UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA

CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

HÉLIO LIMA

PROPOSTA METODOLÓGICA DE ENSINO E APRENDIZAGEM DA TRIGONOMETRIA NA EDUCAÇÃO FUNDAMENTAL

Campina Grande
2015

HÉLIO LIMA

PROPOSTA METODOLÓGICA DE ENSINO E APRENDIZAGEM DA TRIGONOMETRIA NA EDUCAÇÃO FUNDAMENTAL

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Prof.ª. Msc. Maria da Conceição Vieira Fernandes

Campina Grande – PB
2015

L732p Lima, Hélio.
Proposta metodológica de ensino e aprendizagem da trigonometria na educação fundamental [manuscrito] / Hélio Lima. - 2015.
70 p. : il. Color.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2015.
"Orientação: Profa. Ma. Maria da Conceição Vieira Fernandes, Departamento de Matemática".

1. Ensino de matemática. 2. Educação fundamental. 3. Trigonometria. 4. Metodologia de ensino. I. Título.

21. ed. CDD 516.24

HÉLIO LIMA

PROPOSTA METODOLÓGICA DE ENSINO E APRENDIZAGEM DA TRIGONOMETRIA NA EDUCAÇÃO FUNDAMENTAL

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Aprovado em: 10, 12, 2015

BANCA EXAMINADORA

Maria da Conceição Vieira Fernandes

Profa.: Msc. Maria da Conceição Vieira Fernandes

(Orientadora)

Fernando Luiz Tavares da Silva

Prof.: Msc. Fernando Luiz Tavares da Silva

(Examinador)

Castor da Paz Filho

Prof.: Msc. Castor da Paz Filho

(Examinador)

Campina Grande – PB

2015

AGRADECIMENTOS

A Deus, sempre presente na minha vida, sem o qual nada teria sentido.

Aos professores, Fernando Luiz e Castor, pelos ensinamentos e pelas palavras inspiradoras.

A prof.ª Maria da Conceição, pela paciência e pela forma tão agradável de conduzir e orientar seus alunos, sempre se colocando à disposição em todas as etapas da pesquisa.

A todos os colegas do curso de Matemática.

Ao meu filho Emerson, sempre presente nos momentos mais difíceis.

Obrigado por participarem desta etapa tão importante na minha vida.

A todos vocês meus sinceros agradecimentos.

RESUMO

Este trabalho teve como objetivo principal, implementar e analisar uma proposta pedagógica de ensino, com o intuito de potencializar a construção dos conceitos das razões trigonométricas básicas: seno, cosseno e tangente em uma turma do 9° ano do ensino fundamental de uma escola municipal da cidade de Lagoa Seca PB. Nossa proposta se norteou principalmente nas premissas dos Parâmetros Curriculares Nacionais (2001), tendo também, como fontes inspiradoras, a leitura de obras de importantes autores tais como: David Ausubel, (1980), Piaget (1987), Paulo Freire (1996), Ubiratan D'Ambrósio (1996), Boyer (1996), entre outros. Contribuíram também para a sedimentação desta pesquisa, outros trabalhos com temas correlatos ao nosso, ou seja, o estudo da Trigonometria no Triângulo Retângulo. Obras estas, que poderão ser verificadas na referência bibliográfica deste trabalho. Em nossa metodologia, lançamos mão da História da Matemática, da Resolução de Problemas e da aplicação da Trigonometria em situações práticas. Buscamos com isso, um melhor aproveitamento do conteúdo através das valorizações das estratégias e dos conhecimentos prévios dos alunos. Os resultados da pesquisa, de acordo com as respostas orais e escritas obtidas, mostraram um maior interesse pelo conteúdo trigonométrico, uma maior motivação na realização das atividades. Ao final, de acordo com os resultados obtidos, verificamos que houve um aproveitamento significativo na construção dos conceitos das razões trigonométricas básicas, de acordo com os objetivos estabelecidos.

Palavras-chave: Ensino-aprendizagem da Matemática. Educação Fundamental. Trigonometria do Triângulo Retângulo. Proposta Metodológica.

ABSTRACT

This work aimed to implement and analyze a pedagogical education proposal, in order to enhance the construction of the concepts of basic trigonometric ratios: sine, cosine and tangent. Applied in a class of 9th grade of elementary school to a public school of the city of Lagoa Seca PB. Our proposal is guided mainly in the premises of the National Curriculum Standards (2001), Having also as sources of inspiration, reading works of important authors such as David Ausubel (1980), Piaget (1987), Paulo Freire (1996) D'Ambrosio (1996), Boyer (1996), among others. Also contributed to the consolidation of this research, other jobs with related topics to ours, that is, the study of trigonometry in the Triangle rectangle, these works, which can be verified in the bibliographic reference of this work. In our methodology, we used the history of mathematics, problem solving and the application of trigonometric in practical situations. We seek it, a better use of the content through the valuations of strategies and previous knowledge of students. The result of the survey, according to the oral and written responses given by the students showed a greater interest in the trigonometric content, greater motivation in carrying out activities. And the final product, according to the results obtained, contributed significantly to the enhancement of the construction of the concepts of basic trigonometric reasons, according to the set objectives.

Key words: Teaching and learning of mathematics. Elementary education. Trigonometry Rectangle Triangle. Methodological Proposal.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

SITUANDO A PESQUISA

Ao planejarmos o desenvolvimento deste trabalho, nos reportamos inicialmente ao tempo de vivência que tivemos como aluno do ensino básico. Fizemos essa reflexão, tentando encontrar algum vestígio ou inquietação relevante, que pudesse contribuir para o desenvolvimento de uma proposta metodológica que fosse capaz de auxiliar no ensino e na aprendizagem das razões trigonométricas básicas.

Procuramos um foco nos métodos de ensino e nos recursos utilizados pelos nossos antigos professores. Lembramo-nos das aulas de Matemática que, naquele momento não contemplavam nenhum recurso atrativo ou desafios que nos motivassem ou nos instigassem na busca da construção dos nossos conhecimentos.

Neste período de reflexão, lembramos que, os recursos utilizados pelos professores, era o quadro, o giz, o discurso rico em simbologia e cheio de abstrações sem sentido e sem vínculo algum com nossa realidade.

Sempre ficávamos pensando para quê estudar isso ou aquilo. E, naquele momento, tínhamos como certeza que estudar Matemática se resumia a decorar as fórmulas e aplicá-las nas infindáveis listas de exercícios de fixação, sempre com as mesmas estruturas, as vezes só se mudavam as operações.

A transmissão do conhecimento era o fator mais importante naquele momento, se desconsiderando outros aspectos tão importantes da educação. Aprendíamos quando reproduzíamos os conteúdos de acordo com os procedimentos estabelecidos pelos professores. Era sempre o mesmo modelo, como se estivéssemos seguindo uma receita de bolo. Não nos davam oportunidade para questionar ou discutir os exercícios. Neste sentido, afirma Freire (1996, p.19), ‘’ Ensinar não é transferir conhecimento, mais criar as possibilidades para sua própria produção ou construção’’, continua, Freire (1996, p. 35):

> (...) Um aspecto importante, é aquele que o diálogo pressupõe pelo menos dois que falam, não é só um. Então, as práticas educativas, muitas vezes se assentam na figura do educador como aquele que fala e do aluno como aquele que ouve.

Os resultados corretos dos exercícios era o que mais interessava aos professores. Acreditamos que eram parâmetros para se medir a capacidade ou o grau de aprendizagem dos alunos. A avaliação era taxativa, buscava-se tão somente a resposta ideal, não se discutia o erro ou se analisava o processo ou estratégia de resolução das atividades. Em contrapartida, veja o que afirma Pereira (2012, p.24), ‘’ aprendemos corrigindo erros’’.

A isso, também afirma D’Ambrósio (1986, p.3), ‘’ É a partir do estudo dos erros cometidos pelos alunos que podemos compreender interpretações por eles desenvolvidas’’.

Todavia, isto não é uma crítica, é apenas uma reflexão da nossa vivência como estudante do ensino fundamental, onde através desta breve análise, buscamos identificar quais os elementos necessários para embasar o desenvolvimento de nossa proposta metodológica de ensino.

Hoje já existe uma preocupação maior com o processo de ensino e aprendizagem em Matemática. A Educação Matemática se apresenta com uma estrutura capaz de melhorar cada vez mais esse processo educativo, através de suas linhas de pesquisas. Concordando assim, com D’Ambrósio (1989, P. 3), quando afirma:

> (...) A colocação de uma maior ênfase no currículo da matemática, tem sido amplamente discutido na comunidade de Educação Matemática, internacionalmente. Atualmente, esta preocupação encontra-se expressa nas novas propostas curriculares que surgem mundialmente, inclusive no Brasil.

Contemplam uma série de especialidades tendo como objetivo a investigação do ensino e da aprendizagem em Matemática. Algumas das importantes tendências metodológicas que fazem parte da linha de pesquisa da Educação Matemática são por exemplo: Modelagem Matemática, Tecnologia da Informação, Jogos Educativos, Etnomatemática, Resolução de Problemas, História da Matemática, entre outras.

A escolha do tema do trabalho se deu pelo fato de termos com a Trigonometria uma relação de muita curiosidade e ao mesmo tempo um sentimento de desafio. Pois, sempre tivemos tanto curiosidade como também muita dificuldade em aprender.

Assim, o objetivo de nosso trabalho é implementar uma proposta metodológica de ensino e verificar a sua potencialidade na construção dos conceitos das razões trigonométricas básicas, seno, cosseno e tangente.

Para tal, recorremos à leitura de alguns trabalhos correlatos ao tema Trigonometria do Triângulo Retângulo, bem como a troca de experiências e sugestões com os colegas de curso e orientações significativas de professores que marcaram a nossa trajetória durante a graduação.

Procuramos fundamentar nossa proposta, principalmente a luz dos Parâmetros Curriculares Nacionais (2001), e, em alguns aspectos da Teoria da aprendizagem significativa de David Ausubel (1980), das ideias construtivistas de Piaget (1987), e em outros importantes educadores que nos inspiraram com seus magníficos trabalhos, cuja relação se encontra na referência desta pesquisa.

Em nossa proposta, utilizamos duas importantes tendências matemáticas que foram: A Resolução de Problemas e a História da Matemática, aliadas a aplicação do conteúdo trigonométrico na prática.

A pesquisa foi desenvolvida com aplicação de atividades sobre algumas construções geométricas, resolução de alguns problemas contextualizados e a utilização do conteúdo de Trigonometria em algumas atividades diárias. A implementação se deu em uma turma do 9° ano do ensino fundamental de uma escola municipal da cidade de Lagoa Seca, PB.

O trabalho está apresentado com a seguinte estrutura:

Após a introdução que segue, apresenta-se o capítulo 1, onde são feitas algumas considerações sobre o Ensino e Aprendizagem da Matemática na Educação Básica; aspectos como: Para que estudar Matemática? e Como ensinar Matemática hoje?

No capítulo 2, apresentamos um breve relato histórico da origem trigonométrica; alguns aspectos sobre a Trigonometria no ensino fundamental e como se apresentam os conteúdos de Trigonometria nos livros didáticos.

Ao longo do capítulo 3, apresentamos a nossa proposta didático-pedagógica, onde comentamos sobre a metodologia, fazemos algumas considerações sobre a importância dos recursos didáticos na proposta de trabalho, os recursos utilizados em nossa pesquisa, relatos do andamento da metodologia, a estrutura da proposta, as atividades desenvolvidas pelo professor, tais como: o uso do texto introdutório da Trigonometria, demonstração da Trigonometria na Astronomia, formalização das razões trigonométricas básicas: seno, cosseno e tangente, e, mostrando também, um exemplo da aplicação do conteúdo em uma situação do cotidiano. (Uso do Teodolito para cálculo da altura de um prédio).

Temos também as atividades desenvolvidas pelos alunos tais como: Construção de triângulos retângulos, aplicação das razões trigonométricas em situações contextualizadas, leitura de um texto sobre Hiparco de Niceia, construção de tabela trigonométrica, Astrolábio, e da aplicação do conteúdo estudado em uma situação real com a utilização do instrumento construído pelos alunos (Astrolábio). Após as atividades realizadas, apresentamos os resultados e os comentários das tarefas desenvolvidas pelos alunos. Finalizamos com as nossas considerações finais e referências bibliográficas.

1. CONSIDERAÇÕES SOBRE O ENSINO E APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Neste capítulo abordaremos alguns aspectos acerca da Matemática no ensino fundamental; com também, os tópicos: Para quê estudar Matemática? e Como ensinar Matemática hoje? ,

1.1. MATEMÁTICA NO ENSINO FUNDAMENTAL

A Matemática faz parte da vida de todos nós, sendo quase impossível abrir um jornal, ouvir um rádio ou assistir um programa de TV e não se deparar com qualquer fragmento do conhecimento matemático, seja em forma de gráficos, tabelas ou de cálculos de porcentagens. São conceitos necessários na observação e descrição de vários assuntos. No mundo atual, a Matemática é cada vez mais necessária para fazer a descrição de modelos, e, para resolver muitos problemas, nas mais diversas áreas de estudo como também em muitas situações cotidianas.

Para explicar um eletrocardiograma o médico utiliza um esquema matemático, ao dar um resultado de um exame, está utilizando o raciocínio matemático e empregando um conhecimento estatístico. Da mesma forma, um pedreiro utiliza um raciocínio básico para construir ângulos retos que já era empregado na Antiguidade pelos egípcios. Uma costureira, ao cortar uma peça de tecido, constrói um modelo, está desenvolvendo sua percepção de espaço, e dessa forma, resolve um problema geométrico.

> A Matemática está presente na vida cotidiana de todo cidadão, por vezes de forma explícita e por vezes de forma sutil. No momento em que abrimos os olhos pela manhã e olhamos a hora no despertador, estamos ‘’ lendo’’ na linguagem matemática, exercitando nossa abstração e utilizando conhecimentos matemáticos que a humanidade levou séculos para construir. (HELLMEISTER, RAPHAEL E DRUCK, 2004. P. 3)

Embora, faça parte praticamente de todas as áreas do conhecimento, nem sempre é fácil mostrar para o aluno aplicações dos conteúdos matemáticos em situações reais ou de relacionar o assunto estudado em sala de aula com situações próximas de sua vivência.

Não é sempre que, o professor encontra ajuda para realizar a tarefa de motivar e desafiar o aluno, relacionando a Matemática com outras áreas de estudo ou mesmo, fazendo a ligação do conteúdo estudado com o cotidiano do estudante. Como afirma, Jordane e Freitas (2011, p.7):

> A Matemática é marcada de vida. Inserida na vida com o propósito único de promover a vida. O complicado, no entanto, é estabelecer uma relação entre o saber matemático mais formal e o saber construído na vida pela vivencia, aquela que faz parte de nosso dia a dia.

Nesse sentido, afirmam Hellmeister, Raphael e Druck (2004, p.1), ‘’ é imprescindível ao professor compartilhar experiências que, já foram testadas na prática, e, que tenha acesso a textos de leituras que ampliem seus horizontes e aprofundem seus conhecimentos’’.

Na maioria das escolas, os conteúdos são trabalhados de forma descontextualizados, sem relação alguma com a realidade do estudante. Com isso, a aula não o motiva, não provoca curiosidade e não é interessante ao seu olhar, provocando muitas vezes o desinteresse pela aula.

Encontramos, muitas vezes, um ensino baseado na transmissão do conhecimento, onde o professor detém o saber e em muitos casos sem o desejo de sair de sua zona de conforto. O aluno é encarado apenas como um receptor e reprodutor de conteúdo. Desta forma, se o aluno consegue ter sucesso na resolução de qualquer exercício, de acordo com os procedimentos pré-estabelecidos pelo professor, acredita-se que ele está aprendendo. Esta concepção com relação a Matemática não é uma coisa de hoje, tem sua origem há muito tempo atrás. O ensino desta disciplina neste contexto se apóia em preceitos de uma pedagogia tradicional e conservadora. Concordamos assim, com Laudares (2005), quando diz:

> Essa concepção conservadora tem sido desenvolvida a partir de conteúdos abstratos, e formalizados. As atividades desenvolvidas em sala de aula primam pela busca de saberes, descontextualizados, fixos em estado pronto e acabado.

Não se considera nesse modelo, a construção do conhecimento através do processo de investigação ou análise das estratégias que o estudante utiliza para resolução de suas atividades. O aluno fica num estado de dependência ao professor, esperando que ele mostre o caminho para se resolver uma série de exercícios repetitivos, sempre de forma mecânica. Desta forma, está apenas reproduzindo os conhecimentos e procedimentos que lhes foi mostrado. Dessa maneira, ele não reflete, não consegue generalizar ou mesmo manipular os conceitos desenvolvidos em sala de aula.

Não é desafiado ou incentivado a formular novos problemas, nem tão pouco orientado a resolver as questões a sua maneira, utilizando os seus conhecimentos acumulados, criando uma estratégia própria para a resolução de suas atividades. Neste sentido, Laudares (2005, p.55), destaca:

> (...) o professor faz questão de preparar todos os problemas com antecedência; consequentemente, o legítimo ato de pensar matematicamente é escondido do aluno, e o único a conhecer a dinâmica desse processo continua sendo o professor. O professor com isso guarda para si a emoção da descoberta de uma solução fascinante. (...)

Portanto, não se cria uma base sólida para uma aprendizagem efetiva que só será alcançada através da compreensão dos processos envolvidos na construção do conhecimento. É muito importante também, considerar a tentativa e o erro, de modo a diminuir a relação do raciocínio matemático com o uso adequado da linguagem. Com o passar dos tempos, o erro foi considerado como algo negativo e sujeito a punição. Todavia, como afirma Pereira (2012, p.24)

> O erro, porém, é um mecanismo humano que muitas vezes constrói o conhecimento. Sendo assim, não podemos desprezar o tratamento do erro, principalmente quando tratamos de aprendizagem significativa crítica, pois o primeiro elemento que o indivíduo deve criticar tem que ser a si próprio.

Assim como é possível ler um texto sem compreender seu conteúdo, também é possível aprender alguma regra e utilizá-la de forma mecânica e sem sentido. Por isso, uma das grandes dificuldades no ensino da Matemática é a linguagem que precisa ser utilizada. Para Markarian (2004, p. 278):

> O aprendizado da matemática depende de uma linguagem e de símbolos próprios e específicos. As dificuldades inerentes à linguagem e ao simbolismo matemático, obriga a tomar o devido cuidado na utilização de tais instrumentos no ensino.

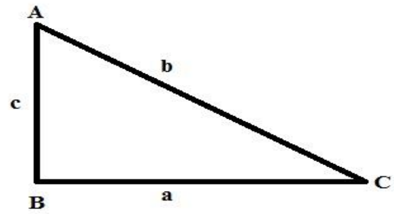
Muitas vezes o aluno compreende a idéia, mas não é capaz de manipular a linguagem. De outra forma, utiliza a linguagem de maneira errada e sem sentido.

Podemos verificar isso, ao trabalharmos com o Teorema de Pitágoras. Observem como geralmente se apresenta a fórmula nos livros didáticos: $\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2}$.

Agora, veja o que ocorre quando se pede ao aluno o cálculo do valor da medida da hipotenusa no triângulo retângulo **ABC**, da figura 1.

FIGURA 01- Triângulo ABC – O Teorema de Pitágoras

$\boldsymbol{b^2 = a^2 + c^2}$



Fonte: Construção do pesquisador, 2015.

Se por ventura o aluno não tenha realmente dominado o conteúdo (Teorema), ele certamente irá cometer um erro na resolução desta atividade, pois como podemos observar na configuração do triângulo **ABC** da figura 1, temos que a fórmula se apresenta com outra estrutura.

De imediato, percebe-se que, $b^2 = a^2 + c^2 \neq \quad a^2 = b^2 + c^2$. Assim, ao tentar resolver a questão sem o domínio da linguagem, podemos conduzir o estudante ao insucesso na resolução dessa tarefa.

Outro aspecto muito importante também, é que, o professor tenha consciência de que o aprendizado da Matemática no ensino fundamental, não pode ser atingido apenas com jogos, brincadeiras ou divertimentos, mas, acreditamos que relacionar aulas usuais com aulas diferentes e criativas, pode ser um diferencial no trabalho do professor. Como afirma o PCN (2001, p. 36), ‘’ mesmo no ensino fundamental, espera-se que o conhecimento aprendido não fique limitado a um contexto único, mas que possa ser generalizado, transferido a outros contextos. ’’

Assim, para trabalhar a Matemática no ensino fundamental é importante que se reflita sobre a natureza desse conhecimento e que se discuta suas principais características, bem como, seus métodos. E, principalmente, que seja feita uma análise sobre seu papel no currículo, sua contribuição para a formação da cidadania para se ter argumentos sólidos e que se responda: Para que estudar Matemática?

1.2. PARA QUE ESTUDAR MATEMÁTICA?

Para se refletir sobre o tema, vamos nos deter nas palavras de Jordane e Freitas (2011, p.7), que afirmam: ‘’ Quando entramos para sala de aula, como professor ou como alunos, uma das primeiras perguntas que nos surge é: Por que estamos estudando isso? Onde vamos usar isso? Para que preciso aprender Trigonometria?

Responder estas perguntas muitas vezes não é algo tão simples. Primeiro, é necessário estarmos atentos sobre que concepções, temos da Matemática.

> Podemos acreditar que ela é uma ciência descoberta, que sempre existiu em um ‘’ mundo das idéias’’, como afirmava Platão. Outra questão é exatamente, que a Matemática foi construída ao longo dos anos por milhares de pessoas. (JORDANE, FREITAS, 2011, p.7)

Após, feitas nossas reflexões sobre qual concepção, usaremos como norte, podemos buscar, entender onde, e, como a Matemática aparece no nosso dia a dia, e tentar responder com bastante significado as questões envolvidas em nosso tema. Uma alternativa para se responder essas indagações é, entender que a Matemática cresce com o intento de se encontrar soluções para os mais diversos problemas que afligem a humanidade. Assim, procurar respostas através do caminho que o homem trilhou durante o passar dos anos é uma linha bastante segura e convincente. Concordamos com Jordane e Freitas (2011, p.7), quando afirmam: ‘’. Assumimos assim, uma Matemática que se insere na história da humanidade, que cresce à medida que mais e mais sujeitos se envolveram na busca de respostas ás necessidades humanas. ’’

Então, partindo do entendimento de que o conhecimento matemático cresce à medida que aumentam os problemas que afetam a sociedade, fica evidente que esse conhecimento se integra na nossa vida de maneira plena. Portanto, estudar Matemática foi e é fundamental ao desenvolvimento humano. O complicado, no entanto, é fazer a relação entre o saber formal e o saber construído pela vivência.

Esta ligação tão importante fica mais complicada quando percebemos que o saber do cotidiano se altera muito, cada vez que o conhecimento científico se aproxima. Isto, é percebido muitas vezes, quando observamos todas as mudanças, e, transformações ocorridas, nos últimos anos. Estamos cercados por um desenvolvimento tecnológico cada vez mais acelerado. É um mundo de tecnologia que, domina constantemente a vida de toda sociedade.

A respeito do desenvolvimento desse mundo tecnológico Garbi (2007, apud COSTA NETO, 2011, p.3) diz, (...) '' ele foi construído porque o homem por meio da matemática acumulou ao longo dos séculos vastos conhecimentos sobre o mundo físico e, com isso, conseguiu parcialmente, dominá-lo, e colocá-lo a seu serviço. ''

Outro aspecto é, a Matemática formal é mais ou menos importante que a Matemática do dia a dia? Entendemos que ambas são importantes e necessárias, e relacionar as experiências de vida e o conhecimento mais formal talvez seja um dos maiores desafios dos educadores matemáticos. Além do mais, não podemos ficar ancorados em um único contexto. Temos que nos aventurar em diferentes caminhos, e buscar constantemente todo conhecimento matemático possível. Pois, como já foi dito anteriormente, esse conhecimento faz parte da nossa vida. Portanto, temos que aprender Matemática porque ela se apresenta como uma forma de compreender e de se integrar no mundo. Salientamos mais uma vez que, a Matemática está presente em nossa realidade através da contagem, medição de grandezas, no desenvolvimento de técnicas de cálculos, revelar fenômenos da natureza, entre outros.

São inúmeras aplicações nas mais variadas atividades humanas, das mais simples na vida cotidiana, às mais complicadas estruturas de outras ciências.

'' O conhecimento matemático se reflete diretamente sobre as condições humanas de sobrevivência, integração das pessoas no mundo do trabalho e nas relações sociais'', afirma os PCNs (2001).

A sociedade depende cada vez mais de novos conhecimentos para se desenvolver. E uma característica dos dias de hoje, refere-se ao mundo do trabalho, onde se buscam constantemente trabalhadores cada vez mais qualificados. Os profissionais precisam estar num contínuo processo de capacitação e, portanto, aprender tornou-se cada vez mais necessário.

> A sobrevivência na sociedade depende cada vez mais de conhecimento, pois diante da complexidade da organização social, a falta de recurso para obter e interpretar informação, impedem a participação efetiva e a tomada de decisões em relação aos problemas sociais. Impede, ainda, o acesso ao conhecimento mais elaborado e dificulta o acesso às posições no trabalho. (BRASIL, 2001, p.26)

Assim, resumindo nossa discussão sobre o para que estudar Matemática, partimos da idéia, de que ela é fruto da construção humana e, que está em constante processo de transformação. Faz parte de nossa realidade, cumprindo um papel imprescindível na formação do indivíduo para a cidadania e, que principalmente, contribui como estrutura fundamental para o desenvolvimento tecnológico.

Diante da consciência que tomamos e assimilamos, acerca de para que estudar Matemática, vamos nos deter e refletir agora, de como ensinar Matemática hoje e assim, termos um parâmetro orientador para a proposta de ensino que pretendemos desenvolver.

1.3. COMO ENSINAR MATEMÁTICA HOJE?

Facilitar o entendimento da Matemática e suas utilizações, levando o aluno a relacionar o conteúdo estudado com sua realidade, evitando assim, apenas a memorização de fórmulas, regras e procedimentos, deve ser nossa primeira motivação. Desta forma, estaremos contribuindo para a construção de um conhecimento sólido e significativo.

Pensamos que, a partir do momento em que o aluno consiga relacionar o conteúdo de estudo aos conceitos anteriormente acumulados, isso, ocasionará uma assimilação potencialmente efetiva. Como afirma Ausubel (1980), ‘’ o fator mais importante que influi na aprendizagem é aquilo que o aluno já sabe. ’’ Embora seja tão importante este fator, ele é bastante desprezado no ensino básico, como afirma o PCN:

> (...) a importância de levar em conta o conhecimento prévio dos alunos na construção de significados geralmente é desconsiderado. Na maioria das vezes, subestimam os conceitos desenvolvidos no decorrer das vivências práticas. (BRASIL, 2011, p.23)

Ainda, de acordo com Ausubel (1980), a aprendizagem é uma integração entre o novo conhecimento e os conhecimentos já acumulados. Ou seja, o conhecimento novo, para ser aprendido, precisa estar ligado em conceitos prévios dos alunos, ocasionando, dessa forma, um aprendizado efetivo.

Infelizmente, a Matemática ainda é vista como uma matéria difícil onde, estudá-la se limita a decorar fórmulas e procedimentos, sem compreendê-los e sem notar a importância que existe na aplicação de muitos conceitos vistos em sala de aula, ocorrendo assim, um desinteresse e falta de motivação por parte do aluno. Consequentemente haverá uma defasagem significativa na aprendizagem.

> Tal constatação os leva a assumir atitudes bastante negativas, que se manifestam no desinteresse, na falta de empenho e mesmo na pouca preocupação diante de resultados insatisfatórios ou nos sentimentos de insegurança, bloqueio e até em certa convicção de que são incompetentes para aprendê-las, o que os leva a se afastar da Matemática em situações na sua vida. (BRASIL, 2001, p.7)

Outro fator importante para se conseguir uma aprendizagem efetiva, é a organização da sala de aula em um lugar agradável, dinâmico, onde o professor através de um diálogo interessante consiga a participação do aluno, iniciando assim, a preparação para uma aula mais atrativa. Segundo Sant'Anna (2004), '' o professor, através da organização do ambiente, estará privilegiando as necessidades do educando, desenvolvendo a autonomia, valorizando a cooperação, encorajando a criatividade e a comunicação, motivando os alunos. ''

Desta forma, cabe ao professor buscar recursos adequados que possibilitem o despertar e o interesse do aluno para a Matemática. Essa busca pode inicialmente partir de uma reflexão de sua própria prática. Assim, terá a oportunidade de se reconhecer e de conhecer sua potencialidade. Consequentemente desenvolverá um trabalho mais significativo.

É preciso salientar ainda que, o ensino da Matemática na educação básica, deve procurar fazer com que os alunos percebam que os conceitos por eles efetivamente aprendidos vão ser necessários em suas vidas, com a continuação dos estudos ou também para o mercado de trabalho.

> Essas novas preocupações, que se instalam na vida dos jovens, quando o aluno avalia que os conhecimentos dos quais se apropria na escola são fundamentais para seus estudos futuros e para que possa inserir-se, como profissional, no mundo do trabalho. (BRASIL, 2001)

Como pudemos observar nos parágrafos anteriores, o processo de ensino e aprendizagem é bastante complexo. Exige que o professor, esteja constantemente atento aos progressos desenvolvidos no âmbito educacional, para que seu desempenho satisfaça aos objetivos estabelecidos, como também, que, ele possa cumprir as propostas e metas estabelecidas pelos cronogramas curriculares da educação.

2. ASPECTOS HISTÓRICOS DA TRIGONOMETRIA E O CONTEÚDO TRIGOMÉTRICO NOS LIVROS DIDATICOS

2.1. BREVE HISTÓRICO DA TRIGONOMETRIA

Para se buscar a origem da Trigonometria, primeiramente vamos nos reportar aos tempos mais antigos, para se ter uma ideia mais precisa sobre o surgimento da Geometria e, desta forma, compreender a origem dos elementos trigonométricos.

Antes mesmo de conhecer a linguagem escrita, existem indícios de que o homem já tinha um contato com as formas dos seres e objetos que existiam no seu convívio e em seu mundo.

> Noções primitivas relacionadas com conceitos de número, grandeza e forma podem ser encontrados nos primeiros tempos da raça humana, e vislumbres de noções matemática se encontram em formas de vida que podem datar de milhões de anos antes da humanidade. (BOYER, 1996, p. 1)

Os gregos, Heródoto e Aristóteles, acreditavam que a Geometria teria surgido no Egito, embora os conhecimentos que eles dominavam, fossem mais antigos. Suas ideias em torno da origem da Geometria eram diferentes. Enquanto, Heródoto defendia uma Geometria nascida das necessidades básicas dos egípcios, por exemplo, medir as terras destinadas à agricultura, e que geralmente eram alagadas pelas águas do rio Nilo, por outro lado, Aristóteles, acreditava em uma Geometria fruto do estudo de sacerdotes em busca de lazer e que utilizavam esses conhecimentos na construção de altares e de templos para a prática de seus rituais.

Portanto, surgindo assim, estas duas teorias da origem da Geometria, diferentes e de certa forma, sem uma precisão da época exata do surgimento do assunto.

Logo, não podemos contradizer nem tão pouco afirmar com certeza o que produziu o surgimento da Geometria. Nesse sentido, completa Boyer (1996, p.1):

> É claro que a Geometria originalmente surgiu com parte da vida diária do homem, e se há validade no princípio biológico da '' sobrevivência dos mais aptos'' a persistência da raça humana provavelmente tem relação com o desenvolvimento de conceitos geométricos.

A Trigonometria, surgiu presumidamente, durante a segunda metade do segundo século, oriunda das necessidades básicas dos homens. E seu desenvolvimento se deu a um conjunto de pessoas em diferentes espaços e tempos. Quando da necessidade de se obter a medida de grandes distâncias que não podiam ser determinadas por falta de instrumentos na época, mas que podiam ser descobertas a partir de algumas relações matemáticas relativas ao triângulo retângulo. Esses problemas estavam por sua vez relacionados com situações práticas da navegação e da Astronomia.

> Os tamanhos do Sol e da Lua e as distancias desses astros à Terra já eram calculados na antiguidade, século antes de Cristo, (..) estão intimamente ligadas a noções fundamentais de geometria – como: semelhança e proporcionalidade de triângulo. (ÁVILA, 2004, p.39)

Cabe ao grego Hiparco de Niceia (190-120 a.C.), ser considerado o ‘’ Pai da Trigonometria’’ devido a seu importante estudo, onde entre outras coisas, sistematizou algumas relações entre os elementos de um triângulo retângulo e principalmente pela construção da primeira tabela trigonométrica. A Trigonometria estabelece relação entre medidas de ângulos e de segmentos, e por esse motivo, em sua origem foi considerada uma extensão da Geometria.

Entretanto, seu estudo não se resume apenas aos elementos dos triângulos retângulos. Encontramos aplicações nas mais variadas áreas do conhecimento, como, também em variadas profissões e inúmeras situações do cotidiano.

> A Trigonometria não se limita ao estudo de triângulos. Encontramos aplicações dela na Engenharia, na Mecânica, na Eletricidade, na Acústica, na Medicina, na Astronomia e até na Música. (GIOVANNI, CASTRUCCI E GIOVANNI JR, 2002, p.215)

Dando continuidade, vamos verificar como ela se apresenta no ensino fundamental, fase esta onde vamos implementar, nossa proposta de ensino.

2.2.A TRIGONOMETRIA NO ENSINO FUNDAMENTAL

A Geometria na educação básica foi por muito tempo desprezada e até mesmo abandonada do ensino da Matemática. Não se dava a devida importância de seu estudo e da contribuição que trouxe ao desenvolvimento científico. A isso, afirma Fainguelernt (1999, p. 14):

> O estudo de Geometria se comparado ao ensino das outras partes da Matemática, foi e é relegado ao segundo plano, pois alunos, professores, educadores e pesquisadores têm-se confrontado com modismo, desde o formalismo impregnado de demonstrações, passando pela algebrização até o empirismo, o que comprovadamente não auxilia no seu ensino.

No Brasil, a Geometria esteve praticamente ausente da sala de aula. Apesar do descaso, ela é muito importante para a construção do conhecimento como afirma o PCN:

> (...) a Geometria tem tido pouco destaque nas aulas de Matemática e, muitas vezes, confunde-se seu ensino com o das medidas. Em que pese seu abandono, ela desempenha um papel fundamental no currículo, na medida em que possibilita ao aluno desenvolver um tipo de pensamento particular para compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que se vive. (BRASIL, 2001, P. 122)

Frequentemente encontramos os conteúdos de Trigonometria no 9° ano do ensino fundamental. Nos livros didáticos, começa-se a se expor a Trigonometria do triângulo retângulo com algumas definições de seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo. Segue com breves relatos de acontecimentos históricos relacionados ao surgimento de algumas estruturas matemáticas. Destacam também a importância desses conceitos, e, as contribuições que promoveram na busca de solução para muitos problemas que o homem enfrentou em sua caminhada.

Alguns livros, ainda trazem bastantes sugestões de atividades interessantes para se desenvolver em sala de aula. Dicas de tarefas, onde se busca relacionar o aluno com situações próximas a sua realidade. Mostrando também que, a Matemática surgiu da busca de respostas para muitos problemas que o ser humano encontrou no desenvolvimento da sociedade. A isso, afirma Spinelli e Souza (2002, p. 3):

> A Matemática não é uma ciência mágica como algumas vezes parece ser. Seus conceitos foram construídos lenta e coletivamente ao longo da história por mercadores, artesãos, viajantes, astrônomos, cientistas, estudiosos e por muitos outros trabalhadores simples e anônimos.

Hoje, encontramos nos livros didáticos, sugestões de propostas metodológicas de ensino, de acordo com as novas tendências, tais como, a Resolução de Problemas, História da Matemática, Novas Tecnologias, Modelagem Matemática, etc.

Desta forma, cabe ao professor, definir suas reais concepções matemáticas, fazer uma reflexão crítica de sua prática, a fim de desenvolver um trabalho inovador e significativo. Acima de tudo, colocando o aluno no centro da atividade educativa.

No desenvolvimento de nossa proposta, apresentaremos uma análise de três livros didáticos, tendo como enfoque a Trigonometria do triângulo retângulo.

Contudo, procuramos delimitar nossa proposta, na construção e aplicação dos conceitos das razões trigonométricas básicas: seno, cosseno e tangente.

2.3. O CONTEÚDO TRIGONOMÉTRICO NOS LIVROS DIDÁTICOS

Apresentaremos agora, conteúdos de três livros didáticos do 9° ano do ensino fundamental. Obviamente nosso foco se deu em conteúdos relacionados com o tema do nosso trabalho.

Os livros analisados foram: A Conquista da Matemática de José Ruy Giovanni, Benedito Castrucci e José Ruy Giovanni Jr (2002); Matemática Ideias e Desafios de Iracema Mori e Dulce Sátiro Onaga (1996); Praticando Matemática de Álvaro Andrini e Maria José Vasconcellos (2002).

O livro "A Conquista da Matemática", traz inicialmente um relato histórico do conteúdo desenvolvido na Antiguidade. Fala sobre as descobertas feitas pelos babilônios relativo ao triângulo retângulo, o uso da Trigonometria pelos egípcios para resolver problemas práticos de mensuração de terras, na construção de templos e pirâmides, etc. Continua trabalhando com algumas situações problema e conclui com a formalização do conteúdo.

Observamos que o livro teve a preocupação em mencionar a História da Matemática, disponibilizando uma aula introdutória sobre a importância da Trigonometria, destacando seus pontos através da história e até mesmo realizando experimentos, tais como, calcular a altura de um monumento utilizando relações trigonométricas.

Ao analisar o livro "Praticando Matemática", observamos uma abordagem mais prática do conteúdo. Ele mostra ilustrações de instrumentos utilizados para medições, procura fazer com que os alunos percebam a presença de ângulos no ambiente escolar, como a quina da lousa ou na quina da parede da classe. Continua mostrando outras aplicações do conteúdo no cotidiano e paralelo a isso, vai utilizando a História da Matemática para contextualizar e mostrar a importância do conhecimento trigonométrico em nossas vidas.

O livro "Matemática ideias e desafios", apresenta uma abordagem mais formal do conteúdo. Procura conduzir o assunto de imediato para formalização. Encontramos poucos relatos históricos e poucos desafios como se propõe o título. A prioridade observada, foi de foco na apresentação da fórmula pronta e aplicação para se resolver exercícios padronizados.

A seguir, mostraremos como se desenvolve o conteúdo trigonométrico nos três livros didáticos.

2.3.1. Segmentos Proporcionais

O livro ‘’ A Conquista da Matemática’’, inicia o conteúdo através de uma viagem na história. Relata que desde os tempos mais remotos, o homem buscou cultivar a beleza e sua relação com a proporção.

A escola pitagórica contribuiu não só com o famoso teorema que leva o nome de seu mestre, mas também com a descoberta das relações de proporção no comprimento das cordas de instrumentos musicais.

O próprio Pitágoras, buscou explicar, também, qual seria a proporção geométrica ideal, segundo sua concepção de estilo, dos aspectos físicos das coisas naturais, incluindo aí as medidas do corpo humano.

O livro ‘’ Praticando Matemática’’, trabalha o conteúdo através da congruência e semelhança de figuras. Estimula os alunos na medição dos lados e ângulos internos de quadriláteros com o auxílio de régua e transferidor. Com isso, constrói um conhecimento bastante significativo.

E, a partir da semelhança de figuras, trabalha a construção do conceito de proporcionalidade.

Já, o livro ‘’ Ideias e Desafios’’, traz um breve relato histórico sobre Tales de Mileto, onde chegou-se nesse período a descobertas valiosas para a humanidade e grande avanço para o desenvolvimento da Geometria. O livro trabalha o conceito de proporcionalidade a partir da semelhança de figuras.

No geral, os livros apresentam a ideia de segmentos proporcionais da seguinte maneira: Quatro segmentos, AB, CD, MN e PQ, nessa ordem são proporcionais, quando a razão entre os dois primeiros for igual a razão entre os dois últimos, ou seja,

AB / CD = MN / PQ

2.3.2. Razões de segmentos

Chamamos de razão entre dois segmentos de reta, a razão entre os números que expressam as medidas desses segmentos, sempre tomados na mesma unidade.

Dados dois segmentos, **AB** e **CD**, a razão entre eles é indicada por $\boldsymbol{\frac{AB}{CD}}$

2.3.3. Semelhança de Triângulos

Os três livros trabalham esse tema da mesma forma, ou seja, apresenta o conteúdo através de suas propriedades e em seguida trabalha alguns exercícios.

Apresentam basicamente as seguintes definições:

Dois triângulos são semelhantes quando têm os ângulos correspondentes congruentes e os lados correspondentes proporcionais.

Em dois triângulos semelhantes:

●Os ângulos congruentes são chamados **ângulos correspondentes.**

●Os lados opostos ao ângulo correspondente são chamados **lados homólogos**.

O livro ‘’ Praticando Matemática’’, trabalha a semelhança de triângulo de forma bastante prática. Inicialmente é pedido que os alunos meçam os lados correspondentes de dois triângulos e em seguida, que os alunos completem uma tabela com os valores encontrados.

FIGURA 02 - Triângulo KYB

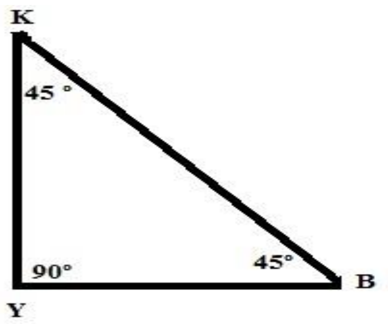
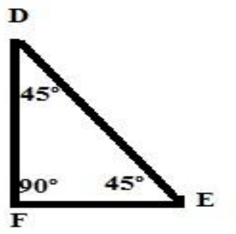


FIGURA 03 - Triângulo DFE



Fonte: Construção do pesquisador, 2015.

FIGURA 04 - Quadro de respostas

▲KYB	**▲DFE**	
KB = 7cm	**DE = 3,5 cm**	$\frac{KB}{DE}$ **= 2 cm**
BY = 5cm	**EF = 2,5 cm**	$\frac{BY}{EF}$ **= 2cm**
KY = 4cm	**FD = 2 cm**	$\frac{KY}{FD}$ **= 2cm**

Fonte: Construção do pesquisador, 2015.

‘’ Dois triângulos que possuem os ângulos correspondentes congruentes são semelhantes’’.

Na verdade, basta que dois pares de ângulos correspondentes sejam congruentes. Pois, como a soma das medidas dos ângulos internos é 180°, se dois pares de ângulos correspondentes forem congruentes, o terceiro par também será.

O livro ‘’ Ideias e desafios’’, faz uma comparação entre dois triângulos retângulos. Mostra que eles têm ângulos respectivamente congruentes e lados respectivamente proporcionais, e que por isso, têm a mesma forma. Dizemos que eles são triângulos semelhantes.

FIGURA 05 – Triângulo BYK

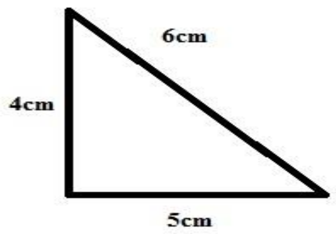
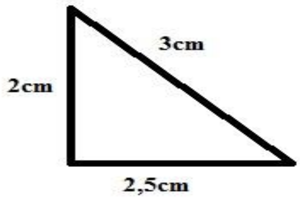


FIGURA 06 – Triângulo EDF



Fonte: Construção do pesquisador, 2015.

Ângulos correspondentes congruentes.

Retos: β = α; Agudos: θ = φ;γ = Ω

Lados correspondentes proporcionais.

BY / ED = 6/3 = **2** BK / EF = 4 / 2 = **2** KY / FD = 5 / 2,5 = **2**

BY / ED = BK / EF = KY / FD

Portanto, ∆ BYK e ∆ EDF têm a mesma forma. Eles são triângulos semelhantes e a razão de semelhança, nessa ordem, é 2

Indica-se: ∆ BYK ≈ ∆ EDF

Já o livro ‘’ A Conquista da Matemática’’, aborda esse conteúdo de forma semelhante aos dois livros anteriores.

Como pudemos observar, os livros não abordam os três casos de semelhança de triângulos como se desenvolve em muitos outros livros didáticos.

2.3.4. Relações métricas no triângulo retângulo

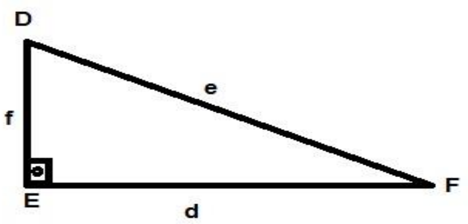
O livro "A Conquista da Matemática", antes de abordar o conteúdo, apresenta fatos históricos sobre os triângulos retângulos. Como por exemplo sua utilização pelos egípcios, para medir terras alagadas pelo rio Nilo. Em seguida, desenvolve o conteúdo, formalizando o conceito. Já, o livro "Matemática ideias e desafios", não aborda nenhum marco histórico ou situação problema. Destaca inicialmente os elementos dos triângulos retângulos e inicia a prática de exercícios.

O livro "Praticando Matemática", inicia o conteúdo com uma aplicação do teorema de Pitágoras em uma situação prática enfrentada pelos egípcios. Logo após, realiza a demonstração do teorema, e, paralelo a isso, narra a importância deste teorema na História da Matemática.

2.3.5. Elementos de um triângulo retângulo.

O triângulo retângulo **DEF** da figura 07, a seguir, representa um triângulo retângulo em E (Ê é reto), no geral**:**

FIGURA 07 - Elementos de um triângulo retângulo

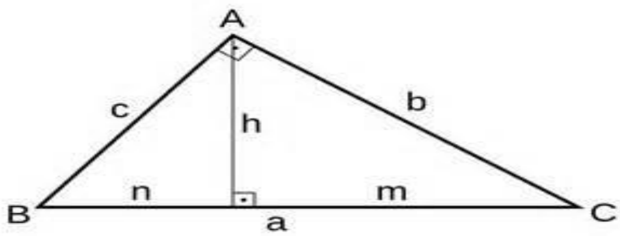


Fonte: Construção do pesquisador, 2015.

● O lado, **DF** oposto ao ângulo E, é a hipotenusa (representando sua medida por **e**)

● Os lados EF e ED opostos respectivamente aos ângulos $\hat{D}$ e $\hat{F}$ são os catetos (representamos suas medidas por **d** e **f**):

FIGURA 08 - Projeção dos catetos



Fonte: www.pt.wikibook.org em 15/11/2014

● h: medida da altura relativa à hipotenusa;

● m: medida da projeção do cateto **AC** sobre a hipotenusa;

● n: medida da projeção do cateto **AB** sobre a hipotenusa.

2.3.6. Demonstração do teorema de Pitágoras

A demonstração, baseia-se na semelhança de triângulos.

Consideremos o triângulo **BAC,** figura 08, retângulo em Â, com altura **AH** relativa à hipotenusa.

Temos que **a = m + n** (i)

Em seguida, tomemos os triângulos retângulos **CAB** e **AHB**, e colocamos esses dois triângulos na mesma posição. Assim, podemos perceber melhor os ângulos e os lados correspondentes (lados homólogos)

FIGURA 09 - Triângulo CAB

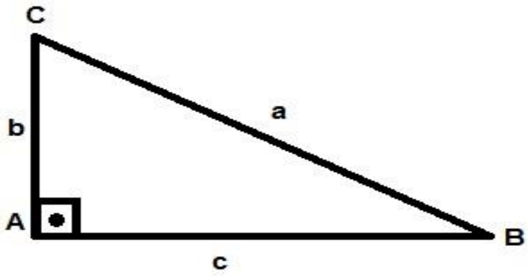
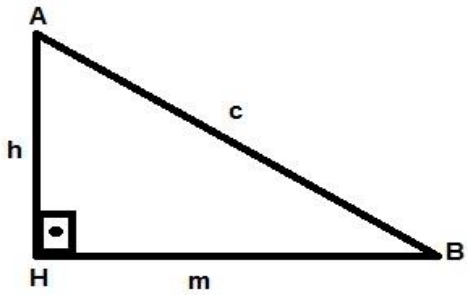


FIGURA 10 - Triângulo AHB



Fonte: Construção do pesquisador, 2015.

Os dois triângulos têm um ângulo reto (são triângulos retângulos) e têm o ângulo $\hat{B}$ comum, logo pelo caso AA de semelhança, Δ CAB ≈ AHB

Se os triângulos são semelhantes, os lados homólogos têm medidas proporcionais, o que nos permite escrever:

$\boldsymbol{\frac{a}{c} = \frac{b}{h} = \frac{c}{m}}$ Dessas proporções tiramos as relações a baixo;

c^2 = am (ii) ah = bc (iii) ch = bm (iv)

Vamos, agora, considerar os triângulos **CBA** e **HAC** das figuras: 11 e 12.

FIGURA 11 - Triângulo CBA

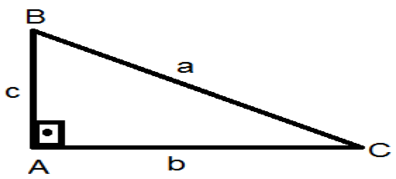
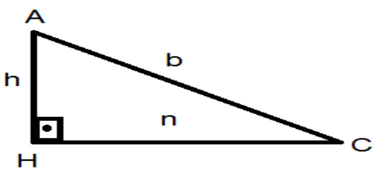


FIGURA 12 -Triângulo HAC



Fonte: Construção do pesquisador, 2015,

Esses dois triângulos têm um ângulo reto, e o ângulo $\hat{C}$ é comum; portanto, são semelhantes ∆ **CBA ≈** ∆ **HAC.**

Como os lados homólogos são proporcionais, escrevemos as proporções e delas obtemos as relações:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{n} = \frac{c}{h}$$

Dessas proporções tiramos as relações:

b^2 = an (v) bh= nc (vi) ah= bc (iii)

Adicionando-se os dois membros de duas das igualdades demonstradas, (v) e (ii), temos:

b^2 =an b^2+ c^2 = an+am b^2+ c^2 =a(n+m)

c^2 = am

Como a = m + n (i), temos:

$b^2 + c^2 =$ aa $\rightarrow$ $a^2 = b^2 + c^2$

Portanto, em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos. (Teorema de Pitágoras)

2.3.7. Razões trigonométricas no triângulo retângulo

O livro ‘'A Conquista da Matemática", aborda novamente o conteúdo de forma histórica, onde mostra que a Trigonometria, teve origem na busca de soluções de problemas relacionados à navegação e a Astronomia, e que, encontramos aplicações nas mais variadas profissões. Logo após, inicia-se o desenvolvimento do conteúdo.

Enquanto que, o livro ''Matemática ideias e desafios'', inicia o desenvolvimento do conteúdo, sem nenhuma abordagem histórica ou situação problema. Simplesmente, através de um triângulo retângulo, ele já mostra a configuração das fórmulas de seno, cosseno e tangente.

Já o livro ''Praticando Matemática'', aborda o tema com uma situação problema: determinar a altura de um prédio, sem medi-lo diretamente, com o auxílio de um

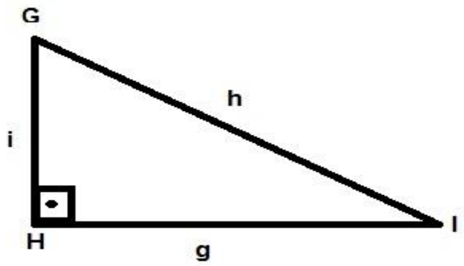
Teodolito e algumas relações trigonométricas, fazendo assim, uma abordagem prática, para que o aluno compreenda o conceito de forma real e concreta, dando assim, mais significado para o conteúdo.

2.3.8. Definição de seno, cosseno e tangente por meio da semelhança de triângulos.

Através dos triângulos retângulos, GHI e AOB, vamos definir as razões trigonométricas básicas por meio da semelhança de triângulos.

Observe os triângulos retângulos.

FIGURA 13 - Triângulo GHI



Fonte: Construção do pesquisador, 2015.

● **h** é a medida da hipotenusa (lado oposto ao ângulo reto);

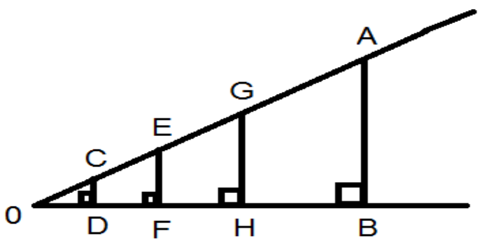
● **i** e **g** são as medidas dos catetos (lados que formam o ângulo reto);

● **HI** é o cateto oposto ao ângulo Ĝ**;**

● **HG** é o cateto adjacente ao ângulo Ĝ.

Consideremos agora um ângulo **AÔB (figura 14)**, de medida **ϴ**,0**° <ϴ< 90°** e a partir dos pontos: **C**, **E**, **G**, etc. da semi reta **AO**, tracemos os perpendiculares **CD, EF**, **GH, AB** à semi reta OB.

FIGURA 14 - Triângulo AOB



Fonte: Construção do pesquisador, 2015

Os triângulos **OCD, OEF, OGH,** etc. têm os mesmos ângulos, logo, são semelhantes. Podemos, portanto, escrever:

$$\frac{CD}{OC} = \frac{EF}{OE} = \frac{GH}{OG} = \text{(Constante)}$$

Esta relação depende apenas do ângulo de medida Θ (e não do tamanho do triângulo, do qual é um dos ângulos agudos) é chamado de seno de Θ; assim, escrevemos:

$$\text{Seno } \Theta = \frac{CD}{OC} = \frac{\text{medida do cateto oposto ao ângulo } \Theta}{\text{Medida da hipotenusa}} \quad - \quad (0° < \Theta < 90°)$$

De modo análogo, da semelhança dos triângulos, obtemos as relações:

$$\frac{OD}{OC} = \frac{OF}{OE} = \frac{OH}{OG} = \text{(Constante)}$$

$$\frac{CD}{OD} = \frac{EF}{OF} = \frac{GH}{OH} = \text{(Constante)}$$

Também depende apenas do ângulo de medida Θ e que definimos como cosseno do ângulo Θ e tangente do ângulo Θ.

Assim, as razões sen Θ = $\frac{CD}{OC}$, cos Θ = $\frac{OD}{OC}$ e tg Θ = $\frac{CD}{OD}$, são chamadas de razões trigonométricas em relação ao ângulo de medida Θ.

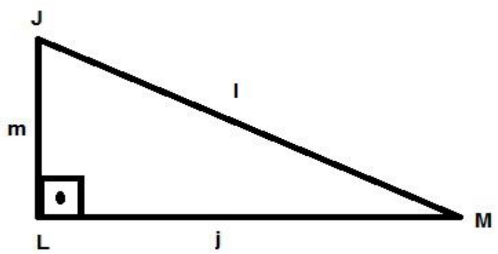
2.3.9. Relações entre seno, cosseno e tangente.

As razões trigonométricas seno, cosseno e tangente se relacionam de várias formas, como veremos a seguir:

A relação fundamental entre seno e cosseno: $sen^2\,\Theta + \cos^2\Theta = 1$

Seja o triângulo retângulo **JLM,**

FIGURA 15 - Triângulo JLM



Fonte: Construção do pesquisador, 2015.

Demonstração:

Agora seja um ângulo de medida **Θ**, de vértice **M** em um triângulo **JLM**, retângulo em **L,** como mostra a **figura 15,**

e, Seja**,** $\boldsymbol{l}^2 = \boldsymbol{j}^2$ **+** $\boldsymbol{m}^2, \boldsymbol{o}$**Teorema de Pitágoras,** podemos usá-lo em:

$\boldsymbol{sen^2\theta} + \boldsymbol{cos^2}$**Θ = $(\frac{M}{L})^2 + (\frac{J}{L})^2 = \frac{M^2+J^2}{L^2} = \frac{L^2}{L^2} = 1$**

Portanto,sen^2 **Θ +** $\boldsymbol{cos^2\theta}$ **= 1 (0° < Θ < 90°)**

A relação da Tangente com seno e cosseno:

tgΘ = $\frac{\boldsymbol{sen}\Theta}{\boldsymbol{cos}\Theta}$**(0º < Θ < 90º)**

Demonstração:

Observe que,

$\frac{\boldsymbol{Sen}\,\Theta}{\boldsymbol{Cos}\,\Theta} = \frac{\frac{m}{l}}{\frac{j}{l}} = \frac{m}{l} \div \frac{j}{l} = \frac{m}{l} \times \frac{l}{j}$ = tg Θ

Ou =$\frac{\frac{m}{l}}{\frac{j}{l}} = \frac{\boldsymbol{sen\theta}}{\boldsymbol{cos\theta}}$**(0°< Θ < 90°)**

Esses foram os conteúdos que analisamos nos livros didáticos, que se relacionam com a nossa proposta de trabalho e que aparecem com mais frequência nos livros didáticos do ensino fundamental. Dando prosseguimento, segue a proposta de trabalho implementada no 9° ano do ensino fundamental, em uma escola municipal da cidade de Lagoa Seca, PB.

3. APRENDENDO O CONCEITO DE TRIGONOMETRIA ATRAVÉS DE SITUAÇÕES PROPOSTAS

3.1. A METODOLOGIA

Propomos um trabalho prático, abordando a Trigonometria do triângulo retângulo, para alunos do 9° ano do ensino fundamental, tendo como objetivo principal, o desenvolvimento e aplicação de uma proposta pedagógica que potencialize a construção dos conceitos das relações trigonométricas básicas, seno, cosseno e tangente.

Como coleta de dados, utilizamos os materiais produzidos pelos alunos como: As construções geométricas (triângulo retângulos), construções de tabela trigonométrica e Astrolábio, resolução de atividades (cálculo de razões e situações problemas), aplicação das razões trigonométricas em uma situação do cotidiano.

Nossa pesquisa se qualifica como, qualitativa, pois segundo Ludke e André (1986, p.51), ‘’ A pesquisa qualitativa supõe contato direto e prolongado do pesquisador com o ambiente e a situação que está sendo investigada através do trabalho intensivo de campo’’.

A seguir, comentaremos acerca da importância do uso do recurso metodológico em uma proposta de ensino.

3.2. JUSTIFICATIVA DOS RECURSOS METODOLÓGICOS NA PESQUISA

Para justificar a utilização do recurso didático em nossa proposta, vamos refletir acerca de alguns contextos envolvidos no cotidiano da sala de aula. Primeiramente, quando lemos algumas obras correlatas ao nosso tema de estudo (Trigonometria do Triângulo Retângulo), os textos apontam para a necessidade de se utilizar recursos didáticos adequados ao seu ensino, pois os procedimentos mais usuais, são: a utilização de regras e aplicação de fórmulas de forma mecânica e repetitiva. Não se leva em conta a realidade do estudante, seu comportamento, o relacionamento com os colegas, sua idade, entre outras coisas. A isso, diz Sant’Anna (2004, p. 11):

> Observar a realidade psicológica do educando, respeitando seu modo de ser, seu jeito de pensar, falar, comunicar, levar em consideração a faixa etária em que se encontra serão fatores indispensáveis para uma adequada escolha do recurso.

Outro fator, é que hoje, o aluno está cercado por inúmeros aparelhos tecnológicos, que tomam conta continuamente de sua "atenção". A aquela aula tradicional sem nenhum recurso, já não o motiva. Logo, temos que estar atentos a esse novo perfil de situação e de aluno. A isso, também afirma Sant’Anna (2004,p. 11):

> A necessidade da utilização dos recursos de ensino é algo inquestionável. Seja qual for a opção pedagógica, os recursos utilizados facilitarão o aprendizado. É imprescindível, porém, uma certa cautela por parte do professor para não cometer enganos, pensando que ao utilizar um recurso estará fatalmente fazendo o melhor. ’

Hoje, temos um imenso leque de recursos de ensino para serem utilizados, tornando as aulas mais interessantes e motivadoras. Envolver os alunos com atividades criativas e desafiadoras, e acima de tudo, criar um ambiente propício para a aprendizagem é o ideal para a construção de um conhecimento significativo.

Por isso, ao aplicar um recurso de ensino, devemos conhecer bem o conteúdo de estudo e ter um objetivo claro e definido. Não basta apenas expor o recurso e atribuir regras e procedimentos, sem contextualizar as questões e sem desafiar os alunos, desconsiderando suas estratégias, conjecturas e interações com os colegas.

E, ao nos referirmos ao contexto, devemos tomar o máximo de cuidado com determinadas distorções, pois como afirma o PCN (2001, p. 23):

> (...) Embora as situações do cotidiano sejam fundamentais para conferir significados a muitos conteúdos a serem estudados, é importante considerar que esses significados podem ser explorados em outros contextos como as questões internas da própria matemática e dos problemas históricos. Caso contrário, muitos conteúdos importantes serão descartados por serem julgados, sem uma análise adequada, que não são do interesse para o aluno porque não fazem parte de sua realidade ou não tem uma aplicação prática imediata.

Desta forma, escolher o recurso mais adequado ao desenvolvimento da proposta é imprescindível. Nesse sentido, procuramos utilizar recursos que fossem capazes de responder as nossas expectativas e os objetivos da pesquisa.

3.3. RECURSO UTILIZADO NA PROPOSTA DE TRABALHO

Utilizamos diferentes recursos de ensino em nossa proposta, pois o cotidiano escolar é muito complexo. Exigindo do professor diferentes atitudes e procedimentos. Frequentemente encontramos turmas bastantes heterogêneas, no que se refere ao ritmo de aprendizagem. Isso, faz com que o professor busque instrumentos que possibilitem melhores resultados para que ele possa cumprir suas metas e objetivos, promovendo assim, um trabalho satisfatório e significativo. Pois, segundo o PCN:

> É consensual a idéia de que não existe um caminho que possa ser considerado como único e melhor para o ensino de qualquer disciplina, em particular a Matemática. No entanto, conhecer diversas possibilidades de trabalho em sala de aula é fundamental para que o professor construa sua prática. (BRASIL, 2001, p.42)

Assim, procuramos desenvolver nossa proposta com o auxílio dos recursos: A Resolução de Problemas; A História da Matemática e o trabalho com atividades práticas.

A Resolução de Problemas, faz com que o aluno procure diferentes caminhos na resolução de suas atividades, sem recorrer a regras e procedimentos pré-estabelecidos. E no trabalho em conjunto, possibilita a análise dos pensamentos estratégicos, tanto os seus como dos demais componentes do grupo. Logo, essa interação contribui bastante para uma construção efetiva do conhecimento. A isso, também afirma o PCN:

> A resolução de problemas, na perspectiva indicada pelos educadores matemáticos, possibilita aos alunos mobilizar conhecimentos e desenvolver a capacidade para gerenciar as informações que estão a seu alcance. Assim, os alunos terão oportunidade de ampliar seus conhecimentos acerca de conceitos e procedimentos matemáticos bem como de ampliar a visão que têm dos problemas. (BRASIL, 2001, p.40)

A História da Matemática, desempenha um papel fundamental em nossa proposta, pois, mostra para o aluno que o processo de construção do saber trigonométrico, não se deu de forma linear, acabando com aquela visão de estrutura de conhecimento que nunca muda e é sempre verdadeiro.

Ela abre caminhos para se compreender que o conhecimento gerado nessa área é consequência da construção humana.

> A História da Matemática pode oferecer uma importante contribuição ao processo de ensino e aprendizagem dessa área do conhecimento,ao revelar a Matemática como uma criação humana, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente. (..) (BRASIL, 2001, p.42)

Portanto, optamos por trabalhar com os recursos acima mencionados, pois acreditamos que sejam os mais indicados ao desenvolvimento de nosso trabalho. E acima de tudo, por observar os excelentes resultados dessas tendências em outras propostas de ensino.

3.4. ANDAMENTO DA PESQUISA

Em nossa proposta, procuramos enfatizar a compreensão dos conceitos das razões trigonométricas básicas: seno, cosseno e tangente e, logo após, a formalização do conteúdo, uso das técnicas e regras. O trabalho consta de seis encontros, distribuídos em duas etapas. Na primeira etapa, procuramos facilitar a construção dos conceitos e em uma segunda etapa, iniciar o aluno na linguagem formal da Matemática. Estes encontros foram preparados como recursos importantes para as aulas experimentais, alternando-se com aulas expositivas e dialogadas.

Os alunos foram divididos em oito equipes de três elementos, cada grupo recebeu uma nomenclatura com as iniciais de seus nomes. Nosso trabalho se desenvolveu com uma turma de vinte e quatro alunos, de forma bastante satisfatória, posto que, eles desenvolveram as atividades com bastante motivação e empenho. Procuramos tão somente organizar e mediar o processo. As dúvidas das equipes foram sendo esclarecidas conjuntamente, dentro de um clima bastante participativo.

> Para que o aluno se desenvolva na Geometria é importante a parte experimental para levantar dúvidas que, posteriormente, serão dirimidas pelo professor. Dar o conceito antes do aluno ter pensado no mesmo não é uma maneira inteligente nem motivadora para a aprendizagem. (BONGIOVANNI, 2001, p.9)

Participaram da realização do trabalho, vinte e quatro alunos do 9° ano do ensino fundamental de uma escola pública municipal da comunidade do Alvinho na cidade de Lagoa Seca, PB, em uma turma única do turno da manhã com uma faixa etária entre 16 e 18 anos.

O trabalho se desenvolveu no mês de novembro de 2014, e os encontros se deram em um período de duas semanas. Ficamos bastante à vontade para o desenvolvimento da pesquisa pois, neste período tivemos que substituir o professor da escola por motivo de doença. Além do mais, o conteúdo da pesquisa coincidiu com o material programado para as aulas que o professor pretendia desenvolver. Portanto, o trabalho se deu de forma bastante satisfatória.

Primeira semana, primeiro encontro, segunda-feira (45 minutos): Introdução da proposta, texto introdutório, exemplificação da Trigonometria na Astronomia. Segundo encontro, quarta-feira (90 minutos): Sondagem de conteúdos necessários ao desenvolvimento do trabalho (razões e proporções) e construção dos conceitos das razões trigonométricas básicas: seno, cosseno e tangente. Terceiro encontro, sexta-feira (90 minutos): Formalização das razões trigonométricas e aplicação do conteúdo trigonométrico em situações problemas. Quarto encontro, segunda-feira (90 minutos): Trabalhamos um texto sobre Hiparco e a seguir iniciamos a construção de tabelas trigonométricas. Quinto encontro, quarta-feira (90 minutos): Construção de um Astrolábio. (Pelos alunos com nossa orientação. Sexto encontro, sexta-feira (90 minutos): Discussão e aplicação dos conhecimentos trigonométricos trabalhados em situações práticas do cotidiano e confronto dos resultados obtidos na tarefa (medição da caixa d'água).

Antes de iniciar a experiência prática do sexto encontro, discutimos com os alunos os locais mais indicados para a aplicação do trabalho, fora da sala de aula. Pedimos então, que sugerissem os locais mais interessantes e adequados para a realização das atividades, pois, segundo, Freire (1996):

> O papel do educador não é propriamente falar ao educando sobre sua visão de mundo ou lhe impor essa visão, mas dialogar com ele sobre a sua visão e a dele. Sua tarefa não é falar, dissertar, mas problematizar a realidade concreta do educando, problematizando-se ao mesmo tempo.

Por sugestão dos alunos, os locais mais indicados foram: Os pilares de sustentação (colunas) da escola, altura da caixa d'água, o mastro da bandeira e o pátio.

Por comodidade de tempo e para a viabilidade da pesquisa, chegou-se a um consenso da realização das atividades na caixa d'água da escola. No decorrer do trabalho serão mostradas as atividades desenvolvidas e os resultados alcançados pelos alunos.

3.5. ATIVIDADES DESENVOLVIDAS PELO PROFESSOR PESQUISADOR

Iniciamos com uma aula dialogada e reflexiva, onde apresentamos o tema de estudo e através de um diálogo bastante interativo, procuramos identificar os conhecimentos prévios dos alunos a respeito da Trigonometria, como forma de organizar o conhecimento acumulado de modo a se conectar a esses, novos conceitos. De acordo com Ausubel (1980, apud PEREIRA, 2012):

(...)'' o conhecimento novo, para ser aprendido, precisa estar ancorado em conceitos prévios do aluno, proporcionando, dessa forma, um efetivo aprendizado''.

Concordamos também com Moreira (2006, apud PEREIRA, 2012, p. 45), quando afirma, '' o uso de organizadores prévios é a principal estratégia advogada por Ausubel para deliberadamente, manipular a estrutura cognitiva a fim de facilita a aprendizagem''.

Logo, após feitas as devidas análises de quanto conhecimento eles tinham da Trigonometria, partimos para uma breve abordagem histórica sobre alguns fatos relativos a ela. Sua importante contribuição como instrumento para resolver problemas práticos de medidas, instrumento de navegação, cálculo de distâncias inacessíveis, entre outras. Na ocasião mostramos ilustrações de alguns instrumentos que utilizam os princípios trigonométricos, o Teodolito, o Astrolábio e o Sextante, figuras que poderão ser observadas logo após o texto introdutório.

3.5.1. Introdução da Trigonometria

A Trigonometria (do grego trigono = triângulo e metria = medida) teve origem na resolução de problemas práticos relacionados principalmente à navegação e à Astronomia.

Esses problemas traziam a necessidade de calcular grandes distâncias, que não podiam ser determinados com os instrumentos da época.

Como o próprio nome diz, a Trigonometria estabelece relação entre medidas de ângulos e de segmentos. Por esse motivo, em sua origem a Trigonometria foi considerada uma extensão da Geometria.

O triângulo retângulo sempre exerceu bastante curiosidade e uma atração especial para o homem desde a Antiguidade.

Todavia, a Trigonometria não se limita ao estudo de triângulos. Encontramos aplicações dela na Engenharia, na Mecânica, na Eletricidade, na Acústica, na Medicina etc.

Há indícios de que os babilônicos, efetuaram estudos rudimentares de Trigonometria. As descobertas feitas no campo da Astronomia eram baseadas nos triângulos retângulos. Isso veio a facilitar a noção de localização, o traçado de rotas terrestres e de navegação. Mais tarde, a Astronomia, estudada por egípcios e gregos, foi a grande impulsora do desenvolvimento da Trigonometria.

(**A Conquista da Matemática de Giovanni; Castrucci e Giovanni Jr, 2002).**

FIGURA 16 - Astrolábio

FIGURA 17 - Teodolito

FIGURA 18 - Sextante

Fonte: www.e-portugal.org em 01/11/2014

Nesse sentido, é importante salientar a relevância da História da Matemática como um recurso capaz de mostrar para aluno que o processo de construção do conhecimento se deu na busca de soluções práticas para os mais variados problemas que o homem encontrou em sua caminhada. A isso diz D'Ambrósio (1996, p. 13) (...)'' não é necessário que o professor seja um especialista para introduzir História da Matemática em seu curso. (...). Basta colocar aqui e ali algumas reflexões. Isto pode gerar muito interesse pela aula''.

3.5.2. Demonstrações da Trigonometria na Astronomia

Partimos então para uma interessante aplicação da Trigonometria na Astronomia, como forma de motiva os alunos e mostrar sua importante aplicabilidade na ciência.

Primeiramente, fizemos a seguinte indagação aos alunos: Pelos conhecimentos que vocês têm, como seria possível calcular as **distâncias aproximadas** dos planetas Mercúrio e Vênus ao Sol?

Após ouvir as mais variadas respostas dos alunos, todas baseadas em filmes que eles viram pela TV sobre naves espaciais e foguetes, iniciamos uma demonstração da aplicação da Trigonometria na Astronomia, ciência que contribuiu muito para o conhecimento trigonométrico.

O cálculo das distâncias aproximadas de Mercúrio e Vênus ao Sol é muito simples e não depende do conhecimento de seus períodos siderais (Período de revolução do planeta em torno do Sol). Esses dois planetas se situam em extremos opostos, no que diz respeito à visibilidade.

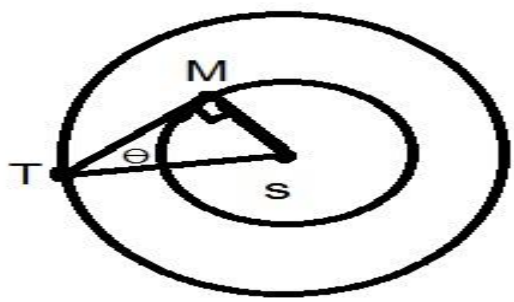
O planeta Vênus é muito fácil de ser visto, seja como ‘’ estrela matutina’’ ou ‘’ estrela vespertina’’, pois ele é o astro mais brilhante no céu, depois do Sol e da Lua. Mercúrio é diferente, estando muito perto do Sol, não é fácil localizá-lo, já que só será visto quase ao raiar do Sol, ou pouco depois do Sol poente, de preferência quando em elongação máxima. (Afastamento angular)

Calculando a distância de Mercúrio ao Sol, primeiramente temos que, a elongação máxima é de aproximadamente de 23°. Quando isso acontece (figura 19) o triângulo **STM** é retângulo em **M**, logo,

Sen. 23° = $\frac{SM}{ST} \rightarrow$ 0, 39 = $\frac{SM}{ST} \rightarrow$ = 0,39ST

Sen. 23° ≈ 0, 39

FIGURA 19 - Órbita de Mercúrio



Fonte: Ávila, 2004, p. 39

Como podemos observar, Mercúrio dista do Sol 0,39 vezes a distância da Terra ao Sol. Agora vamos calcular a distância do planeta Vênus ao Sol.

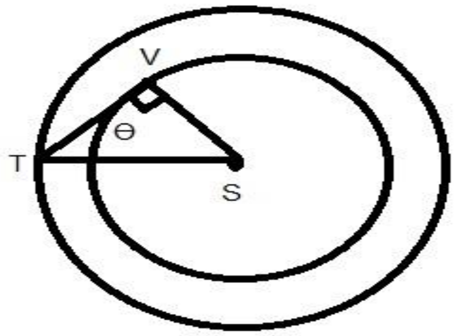
Como fizemos com o cálculo anterior, consideremos a elongação de 47°. Dessa forma, temos,

Sen. 47° = $\frac{SV}{ST} \rightarrow$ 0, 73 **=** $\frac{\boldsymbol{SV}}{\boldsymbol{ST}} \rightarrow$ VS **=** 0,73**ST**

Sen. 47° ≈ 0, 73

Assim, observamos que Vênus, dista 0,73 vezes a distância da Terra ao Sol.

FIGURA 20 **-** Órbita de Vênus



Fonte: Ávila, 2004, p. 39

Esta demonstração teve como intuito principal, mostrar para os alunos uma das aplicações do conteúdo trigonométrico na Astronomia como forma de motivá-los, preparando-os para o entendimento do assunto.

Como afirma o PCN: (2001, p. 128), "o estudo de alguns problemas resolvidos pelos egípcios poderão mostrar a importância da generalização das relações espaciais e suas representações para resolver situações mais diversificadas e complexas".

Antes do desenvolvimento das tarefas, tomamos o cuidado de fazer uma sondagem a respeito de razões, proporções de segmentos, catetos, hipotenusa e medida de ângulo com o auxílio de transferidor, afim de não dificultar o andamento do processo de construção dos conceitos trigonométricos, e ao mesmo tempo, de tentar criar um elo de ligação do conteúdo acumulado com a construção dos novos conceitos.

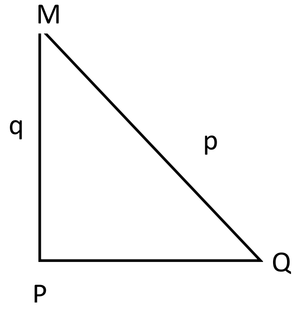
3.5.3. Formalização das razões trigonométricas

Após a construção dos triângulos e das operações com as razões entre os catetos e hipotenusa (primeira atividade), percebemos através das respostas orais e escritas, que os alunos conseguiram assimilar alguns resultados ocorridos nas atividades. Eles perceberam que, independente das medidas dos lados dos triângulos, as razões entre os lados das figuras se mantinham constantes, se considerado o mesmo ângulo. As diferenças, encontradas nas operações, se deram nas imprecisões de algumas medidas e nos arredondamentos de alguns resultados obtidos.

Logo após, feitas algumas discussões, confirmações e análises dos resultados obtidos nas tarefas desenvolvidas pelos estudantes, começamos a formalizar as razões trigonométricas básicas, a partir de um triângulo retângulo, onde apresentamos suas respectivas fórmulas. ‘’ Essas razões se tornaram fundamentais na resolução de problemas de topografia, Astronomia e Física, ou problemas atuais. ’’ Eves (2004, p. 22)

Utilizamos para a formalização das razões trigonométricas, o triângulo retângulo **MPQ**, da figura abaixo.

FIGURA 21 - Triângulo MPQ



Sen.β = cateto oposto/ hipotenusa

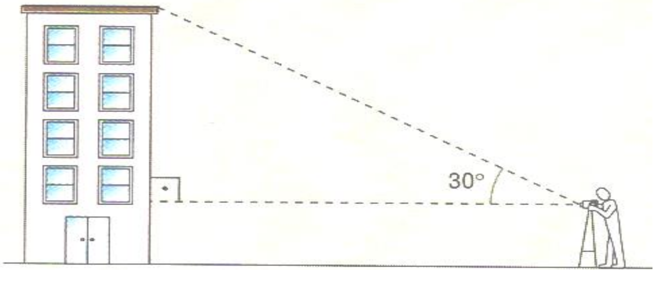
Cos. β = cateto adjacente / hipotenusa

Tg. β = cateto oposto / cateto adjacente

Sen. β= $\frac{q}{p}$**- Cos. β =** $\frac{m}{p}$ **- Tag. β =** $\frac{q}{m}$

A seguir apresentamos um exemplo da aplicação da razão trigonométrica em uma situação real. Ou seja, o cálculo da altura de um edifício com o uso de um Teodolito. Fizemos uma estimativa da distância do observador ao prédio e, na ocasião, empregamos a razão **tangente** para o cálculo da altura do edifício.

FIGURA 22 - Cálculo da altura de um edifício



Fonte: www.meteorotica.blogspot.com em 01/11/2014

3.6. ATIVIDADES DESENVOLVIDAS PELOS ALUNOS

Antes de aplicar as tarefas, fizemos uma breve sondagem sobre algumas estruturas matemáticas necessárias ao desenvolvimento do conteúdo, como foi mencionado anteriormente. Procuramos nesse momento, explorar os conhecimentos acumulados dos alunos com relação aos seguintes assuntos:

Razão e proporção, triângulo retângulo (cateto oposto, cateto adjacente e hipotenusa), medição de ângulos com o uso do transferidor e consulta a tabela trigonométrica.

Em seguida, iniciamos as atividades com o intuito de criar nos alunos, condições para que pudessem construir os conceitos das razões trigonométricas básicas, a partir da construção de triângulos retângulos. Pois de acordo com os PCNs:

> O trabalho com espaço e forma pressupõe que o professor de Matemática explore situações em que sejam necessárias algumas construções geométricas com régua e esquadros, com visualização e aplicação de propriedades das figuras, além da construção de outras relações (BRASIL, 2001, p. 51)

Para análise dos resultados dessas atividades, vamos mostrar alguns procedimentos e tarefas desenvolvidas pelas equipes participantes da pesquisa, com relação as construções dos triângulos retângulos, cálculo das razões, respostas das questões contextualizadas e desenvolvimento das atividades práticas (construção de uma tabela trigonométrica, de um Astrolábio e aplicação do conteúdo em uma situação real). Lembramos que nosso papel foi apenas de mediador e organizador do processo. Foi dada total liberdade as ações e conjecturas das equipes, cabendo a nós, a confirmação de alguns procedimentos e a verificação de alguns resultados.

Cada equipe recebeu uma nomenclatura de acordo com as iniciais de seus nomes. Procuramos dessa forma, manter o anonimato dos grupos.

Para a realização desta atividade, providenciamos com antecedência os materiais necessários para a construção das figuras.

Os materiais e instrumentos utilizados na primeira atividade foram:

Régua, transferidor, papel milimétrico, papel ofício, calculadora e tabela trigonométrica.

O nosso objetivo nessa tarefa foi de criar condições para que os alunos conseguissem perceber através das construções geométricas (triângulos retângulos) e das razões entre as diferentes medidas dos lados dos triângulos, relações entre essas medidas com seus respectivos ângulos, e desta forma, potencializar a construção dos conceitos das razões trigonométricas básicas, seno, cosseno e tangente, de acordo com as ideias defendidas pelo PCN (2001, p. 51)

3.6.1. Atividade 1

Título: Construção de triângulos retângulos e operação com as razões das medidas dos lados das figuras.

Metodologia: Dividir a turma em grupos de três alunos, orientando-os para que construam as figuras e respondam as questões seguintes.

1. Construa três triângulos retângulos, nos quais um dos ângulos agudos seja sempre o mesmo (escolha por exemplo o ângulo de 30° ou 40°) e que as medidas de seus lados sejam diferentes nos três triângulos.

2. Calcule as razões abaixo, observe e responda o que se pede (após a construção das figuras)

a. O que acontece com as razões entre as medidas do cateto oposto ao ângulo agudo β e as medidas dos catetos adjacentes à β nos três casos?

$\frac{Medida\ do\ cateto\ opostoa\ \beta}{Medida\ do\ cateto\ adjacentea\ \beta}$ = valor encontrado

3. Voltando aos triângulos construídos, calcule a razão entre a medida do cateto oposto à β e a medida da hipotenusa. Como também, a razão entre a medida do cateto adjacente à β e a hipotenusa, ou seja,

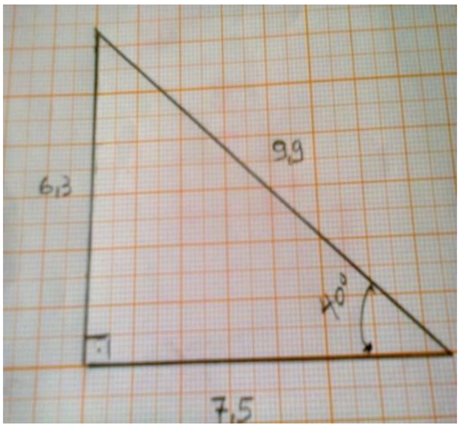
$a.\frac{Medida\ do\ cateto\ oposto\ a\ \beta}{hipotenusa} =$ $\quad b.\frac{\boldsymbol{Medida\ do\ cateto\ adjacente\ a\ \beta}}{\boldsymbol{hipotenusa}} =$

4. O que ocorre com as razões entre essas medidas?

A escolha da exposição da tarefa de determinada equipe se deu de forma aleatória, visto que, os demais resultados apresentavam estruturas semelhantes.

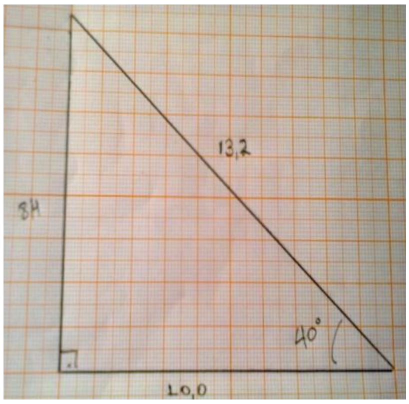
3.6.1.1. Resultados da atividade 1

FIGURA 23 - Triângulo FGA



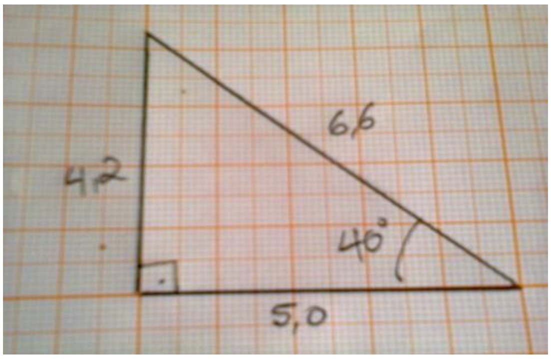
Fonte: Construção, equipe FGA

FIGURA 24 - Triângulo MDA



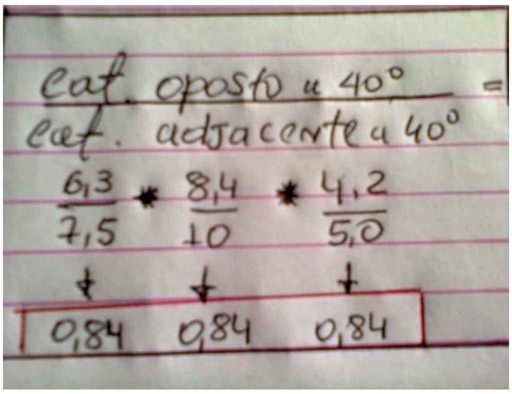
Fonte: Construção, equipe MDA

FIGURA 25 - Triângulo ADM



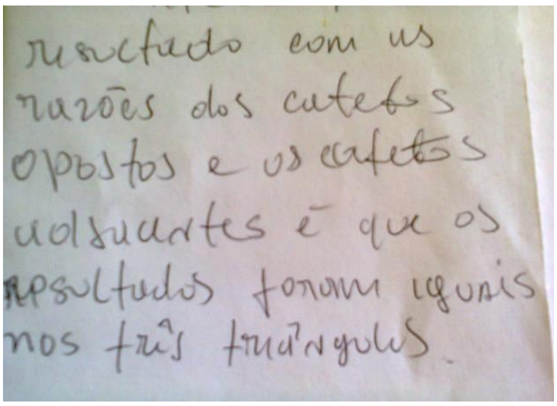
Fonte: Construção, equipe ADM

FIGURA 26 – Tangente de 40°



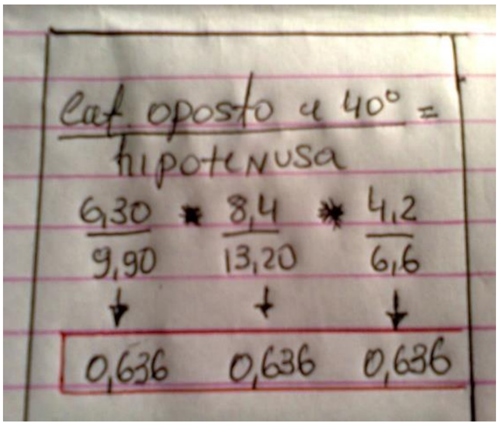
Fonte: Construção, equipe HPL

FIGURA 27 – Resposta da questão 2 a.



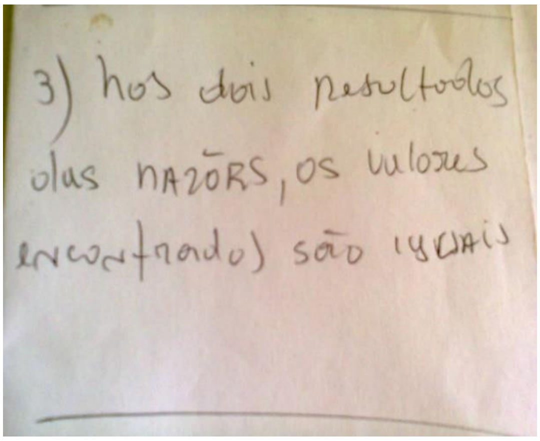
Fonte: Construção, equipe MDA

Figura 28 – Seno de 40°



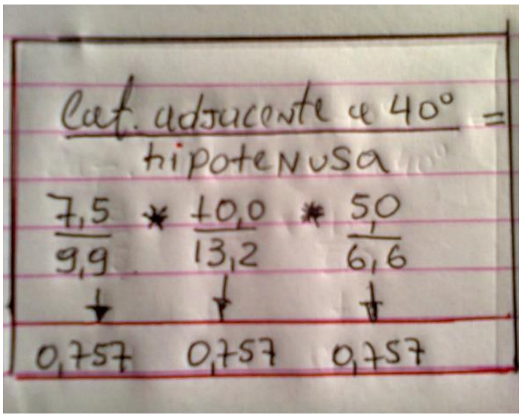
Fonte: Construção, equipe HPL

Figura 29 – Questão 3 – (a e b)



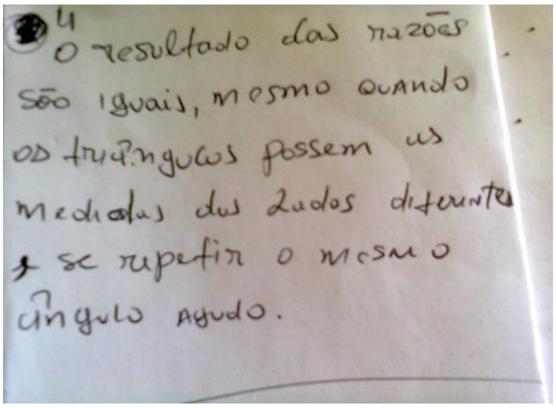
Fonte: Construção, equipe MDA

Figura 30 – Cosseno de 40°



Fonte: Construção, equipe HPL

Figura 31 – Questão 4



Fonte: Construção, equipe HPL

3.6.1.2. Comentários da atividade 1

As dificuldades enfrentadas nesta atividade, evidenciaram a pouca prática quando do manuseio dos materiais de desenho e instrumentos de medida como, régua e transferidor. Poucos, sabiam utilizá-los de forma correta.

Com relação aos cálculos das razões das medidas dos triângulos, não houve muita dificuldade. Apenas diferenças nos valores de algumas operações, visto que, foram feitas medições de forma equivocadas e alguns erros de arredondamento nos valores obtidos.

No geral, percebemos que essa atividade proporcionou condições para que os alunos percebessem por meio das construções dos triângulos retângulos e das operações com as razões entre as medidas dos lados dessas figuras, pois, independente das diferenças nas medidas dos lados dos triângulos, os resultados se mantiveram **constantes**, se considerarmos os mesmos ângulos nos três triângulos.

Com isso, ficou claro a eficácia da atividade na construção dos conceitos das razões trigonométricas básicas, conforme os objetivos pretendidos com o desenvolvimento da pesquisa.

Confirmando o que foi defendido por Piaget (1971, apud SOUZA, 2011) ‘’ o conhecimento se constrói na interação do sujeito com o objeto, a partir da vivência e curiosidade dos indivíduos. ’’

A atividade a seguir refere-se à aplicação das razões trigonométricas básicas em situações contextualizadas. Pois, de acordo com Fonseca (1995):

> Contextualizar não é abolir a técnica e a compreensão, mas ultrapassar esses aspectos e entender fatores externos aos que normalmente são explicitados na escola de modo a que os conteúdos matemáticos possam ser compreendidos dentro do panorama histórico, social e cultural que o constituíram.

Desta forma, achamos interessante o uso de algumas atividades contextualizadas para que os alunos pudessem perceber a utilidade e importância da aplicação das razões trigonométricas básicas, dentro de diferentes situações propostas

.

3.6.2. Atividade 2

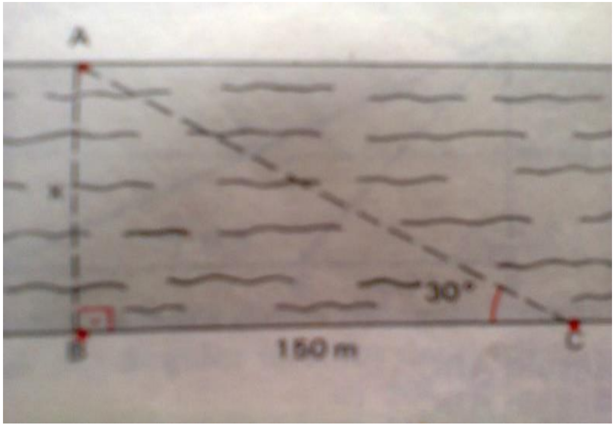
Título: Aplicação das razões trigonométricas básicas: seno, cosseno e tangente.

Objetivo: Analisar o contexto do problema e aplicar os conceitos trigonométricos desenvolvidos, em situações contextualizadas, envolvendo outras áreas de conhecimento e situações da realidade cotidiana.

Metodologia: Após, feitas as leituras e observações das questões, os alunos iniciaram a resolução das atividades, e como foi definido anteriormente o desenvolvimento se deu com o trabalho em grupo de três alunos. Cada grupo recebeu uma cópia de uma tabela trigonometria e na ocasião mostramos como utilizá-la de maneira correta.

1. Uma pessoa está na margem de um rio, onde existe 2 árvores (B e C). Na outra margem, em frente a B, existe outra árvore A vista de C segundo um ângulo de 30°, com relação a B. Se a distância de B a C é 150 m, qual é a largura do rio? (BIANCHINE E PACCOLA, 1990)

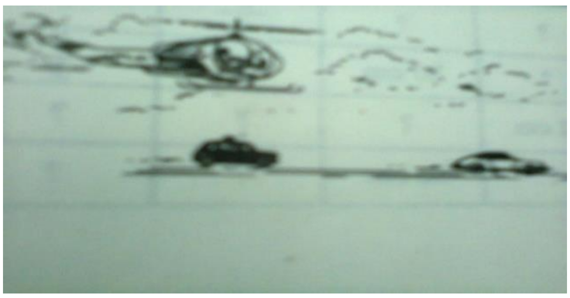
FIGURA 32 - Margem do rio



Fonte: (Bianchini e Paccola, 1990)

2. Um helicóptero e um carro de polícia perseguem um carro de bandidos. O helicóptero está a 360 m de altura; o carro da polícia está bem abaixo do helicóptero (no prumo). Do helicóptero o carro do bandido é avistado segundo um ângulo de 60°. Qual é a distância entre o carro da polícia e o dos bandidos? (BIANCHINI E PACCOLA, 1990)

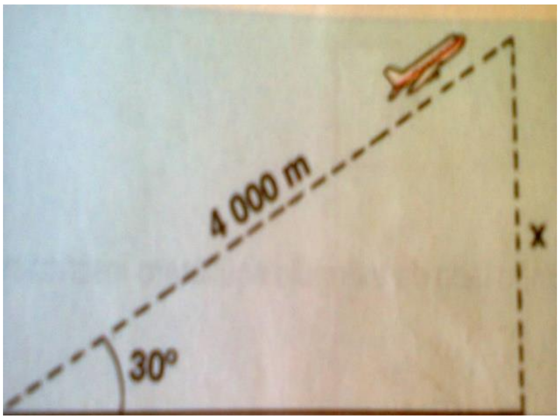
FIGURA 33 - Perseguição policial



Fonte: Bianchini e Paccola, 1990)

3. Um avião levanta voo sob um ângulo de 30° em relação à pista. Qual será a altura do avião quando este percorrer 4000 metros em linha reta? (Ver figura abaixo). (ANDRINI E VASCONCELLOS, 2005)

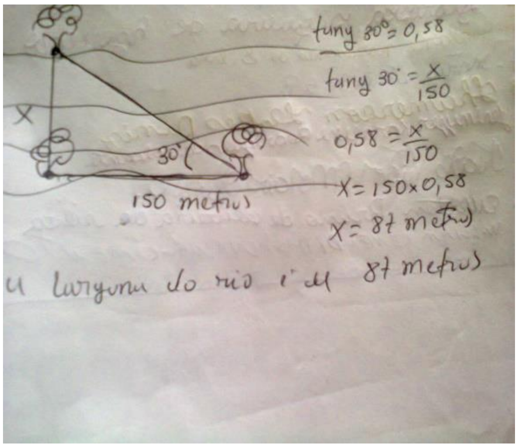
FIGURA 34 - Trajetória do avião



Fonte: (Andrini e Vasconcellos, 2005)

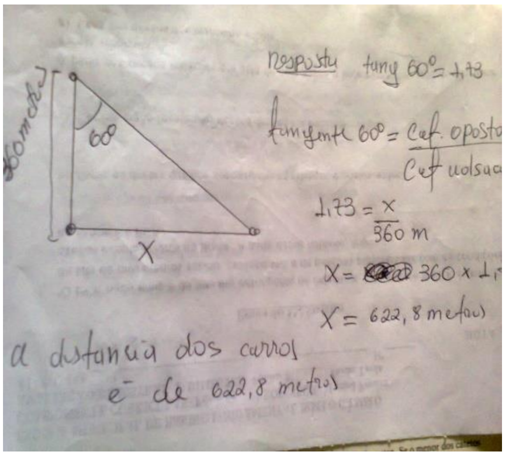
3.6.2.1. Resultados da atividade 2

FIGURA 35 - Resposta da questão 1



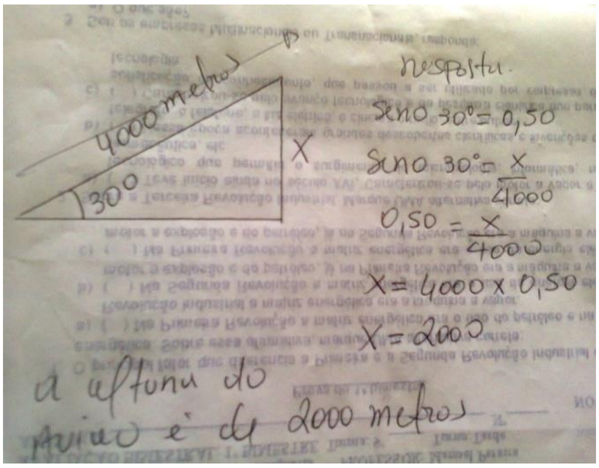
Fonte: Construção, equipe MAD

FIGURA 36 - Resposta da questão 2



Fonte: Construção, equipe FGA

FIGURA 37 - Resposta da questão 3



Fonte: Construção, equipe MDA

3.6.2.2. Comentários da atividade 2

Com relação a atividade 2, aplicação das razões trigonométricas básicas, os resultados foram satisfatórios. O que ficou evidente foi o fato dos alunos buscarem de imediato palavras que os remetessem a algum algoritmo ou fórmula para resolver as questões de forma automática. Não estavam habituados a leitura ou análise do contexto envolvido no exercício. Contudo, após um pouco de leitura das questões, eles começaram a dialogar, criar alguns esquemas e traçar as estratégias para a resolução das atividades. Conforme ideias defendidas pela Resolução de Problemas.

Desta maneira, foi fundamental a utilização desta tendência metodológica como forma de motivar o trabalho em grupo, bem como, dar um foco na busca de estratégias próprias de resolução das questões, respeitando a opinião de cada componente do grupo.

Percebemos que, a Resolução de Problema quando bem utilizada é capaz de contribuir para uma atividade diferenciada e reflexiva, diferente do contexto habitual de sala de aula.

A seguir, apresentaremos um texto sobre o pai da Trigonometria, onde em conjunto com os alunos fizemos uma leitura e, em seguida iniciamos a preparação e motivação para o desenvolvimento da atividade 3.

3.6.3. Texto sobre Hiparco de Niceia

O intento do trabalho com esse texto é de criar no aluno a curiosidade necessária para motivá-los no desenvolvimento da atividade 3, onde propomos o trabalho com duas tarefas bastantes ricas para a construção do conceito trigonométrico. E, mais uma vez, a História Matemática assume um papel importante no desenvolvimento da pesquisa.

‘’ O Pai da Trigonometria’’

Hiparco de Niceia (por volta de 190 – 125 d.C.) é considerado o mais eminente dos astrônomos da Antiguidade. Cuidadoso, ele, desenvolveu importantes trabalhos no observatório de Rodes. Credita-se a ele feitos como a determinação do mês lunar médio, um cálculo da inclinação do plano de órbita terrestre e a organização de um catálogo de 850 estrelas. Sabe-se também que foi ele quem introduziu na Grécia a divisão do círculo em 360° e propôs a localização de pontos sobre a superfície da Terra por meio de latitude e longitude.

No entanto, pelo fato de escrever a primeira tabela trigonométrica, Hiparco ficou conhecido como o Pai da Trigonometria.

Em muitos casos, para resolver problemas com triângulos retângulos é necessário conhecer as razões trigonométricas dos ângulos agudos do triângulo. Como cada ângulo está associado a um único valor para seno, para cosseno e tangente, podemos elaborar uma tabela que nos forneça esses valores, evitando assim, a necessidade de calculá-los a toda hora.

Outra invenção atribuída a Hiparco, remonta no século II a.C., na Grécia foi o Astrolábio (figura 16, p. 45). É, talvez o mais antigo dos instrumentos científicos.

Em sua forma primitiva, o Astrolábio consiste de um disco de madeira, divididos em graus, suspenso por um anel. No centro do disco, preso por um pino, um ponteiro serve para indicar a altura de um astro quando para ele é dirigido.

No final da Idade Média, o Astrolábio foi aperfeiçoado, recebendo tabelas da inclinação do Sol no horizonte que permitiam aos navegadores determinar sua posição nos oceanos.

(A Conquista da Matemática, Giovanni, Castrucci e Giovanni Jr, 2002, p.364)

3.6.4. Atividade 3

1) **Construção de uma tabela trigonométrica;**
2) **Construção de um Astrolábio.**

Título: Construção de uma tabela trigonométrica e de um Astrolábio.

Objetivo: fazer com que, os alunos experimentem o conhecimento através da manipulação do objeto de estudo.

Metodologia: Ambas as atividades se desenvolveram em grupo. Foram entregues os materiais necessários a confecção da tabela e do Astrolábio, e, em seguida, iniciamos as tarefas com a leitura de um pequeno texto sobre Hiparco de Niceia, no qual se relata algumas de suas contribuições para o desenvolvimento trigonométrico, como também de algumas de suas criações, como a tabela trigonométrica e o Astrolábio.

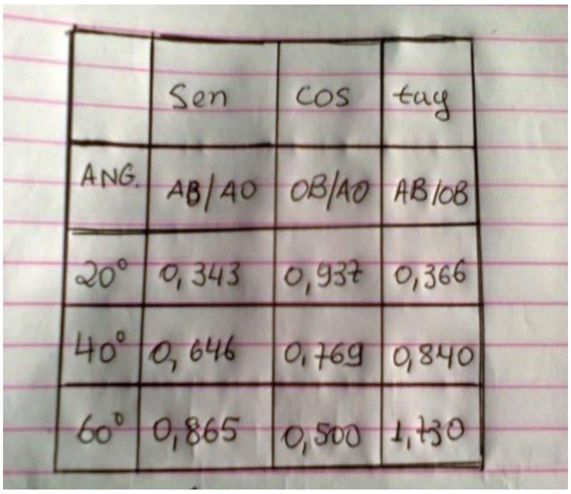
3.6.4.1. Construção da tabela trigonométrica: (tarefa1)

Construa uma tabela trigonométrica a partir de três triângulos retângulos, calculando as razões das medidas dos lados dos triângulos, considerando os ângulos de: 20°, 40° e 60°

.

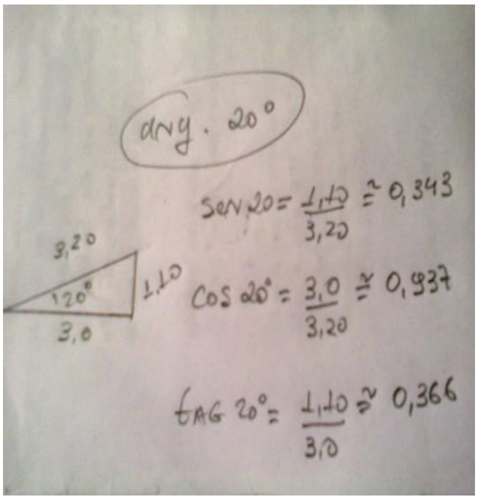
3.6.4.1.1. Resultado da atividade 3 – tarefa 1

FIGURA 38 - Tabela Trigonométrica



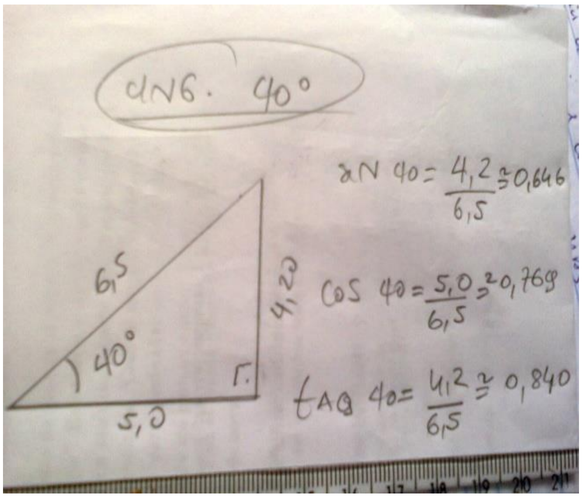
Fonte: Construção, equipe ADM

FIGURA 39 - Ângulo agudo de 20°



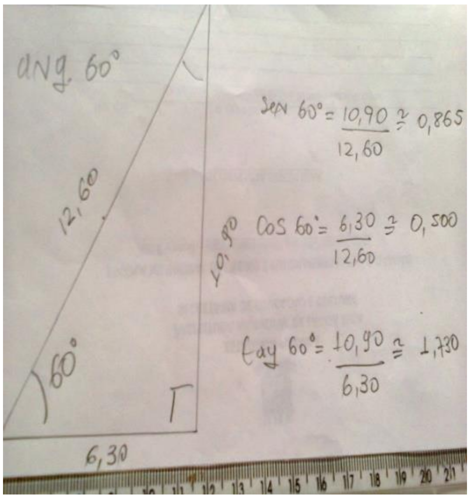
Fonte: Construção, equipe ADM

FIGURA 40 - Ângulo agudo de 40°



Fonte: construção, equipe JCB

FIGURA 41 - Ângulo de 60°



Fonte: Construção, equipe MDA

3.6.4.1.2. Comentários da atividade 3, tarefa 1

Os alunos como foi salientado anteriormente, trabalharam em grupo e através de três triângulos retângulos, eles construíram as tabelas conforme nossa orientação. Neste tipo de atividade é muito importante o trabalho em grupo pois através da troca de ideias e do respeito as diferenças de opiniões, se consolida a construção de um conhecimento.

> (..) de modo que os alunos desenvolvam a própria capacidade para construir conhecimentos matemáticos e interagir de forma cooperativa com seus pares, na busca de soluções para problemas, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles. (BRASIL, 2001, p.63)

As dificuldades encontradas pelos alunos nessa tarefa, mais uma vez se deram com relação aos cálculos e arredondamentos. Todavia, como eles já haviam trabalhado a construção de triângulos e cálculos com as razões na atividade 1, eles desenvolveram a tarefa com mais agilidade e conseguiram construir as tabelas com bastante eficiência.

3.6.4.2. Construção de um Astrolábio: (tarefa 2)

Materiais necessários para a confecção de um Astrolábio:

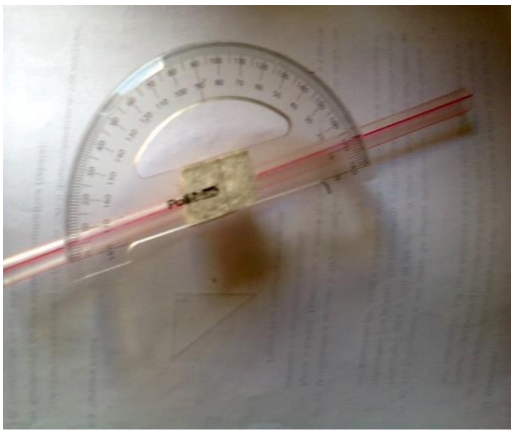
Um transferidor de 180°; um canudo de refrigerante; uma pequena lâmina de isopor; cola para isopor e um alfinete de cabeça.

3.6.4.2.1. Resultados da atividade 3, tarefa 2

FIGURA 42 - Construção de um Astrolábio

Fonte: Construção do aluno equipe KOC

FIGURA 43 - Astrolábio equipe MDA



Fonte: construção da equipe MDA

3.6.4.2.2. Comentário da atividade 3, tarefa 2

Aproveitamos para dar uma breve introdução sobre o importante uso do Astrolábio pelos navegadores e astrônomos. Os alunos estavam atentos e curiosos com relação ao uso do aparelho.

Foram construídos oito instrumentos (Astrolábio). E, para facilitar o desenvolvimento do trabalho, com antecedência providenciamos todos os materiais necessários. Os alunos não tiveram dificuldade na construção dos aparelhos, pois, como a construção é bastante simples, apresentamos um modelo e bastou algumas orientações para que eles cumprissem a tarefa com sucesso.

A construção do Astrolábio causou bastante expectativa nos alunos. Por ser uma atividade diferente do habitual e outra pela oportunidade de construção de um aparelho que foi tão importante para a navegação e Astronomia. Além do mais, com a possibilidade de se utilizar um instrumento construído por eles, em uma atividade prática.

3.6.5. Procedimento para construção do Astrolábio

A construção do aparelho é muito simples: basta fixar um alfinete de cabeça, em uma das extremidades do canudo no centro do transferidor. Deste modo, o canudo poderá girar em torno desse alfinete, percorrendo a parte graduada e permitindo fazer a leitura do ângulo de elevação.

3.6.6. Procedimento para uso do Astrolábio

O uso do Astrolábio também é bastante simples: Inicialmente, posicione-se a uma distância **d** da estrutura (um prédio, por exemplo).

Com o auxílio do Astrolábio que você construiu, determine o ângulo de elevação do prédio. Nesse caso, direcione a linha de fé do transferidor horizontalmente para um ponto do prédio. Mantendo o instrumento fixo nessa posição, gire o canudinho de modo que ele aponte para o alto do prédio e observe a medida indicada na escala do transferidor.

FIGURA 44 - Procedimento de uso

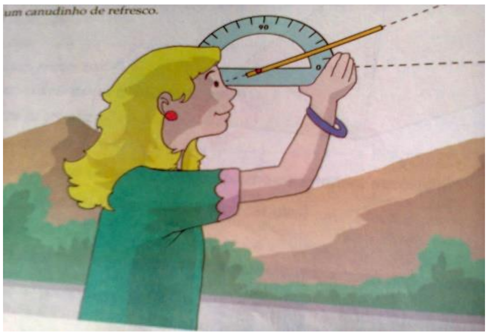
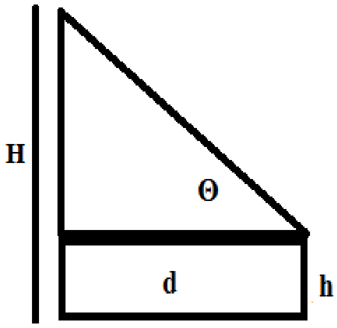


FIGURA 45 - Esquema de medição



Fonte: Giovanni, Giovanni Jr e Castrucci, 2002, p. 364

3.6.7. Atividade 4 – Cálculo da altura da caixa d'água

Título: Uso do Astrolábio para cálculo de medidas

Objetivo: Medição de uma caixa d'água com o uso do Astrolábio construído pelos alunos na tarefa 2, da atividade 3.

Metodologia: O trabalho se desenvolveu a partir do instrumento Astrolábio, artefato construído pelos próprios alunos, uma fita métrica, calculadora e tabela trigonométrica. Eles realizaram a medida da altura da caixa d'água da escola. E, no final se reuniram para a discussão dos resultados.

A tarefa proposta foi de uma exploração extraclasse. Ou seja, os grupos foram designados a determinar as medidas das alturas ou comprimento de algumas estruturas física existentes na escola.

Dessa forma, foram escolhidas pelos alunos, três estruturas para o desenvolvimento do trabalho: Medir a altura de uma das colunas de sustentação da escola; o comprimento do pátio e a altura da caixa d'água.

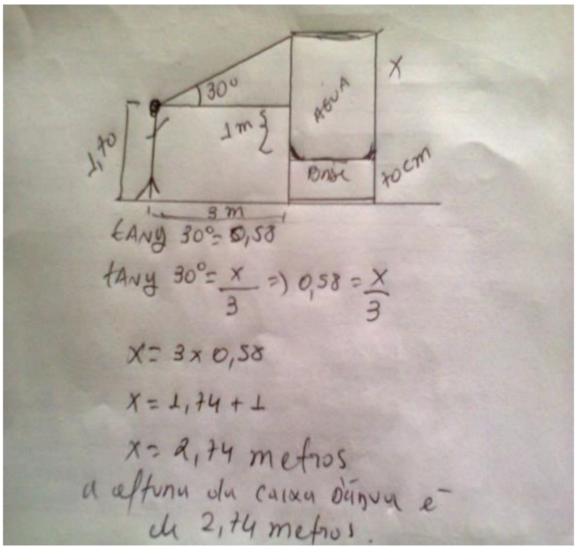
Cada grupo ficaria encarregado de medir um dos itens escolhidos e no final da tarefa todos os grupos se reuniriam para comentar e discutir o desenvolvimento e os resultados do trabalho. Todavia, por motivo de tempo, ficou decidido pela realização apenas, do cálculo da medida da altura da caixa d'água.

3.6.7.1. Resultados da Atividade 4, medida da altura da caixa d’água

FIGURA 46 - Medindo a altura da caixa d’água

Fonte: Construção, equipe KOC

FIGURA 47 - Esquema de cálculo



Fonte: Construção, equipe CDE

3.6.7.2. Comentário da atividade 4, cálculo da medida da caixa d’água

A realização dessa atividade foi bastante significativa. Tanto para nós, como para os alunos. Dava para perceber a motivação e o interesse com que eles desenvolviam a tarefa. A isso, afirma Piaget (1987, apud BRASIL, 1997) ‘’ É através da ação que se aprende, ou seja, a aquisição de novos conhecimentos está estritamente ligada ao processo de interação entre o sujeito e o objeto de estudo’’.

Alguns resultados encontrados pelos alunos foram temas de algumas discussões bastantes construtivas. Por exemplo, houve muita diferença nos resultados das medidas da altura da caixa d’água, mas, feitas as devidas análises, percebemos que em virtude dos arredondamentos, erros nas medidas com a fita métrica e cálculos imprecisos, ocasionaram essas diferenças. Todavia, os resultados foram confrontados e as conclusões ficaram esclarecidas.

Para análise dos resultados dessa atividade, mostramos o esquema desenvolvido pela equipe: CDE, para a resolução do cálculo da medida da altura da caixa d’água, onde ficam demonstrados os procedimentos por eles executados. Todos os cálculos foram feitos pelas equipes, cabendo a nós, confirmar alguns procedimentos e a verificação de alguns resultados.

Observávamos que as atividades desenvolvidas na pesquisa mobilizaram quase todos os alunos a se envolverem durante as construções geométricas no que se refere as construções dos triângulos retângulos, a tabela trigonométrica e ao instrumento, Astrolábio. Como também ao interesse demonstrado quando da aplicação dos conteúdos trigonométricos em problemas práticos (medida da altura da caixa d'água).

Também, foi oportuno o espaço para que os grupos apresentassem as suas considerações sobre o trabalho desenvolvido, tanto para a própria equipe como também para os demais grupos envolvidos nas atividades. Através destas discussões, foi possível perceber o nível de conhecimento absorvido no desenrolar das atividades realizadas. Estas constatações estão baseadas nos relatos orais ou escritos, feitos pelos alunos após a realização das tarefas.

Através de atividades diferentes das habituais, buscou-se explorar a curiosidade e a participação dos alunos, para que pudessem manusear diferentes materiais e objetos e, desenvolver um conhecimento mais concreto.

Nestas atividades, foi fundamental a utilização da História da Matemática, pois através dos breves relatos e informações, procuramos fornecer uma carga significativa de argumentos e informações fazendo com que os alunos percebessem que o surgimento da Trigonometria não se deu por acaso, mas para solucionar muitos problemas que a humanidade enfrentou em determinada época. Através dela foi possível tomar conhecimento de algumas aplicações e invenções muito importantes para a humanidade, que até então, eles não tinham ideia da sua importância e contribuição no desenvolvimento cientifico e progresso da humanidade.

Essas atividades, abriram favoravelmente algumas discussões interessantes acerca da validação do uso das razões trigonométricas em algumas situações. Uma das dúvidas relatadas e discutidas pelos alunos era o fato das possíveis diferenças nas medidas da altura da caixa d'água, já que, os componentes dos grupos possuíam estaturas diferentes. Esta discussão proporcionou uma curiosidade bastante interessante, levando os alunos a buscarem com mais motivação a solução da atividade. Outra dúvida interessante se deu com relação a uma base de cimento localizada abaixo da caixa d'água. Mas, após algumas discussões eles conseguiram desenvolver a tarefa de forma criativa.

Essas dúvidas foram válidas e oportunas, já que serviram como ponto de reflexão e análise, facilitando assim, a percepção e apropriação mais significativa do conteúdo.

Após o desenvolvimento da tarefa ficou esclarecido que as estaturas dos componentes dos grupos não tinham influência na medida da altura da caixa d’água como alguns alunos questionaram. A conclusão que eles apresentaram foi que, a diferença na estatura dos alunos ocasionava também uma diferença no ângulo de observação. Ou seja, se o observador **A** tem, por exemplo, 1.70 m, e, seu nível de observação é de 40°, possivelmente o nível de visão do observador **B** com 1.60 será maior que 40°. Ou seja, o observado B pode ser mais baixo que o observador A, todavia seu grau de observação sofre um aumento, compensando assim, o cálculo da medida do objeto.

Quanto à base de cimento, os alunos fizeram os cálculos utilizando a razão tangente e logo após, acrescentaram a diferença da medida da estatura do observador com a base de cimento. Desta forma, chegaram ao resultado da medida da altura da caixa d’água.

Com relação as dificuldades na execução da tarefa, o que ficou mais evidente foram os erros nas medições com a fita métrica e alguns problemas com os cálculos e arredondamentos. No geral o desenvolvimento da tarefa se deu de maneira bastante satisfatória, salientado que, a experiência prática tornou a aula mais interessante, como também contribuiu para a potencialização do conhecimento em Trigonometria.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Por fim, apresentamos nossas considerações finais acerca do trabalho desenvolvido, no qual, procuramos desenvolver uma proposta de ensino que fosse capaz de potencializar a construção dos conceitos das razões trigonométricas básicas: seno, cosseno e tangente.

Para isso, nos reportamos as nossas experiências como estudantes do ensino básico, como também, procuramos identificar em leituras significativas como por exemplo: os PCNs (2001), trabalhos com temas correlatos e em excelentes obras de educadores e, em sugestões de alguns recursos ou tendências metodológicas que pudéssemos empregar em nossa proposta, afim de tornar viável os nossos objetivos.

Dessa forma, procuramos desenvolver uma proposta baseada em ideias que tiveram resultados satisfatórios no que se refere ao conteúdo que nos propomos a desenvolver.

Assim, apresentamos uma estrutura de trabalho utilizando a História da Matemática, a Resolução de Problemas e a aplicação do conteúdo em situações práticas.

Não encontramos muitas dificuldades na implementação do trabalho, apesar da escola não apresentar uma boa estrutura física, como também na pouca habilidade dos alunos na manipulação dos instrumentos de desenho e medidas, como por exemplo: régua, transferidor, par de esquadros, compasso e fita métrica.

Vimos que, por se tratar de atividades diferentes e interessantes, uma metodologia que eles não estavam habituados a desenvolver, agregou bastante curiosidade fazendo surgir em paralelo um maior interesse e motivação para se empenharem no desenrolar das tarefas.

Desenvolvemos o trabalho de forma que o aluno fosse capaz de construir os conceitos básicos através de experiências práticas, estimulando-os a refletirem sobre o seu conhecimento acumulado, produzindo com isso, a construção de novos conceitos de forma bastante significativa.

Acreditamos que nossa proposta, através das atividades desenvolvidas, proporcionou aulas dinâmicas e significativas, abrindo espaço para discussões e troca de ideias, favorecendo a construção dos conceitos trigonométricos.

Algumas delas despertaram a curiosidade e a criatividade adormecida do estudante. Observamos que, a partir do momento em que vivenciam a construção do conceito a partir do concreto, manuseando os materiais de desenho e instrumento de medidas (régua, transferidor, papel milimétrico, fita métrica dentre outros), e calculadora, interagindo com seus colegas através da busca de estratégias para a realização das tarefas, a busca da formulação dos conceitos trigonométricos se tornou bastante prazerosa.

As construções geométricas (construção dos triângulos retângulos), as construções das tabelas trigonométricas e dos astrolábios, assim como, da aplicação das razões trigonométricas em uma situação real, abrindo espaço para a discussão das dificuldades que os alunos tinham com relação ao conteúdo, foi de vital importância para a construção do conhecimento.

Os questionamentos dos alunos com relação a aplicação das razões trigonométricas (atividade 4), em determinadas situações como por exemplo, no caso da diferença de estatura dos alunos ou mesmo da pequena base de cimento a baixo da caixa d’água, foram os momentos mais especiais e marcantes, pois mostraram que, a experiência causou inquietação e curiosidade, deixando os alunos atentos e reflexivos sobre o contexto envolvido na atividade.

Portanto, de acordo com os resultados apresentados pelos alunos através dos diálogos, das construções verificadas, das respostas aos problemas contextualizados, como também, quando das desenvolturas com que aplicaram os conceitos trigonométricos estudados, ficou evidente que a proposta surtiu efeito, ou seja, proporcionou a potencialização da construção dos conceitos das razões trigonométricas básicas de forma bastante significativa.

REFERÊNCIAS

ANDRINI, Álvaro; VASCONCELLOS, Maria José. **Praticando Matemática**: **Coleção atualizada – 8ª série**. 1 ed. São Paulo: Editora do Brasil EB, 2002.

AUSUBE, D. P.; et al. **Psicologia Educacional**. 2ed. Rio de Janeiro: Interamericana, 1980.

ÁVILA, Geraldo. **Geometria e Astronomia**. **Explorando o ensino da Matemática**: artigo - Vol. 1, p. 170-173. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2004.

BIANCHINI, Ewaldo;PACCOLA, Herval. **Matemática**: Reimpressão revista – 1° ano do ensino médio. 1 ed. São Paulo: Editora Moderna, 1990.

BRASIL, Luís Alberto S. **Aplicação da teoria de Piaget ao ensino de Matemática**. Rio de Janeiro: Forense – Universitário,1997.

BRASIL, **Parâmetros Curriculares Nacionais** / Secretaria de Educação. Brasília: MEC, 2001.

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blucher, 1974.

_______. História da Matemática. São Paulo: Editora Edgard Blucher, 1996

BONGIOVANN**I**, Vincenzo; VISSOTO, Olímpio Rudinin Leite; LAUREANO, José Luiz Tavares. **Matemática e vida – 8ª série**. 16 ed.: São Paulo: Ática, 2001

COSTA NETO, Deoclécio Pinto da. **Dando corda na Trigonometria**. Trabalho de conclusão de curso (graduação em Matemática) – Centro de Ciências e Tecnologia, UEPB, 2011.

D’AMBRÓSIO, Ubiratan. **Da realidade à ação**. Reflexões sobre Educação e Matemática. Campinas, SP: Summas/ Unicamp, 1986.

___________, Ubiratan. **Educação Matemátic**a: **da teoria à prática**. Campinas: Editora Papirus, 1996.

D’AMBRÒSIO, Beatriz S. **Como ensinar matemática hoje? Temas e debates**.SBEM. Ano II. N.2. p. 15-19. Brasília, 1989.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Tradução: Higyno H. Domingues. Campinas, SP: UNICAMP, 2004.

FAINGUELERNT, Estela Kaufman. Educação matemática: **representação e construção em geometria**. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 1999.

FONSECA. Maria C. F. R. **Por que ensinar Matemática**. Presença Pedagógica, Belo Horizonte, v. 1, n. 6, mar/abril, 1995.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da Autonomia**: Saberes necessários à prática educativa. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

_______. **Pedagogia do oprimido**. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1987.

GARBI, Gilberto G. **Para que serve isso?** Revista do Professor de Matemática. SBEM, São Paulo, v 63, p. 1- 5, 2° quadrimestre, 2007.

GIOVANNI, José Ruy; GIOVANNI, José Ruy Jr;CASTRUCCI. **A Conquista da Matemática- 9° Ano/ 8ª série** (Edição renovada): São Paulo: Editora FTD, 2002.

HELLMEISTER, Ana Catarina P.;RAPHAEL, Debora M.;DRUCK, Suely (Org.). **Explorando o ensino da Matemática**: Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2004.

JORDANE, Alex; FREITAS, Rony. **Para que estudar Matemática?** Mundo Jovem ,Abril, Ano 49. Editora da PUCRS, p. 7, 2011.

LAUDARES, João Bosco. **Uma nova abordagem para a educação em Matemática e ciências**. Presença Pedagógica. Belo Horizonte, v 36 p. 55-58, 2005.

LUDKE, Menga & ANDRÉ, Marli E.D.A. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas.** São Paulo, Editora Pedagógica e Universitária, 1986. 99p.

MARKARIAN, Roberto. **A matemática na escola alguns problemas e suas causas**: Explorando o ensino da matemática: artigo – vol. 1, p. 278-279. Brasília: Ministério da Educação e Cultura, Secretaria de Educação Básica, 2004.

MORI, Iracema; ONAGA, Dulce Sátiro. **Matemática ideias e desafios – 8ª série**. 1 ed. São Paulo: Editora Saraiva, 1996.

PEREIRA, Cícero da Silva. **Aprendizagem em Trigonometria no Ensino Médio**: Contribuição da Teoria da Aprendizagem Significativa, Jundiaí: Paco Editorial, 2012.

SANT'ANNA, Ilza Martins. **Recursos educacionais para o ensino**: quando e por quê? Petrópolis, Rio de Janeiro: Vozes, 2004.

SILVA, Sílvio Alves da. **Trigonometria do Triângulo Retângulo**: Construindo uma Aprendizagem Significativa. São Paulo, 2005 – 178 Pag. Dissertação (Metrado em Educação Matemática) Pontifícia Universidade Católica.

SOUZA, Leonardo Guerini de. **Ensino-aprendizagem de Matemática através da construção de materiais didáticos** (trabalho de conclusão de curso), UFRS, 2011.

SPINELLI, Walter**;** SOUZA, Maria Helena. **Matemática: oficina de conceitos – 8ª série**. 1 ed. São Paulo: Ática, 2002.

VYGOTSKY, Lev S. Pensamento e Linguagem. São Paulo: Martins Fontes, 1987. 135 p. (coleção Psicologia e Pedagogia)