não garante absolutamente afirmarmos como definição.

No dicionário encontramos a seguinte definição: A palavra poliedro vem do grego **Polys** que significa muitos ou vários, **Edro** que significa faces. Mas ainda não é suficiente para nos garantir uma definição precisa.

Mas de fato, o que é um poliedro?

A seguir vamos definir com precisão estes sólidos

## 1.1. Poliedro

Para responder a questão acima, Vamos definir poliedro da seguinte maneira:

Poliedro é uma reunião de um numero finito de polígonos planos, satisfazendo as seguintes condições:

**1**. Cada lado de um desses polígonos é também lado de um, e apenas um outro polígono.

**2.** A interseção de duas faces quaisquer ou é um lado comum, ou é um vértice ou é vazia. Cada lado de um polígono, comum a exatamente duas faces, é chamado uma aresta do poliedro e cada vértice de uma face é um vértice do poliedro.

**3**. É sempre possível ir de um ponto de uma face a um ponto de qualquer outra, sem passar por nenhum vértice ( ou seja, cruzando apenas arestas).

Nessa definição cada um desses polígonos chamamos de face do poliedro, cada lado comum a duas faces denominamos de uma aresta do poliedro e cada vértice de uma face é também chamado de vértice do poliedro.

Analisando cada condição citada acima, veremos agora alguns exemplos que satisfazem e não satisfazem as condições 1, 2 e 3:

**Exemplo 1.1:**

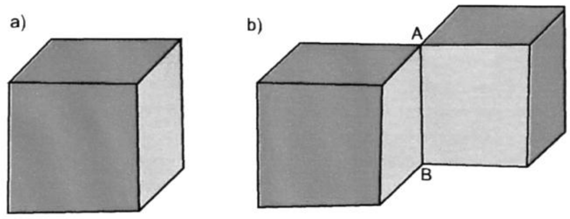



**Figura 1**

A figura **a** satisfaz a condição dada, pois ela é um poliedro, onde cada um desses Polígonos é também lado comum do polígono.

A figura **b** não satisfaz a condição dada, pois não é um poliedro. Pois o segmento AB não é lado comum a outras quatro faces.

A figura **2a** não representa um poliedro, pois a interseção das faces F e G não é vazia, não é uma aresta, nem um vértice comum.

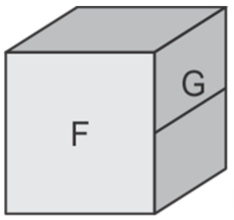



**Figura 2**

Na figura **3** podemos considerar que é sempre possível ir de um ponto de uma face a um ponto de qualquer outra, sem passar por nenhum vértice. Podemos afirmar que não se trata de um poliedro, de acordo com a definição apresentada neste trabalho.

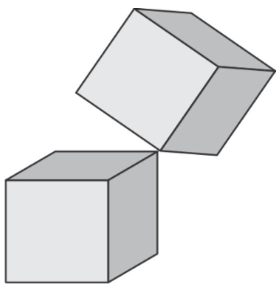


**Figura 3**

## 1.2. Elementos de um Poliedro

Como definimos anteriormente os poliedros, apresentaremos agora os elementos do poliedro que são, as faces, as arestas e os vértices como podemos ver nos exemplos a seguir.

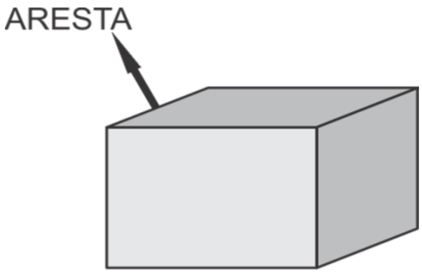



**Figura 4: O cubo**

**Exemplo 1.2:**

Podemos ver através da figura do cubo, que cada um de seus lados representam uma faces do cubo e, ao contarmos os seus lados, iremos ter 6 faces e 12 arestas.

E por fim vejamos o ultimo elemento:

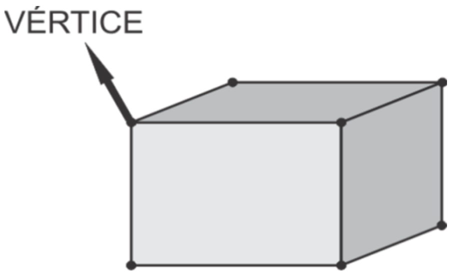



**Figura 5**

Pela figura 5 podemos ver que o cubo possui 8 vértices, pois os vértices são os pontos de encontro das arestas. Podemos fazer uma pequena tabela com os elementos do cubo.

| Cubo | |
|---|---|
| Faces | 6 |
| Arestas | 12 |
| Vértices | 8 |

Veremos agora mais alguns exemplos de poliedros.

**Exemplo 1.3:**

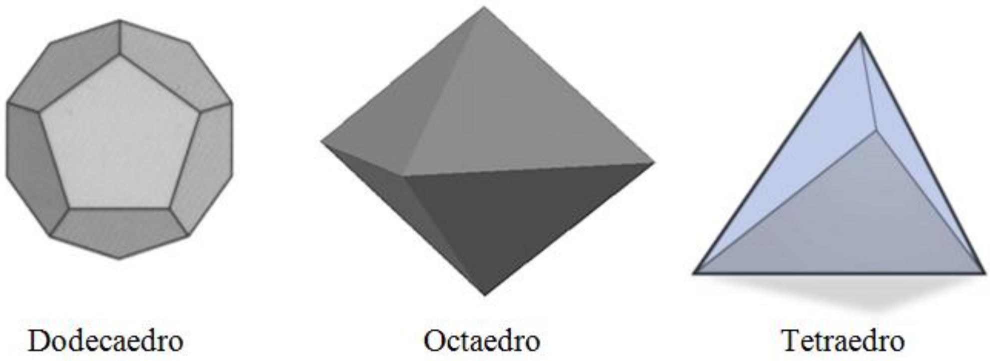



**Figura 6: Dodecaedro, Octaedro e Tetraedro**.

Ao contar o número de vértices, faces e arestas de cada figura acima temos que, o Dodecaedro possui 20 vértices, 30 arestas e 12 faces, no Octaedro temos 8 faces, 6 vértices ,12 arestas e no Tetraedro temos 4 vértices , 4 faces e 6 arestas.

Analisando as definições encontradas nos livros didáticos consultados podemos encontrar as seguintes definições de poliedros:

**DANTE [1]** Apresenta a seguinte definição de poliedros:

> "Cada poliedro é formado pela reunião de um número finito de regiões poligonais planas chamadas faces e a região do espaço limitado por elas."

**IEZZI [1]** Define poliedros da seguinte maneira:

> Poliedros são como "Sólidos geométricos cujas superfícies são formadas apenas por polígonos planos".

A ideia de definirmos um poliedro é bastante simples, para compreendermos num primeiro momento o que seria um poliedro e como identifica-lo.

A figura abaixo nos mostra um sólido que de acordo com a definição apresentada anteriormente, é um poliedro.

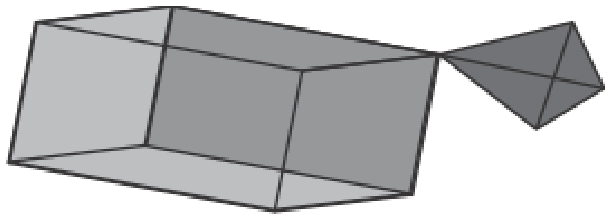


**Figura 7: poliedro.**

## 1.3. Poliedros Convexos

**Definição 1.3:** Um poliedro é convexo quando qualquer reta que não é paralela a nenhuma de suas faces, o corta em no máximo dois pontos. Podemos perceber também que um poliedro é convexo quando o plano que contém uma face deixa todo o poliedro em um dos semi-espaços, determinado por tal plano.

**Exemplos 1.4:**

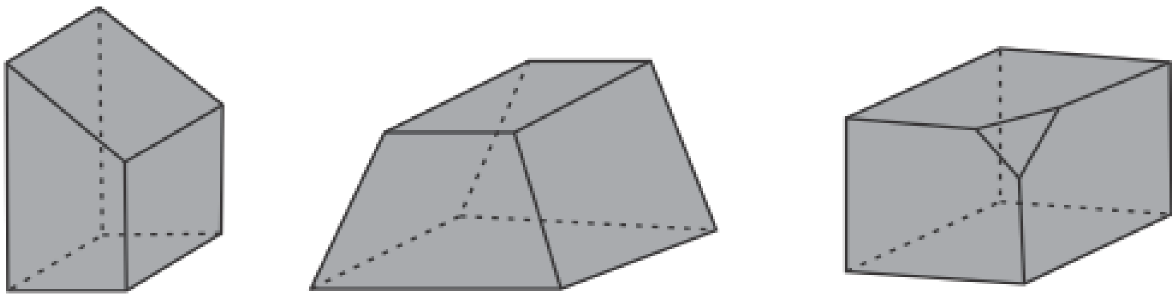


**Figura 8: poliedros convexos**.

Da mesma forma que existem polígonos que não são convexos, existem também poliedros que não são convexos.  Um poliedro é não convexo se existir pelo menos uma reta que não é paralela a nenhuma de suas faces que corta em mais de dois pontos.

Vejamos a seguir alguns exemplos de poliedros não convexos

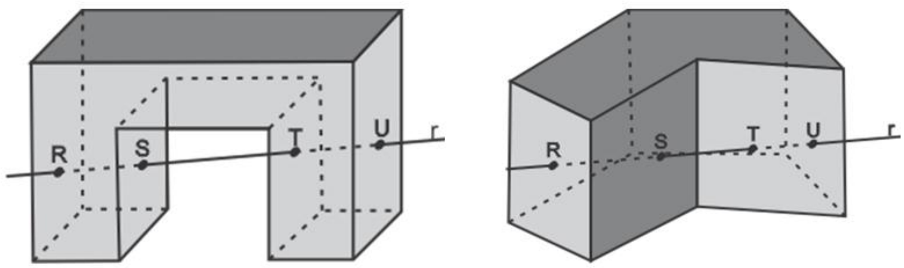



**Figura 9**

**Observação**: De acordo com a definição de poliedros, temos que pirâmides e primas são exemplos de poliedros convexos.

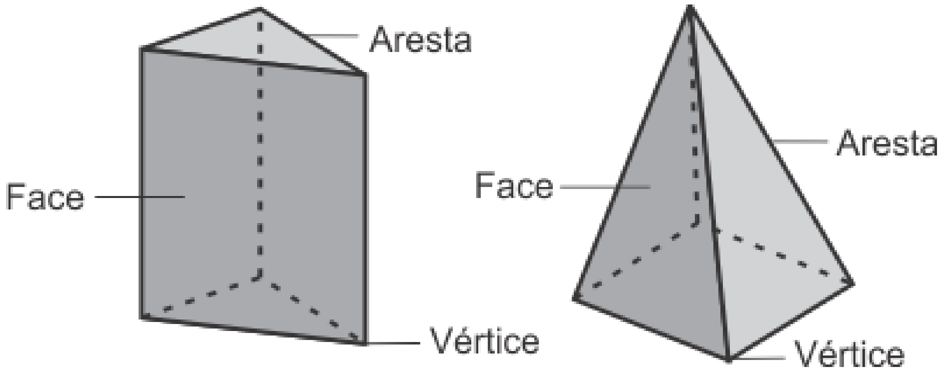



**Figura 10: prisma, pirâmide.**

### 1.4. As Primeiras Relações

Considerando um poliedro qualquer, vamos contar as suas faces, seus vértices e suas arestas. Representamos por A o seu número de arestas, F o número de suas faces e V o número de vértices. Vamos representar por Fn, $(n \geq 3)$, o número de faces de um poliedro que possui **n** lados, da mesma forma vamos representar por Vn a quantidade de vértices nos quais concorrem com **n** arestas.
Então podemos obter as seguintes relações:

$$\mathrm{F} = \mathrm{F}_3 + \mathrm{F}_4 + \cdots + \mathrm{F}_\mathrm{n}$$
$$\mathrm{V} = \mathrm{V}_3 + \mathrm{V}_4 + \cdots + \mathrm{V}_\mathrm{n}$$

**Exemplo 1.5:**

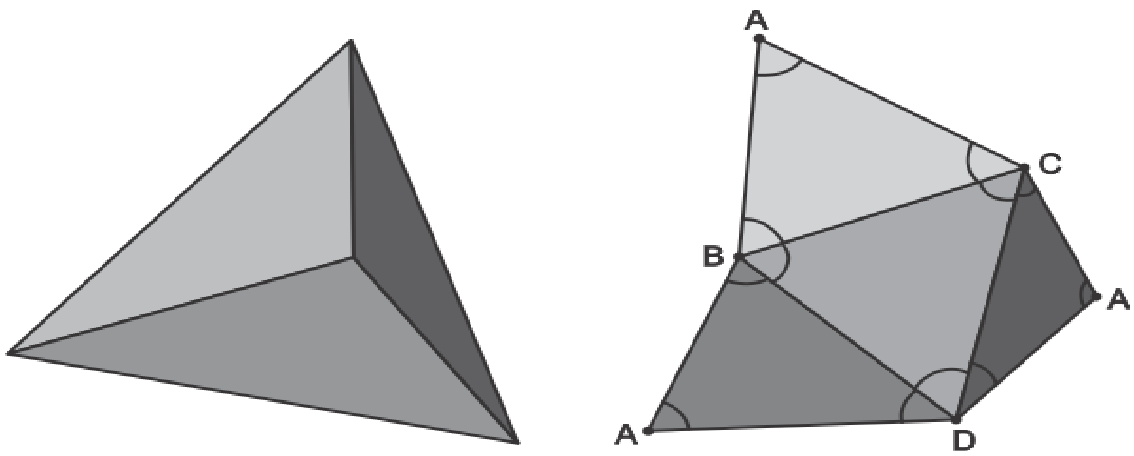



**Figura 11**

Para sabermos a quantidade de arestas, do poliedro, procedemos da seguinte forma: multiplicamos o número de triângulos por três, o número de quadriláteros por quatro a quantidade de pentágonos, por cinco e assim sucessivamente e depois somamos os resultados. Neste caso,

$$F_3 = 4$$
$$F_4 = F_5 = \cdots = 0$$
$$V_3 = 4.$$
$$V_3 = V_5 = \cdots = 0$$

Podemos perceber que cada aresta do poliedro é lado exatamente de duas faces, logo,

$$2A = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \cdots + nF_n.$$

Também poderíamos contar as arestas observando os vértices do poliedro. Se em cada vértice contarmos quantas arestas neles concorrem, somando os resultados iremos ter também o dobro do número de arestas (porque cada arestas terá sido contada duas vezes: de um extremo a outro), Logo:

$$2\mathrm{A} = 3\mathrm{V}_3 + 4\mathrm{V}_4 + 5\mathrm{V}_5 + \cdots + nVn.$$

Dessas primeiras relações entre os elementos de um poliedro podemos deduzir duas desigualdades:

$$2\mathrm{A} \geq 3\mathrm{F} \qquad \text{e} \qquad 2\mathrm{A} \geq 3\mathrm{V}$$

A primeira desigualdade podemos justificar da seguinte maneira:

$$2\mathrm{A} = 3\mathrm{F}_3 + 4\mathrm{F}_4 + 5\mathrm{F}_5 \cdots + \mathrm{nF}_\mathrm{n}.$$

Logo,
$2A = 3(F_3 + F_4 + F_5 + \cdots + F_n) + F_4 + 2F_5 + \cdots 3F_6 + \cdots + (n-3)\, F_n \geq 3F,$
Portanto,

$$2\mathrm{A} \geq 3\mathrm{F}.$$

Percebemos que a igualdade só é valida se se $F4 = F5 = \cdots F_n = 0$. Na segunda igualdade temos:

$$2\mathrm{A} = 3\mathrm{V}_3 + 4\mathrm{V}_4 + 5\mathrm{V}_5 + \cdots + nV_n$$

$$2\mathrm{A} = 3(V_3 + V_4 + V_5 + \cdots V_n) + V_4 + 2V_5 + \cdots + (n-3)Vn,$$

Assim, $$2\mathrm{A} \geq 3\mathrm{V}.$$

Neste segundo caso a igualdade só acontece quando $\mathrm{V}_4 = \mathrm{V}_5 = 0$, ou seja, quando em todo vértice concorrem com as três arestas.

**Exemplo 1.6:**

Descreva e mostre uma possibilidade para o desenho de um poliedro convexo que possui 13 faces e 20 arestas.

Imediatamente antes de concluir a desigualdade $2A \leq 3F$, tinhamos

$$2A = 3F + F_4 + 2F_5 + \cdots + nFn$$

Como A = 20 e F = 13, temos $2 \times 20 \ = 3 \times 13 + F_4 + 2F_5 \ + \cdots + (n-3)\ 0\ F_n$, isto é , $1 = F_4 + 2F_5 + \cdots$ o que só é possível se $1 = F_4\ e\ F_5 = F_6 = \cdots = 0$.

Isto quer dizer que este poliedro deve possuir uma única face quadrangular e todas as outras 12 faces triangulares

## 2. O TEOREMA DE EULER

Se P é um poliedro convexo com A arestas, F faces e V vértice, então o resultado de Euler nos garante que: $V - A + F = 2$

O resultado central e de grande importância sobre os poliedros é conhecido como Relação de Euler ou Teorema de Euler em que seu enunciado transmite encantamento e beleza ao fascinar os alunos quando tem contato pela primeira vez com V, A e F que nos indicam o número de vértices, arestas e faces de um poliedro.

O Teorema de Euler tem sido ensinado há bastante tempo nos cursos de Geometria e no ensino básico das escolas secundárias. Possuindo caraterísticas usuais e atraentes, pois na sua generalidade de validez e na sua forma simples de como é enunciado, nos mostra uma relação elegante e de grande importância. Além disso, as ilustrações das belas figuras dos poliedros nos mostra visualmente que $V - A + F = 2$.

**Exemplos 2.1:**

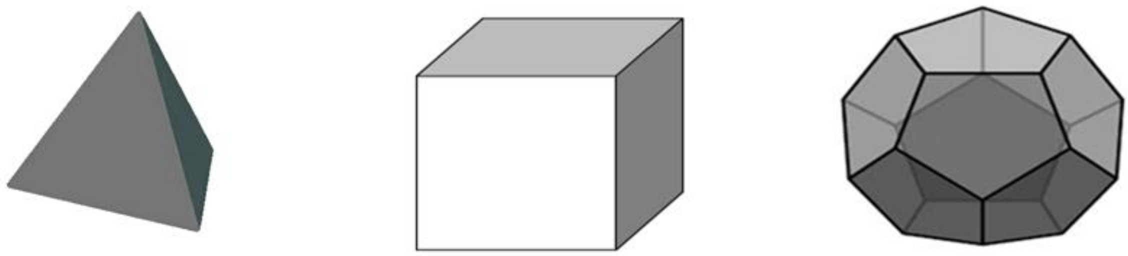


**Figura 12: Tetraedro, cubo, dodecaedro**.

| TETRAEDRO | |
|---|---|
| FACES | 4 |
| ARESTAS | 6 |
| VÉRTICES | 4 |

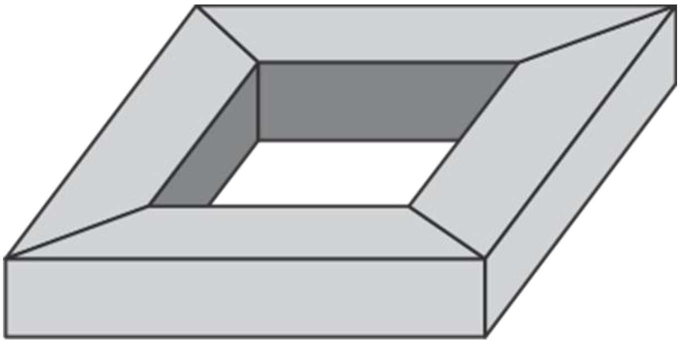
| CUBO | |
|---|---|
| FACES | 6 |
| ARESTAS | 12 |
| VÉRTICES | 8 |

| DODECAEDRO | |
|---|---|
| FACES | 12 |
| ARESTAS | 30 |
| VÉRTICES | 20 |

No entanto, o Teorema de Euler não é verdadeiro para todos os poliedros, sendo válido apenas para certa classe de poliedros, como os convexos que foram definidos anteriormente. Euler nunca se preocupou em definir precisamente o "poliedro" pois não considerava o sólido como da figura a seguir, para o qual o teorema é falso.

**Exemplo 2.2:** Há muito tempo se conhecem exemplos de poliedros para os quais $V - A + F \neq 2$. A figura a seguir, exibe um poliedro no qual :

$$V - A + F = 16 - 32 + 16 = 0$$

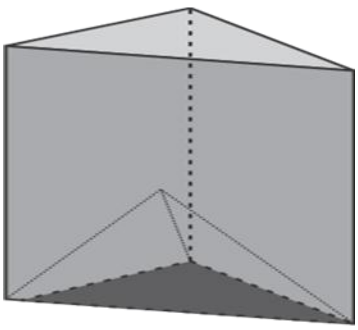


| POLIEDRO | |
|---|---|
| FACES | 16 |
| ARESTAS | 32 |
| VÉRTICES | 16 |

**Figura 13: poliedro.**

Conforme Euler mesmo achava, essa fórmula é válida para todos os poliedros convexos, mas se vê facilmente que há uma falha quando pensamos em generalizar esta fórmula para todos os poliedros. Provavelmente, Euler não considerou a figura espacial representado na figura anterior.

É verdade que todo poliedro convexo satisfaz a relação de Euler, mas é fácil encontrarmos exemplos de poliedros não convexos para os quais ainda valem. Veremos o exemplo da seguinte figura 14 que nos mostra um prisma no qual a base foi substituída pelas faces superiores de uma pirâmide.



| PRISMA | |
|---|---|
| FACES | 7 |
| ARESTAS | 12 |
| VÉRTICES | 7 |
| V-A+F=2 | 7-12+7=2 |

**Figura 14: prisma.**

Examinando o Exemplo desse poliedro não convexo vimos que é válida a relação de Euler. Ressaltando que em alguns poliedros (não em todos) não convexos vale a relação de Euler como foi mostrado.

## 2.1. DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE EULER PARA OS POLIEDROS CONVEXOS

A demonstração que será mostrada para poliedros convexos segue da forma que foi publicado na RPM nº3(1983) pelo professor Zoroastro Azambuja Filho.

Iniciamos a demonstração calculando a soma dos ângulos internos de todas as faces de um poliedro convexo P. As faces serão enumeradas de 1 até F e seja $\mathrm{n_k}$ o gênero da k-ésima face, $(1 \leq \mathrm{k} \leq \mathrm{F})$. Ressaltando que a soma dos ângulos internos de um polígono convexo de gênero n é igual $\pi(\mathrm{n}-2)$ e observando que se um poliedro é convexo então todas as faces são polígonos convexos. Portanto a soma dos ângulos internos de todas as faces de P é dada pela seguinte expressão:

$$\mathrm{S} = \pi(\mathrm{n_1}-2) + \pi(\mathrm{n_2}-2) + \cdots + \pi(\mathrm{n_F}-2)$$
$$\pi(n_1 + n_2 + \cdots n_F).-(2+2+2\cdots+2).$$

Observe que a soma do número de lados de todas as faces $[\mathrm{n_1} + \mathrm{n_2} + \cdots + \mathrm{n_F}]$ do poliedro é igual ao dobro do número de arestas $2A$ logo temos:

$$\mathrm{S} = \pi(2\mathrm{A} - 2\mathrm{F}) = 2\pi(\mathrm{A} - \mathrm{F}). \qquad (1)$$

Vamos agora calcular de outra forma a soma de todos os ângulos internos das faces do poliedro. Começaremos escolhendo uma reta r, que não seja paralela a nenhuma das faces do poliedro convexo P, tomemos também um plano H, que não intersecte P e que seja perpendicular á reta r. O plano H será chamado de plano horizontal e todas as retas paralelas a r ( logo perpendiculares a H ) serão chamadas retas verticais.

Na figura abaixo temos a representação de um poliedro e da projeção ortogonal sobre o plano H.

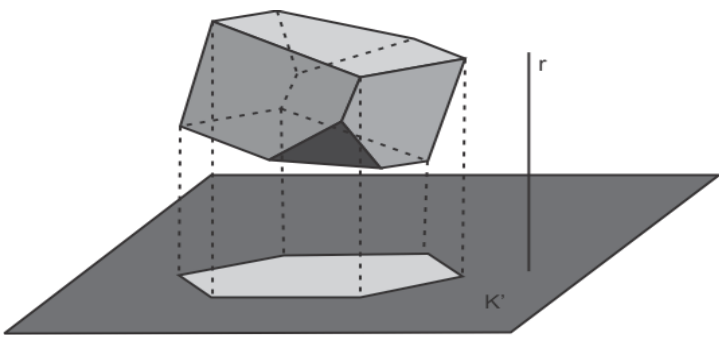



**Figura 15: A projeção ortogonal sobre o plano H.**

As projeções ortogonais dos pontos do poliedro formarão sobre o plano um polígono $K$ com contorno $K'$. Cada ponto $K'$ é projeção de um único ponto de P e cada ponto no interior de $K$ é projeção de dois pontos de P, um da parte superior e o outro da parte inferior. Assim, o poliedro P se decompõe em 3 partes disjuntas: o conjunto dos pontos superiores, o conjunto dos pontos inferiores e o contorno aparente.

Depois dessas considerações, vamos calcular novamente a soma de todos os ângulos das faces de P, observando que a soma dos ângulos internos de uma face é a mesma soma dos ângulos internos de sua projeção (ambos são polígonos de mesmo gênero). Sejam: $V_1$ o número de vértices superiores, $V_2$ o número de vértices inferiores e $V_0$ o número de vértices do contorno aparente $K'$. Então,

$$V = V_0 + V_1 + V_2.$$

Notemos ainda que $V_0$ é o número de vértices (e de lados) da poligonal $K'$.
Observe que a projeção da parte superior é um polígono convexo com $V_0$ vértices em seu contorno e possuem $V_1$ pontos interiores.

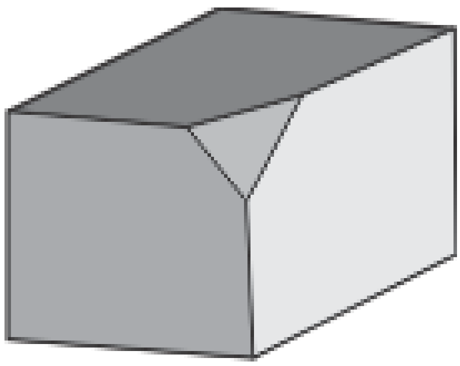


**Figura 16: A sombra das Faces iluminadas**.

Somando todos os ângulos da parte superior anterior temos:

$$S_1 = 2\pi V_1 + \pi(V_0 - 2).$$

De forma análoga, obteríamos para a soma de todos os ângulos da parte inferior

$$S_2 = 2\pi V_2 + \pi\,(V_0 - 2).$$

Somando as duas igualdades, obtemos:

$$S = 2\pi V_1 + 2\pi V_2 + 2\pi(V_0 - 2)$$

$$S = 2\pi(V - 2). \qquad (2)$$

Comparando $(1)$ $e$ $(2)$ e dividindo por $2\pi$, resulta que $A - F = V - 2$ ou seja ,

$$V - A + F = 2,$$

Como queríamos demonstrar.

**Exemplo 2.3.** Observe o poliedro da figura abaixo:

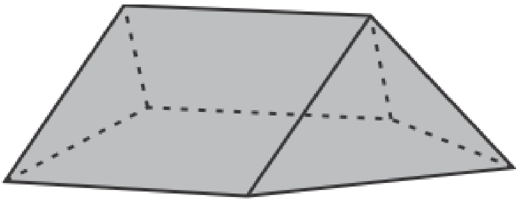


**Figura 17:**

Onde temos que:

$$A = 11$$

$$F = 6$$

$$V = 7$$

Usando a relação de Euler obtemos:

$$V - A + F = 2$$

$$7 - 11 + 6 = 2$$

**Exemplo 2.4:** Numa publicação científica de 1985, foi divulgada a descoberta de uma molécula tridimensional de carbono, na qual os átomos ocupam os vértices de um poliedro convexo, cujas faces são 12 pentágonos e 20 hexágonos regulares, como numa bola de futebol. Em homenagem ao arquiteto norte-americano Buckminster Fuller, a molécula foi denominada Fulereno. Determine o número de átomos de carbono nessa molécula e o número de ligações entre eles.

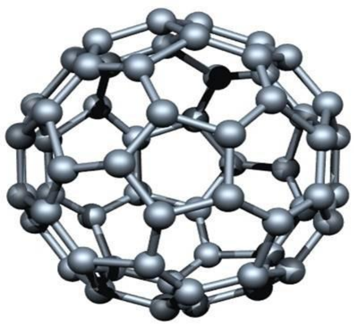


**Figura 18: Molécula Fulereno.**

**Solução:** Considerando V o número de átomos e A o número de ligações entre eles, podemos ter neste caso, o número das faces, $F_5 = 12$

$$F_6 = 20$$

Assim, temos:

$$F_5 = 12 \text{ pois } 12 \times 5 = 60 \text{ ligações.}$$

$$F_6 = 20 \text{ sendo } 20 \times 6 = 120 \text{ ligações.}$$

Como cada aresta (ligação) foi contada duas vezes, temos:

$$2\mathrm{A} = 60 + 120 \rightarrow \mathrm{A} = 90$$

O número de átomos (vértices) pode ser obtido pela relação de Euler

$$\mathrm{V} - \mathrm{A} + \mathrm{F} = 2 \text{ logo}, \mathrm{V} - 90 + 32 = 2 \text{ pois}, \mathrm{V} = 60\ .$$

A molécula possui então $60$ átomos e $90$ ligações.

## 2.2. O TEOREMA DE EULER NO PLANO

Durante esse trabalho foi visto uma demonstração do Teorema de Euler para os poliedros convexos. Iremos agora descrever uma situação diferente em que podemos aplicar o Teorema de Euler em regiões de um plano.

Seja um poliedro convexo P, S uma esfera que o contenha e O um ponto interior a P. Vamos projetar pontos do poliedro, para isto consideremos uma função f: P→S onde definimos da seguinte forma: para cada ponto de $X \in P$ o ponto $f(X)$ será a interseção da semirreta OX com S.

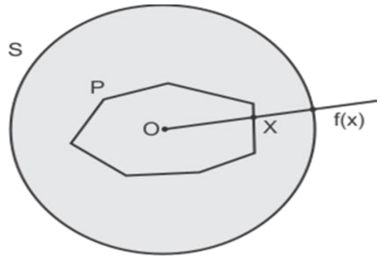



**Figura 19: A projeção de P em S.**

A função f é contínua, já que seus pontos próximos em P são levados em pontos próximos em S, sendo sua inversa $f^{-1}: S \to P$ também contínua. Visualizando agora a esfera dividida em regiões limitadas por arcos de circunferência que chamamos de linhas e que são as projeções dos pontos da aresta. Chamamos de nó a projeção de um vértice e de regiões as projeções das faces.

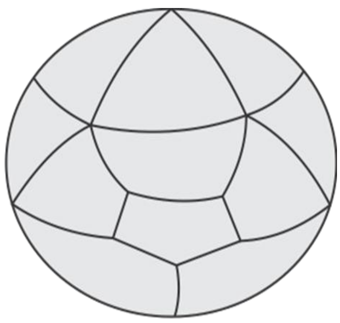


**Figura 20: A esfera dividida em regiões.**

Podemos observar que a relação de Euler permanece válida na esfera.

Se tomarmos agora um ponto N interior a uma região de S um plano $\pi$ perpendicular ao diâmetro de S onde N está contido e uma função definida por $P: S - \{N\} \to \pi$,
tal que para cada ponto $Y \in S - \{N\}, P(Y)$ é a intersecção da semirreta NY com $\pi$.

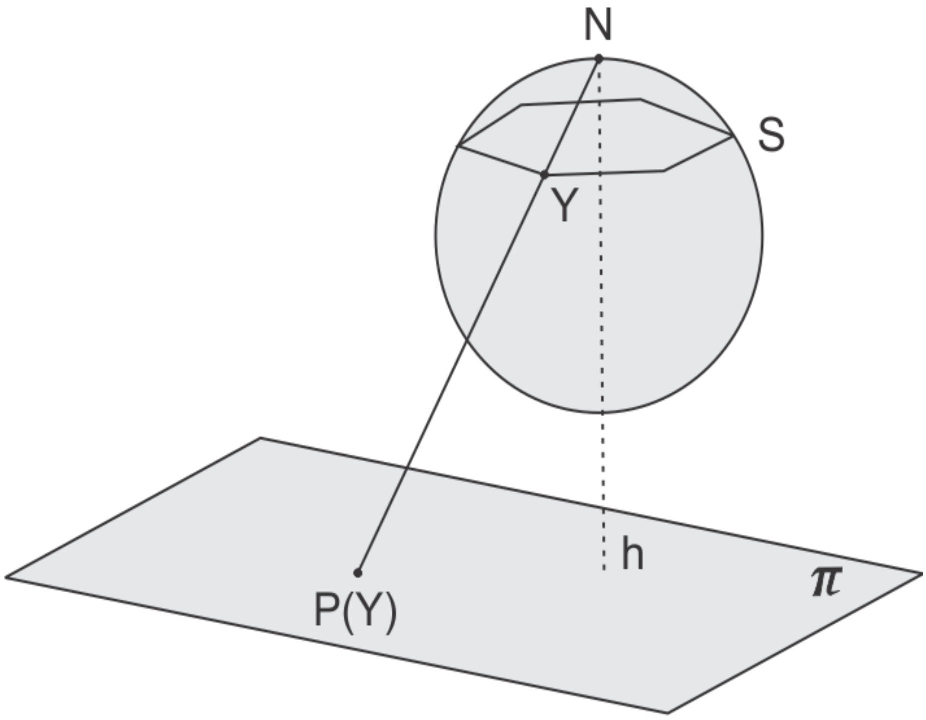



**Figura 21: A projeção das regiões da esfera no Plano.**

Se o poliedro P tem F(faces), V(vértices) e A (arestas) podemos ver que o plano π fica dividido em F regiões por meio de A linhas que se encontram em V nós. A figura obtida em π pode ser continuamente deformada, mas a relação de Euler permanecerá inalterável. Podemos observar também que a região que contém N é ilimitada e deve ser considerada na relação de Euler.

**Exemplo 2.5:**

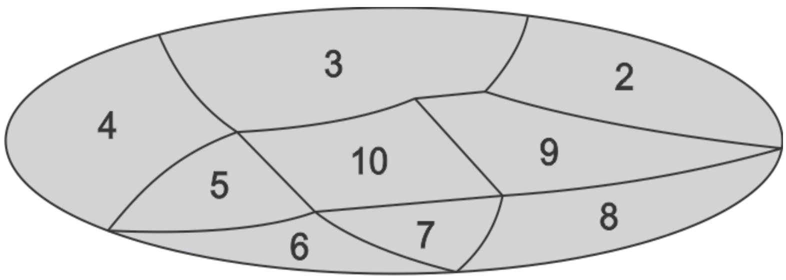



**Figura 22: A divisão das regiões.**

Observando que a divisão de uma região em outras justapostas temos:

$$V - A + F = 10 - 18 + 10 = 2.$$

## 2.3. SEGUNDA DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE EULER NO PLANO.

Nesta outra situação iremos demonstrar outro caso no plano onde se aplica o Teorema de Euler, o que é válido em situações mais gerais do que foi mostrado anteriormente. Aqui não precisamos recorrer ao resultado obtido no espaço.

Consideremos agora uma região R do plano dividido em outras regiões justapostas como a seguinte figura:

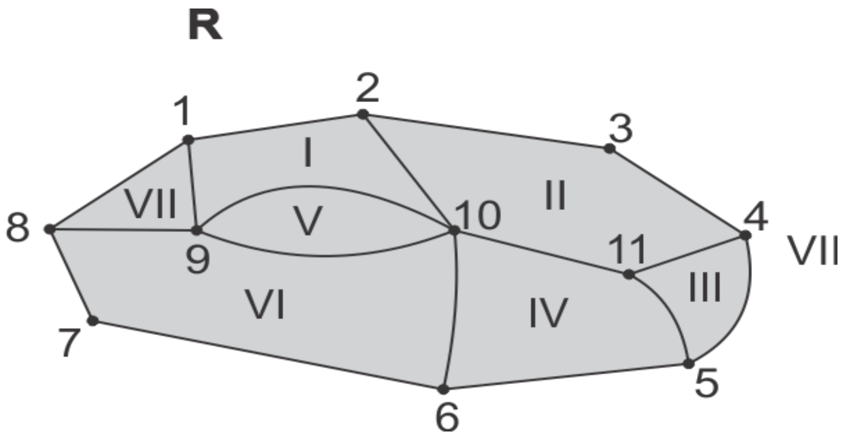



**Figura 23: A divisão de uma região em outras justapostas.**

Diferentemente do caso anterior, neste novo caso podemos ter uma região de R limitada por pelo menos duas arestas, lembrando que o termo aresta não é representado como um segmento de reta, mas sendo qualquer curva contínua sem auto intersecção que liga um vértice a outro vértice. Ressaltando que para termos uma região no plano é necessário que nenhuma região fique completamente dentro da outra no plano. Logo as situações a seguir são proibidas.

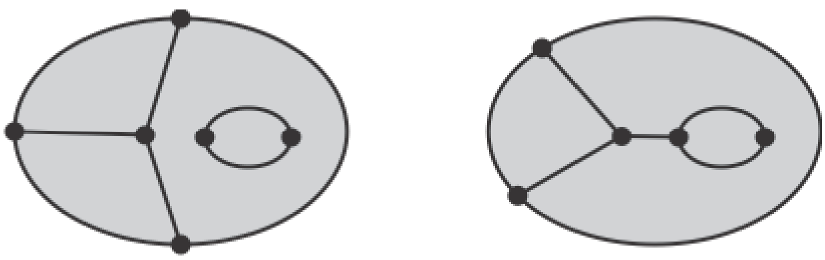


**Figura 24**

**Observação:** Podemos comparar a região R dividida em outras regiões da figura 23 como o mapa do Brasil dividido em seus estados. Onde cada estado é uma face e cada linha de fronteira é uma aresta.

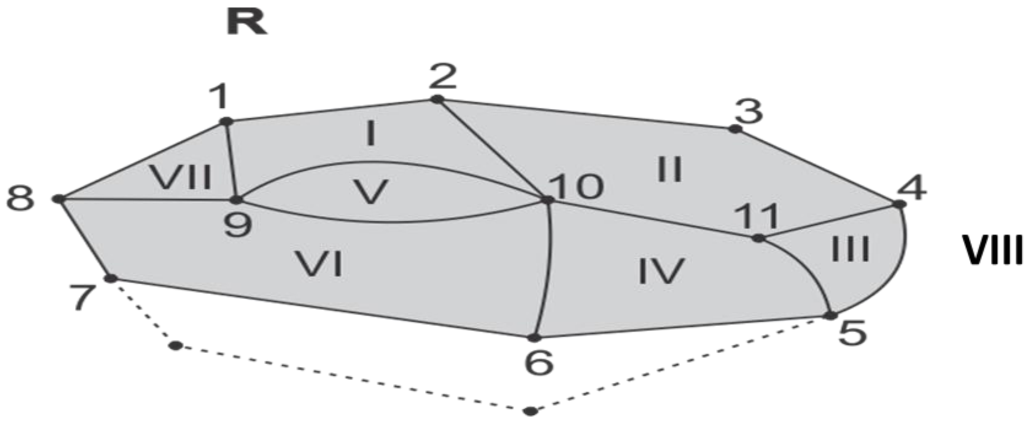



**Figura 25: Acrescentando uma nova região**.

Ao observamos agora a Figura 25, consideramos o exterior de R como uma região no plano, logo temos 8 regiões, ao enumerarmos as regiões I a VII vimos que são limitadas e a região VIII é ilimitada, sendo valida a relação de Euler ao dividirmos o plano em F regiões, ou seja: $V - A + F = 2$.

**Demonstração:**

$V - A + F = 2$ é válida para um caso simples, para apenas um polígono de n lados que está desenhado no plano, tendo assim:

$$A = V = n \qquad F = 2.$$

Usando indução no caso geral, vamos mostrar que se a relação de Euler é verdadeira para uma decomposição do plano em F regiões, então ela ainda vale para uma decomposição em F + 1 regiões. Considere uma decomposição do plano em F regiões, de A aresta que concorrem com V vértices (como mostra a parte em linhas cheias da figura 25), satisfazendo a relação de Euler. Ao acrescentamos uma nova região (como mostra a parte em linhas tracejadas da figura 25), desenhamos uma sequência de arestas ligando dois vértices do contorno da divisão anterior acrescentando r arestas, e neste caso acrescentamos $r - 1$ vértices e uma nova região. Denote por $\bar{V}$, $\bar{A}$ e $\bar{F}$ o número de vértices, arestas e faces respectivamente para esta nova decomposição do plano.

Concluímos que a relação de Euler permanece verdadeira, pois:

$$\bar{V} - \bar{A} + \bar{F} = (V + r - 1) - (A - r) + F + 1 = V - A + F = 2$$

Como queríamos mostrar.

**Observação:** Se não considerarmos a região ilimitada temos a fórmula,

$$F - A + V = 1.$$

# 3. APLICAÇÕES DO TEOREMA DE EULER

Neste capítulo iremos aprofundar o estudo sobre os cinco poliedros regulares de Platão e a existência dos quatro sólidos de Kepler-Poinsot, assim também como a importância dos estudos desses poliedros para o aprofundamento do Teorema de Euler.

## 3.1. Poliedros Regulares

Conforme a definição adotada, é possível existir cinco poliedros regulares, ou nove, isto depende se estamos considerando poliedros convexos ou não convexos.

**Definição 3.1:** Um poliedro é regular quando todas as suas faces são polígonos regulares iguais, ou seja, congruentes. E, além disso, que em cada vértice do poliedro ocorre o mesmo número de arestas**.**

**Exemplo 3.1:**

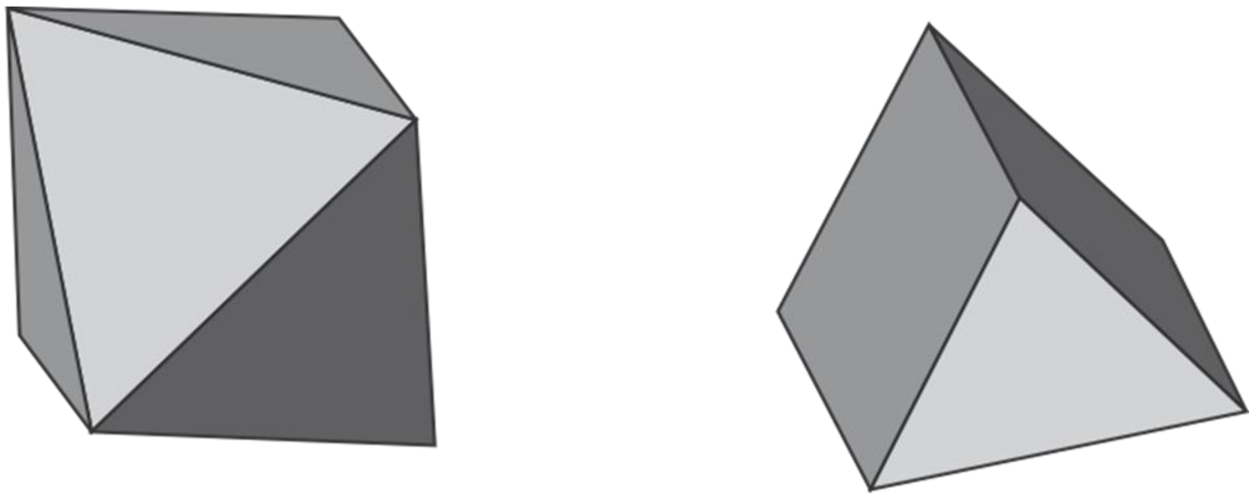


**Figura 26: Exemplo de poliedro regular e não regular.**

Notemos na figura acima que a primeira figura é regular. Enquanto que na segunda figura podemos verificar que as suas faces não são congruente e dessa forma não é um poliedro regular.

A importância de se estudar os poliedros regulares é percebido ao longo da história dos Filósofos e Astrônomos que tentaram elaborar teorias de explicação do universo com base na existência de apenas 5 sólidos regulares.

Podemos perceber uma tendência de associar poliedros regulares aos poliedros convexos regulares. Vamos fazer algumas observações de como são definidos os poliedros convexos regulares nos livros didáticos

Nos livros dos autores**,** Dolce e Pompeo [12], definem os poliedros convexos regulares como sendo aqueles cujas faces são polígonos convexos regulares e congruentes entre si, e seus ângulos poliédricos também são congruentes.

Dante [10] também colabora com esta definição. Para ele "um poliedro convexo é regular quando todas as faces são regiões poligonais regulares e congruentes e em todos os vértices concorrem o mesmo número de arestas.".

Para justificar que existem apenas cinco poliedros regulares convexos, conhecidos como poliedros de Platão, vamos utilizar o Teorema de Euler.

Seja P um poliedro regular, n o número de lados de cada face e p o número de arestas que concorrem cada vértice. Temos então,

$$2\mathrm{A} = \mathrm{nF} = \mathrm{pV},$$

Ou seja,

$$\mathrm{A} = \frac{\mathrm{nF}}{2} \quad \mathrm{e} \quad \mathrm{V} = \frac{\mathrm{nF}}{\mathrm{P}}\,. \qquad (1)$$

Substituindo na fórmula $V - A + F = 2$ obtemos:

$$\frac{\mathrm{nF}}{\mathrm{P}} - \frac{\mathrm{nF}}{2} + \mathrm{F} = 2$$

Daí,

$$\mathrm{F} = \frac{4\mathrm{p}}{2\mathrm{p} + 2\mathrm{n} - \mathrm{pn}} \qquad (2)$$

Desse modo devemos ter: $2\mathrm{p} + 2\mathrm{n} - \mathrm{pn} > 0$. Ou seja,

$$\mathrm{p} < \frac{2\mathrm{n}}{\mathrm{n} - 2} \qquad (3)$$

Observe que devemos ter $3 \leq n < 6$.logo , fazendo algumas tentativas , as possibilidades que satisfazem esta condição acima serão as seguintes:

| n | p | A em 2 | F em 2 | Polígono da face | Poliedro Regular |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 3 | 6 | 4 | Triângulo | Tetraedro |
| 4 | 3 | 12 | 6 | Quadrado | Hexaedro |
| 5 | 3 | 30 | 12 | Pentágono | Dodecaedro |
| 3 | 4 | 8 | 8 | Triângulo | Octaedro |
| 3 | 5 | 20 | 20 | Triângulo | Icosaedro |

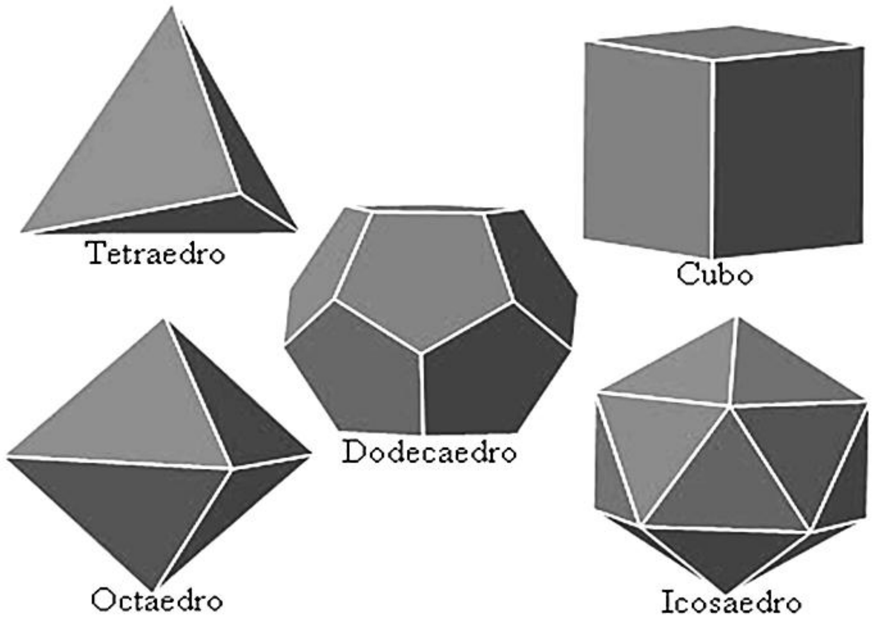



**Figura 27: poliedros de Platão**.

### 3.1.1. POLIEDROS DE KEPLE-POINSOT

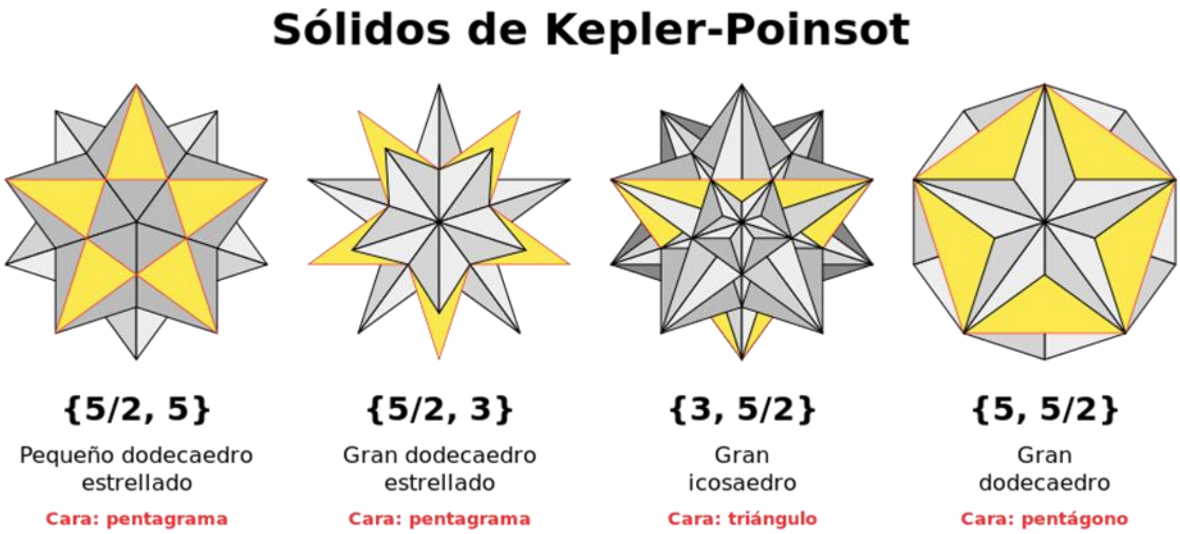



**Figura 28: os sólidos de Kepler- Poinsot**.

Se retirarmos a hipótese de convexidade podemos garantir a existência de nove Poliedros regulares (convexos ou não convexos). Dessa forma podemos acrescentar aos poliedros regulares, os quatros poliedros regulares não convexos denominados poliedros de Keple-Poinsot (pequeno dodecaedro estrelado, grande dodecaedro, grande dodecaedro estrelado e grande icosaedro), pois de fato, os poliedros cujas faces são polígonos regulares congruentes e seus ângulos poliédricos também são congruentes. Enfim temos que o grupo dos poliedros regulares é composto por nove sólidos

**Observação:** É de fundamental importância observar que o pequeno dodecaedro estrelado e o grande dodecaedro, citados nos poliedros de Keple-Poinsot não verificam o teorema de Euler.

## 3.2. OS GRAFOS NO ESTUDO DO TEOREMA DE EULER.

Mostramos agora um importante resultado da teoria dos grafos, podendo assim chegar a sua definição. Trata-se de uma aplicação dos grafos no Teorema de Euler. Lembrando que não aprofundaremos os estudos sobre os grafos neste trabalho, mas iremos abordar a sua importância aplicada ao teorema.

**Definição 3.2** Um grafo $G = (V, E)$ é um conjunto de V vértices e E arestas, sendo cada aresta unindo um par de vértices.

Um grafo é representado por pontos para os vértices e retas para arestas.

**Exemplo 3.2:** A figura abaixo é um grafo, onde os pontos a, b, c, d, e, f são os vértices e as linhas são as arestas.

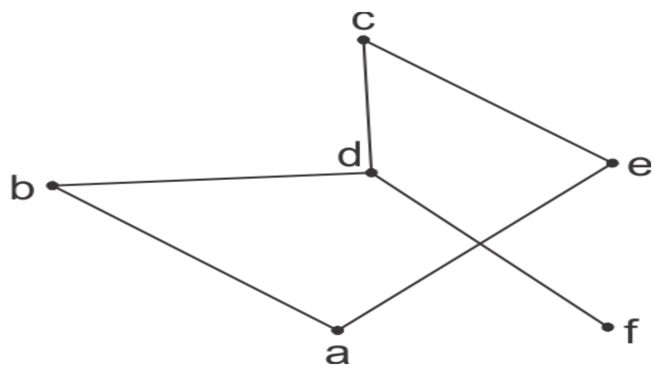



**Figura 29: Grafo.**

**Definição 3.3**: Um grafo $G(V, E)$ é planar quando puder ser desenhado em um plano, onde suas arestas não se cortam, ou seja, não se intersectam.

**Exemplo 3.3:**

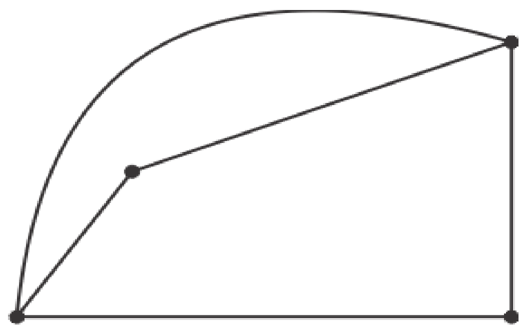


**Figura 30: Grafo Planar.**

**Definição 3.4.** No grafo, uma região é uma das partes do plano limitada por arestas.

Exemplo de regiões:

Neste primeito Grafo temos 3 regiões onde a "parte exterior" também é considerada uma região.

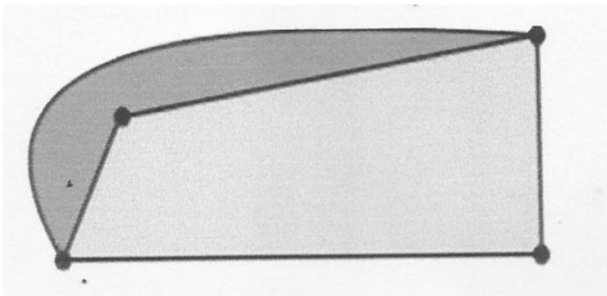


**Figura 31: Regiões no grafo**.

Na figura 32 temos agora um Grafo com 4 regiões, contando com a" parte de fora".

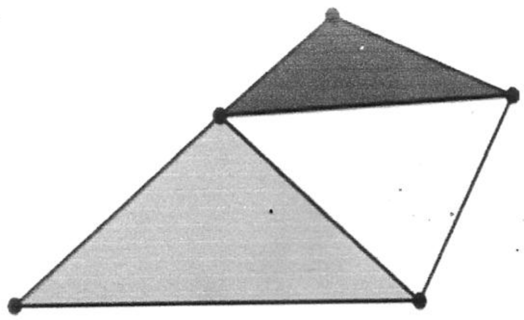


**Figura 32: grafo com 4 regiões**.

E por fim, temos a última figura que também possui 3 regiões. Essas informações serão muito úteis para a solução do problema das três casas que será representado a seguir:

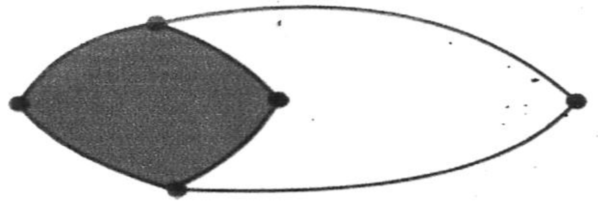
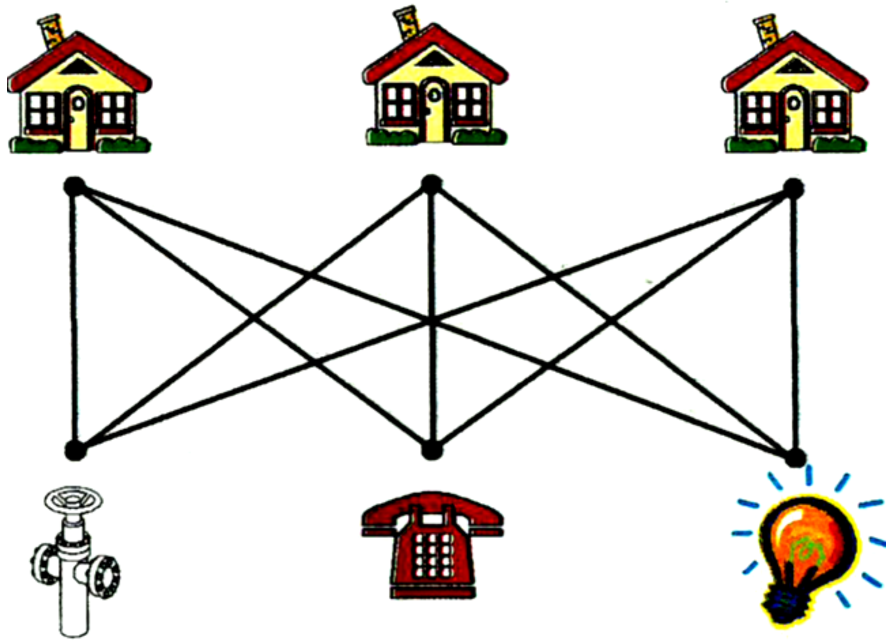


**Figura 33: Grafo com 3 regiões.**

### 3.2.1. TEOREMA DE EULER NOS GRAFOS

O problema das três fontes de suprimentos.

Três fontes de suprimento provem água, telefone e eletricidade a três casas.



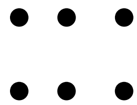
O mapa das linhas de suprimentos dá origem a um grafo de 6 vértices e 9 arestas, como na figura. É possível descruzar as linhas dos diagramas? Ou seja, é possível redesenhar esse grafo em um plano?

Para resolvemos esse problema iremos supor que as ligações sejam possíveis onde poderíamos perguntar: Quantas ligações teriam que existir para que o problema fosse resolvido?

Observando a nossa figura temos que a água tem que se conectar com as três casas, por hipótese, neste caso teremos 3 ligações.

Em seguida o telefone tem que se conectar também com as três casas, onde teremos mais 3 ligações. E de igual modo à eletricidade também tem que se conectar com as três casas. Desse modo teremos 9 ligações no total.

Vamos agora redesenhar esse grafo, em que desenharemos em princípio apenas pontos em vez de retângulos e casinhas.



Cada ponto da figura acima será o vértice, e em vez de dizermos ligações de água, telefone e eletricidade vamos simplesmente dizer arestas. E em vez de dizermos “figura” vamos dizer grafo.

Quantas regiões o nosso grafo deverá ter?

Aplicando a Fórmula de Euler para grafos temos:

$$V - A + R = 2$$
$$R = 2 - V + A$$
$$R = 2 - 6 + 9 \rightarrow R = 5$$

Formando então um poliedro plano com seis vértices e 9 arestas tendo 5 faces. Como vimos na figura do problema, o poliedro formado não pode ter faces triangulares, por não haverem ligações entre duas casas e dois terminais, tendo cada face (região) ser no mínimo quadrangular.

Assim o número de aresta satisfaz

$$2A \geq 5 \times 4$$
$$A \geq 10,$$

o que é uma contradição. Logo, podemos concluir que não é possível fazer as conexões desejadas no problema sem que ocorra o cruzamento entre as arestas, tornando a solução do problema impossível.

## 4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Buscamos durante esse trabalho aprofundar os estudos sobre o Teorema de Euler mostrando a importância de compreendermos de uma maneira simples a Fórmula de Euler e analisar a definição de poliedros, refletindo sobre, suas definições nos livros didáticos.

O trabalho objetivou desta forma, aprofundar os conhecimentos a respeito desse assunto buscando aumentar o interesse do aluno no estudo da geometria espacial como um todo. Além disso, a visualização das faces e vértices de um poliedro por parte deles seria uma grande contribuição para aumentar a sua capacidade de visualização desvinculando-os do ensino tradicional, fazendo com que as aplicações apresentadas neste trabalho contribuíssem para uma melhor compreensão do tema, levando a despertar alunos, professores e pesquisadores matemáticos que tenham interesse em aprofundar e darem continuidade a este trabalho de forma que auxilie em uma compreensão acessível a todos os níveis de ensino.

Sendo assim, sua elaboração exigiu bastante estudo e pesquisa  na busca resultados apropriados e satisfatórios  para  uma melhor compreensão do conteúdo apresentado durante o trabalho.

Uma possível proposta de continuidade e para o mesmo, seria o estudo de aplicações relacionadas ainda com o Teorema de Euler voltados para o ensino básico, como por exemplo: O cubo mágico na visualização e construção de faces, vértices e arestas, o estudo dos poliedros estrelados, a planificação de figuras geométricas que ajudem os alunos na visualização de faces, vértices e arestas de cada sólido. Por fim espero que a pesquisa tenha contribuído de forma positiva para melhor compreensão e aprofundamento do que foi inicialmente proposto..

## 5. REFERÊNCIAS

LIMA, Elon Lages. **Meu Professor de Matemática e outras Histórias**. 6 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

LIMA, Elon Lages. **Matemática do ensino médio**, v. 2. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

FILHO, Zoroaldo, Azambuja. **Demonstração do Teorema de Euler para poliedros convexos**. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, nº 3, p. 15-17, 1983.

LIMA, Elon Lages. **A matemática no ensino médio,** v. 4**,** 6 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

MIALICH, Flávia Renata. **"Poliedros e Teorema de Euler",** Dissertação de mestrado apresentado à Universidade Estadual Paulista, 2013.

DANTE, Luís Roberto. **Matemática: Contexto e Aplicações.** São Paulo: Ática, v. 2, Ensino Médio, 2012.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo. DEGENSZAJN, David. **Matemática do ensino médio: ciência e aplicações**, v. 2. Atual, São Paulo, SP, 2010.

SARTOR, Nayara Longo. "**O Universo dos Poliedros Regulares**", Dissertação de mestrado apresenta à Universidade Federal de Mato Grosso 2013.

PEREIRA, Hamilton Soares." **Poliedros Platônicos**", Monografia apresenta à Universidade Federal de Minas, 2011.

CAVALCANTE, Fabiana Nascimento Santos; SILVA, Domingos Severino da. **Grafos e suas Aplicações** TCC apresentado ao Centro Universitário Adventista de São Paulo, campus São Paulo**,** 2009.

## 5.1. SITES REFERIDOS

**CORES, GRAFOS E RESOLUÇÃO DE CONFLITOS**.
http://gazeta.spm.pt/getArtigo?gid=247
Acesso em 20 de outubro de 2014.
**HISTÓRIA DA GEOMETRIA (POLIEDROS)**
http://www.apm.pt/apm/amm/paginas/231_249.pdf
Acessado dia 18 de novembro de 2014