UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

JAQUELINE MENDES GONÇALVES

AS SECÇÕES CÔNICAS ABORDADAS EM DUAS ESTRATÉGIAS DE ENSINO UTILIZANDO O APLICATIVO GEOGEBRA

Campina Grande/PB
2012

JAQUELINE MENDES GONÇALVES

AS SECÇÕES CÔNICAS ABORDADAS EM DUAS ESTRATÉGIAS DE ENSINO UTILIZANDO O APLICATIVO GEOGEBRA

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências para obtenção do Título de Licenciada em Matemática.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Kátia Maria de Medeiros

Campina Grande/PB
2012

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL – UEPB

G586s Gonçalves, Jaqueline Mendes.

As secções cônicas abordadas em duas estratégias de ensino utilizando o aplicativo Geogebra [manuscrito] / Jaqueline Mendes Gonçalves. – 2012.

69 f. : il. color.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Tecnológicas, 2012.

“Orientação: Profa. Dra. Kátia Maria de Medeiros, Departamento de Matemática e Estatística”.

1. Matemática - Geometria. 2. Secções Cônicas. 3. Geogebra. 4. Investigações Matemáticas. I. Título.

21. ed. CDD 516

JAQUELINE MENDES GONÇALVES

AS SECÇÕES CÔNICAS ABORDADAS EM DUAS ESTRATÉGIAS DE ENSINO UTILIZANDO O APLICATIVO GEOGEBRA

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências para obtenção do Título de Licenciada em Matemática.

Aprovada em 06 de Julho de 2012.

BANCA EXAMINADORA

Kátia Maria de Medeiros

Prof.ª Dr.ª Kátia Maria de Medeiros
Departamento de Matemática – CCT/UEPB
Orientadora

Maria da Conceição Vieira Fernandes

Prof.ª Msc Maria da Conceição Vieira Fernandes
Departamento de Matemática – CCT/UEPB

Silvanio de Andrade

Prof.º Dr. Silvanio de Andrade
Departamento de Matemática – CCT/UEPB

Dedico este Trabalho primeiramente a Deus, pelas maravilhas que tem realizado em minha vida, a minha querida mãe, Maria José e meu exemplar padrasto Antônio, pelo enorme apoio em todos os momentos desta trajetória. Aos meus lindos filhos, Jarda Eduarda, Guilherme e David, por serem minha fonte de alegria e vida, ao meu grande amor José Daniel, pelo seu apoio e carinho e a todos os meus colegas que de alguma forma contribuíram para o término do mesmo.

AGRADECIMENTOS

Quero agradecer, em primeiro lugar, a Deus, pela força e coragem durante toda esta longa caminhada.

A minha grande mãe Maria José, ao meu exemplar pai e padrasto Antônio do Sacramento, ao meu companheiro José Daniel pelo apoio e compreensão, aos meus filhos: Jarda Eduarda, Guilherme e David Daniel por existirem na minha vida e a toda minha família e amigos, que contribuíram de alguma forma para que eu chegasse até esta etapa de minha vida.

De modo muito especial, meu enorme agradecimento á Prof.ª Dr.ª Kátia Maria de Medeiros pela paciência na orientação, dedicação, apoio e incentivo total que tornaram possível a conclusão deste Trabalho.

Agradeço também a todos os professores que me acompanharam durante a graduação, em especial aos professores: Silvanio de Andrade, Fernando Luiz Tavares e Maria da Conceição Vieira Fernandes pela contribuição na realização desta Monografia.

Ao professor da Escola São Sebastião, José Kleber Palmeira da Silva, meu muito obrigado, pelo incentivo, pela força e principalmente pelo carinho, por ter nos recebido tão bem e ter cedido à turma de alunos para a realização desta pesquisa.

Sem a curiosidade que me move, que me inquieta, que me insere na busca, não aprendo nem ensino.
(PAULO FREIRE).

RESUMO

É visível a dificuldade encontrada pelos alunos do Ensino Médio no conteúdo das Secções Cônicas. Por outro lado, quando relacionamos seu ensino-aprendizagem à utilização de aplicativos de geometria dinâmica, podemos obter uma melhor compreensão. O objetivo geral de nossa pesquisa foi utilizar, em uma turma do 3º ano do Ensino Médio, Tarefas de Investigação Matemática, com as Secções Cônicas e com o aplicativo GeoGebra. Essa pesquisa teve como objetivos específicos: apresentar as secções cônicas aos alunos utilizando o ensino direto; apresentar aos alunos o aplicativo GeoGebra no Laboratório de Informática; desenvolver três Investigações Matemáticas utilizando o Aplicativo GeoGebra, sendo uma Investigação Matemática para cada uma das Secções Cônicas - Elipse, Hipérbole e Parábola. A metodologia foi desenvolvida levando em consideração o aspecto quantitativo. Neste sentido, desenvolvemos as aulas no ensino direto, aplicação de Teste1, apresentação do aplicativo aos alunos no laboratório de informática as tarefas de Investigação Matemática e o Teste2. Essa pesquisa foi realizada em maio de 2012, numa turma de 3º ano do Ensino Médio da Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio São Sebastião, localizada no município de Campina Grande-PB. Os resultados evidenciam para uma melhor compreensão do conteúdo de Cônicas, principalmente no ensino exploratório utilizando o aplicativo GeoGebra, que expressa com clareza a eficácia do aplicativo na compreensão das definições das Secções Cônicas através das Investigações Matemáticas.

Palavras-chave: Secções Cônicas; Geogebra; Ensino Médio; Investigações Matemáticas.

ABSTRACT

It is apparent the difficulty encountered by high school students in the content of the Conic Sections. On the other hand, when we relate their teaching-learning applications for the use of dynamic geometry, we can obtain a better understanding. The overall goal of our research was to use in a class of 3rd year of High School, Mathematics Research Tasks with Conic Sections and the GeoGebra application. This research had as objectives: to present the students with conic sections using direct instruction, provide students with the application GeoGebra in Computer Lab, developing three Mathematical Investigations using GeoGebra Application and is a Research Mathematics for each of the Conic Sections - Ellipse, Hyperbola and Parabola. The methodology was developed taking into account the quantitative aspect. In this sense, we have developed in direct teaching classes, Test1 application, presentation application to students in computer lab tasks and Mathematics Research Test2. This survey was conducted in May 2012, a class of 3rd year of High School State School for Elementary and Middle São Sebastião, located in Campina Grande-PB. The results show a better understanding of the contents of conics, especially in exploratory learning using the GeoGebra application, which clearly expresses the effectiveness of the application in understanding the definitions of the Conic Sections through the Mathematical Investigations.

Key Words: Conic Sections; Geogebra; School; Mathematical Investigations.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE GRÁFICOS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

As cônicas: elipse, hipérbole e parábola compõem um assunto da Matemática sobre o qual as exposições gerais são conhecidas antes da época de Euclides (±325 - 265 a.C.). Estas curvas são obtidas variando a inclinação de um plano que intercepta um cone circular de duas folhas. Esta propriedade foi descoberta por Apolônio (±262 - 190 a.C.) que forneceu importantes contribuições sobre o assunto em seu tratado sobre as cônicas.

São inúmeras as aplicações das cônicas e, devido às suas propriedades físicas e estéticas, os arcos de cônicas surgem, frequentemente, em Engenharia e Arquitetura, em pontes, cúpulas, torres e arcos. Além das aplicações relacionadas aos movimentos dos planetas, as cônicas também têm aplicações na tecnologia atual, e tem sido tópico de relevância nos programas de Ensino Médio.

Este Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) está organizado da seguinte forma: inicialmente apresentamos o nosso objetivo geral e os específicos, a seguir, apresentamos a Revisão de Literatura, na qual abordamos algumas perspectivas históricas sobre as Secções Cônicas e as Investigações Matemáticas no currículo de diversos países; em seguida, tratamos do uso do computador na escola, dando atenção especial ao aplicativo GeoGebra; das Investigações Matemáticas na sala de aula, e dando continuidade, explicitamos as aulas sobre Cônicas no ensino direto; as Investigações Matemáticas no laboratório de informática; posteriormente, temos a análise dos dados e, finalmente, apresentamos a conclusão.

2. OBJETIVOS

2.1. OBJETIVO GERAL

Explorar, em uma turma do 3º ano do Ensino Médio, Tarefas de Investigação Matemática, com as Secções Cônicas utilizando o aplicativo GeoGebra.

2.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Apresentar as secções cônicas aos alunos utilizando o ensino direto;
- Apresentar aos alunos o aplicativo GeoGebra no Laboratório de Informática;
- Desenvolver uma Investigação Matemática com a Elipse utilizando o aplicativo GeoGebra;
- Desenvolver uma Investigação Matemática com a Hipérbole utilizando o aplicativo GeoGebra;
- Desenvolver uma Investigação Matemática com a Parábola utilizando o aplicativo GeoGebra.

3. REVISÃO DE LITERATURA

3.1. ELEMENTOS DA HISTÓRIA DAS CÔNICAS E DAS INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS E DO USO DO COMPUTADOR NA ESCOLA

Segundo Boyer (1996), o interesse pelo estudo das cônicas (Elipse, Hipérbole e Parábola), surgiu por volta do século IV a.C. e muitos foram os matemáticos que se dedicaram ao estudo destas curvas no decorrer da história, principalmente o grande matemático helenístico, Apolônio de Perga (a.C.. 247 – 205 a.C.).

Nesta primeira sessão do trabalho faremos uma pequena abordagem a respeito das perspectivas históricas sobre as Cônicas, em seguida analisaremos os indícios de tarefas de Investigações Matemática no currículo de diversos países e a utilização do computador na escola.

3.1.1 PERSPECTIVAS HISTÓRICAS SOBRE AS CÔNICAS

Segundo Boyer (1996) e Struik (1992), as origens da teoria das Seções Cônicas são um pouco obscuras, mas podem ser fortemente atribuídas a resolução do problema da duplicação do cubo. Este problema consiste em: dada a aresta de um cubo, construir com o uso de régua e compasso a aresta de um segundo cubo cujo volume é o dobro do primeiro. Hipócrates de Chios (470 - 410 a.C.) mostrou que esse problema se reduzia em encontrar curvas com propriedades expressas na proporção contínua entre dois segmentos. Esse processo consistia em determinar médias proporcionais entre duas grandezas dadas, ou seja, dados os segmentos a e b, encontrar dois outros x e y tais que:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$$

Hipócrates afirmou que para b = 2a, a proporção contínua apresentada logo acima traduzia a solução do problema da duplicação do cubo, pois isolando e eliminando y, conclui-se que $x^3 = 2a^3$. Isto equivale, na notação atual, resolver simultaneamente quaisquer duas das três equações:

$$x^2 = ay, \qquad y^2 = 2ax \qquad \text{e} \qquad xy = 2a^2$$

que representam parábolas nos dois primeiros casos e hipérbole no terceiro. Mas a descoberta dessas curvas se deu por Menaechmus (380 - 320 a.C.) por volta de 360 ou

350 a.C. que construiu as curvas com essas propriedades algébricas e consequentemente mostrou que o ponto de interseção delas daria as médias proporcionais desejadas. A descoberta da elipse parece ter sido feita também por ele como um simples subproduto dessas suas pesquisas.

Boyer (1996), afirma que em muitos casos as Secções Cônicas foram apresentadas como ferramentas para solucionar certos problemas geométricos, como por exemplo, Arquimedes (287 - 212 a.C.) as usou para resolver problemas sobre esferas. O estudo das cônicas evoluiu rapidamente e, ao final do século IV a.C. já haviam dois extensos tratados sobre o assunto, citado por Papus (290 - 350 d.C.) em sua obra *Tesouro da Análise*. Entre esses dois, estava as Cônicas de Euclides (325 - 265 a.C.) compostas por quatro livros escritos por volta de 300 anos a.C. O outro tratado *Lugares Sólidos* fora escrito por Aristeu (370 - 300 a.C.) um pouco antes das cônicas de Euclides.

Até a época de Arquimedes, segundo o autor, as cônicas eram definidas da mesma forma como foram descobertas por Menaechmus, isto é, das secções dos três tipos de cones retos classificados conforme o ângulo do vértice fosse reto, agudo ou obtuso. A secção em cada cone era dada por um plano que cortava perpendicularmente sua reta geratriz, ou seja, a hipotenusa do triângulo retângulo rotacionado para gerar tal cone. A “secção de cone retângulo” é hoje chamada de parábola, a “secção de cone acutângulo” de elipse e a “secção de cone obtusângulo” de hipérbole.

Apesar das contribuições destes matemáticos, outro estudioso que se destacou no estudo das cônicas foi o célebre **Apolônio de Perga** (c. 247 – 205 a.C.) que escreveu várias obras intituladas de tratados. Dos muitos tratados de Apolônio, apenas dois se preservaram em grande parte, *Dividir segundo uma razão* e *As Cônicas*. Segundo Cajori (2007), este último foi certamente sua obra prima sendo composta por oito volumes (aproximadamente 400 proposições). Da obra original sobreviveram sete volumes, sendo quatro escritos em grego e três traduzidos para o árabe por Thabit Ibn Qurra (836 a 901). Em 1710, Edmund Halley (1656 - 1742) traduziu os sete volumes sobreviventes para o latim, possibilitando as demais traduções para as outras línguas modernas.

O Livro I de *As cônicas*, de acordo com o autor, começa com uma exposição da motivação para escrever a obra. Quando Apolônio estava em Alexandria, foi procurado por um geômetra chamado Naucrates, e foi a pedido dele que Apolônio escreveu uma versão apressada de *As cônicas* em oito livros. Mais tarde, em Pérgamo, o autor elaborou os livros, um de cada vez, razão na qual inicia os livros IV e VII com saudações a Atalus, rei de Pérgamo. O autor descreve os quatro primeiros livros como se formassem uma introdução elementar e supõe-se que muito desse material já havia aparecido em tratados anteriores sobre cônicas. No entanto, Apolônio diz expressamente que alguns dos teoremas no livro III são de sua autoria, e não de Euclides. Nos quatro últimos livros ele trata de assuntos bastante originais onde a teoria se expande em direções mais específicas, como por exemplo, discute sobre cônicas semelhantes, retas tangentes e normais a essas curvas e novas propriedades sobre diâmetros conjugados.

Embora a Elipse, a Parábola e a Hipérbole tenham sido descobertas antes do tempo de Apolônio, foi apenas através deste que pela primeira vez, mostrou sistematicamente que não é necessário tomar secções perpendiculares à geratriz de um cone e que, de um único cone, podem ser obtidas todas as três espécies de Secções Cônicas, simplesmente variando a inclinação do plano da secção. Esse foi um passo importante para relacionar os três tipos de curvas.

Uma segunda generalização importante, ainda de acordo com Cajori (2007) dada por Apolônio foi à prova de que o cone não precisa ser necessariamente reto, mas podendo ser também oblíquo ou escaleno. Segundo Eutócio (480 - 540), ao comentar As cônicas, Apolônio foi o primeiro geômetra a mostrar que as propriedades das curvas não são diferentes conforme sejam cortadas de cones oblíquos ou retos.

Finalmente afirma Boyer (1996, p.100), Apolônio substitui o cone de uma só folha por um cone duplo e o definiu da seguinte forma:

> Se fizermos uma reta, de comprimento indefinido e passando sempre por um ponto fixo, mover-se ao longo da circunferência de um círculo que não está num mesmo plano com ponto de modo a passar sucessivamente por cada um dos pontos dessa circunferência, a reta móvel descreverá a superfície de um cone duplo.

Como consequência dessa definição, a hipérbole passou a ser considerada como uma curva de dois ramos como é definida atualmente.

O nome das secções cônicas, segundo o autor, dada por Apolônio tinha um significado diferente daquele que era usado até sua época. Durante um século e meio essas curvas apresentavam designações simples dadas pela forma na qual tinham sido descobertas – secções de cone acutângulo (oxytome), secções de cone retângulo (orthotome) e secções de cone obtusângulo (amblytome). Arquimedes ainda usava esses nomes, embora haja relatos de que ele usou o nome parábola como sinônimo para a secção do cone retângulo, foi Apolônio (talvez seguindo sugestão de Arquimedes) quem introduziu os nomes elipse e hipérbole para essas curvas. As palavras elipse, parábola e hipérbole não foram inventadas expressamente, foram adotadas de uso anterior, provavelmente pelos pitagóricos, na solução de equações quadráticas por aplicação de áreas.

3.1.2. AS INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS NO CURRÍCULO DE DIVERSOS PAÍSES

Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2003), nos currículos de vários países encontram-se, de modo direto ou indireto, referências de atividades de Investigação Matemática realização pelos alunos. Analisaremos brevemente, o que dizem sobre o assunto os documentos curriculares dos *Estados Unidos da América*, da *Inglaterra*, da *França* e deteremos nossa atenção em especial mais em *Portugal* e no *Brasil*.

De acordo com os documentos publicados pelo National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) dos *Estados Unidos da América*, a cerca do que os alunos devem aprender na disciplina de Matemática, As Normas para o Currículo e Avaliação da Matemática Escolar identificam cinco objetivos gerais para todos os alunos:

- Aprender a dar valor à Matemática;
- Adquirir confiança na sua capacidade de fazer Matemática;
- Tornar-se apto a resolver problemas matemáticos;
- Aprender a comunicar matematicamente;
- Aprender a raciocinar matematicamente.

Ainda de acordo com este documento, o grande objetivo do ensino da Matemática é ajudar todos os alunos a desenvolver "poder matemático" e, para isso, os professores devem envolvê-los na formulação e resolução de uma grande diversidade de problemas, na construção de conjecturas e de argumentos, na validação de soluções, na avaliação da plausibilidade das afirmações matemáticas e que as boas tarefas são aquelas que não separam o pensamento matemático dos conceitos ou aptidões matemáticas e que apelem para a resolução de problemas, a investigação e exploração de ideias e a formulação, teste e verificação de conjecturas.

Embora o termo "Investigações Matemáticas" aparece raramente nos documentos citados, o NCTM valoriza tarefas cujas características estão relacionadas á formulação de problemas, á produção e testes de conjecturas, á argumentação e validação de resultados e ao próprio processo de "pensar matematicamente".

Na *Inglaterra*, segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2003), as tarefas de Investigação tem uma forte tradição curricular. Em documentos governamentais, no início dos anos 80 já se lia que "o ensino da Matemática deve incluir oportunidades para trabalho de investigação".

O currículo de Matemática da Inglaterra e do País de Gales, publicado em 1995 indica que os alunos, com idades entre:

- 5 e 11 anos, deverão ter "oportunidades de expor a sua linha de raciocínio" e "deverão ser capazes de entender e investigar afirmações gerais assim como investigar casos particulares".
- 11 e 16 anos devem ter "oportunidades de usar e aplicar a Matemática em tarefas práticas, em problemas da vida real e em problemas puramente matemáticos; trabalhar em problemas que constituam um desafio; encontrar e considerar diferentes linhas de argumentação matemática".

De acordo com este currículo, a palavra "problema" surge com mais frequência que a expressão "investigação", no entanto, a importância dada a realização de conjecturas, do raciocínio e da argumentação matemática está claramente evidenciada.

Na *França*, afirma os autores, o ensino secundário obrigatório, inicia com a Classe de Seconde (alunos de 15-16 anos), e prossegue com as Classes de Première e Terminale. Os programas em vigor foram estabelecidos entre Abril de 1990 e Maio de 1997. Tanto na Classe de Seconde como nas Classes de Première e Terminale, o programa afirma ser necessário "habituar os alunos à prática do trabalho científico, desenvolvendo conjuntamente as capacidades de experimentação e de raciocínio, de imaginação e análise crítica". A resolução de problemas é identificada como "objetivo essencial". Como podemos observar, as ideias de Investigações tem sua importância nos programas franceses, apresentando-se como núcleo central da atividade científica.

Em *Portugal*, os programas do 2º e 3º ciclos do ensino básico apontam algumas referências diretamente ou indiretamente a tarefas de natureza investigativa e a desempenhos típicos dos alunos neste tipo de tarefas. Neste país, um documento curricular[1], mostra que apesar de não vermos exposto claramente durante o texto o termo "investigação", a importância evidenciada a formulação de conjecturas, à criação

[1] Ministério de Educação (1991, pp. 155, 158 e 164). Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2003).

do espírito de pesquisa, o realce atribuído à argumentação, à discussão, à descoberta e à avaliação estão presentes nas ideias do conteúdo dos programas portugueses, e tudo isto fazem parte dos aspectos mais relevantes dos processos de investigação.

Nos demais documentos oficiais do Ministério da Educação voltados para ensino básico e ao ensino secundário encontram-se fortes evidencias de competências relacionadas ao processo investigativo, tais como: "raciocinar matematicamente, procurar regularidades, fazer e testar conjecturas e formular generalizações", "desenvolver as capacidades de formular e resolver problemas, de comunicar, assim como a memória, o rigor, o espírito crítico e a criatividade". Os referidos programas também se referem ao uso de calculadoras gráficas e computadores em sala de aula, permitindo que os alunos realizem atividades de investigações e explorações desenvolvam suas capacidades de autonomia e cooperação.

No *Brasil*, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), publicados em 1998, dão uma significativa importância à realização de atividades de investigação e pesquisa no ensino e na aprendizagem da Matemática, em estreita associação com a resolução de problemas.

Dentre os objetivos gerais para o ensino fundamental, destacam-se o desenvolvimento do espírito de investigação e da capacidade para resolver problemas, sublinhando-se, igualmente, a importância dos alunos serem capazes de argumentar sobre suas conjecturas. Encontramos também nos PCN sugestões de muitas atividades para diversos conteúdos de Matemática, tanto para 5º e 6º como 7º e 8º anos.

As atividades de investigação, segundo estes documentos de acordo com estes autores, surgem em paralelo com a resolução de problemas entendida como eixo organizador do processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Refere-se que a situação problema é o ponto de partida da atividade matemática. Conceitos, ideias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas e sublinha-se que o aluno deve ser estimulado a questionar a sua própria resposta, a questionar o problema, a transformar um dado problema numa fonte de novos problemas, a formular problemas a partir de determinadas informações, a analisar problemas abertos – que admitem diferentes respostas em função de certas condições.

Verificamos assim, fortes evidencias de tarefas de Investigação Matemática ou de suas ideias principais de modo direto ou indireto, no currículo de diversos países. Identificando, no entanto, uma maior clareza nos programas portugueses do ensino secundário e, principalmente, no currículo brasileiro que são muito claros quanto ao papel-chave que atribuem a este tipo de atividade, tanto nos seus objetivos gerais como nas orientações específicas respeitantes aos diversos conteúdos.

3.1.3. Um pouco sobre a História do Computador

Há cerca de quatro mil anos (2000 a.C.), segundo Marçula (2007), povos primitivos desenvolveram sistemas de cálculo e numeração mais poderosos do que os até então existentes, mas sem usar nenhum "aparelho" para isso. Por volta de quinhentos anos mais tarde, afirma o autor, surgia o primeiro instrumento capaz de calcular com precisão e rapidez. Composto de varetas (pedaços de madeira dispostos paralelamente) e pequenas bolas nasciam o primeiro modelo de *Ábaco* conhecido. Todavia, somente muito tempo depois surgia um modelo mais evoluído e que é usado até hoje no oriente: o ábaco chinês. Entre vários outros modelos de ábaco, aquele que fez maior sucesso foi a versão Chinesa.

Em 1638, de acordo com Cajori (2007), um padre inglês chamado William Oughtred, criou a *Régua de Cálculo***,** uma tabela muito interessante para a realização de multiplicações muito grandes. Apesar da régua de cálculo de William Oughtred ser útil, os valores presentes nela ainda eram predefinidos, o que não funcionaria para calcular números que não estivessem presentes na tábua. Logo, em 1642, o matemático francês Blaise Pascal desenvolveu o que pode ser chamado da primeira calculadora mecânica da história, a *Máquina de Pascal em (1642).*

E, daí por diante, conforme Marçula (2007), o homem não parou de inventar novos meios para efetuar cálculos. Surgiram: a *Calculadora de Leibniz (1672), o Tear Programável (1801), a Máquina de Diferenças e Máquina Analítica (1822), a teoria de Boole (1847), a Máquina de Hollerith (1890) e o Mark I (1943).*

Segundo Monteiro (2002), numa parceria da IBM (International Business Machines*)* com a marinha Norte-Americana, o Mark I era totalmente eletromecânico. Com o advento da segunda Grande Guerra, a demanda por computadores foi cada vez mais rápida e a partir de então, a história dos computadores passou a ser dividida em cinco gerações:

- *Primeira Geração* (1945-1959) engloba os primeiros computadores que usavam válvulas eletrônicas, quilômetros de fios, eram lentos, enormes e esquentavam muito. O ENIAC (Eletron ic Numerical Integrator and Calculator) foi considerado o primeiro computador eletrônico desta geração, seguindo BINAC, computador automático binário, o EDSAC – Eletronic Delay Storage Automatic Calculator, em 1949; o UNIVAC – Universal Automatic Computer, em 1951; o EDVAC – Eletronic Discrete Variable Automatic Computer – e os IBM 701-104, em 1952; o MADAM – Manchester Altomatic Digital Machine; o SEC – Simple Eletronic Computer e o APEC – All-Purpose Eletronic Computer.

- A *Segunda Geração* (1959-1964) substituiu as válvulas eletrônicas por transistores e os fios de ligação por circuitos impressos. Isso tornou os computadores mais rápidos, menores e de custo mais baixo. Destacaram-se nesta geração o IBM 1401, o BURROUGHS B 200, o TRADIC e o IBM TX-0, em 1058, além do PDP-1 e do MANIAC.
- A *Terceira Geração* de computadores (1964-1970) foi construída com circuitos integrados, proporcionando maior compactação, redução dos custos e velocidade de processamento da ordem de microssegundos. Tendo início a utilização de avançados sistemas operacionais, entre estes o Burroughs B-2500, IBM 360 e Burroughs B-3500. O PDP-5, em 1965, foi o primeiro minicomputador comercial e custava US$ 18.000,00, seguido do PDP-8.
- A *Quarta Geração*, a partir de 1970 até 1981, é caracterizada por um aperfeiçoamento da tecnologia já existente, maior grau de miniaturização, confiabilidade e velocidade da ordem de nanosegundos (bilionésima parte do segundo). Nesta época nasceu o microcomputador ALTAIR 8800 em 1974-5. Ainda nesse ano, 1975, Paul Allen e Bill Gates deram origem à Microsoft e o primeiro software para microcomputador.
- Na *Quinta Geração* de computadores, formados por circuitos integrados com um milhão de transistores por “chip”, tornou-se viável a execução de várias operações simultâneas, uma maior capacidade de processamento e armazenamento de dados, além da simplificação e miniaturização dos computadores.

Esta última geração permitiu que esses computadores fossem usados em aeronaves, embarcações, automóveis, além da grande rede computadores e estações de trabalho que se formou em todo o mundo.

3.2. O USO DO COMPUTADOR NA ESCOLA E O ENSINO DA MATEMÁTICA

Na sociedade atual, a utilização dos recursos tecnológicos no ensino da Matemática está, cada vez mais, ocupando uma posição de destaque nas instituições de ensino. Nas interações entre novas ferramentas tecnológicas e educação matemática é necessário que esses recursos sejam utilizados de forma a trazer benefícios no processo de ensino e aprendizagem. Mas para que isso aconteça é necessário que haja um vínculo entre o saber tecnológico e o saber teórico/científico.

O computador, de acordo com Palis (1999), tem sido considerado uma importante ferramenta de mudanças positivas no processo de ensino/aprendizagem de Matemática. Uma grande comprovação disso se dar na exploração de *aplicativos* de Geometria Dinâmica nos permitindo realizar inúmeras Investigações Matemáticas sobre propriedades geométricas que dificilmente conseguiríamos observar sem esse recurso.

A inserção das novas tecnologias na prática docente pressupõe que o professor esteja aberto a assumir um novo papel frente ao processo educacional. Isso quer dizer que o professor, ao adotar as TIC, precisa estar disposto a investir no próprio conhecimento sobre o uso de novas tecnologias em sala de aula, tendo uma postura crítica e construtivista do uso da mesma.

Computadores, internet, aplicativos, jogos eletrônicos, celulares: ferramentas comuns ao dia a dia da chamada ”geração digital” e as crianças já as dominam como se fossem velhas conhecidas. O ritmo acelerado das inovações tecnológicas, assimiladas tão rapidamente pelos alunos, exige que a educação também acelere o passo, tornando o ensino mais criativo, estimulando o interesse pela aprendizagem. O que se percebe hoje é que a própria tecnologia pode ser uma ferramenta eficaz para o alcance desse objetivo. Entendendo a escola como um espaço de criação de cultura, esta deve incorporar os produtos culturais e as práticas sociais mais avançadas da sociedade em que nos encontramos. Espera-se, assim, da escola uma importante contribuição no sentido de ajudar as crianças e os jovens a viver em um ambiente cada vez mais “automatizado”, através do uso da eletrônica e das telecomunicações. O horizonte de uma criança, hoje em dia, ultrapassa claramente o limite físico da sua escola, da sua cidade ou do seu país, quer se trate do horizonte cultural, social, pessoal ou profissional (PONTE, 2000).

Romero (2006) em sua fala traz sua concepção acerca do ensino com o auxilio de softwares em sala de aula.

> A tecnologia, especificamente os softwares educacionais disponibiliza oportunidade de motivação e apropriação do conteúdo estudado em sala de aula, uma vez que em muitas escolas de rede pública e particular, professores utilizam recursos didáticos como lousa e giz para ministrarem suas aulas, este é um dos diversos problemas que causam o crescimento da qualidade não satisfatória de ensino, principalmente na rede estadual. (ROMERO, 2006).

Nas últimas décadas, o debate em torno do processo de ensino-aprendizagem da matemática ganhou muita força com o surgimento de novas tendências e aperfeiçoamento de outras já conhecidas. Porém efetivamente ainda nos deparamos com uma prática de ensino tradicional onde técnicas e regras são os objetivos principais nesse método de ensino, proporcionando ao aluno a não capacidade de raciocínio lógico e também a não possibilidade de estabelecer relações com o seu dia a dia. Esse processo de ensino tão criticado prevalece infelizmente, em muitas instituições de ensino, é um modelo de exclusão, que prioriza a competição num cenário educativo bastante equivocado, mas, o que pode ser feito para que aconteça verdadeiramente uma mudança?

Muitos estudos na área de Educação Matemática têm evidenciado o bom uso do computador em sala de aula, os softwares livres na área de Matemática, a título de exemplo, tem sido uma boa ferramenta de pesquisa e utilização na sala de aula de alguns professores educadores. Vale salientar que a Matemática hoje é parâmetro de conhecimento, de posição social, de nível cultural, é de grande importância no desenvolvimento da tecnologia, dos indivíduos ou de uma região, pois é uma construção humana. Um dos maiores educadores matemáticos, Ubiartan D'Ambrósio, afirma que:

> É preciso substituir os processos de ensino que priorizam a exposição, que levam a um receber passivo do conteúdo, através de processos que não estimulem os alunos à participação. É preciso que eles deixem de ver a Matemática como um produto acabado, cuja transmissão de conteúdos é vista como um conjunto estático de conhecimentos e técnicas. (D'AMBRÓSIO, 2003)

Para o autor, calculadoras e computadores estão ao nosso alcance e podem contribuir para a mudança no ensino de Matemática. Este ensino, salienta, deve passar por uma mudança radical. Tal mudança permitirá adequar o currículo de Matemática ao atual contexto histórico que vivemos, marcado pela presença da tecnologia.

3.2.1. A ESCOLHA DOS APLICATIVOS

Segundo Oliveira e Domingos (2008), as TIC (Tecnologias da Informação e Comunicação) têm sido apontadas, nas últimas décadas, como um ingrediente central no processo de mudança do ensino da Matemática: assumidas quer como uma certa inevitabilidade decorrente da informatização da sociedade, quer como parte integrante de novas perspectivas sobre a natureza da matemática escolar e da aprendizagem na disciplina.

Todavia, salientam os autores, o que temos observado na realidade, é que na maioria das escolas, principalmente da rede pública de ensino, e os professores não estão preparados para lidar com essa nova realidade da informação. Sendo necessário, que o próprio professor enquanto ser pensante e preocupado com sua metodologia de ensino procure se adaptar a essa nova realidade.

Nos últimos anos, no Brasil temos observado a multiplicação de iniciativas para fomentar a utilização das TIC pelos professores, como por exemplo, a iniciativa dos poderes públicos ao distribuírem computadores portáteis para os professores, mas não encontramos iniciativas com grande repercussão na criação de ambientes de aprendizagem apoiados na utilização de aplicativos.

Autores conceituados que se têm dedicado à investigação nesta área apontam também algumas fragilidades aos resultados que vêm a ser apresentados como afirmam Kieran e Drijvers (2006) citados por Oliveiras e Domingos (2008). Como referem, a investigação tem tido

> dificuldade em fornecer evidência de melhorias na aprendizagem através dos meios tecnológicos, assim como em compreender a influência da tecnologia na aprendizagem. Em suma, o otimismo original no que diz respeito aos benefícios da tecnologia (…) ficou bastante mais diluído. (p. 206)

Diante desta situação, fica-nos a pergunta? Qual o lugar das TIC no processo de ensino e aprendizagem de Matemática? A verdade é que não podemos deixar de lado tal discussão, pois as TIC fazem parte de nosso cotidiano. A utilização de aplicativos na Matemática escolar pode ser útil para a compreensão dos conceitos, a exploração de diversas representações e de relacioná-las, a exploração de propriedades e de relações matemáticas, os processos de natureza indutiva e experimental, a generalização e os processos argumentativos e a modelação, entre outros.

Existe uma grande diversidade de Aplicativos para se trabalhar os conteúdos matemáticos, na modalidade de exercícios e práticas, jogos e simulações. Além de termos uma variedade de utilizações com o próprio computador, utilizando-o como processador de texto, bases de dados, programas de cálculo e de geometria dinâmica. Quando o professor tem conhecimento destes recursos, ele procura explorar bem essas potencialidades e consequentemente melhorar seu processo de ensino e aprendizagem.

Ainda segundo os autores, a avaliação do aplicativo é também uma das questões a considerar quando pretendemos inferir da qualidade das ferramentas a utilizar no processo de ensino aprendizagem. Tal avaliação engloba as seguintes dimensões: psicológica, didática e tecnológica. Incidindo em três planos de análise que englobam o produto propriamente dito, a sua utilização em contextos concretos e os resultados da aprendizagem mediatizada por estes contextos. Outra avaliação a ser considerada refere-se ao conhecimento prévio dos professores sobre estes elementos, e sobre determinado aplicativo a utilizar, para que os mesmos possam fazer sua efetiva integração no currículo.

Dentre os vários exemplos de aplicativos de geometria dinâmica, como: o Geometricks*,* o Geometrix, o Cabri-Géomètre II, e o Geometer's Sketchpad *co*nhecidos, temos o GeoGebra, (ver Figura1) é um programa de geometria dinâmica que relaciona Geometria, Álgebra e Cálculo, foi desenvolvido por Markus Hohenwarter da Universidade de Salzburg na Áustria. Este aplicativo caracterizado por sua fácil utilização, totalmente gratuito, disponível em: http://www.geogebra.org/cms/index.php?lang=pt.

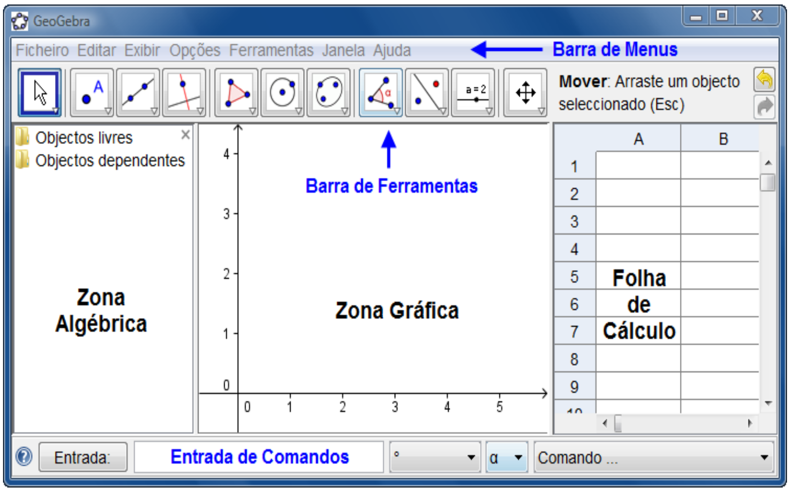


Figura 1: Janela inicial do GeoGebra

3.2.3. O GeoGebra

Segundo Araújo (2008), o grande avanço tecnológico ocorrido nas duas últimas décadas mudou o cenário das escolas. Muitas escolas estão sendo equipadas com laboratórios de informática, enquanto que os professores ainda estão procurando se adaptar a este novo cenário tecnológico. Diante desta realidade digital, o professor precisa rever suas práticas de ensino, pesquisar, estudar muito e elaborar meios de utilização dessas novas ferramentas que estão ao seu alcance.

Muitos estudos na área de Educação Matemática tem evidenciado o bom uso do computador em sala de aula, os aplicativos livres na área de Matemática, a título de exemplo, têm sido uma boa ferramenta de pesquisa e utilização na sala de aula de alguns professores educadores.

O Geogebra é uma boa opção de aplicativo livre que tem o objetivo de obter um instrumento adequado de ensino, permitindo trabalhar com geometria, funções, cônicas entre outros tópicos relacionados ao ensino dinâmico da Matemática. Na barra de ferramentas ou por meio do campo de entrada é possível dar as instruções desejadas e construir diversas figuras geométricas (ver Figura2) de maneira muito fácil e em língua portuguesa do Brasil.

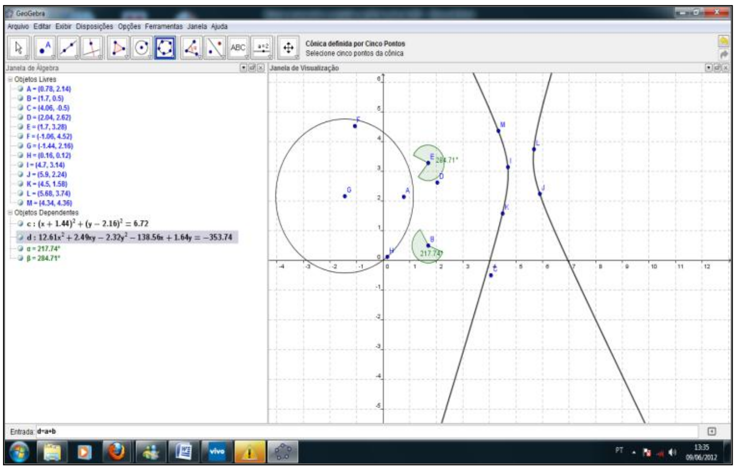


Figura2: Construções no GeoGebra

Nas ferramentas: Novo Ponto e Círculo Definido Pelo Centro E Um de Seus Pontos (ver Figura3), são possíveis criar um ponto e uma circunferência, na janela de visualização é visto os objetos e na janela de álgebra, a equação da circunferência e as coordenadas dos pontos.

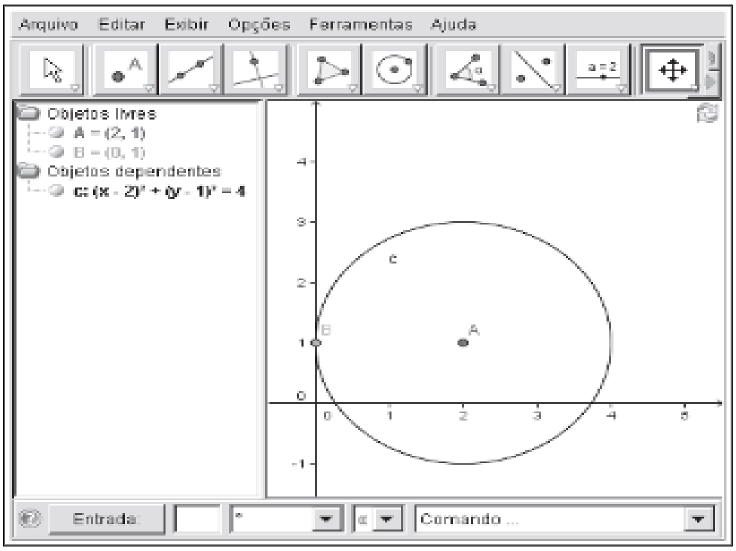


Figura3: Na Janela de Visualização são vistos os objetos e na Janela de Álgebra, a equação da circunferência e as coordenadas dos pontos.

Outra atividade que este artigo aborda que pode ser trabalhada com o GeoGebra é a lei dos senos, tendo por objetivos preparar os alunos para a demonstração dessa lei. Em fim, seja qual for à atividade que o professor for desenvolver com sua turma, a experiência só virá com o tempo, de início as atividades podem ser simples apenas explorando os comandos da barra de ferramentas e com o tempo poderá aplicar atividades mais elaboradas.

Por outro lado, Araújo (2008), afirma que, apesar de utilizar o computador nas aulas de Matemática vir se configurando como uma boa forma de inovação e criatividade para os alunos e professores, é preciso que estes estejam atentos aos resultados obtidos na telinha e não confiem muito em tudo que está diante de seus olhos. É preciso ter senso crítico, analisar os resultados para convencerem-se de que tudo esta correto. Este artigo mostra alguns exemplos de que nem sempre podemos confiar nos resultados obtidos através deste recurso visual, e que tais resultados podem levar-nos a conclusões falsas.

O gráfico da função $y = e^\wedge(-x)$ **+ x intercepta a reta y = x?** A resposta a esta pergunta é não. No entanto, ao entrarmos no campo de entrada do aplicativo GeoGebra com estas funções, o aplicativo dará resposta afirmativa. Segundo o GeoGebra, essas curvas se interceptam no ponto (34,7739; 34,7739). Se o professor não estiver atento a esta questão, estará acreditando em resultados falsos e os alunos ficarão confusos.

A explicação para esta confusão é que, o aplicativo está programado para trabalhar com 15 casas após a vírgula, e como a função $y = e^\wedge(-x)$ tende à zero rapidamente, o número de casas com valor nulo ultrapassa as 15 casas com as quais ele está trabalhando, e assim ele “pensa” que as curvas se encontram.

Outro exemplo de situações em que o computador pode nos levar a conclusões falsas, abordadas neste artigo, refere-se à visualização da soma dos termos de uma série geométrica, sendo que, desta vez, o autor utilizou outro aplicativo, e chegou à conclusão de que não é um problema de um aplicativo em particular e sim, do próprio computador, que usa um número finito de casas decimais.

Portanto, embora o computador apresente inúmeras vantagens, devemos ter muito cuidado ao interpretarmos os resultados oferecidos por ele, ter senso crítico e utilizar o conhecimento matemático será de grande importância neste contexto educacional.

3.3. UTILIZANDO INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS NA SALA DE AULA

A perspectiva de que aprender matemática deve consistir, essencialmente, em fazer matemática têm sido discutidos por diferentes organizações, educadores matemáticos e investigadores (APM, 1988; Abrantes et al., 1999; NCTM, 1991, 2000; Santos et al., 2002). Tal perspectiva de ensino da matemática está associada às mudanças no tipo de tarefa proposta na sala de aula, a utilização de tarefas de Investigações Matemáticas na sala de aula proporciona aos alunos uma visão diferente da matemática que estão acostumados, pois saber matemática é fazer matemática.

3.3.1. TAREFAS DE DESAFIO ELEVADO: PROBLEMAS E INVESTIGAÇÕES

De acordo com Ponte (2005), os problemas matemáticos e as investigações matemáticas são tarefas de desafio elevado. Isto significa que estes dois tipos de tarefas podem promover um envolvimento maior por parte dos alunos, uma vez que os mesmos se sentem desafiados a solucionar determinada questão. Estes dois tipos de tarefas, exigem dos alunos uma participação mais ativa desde a fase do processo inicial até a fase das formulações das questões a resolver. O grau de desafio elevado, presente nos problemas e nas Investigações Matemáticas, relaciona-se de forma estreita com a percepção da dificuldade de uma questão e constitui uma dimensão desde há muito usada para graduar as questões que se propõem aos alunos na sala de aula.

Problema, segundo Polya (1995) é o meio pelo qual a Matemática se desenvolve, ou seja, o “alimento” da evolução matemática. Um problema tem seu grau de importância relacionado à quantidade de ideias novas que ele traz à Matemática e o quão ele é capaz de impulsionar os diversos ramos da Matemática – sobretudo aqueles em que ele não está diretamente relacionado.

> Resolver problemas é uma habilidade prática, como nadar, esquiar ou tocar piano: você pode aprendê-la por meio de imitação e prática. (...) se você quer aprender a nadar você tem de ir à água e se você quer se tornar um bom ‘resolvedor de problemas’, tem que resolver problemas” (p.72).

No contexto de Educação Matemática, um problema, ainda que simples, pode suscitar o gosto pelo trabalho mental se desafiar a curiosidade e proporcionar ao aluno o gosto pela descoberta da resolução. Neste sentido, os problemas podem estimular a curiosidade do aluno e fazê-lo a se interessar pela Matemática, de modo que, ao tentar resolvê-los, o aluno pode estar contribuindo para desenvolver a sua criatividade e aprimorar o seu raciocínio, além de utilizar e ampliar o seu conhecimento matemático.

Polya (1995) também aponta quatro fases a serem considerados no processo de resolução de problemas matemáticos:

1. _Compreensão do Problema_ - O aluno terá que transcrever da forma linguística para a forma matemática. Para alguns, aí já existe uma grande barreira, pois o aluno terá que interpretar o problema e passar do português para os símbolos matemáticos.

2. _Estabelecer de um Plano_ - É a hora de encontrar a conexão entre as informações que o problema dá e a pergunta que o problema faz. Aqui o aluno vai precisar de toda uma estrutura cognitiva onde estejam “guardados” conceitos matemáticos, operações, regras, algoritmos que possibilitem a compreensão do enunciado, ou seja, o que ele vai fazer com as informações que o problema dá.

3. _Execução do Plano_ - É o momento de colocar em prática o plano pensado. É possível verificar claramente que o passo está correto?

4. _Retrospecto_ - É o momento de examinar a solução obtida. Afinal, o plano que foi pensado, selecionado e executado, deu certo?

Segundo Polya(1995), o professor que deseja desenvolver nos estudantes a capacidade de resolver problemas, seguindo este processo, ele deve incutir em suas mentes algum interesse por problemas e proporcionar-lhes muitas oportunidades de imitar e de praticar.

Medeiros (2001) afirma que a resolução de problemas matemáticos em sala de aula, não tem apresentado o devido tratamento que deveria ter, verifica-se que a resolução de problemas abertos em sala de aula, tem sido confundida com meros exercícios repetitivos para fixar determinados conteúdos.

Um verdadeiro problema matemático precisa ser desafiador para o aluno, deve aguçar sua curiosidade, estimular a busca de uma solução e, principalmente, fugir da resolução através de procedimentos padronizados.

O contrato didático, segundo a autora, refere-se ao conjunto de comportamentos do professor esperados pelo aluno e, também, um conjunto de comportamentos do aluno esperados pelo professor. As regras de contrato didático voltadas para a resolução de problemas fechados apresentam características determinantes que levam o aluno a definir a operação matemática pedida no problema, são regras que “facilitam” a compreensão do problema e que facilitam na transformação da linguagem usual para a linguagem matemática.

A maioria dos problemas convencionais, afirma a autora, são tratados como uma coleção de exercícios variados onde, o aluno encontra a solução que o professor previamente tinha esperado. Diante dessa situação, o aluno pode ser levado a memorizar os conteúdos, reproduzir e repetir por várias vezes nos exercícios pedidos pelo professor.

Os problemas abertos salienta a autora, propostos pelo professor, podem ser uma ótima alternativa para provocar rupturas no contrato didático. Eles se caracterizam por não apresentarem nenhum vínculo com os últimos conteúdos estudados, evitando as regras de contrato didático já conhecido. Tais problemas podem permitir que os alunos experimentassem uma nova maneira de estudar, seja individualmente ou, principalmente, em grupo, possibilitando ricos conflitos sócio-cognitivos á medida que esses indivíduos passam a compartilhar ideias de resolução variadas para um mesmo problema, implicando numa oposição aos problemas fechados.

Ao trabalharmos as Secções Cônicas no estilo de ensino direto, exposição de conteúdo e exercícios, nesta pesquisa e logo em seguida quando mudamos a metodologia para trabalhar com as investigações matemáticas utilizando um aplicativo de geometria dinâmica, estamos consequentemente fazendo uma mudança no contrato didático adotado inicialmente.

Trabalhar com as investigações em matemática, por sua vez, segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2003) não significa, necessariamente, trabalhar com problemas difíceis. Pelo contrário, são questões que nos inquietam, apresentam-se confusas no início, porém, ao estudarmos procuramos facilitar, organizar ideias e conhecer o que ainda não se sabe. Conjectura-teste-demonstração, este é o estilo das investigações matemáticas e constituindo-se em uma poderosa forma de construir conhecimento.

Para os autores, investigar significa procurar conhecer o desconhecido. Podemos ter vários tipos de investigação: científica, jornalística, criminal. Entretanto, o que nos interessa é a investigação em termos de procura de informação, ou seja, a pesquisa.

A investigação dos profissionais da Matemática vai além de uma simples pesquisa, está relacionada à descoberta das relações entre objetos matemáticos conhecidos ou até então desconhecidos e suas demais propriedades, relações e propriedades estas que farão parte do processo de criação matemática.

Segundo Pólya (apud PONTE, BROCARDO & OLIVEIRA, 2003, p 89): "a Matemática tem duas faces; é a ciência rigorosa de Euclides, mas é também algo mais... A Matemática em construção aparece como uma ciência experimental, indutiva. Ambos os aspectos são tão antigos quanto a própria Matemática".

Sabemos que, em Matemática, existe uma relação entre problemas e investigações, com isso, para iniciar qualquer tipo de investigação é necessário encontrar o problema ou os vários problemas a resolver. No entanto, nem sempre vamos encontrar todas as soluções que procuramos.

Processos Utilizados numa Investigação Matemática

Os processos que envolvem uma investigação matemática, segundo os autores, surgem ambos em simultâneo, podem incluir diversas atividades, pode haver também uma interação entre vários matemáticos interessados nas mesmas questões que posteriormente sendo aceitas tornam-se teoremas, antes disso temos apenas conjecturas ou hipóteses. Este processo envolve quatro momentos principais:

a) *Exploração e formulação de questões* – neste momento é necessário reconhecer uma situação problemática para explorar e formular questões;
b) *Conjecturas* – referem-se à organização dos dados, à formulação de conjecturas (e fazer afirmações sobre uma conjectura);
c) *Testes e reformulação* – momento de realização de testes e o eventual refinamento das conjecturas;
d) *Justificação e avaliação* – diz respeito à argumentação, à demonstração e

avaliação do trabalho realizado.

As Investigações como Tarefas Matemáticas

Existe uma relação muito próxima das investigações matemáticas com a resolução de problemas e, muitas vezes, através da resolução de simples exercícios podemos desencadear as investigações. Então, surge uma grande dúvida: qual a diferença entre investigação, problema e exercícios?

Segundo Polya (1995), um problema é uma questão que não possui método determinado para sua resolução imediata, enquanto que, no exercício, o aluno dispõe de um método ou de vários métodos, dependendo do grau de dificuldade, previamente conhecidos. O problema e o exercício possuem, em ambos, um ponto em comum: o enunciado indica claramente o que é dado e o que é pedido, não deixando dúvidas e o professor sabe a resposta antecipadamente. Nas investigações, isto não acontece, é bastante diferente, uma vez que, no início, a questão não está bem definida, cabendo ao investigador encontrar a sua definição.

3.3.2. A AULA DE INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA

Assim como os exercícios e os problemas, de acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2003), as investigações matemáticas são outros tipos de tarefas que todos os alunos podem experimentar. No entanto, os autores questionam: como será organizado este trabalho? Que etapas serão necessárias para esta atividade? O que se pode esperar do desempenho do aluno? Qual o papel do professor?

As fases de uma investigação são: *introdução da tarefa*, *realização da investigação em grupos ou individualmente* e a *discussão dos resultados*. Para que este trabalho seja realizado é necessário que o professor assuma uma postura de regulador da atividade e deixe que seu aluno trabalhe de forma autônoma, ajudando-o a compreender o significado de investigar e como investigar.

O arranque da aula: Quando o professor propõe aos alunos uma atividade investigativa é primordial que o professor se certifique se os alunos entenderam o significado de investigar, qual a proposta desse tipo de atividade e que os mesmos devem assumir uma atitude proativa e independente.

O desenvolvimento do trabalho: Como afirmamos, após o professor se certificar de que a atividade proposta foi bem entendida, então a posição do professor passa a ser de retaguarda. Procurando apoiar e orientar para que os mesmos atinjam os processos da atividade: a exploração e formulação de questões, a formulação de conjecturas, o teste e a reformulação de conjecturas e avaliação do trabalho.

Explorando a situação e formulando questões: nesta etapa, do trabalho com investigações, os alunos vão se familiarizando com os dados e se apropriando do sentido da tarefa. Um exemplo, apresentado por Ponte, Brocardo e Oliveira (2003), é a *Exploração com números*. Neste exemplo, concluiu-se que os alunos procuram dar resposta a uma questão que se mostra infrutífera, no entanto é nesse momento, que a presença do professor pode ser muito útil, estimulando estes a continuar a investigação, buscando expressar novas ideias.

Formulando e testando conjecturas: a formulação de conjecturas surge, por exemplo, por observação direta dos dados, por manipulação dos dados ou por analogia com outras conjecturas. E nesse momento, que os alunos sentem a necessidade de registrar e explicitar suas ideias após um consenso.

As ideias registradas, afirmam os autores, passam a ser testadas pelos alunos com certo grau de facilidade, uma vez que os mesmos passam a refutar os casos que não se verificam. No entanto, eles têm tendência de testar um número reduzido de casos. Neste momento, é primordial a intervenção do professor para combater isto, os estimulando a procurar contraexemplos.

Justificando as conjecturas: é normal que alunos troquem o termo conjectura por conclusão, visto que até mesmo o professor também assim o faz. No entanto, o que nos interessa é que tanto o professor como os alunos entendam que é fundamental para o processo investigativo esse caráter provisório das conjecturas e muito necessário justificar com o máximo de clareza essas ideias.

A discussão da investigação: essa etapa do trabalho é muito importante, pois é nesse momento, que os alunos podem pôr em confronto as suas estratégias, conjecturas e justificações. Desenvolvem a capacidade de comunicar matematicamente e de refletir sobre o trabalho realizado. Interiorizando o verdadeiro significado de investigar. Cabe ao professor o papel de moderador.

Aprofundando uma conjectura e uma conclusão por maioria de razão: o aprofundamento de uma conjectura e a conclusão por maioria de razão são características do trabalho investigativo que devem ser levadas em consideração. À medida que um porta-voz de um grupo está expondo suas conjecturas os demais prestam atenção e, quando preciso, confrontam ideias e comparam com seu próprio trabalho para, enfim, chegarem a uma conclusão por maioria de razão, fato este muito comum em Matemática.

Os Papéis do Professor numa Aula de Investigação Matemática

Em uma aula de investigação, segundo os autores o papel do professor é determinante e sua interação com os alunos é bem diferente de outros tipos de aula. O professor precisa dar autonomia aos seus alunos e, ao mesmo tempo, tomar o devido cuidado para que os mesmos não fujam dos objetivos principais inerentes a disciplina de Matemática. Desse modo, o professor é convidado a assumir os seguintes papéis no decorrer de uma investigação:

- Desafiar os alunos;
- Avaliar o progresso dos alunos;
- Raciocinar matematicamente;
- Apoiar o trabalho dos alunos.

Nos capítulos que se seguem neste livro de investigações, são apresentados três tipos investigações: Numérica, Geométrica e Estatística. Entretanto, o nosso interesse, no momento, está relacionado com as investigações de caráter geométrico.

3.3.3. INVESTIGAÇÕES GEOMÉTRICAS: UM EXEMPLO DE INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS:

Em Ponte, Brocardo e Oliveira (2003), a importância do ensino de geometria é evidente desde os primeiros anos de escolaridade dos nossos alunos, apresentando-se em si mesma um caráter investigativo e de natureza exploratória. Uma atividade investigativa apresentada como exemplo, refere-se a *Dobragens e Cortes*, proposta aos 17 alunos de uma turma de 9º ano, explorada em pequenos grupos de 3 ou 4 alunos. Utilizando tesouras e muito papel, foi proposto aos mesmos investigar os tipos de triângulos: equiláteros, isósceles e escalenos obtidos a partir de dobragens e cortes feitos nos papéis.

No estudo da geometria salienta-se, por exemplo, de acordo com estes autores, a importância de estudar os conceitos e objetos geométricos do ponto de vista experimental e indutivo, de explorar a aplicação da geometria em situações da vida real e de utilizar diagramas e modelos concretos na construção conceptual da geometria.

Por isso, as investigações geométricas constituem experiências de aprendizagem muito importantes, salientam. Como exemplo disso, podem-se utilizar os programas de geometria dinâmica, pois, estes possibilitam a manipulação e construção de objetos geométricos, que irão facilitar na exploração de conjecturas e na investigação de relações que precedem o uso do raciocínio formal. Além de serem bastante uteis na recolha de dados e no teste de conjecturas.

Nesta seção, os autores propuseram duas atividades investigativas utilizando programas de geometria dinâmica:

a) Com o auxilio do Geometer´s Sketchpad, investigar possíveis generalizações do Teorema de Pitágoras, (Figura 4);

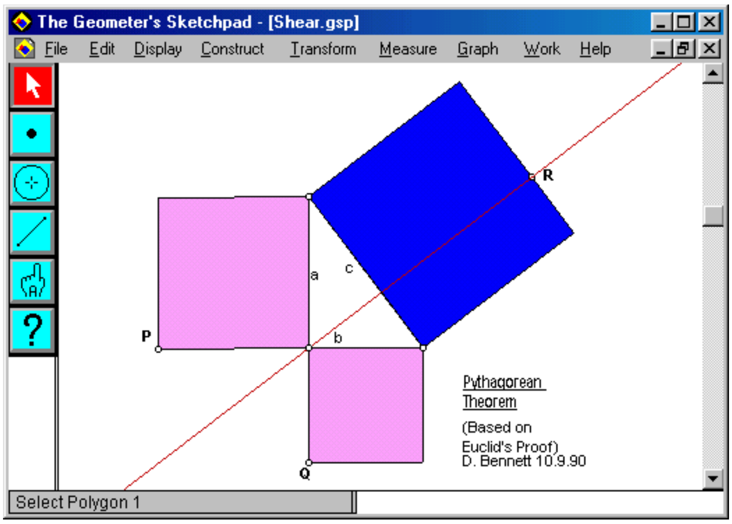


Figura4: O aplicativo GSP (Geometer´s Sketchpad)

b) Uma investigação de Quadriláteros e pontos Médios utilizando os programas (Geometer´s Sketchpad, Cabri-Geométre ou Geometricks).

Além da utilização de programas de geometria dinâmica recomenda-se o uso de materiais manipuláveis diversos que sejam adequados ao estudo de vários conceitos e relações geométricas como simetrias, pavimentações ou cortes em poliedros. É, sem dúvida, uma ótima alternativa na qual, á medida que o aluno aprende trabalhando ele também se diverte e esquece aquela história de que Matemática é difícil.

Estes foram alguns exemplos de maneiras distintas que um professor educador dispõe para trabalhar em sua sala de aula as investigações geométricas, dando tempo e oportunidade ao aluno para organizar as suas experiências espaciais.

3.3.4. A Comunicação e as Interações nas Tarefas de Investigação Matemática

De acordo com Ferreira e Albuquerque (2008), a competência comunicativa tem sido um tema de preocupação e discussões entre os estudiosos da área de Educação Matemática e de outras áreas: uma formação que qualifique melhor o professor de Matemática para enfrentar os desafios da educação que a sociedade atual impõe.

Os vários artigos de Educação Matemática, segundo os autores, que tratam deste tema servem de auxilio na compreensão dos textos oficiais – LDB nº 9394/96, Proposta de Diretrizes para a Formação Inicial de Professores de Educação Básica, formulada pelo MEC em maio/2000 e os PCN de Educação Matemática – ambos precisam configurar-se em ações que possam melhorar a aprendizagem da Matemática e, portanto, a formação do professor.

Os autores afirmam ter o desejo de participar do discurso polifônico[2] em defesa do desenvolvimento da competência comunicativa, mas não limitando tal capacidade a algumas atividades de linguagem. Para os autores, os saberes que a Competência Comunicativa implica são:

- *Saber gerar turnos de fala* – diz respeito à capacidade que o usuário da língua deveria ter de criar condições para o interlocutor também participar de seu discurso;
- *Saber de que falar, para quem falar, como falar e por que falar em determinada situação* – diz respeito a capacidade de refletir sobre o tema do discurso, o tipo de interlocutor e o tipo de linguagem a ser utilizada em uma dada situação comunicativa;
- *Saber preservar a própria face e a do outro* – Consiste na capacidade de saber evitar comentários sobre si mesmo que possam prejudicar a própria imagem e emitir juízos sobre outras com a intenção de constrangê-las, principalmente diante de terceiros;

[2] É um termo utilizado por Bakhtin, um filósofo da linguagem.

- *Saber sincronizar suas mímicas com suas falas e aquelas do co-enunciador* – consiste na capacidade de saber quais os gestos que são mais convenientes a determinadas situações, para que estes não sejam exagerados ou discrepantes ao que se estar dizendo;
- *Saber respeitar a diversidade linguística dos falantes* – Consiste na capacidade de saber respeitar a variante linguística das pessoas de regiões diferentes ou de comunidades linguísticas que utilizam as regras do dialeto não padrão;
- *Saber adequar à linguagem ás situações comunicativas* – consiste na capacidade de saber que existem linguagens diferentes para cada situação, para cada texto, para cada objetivo, para cada profissão;
- *Saber adequar a altura da voz, a entonação e o vocabulário aos objetivos da comunicação oral* – concerne na capacidade de distinguir quando a situação for formal ou informal, se for formal, evitar o uso de gírias, jargões, pois seriam inadequadas a tal situação. E em alguns casos saber oscilar entre o formal e o informal.

A postura e a comunicação do professor em sala de aula durante as tarefas de Investigações Matemáticas são muito importantes na interação professor/aluno, uma vez que o aluno precisa compreender o que o professor almeja atingir em determinada situação e, com isso, o aluno poderá expor suas ideias matemáticas com os colegas e com o próprio professor para poder aprender e contribui para uma melhor compreensão do próprio pensamento.

3.3.5. A ARGUMENTAÇÃO E A VALIDAÇÃO DAS IDEIAS MATEMÁTICAS NAS INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS

De acordo com Boavida (2008), argumentar em Matemática, ou mais concretamente, falar em argumentação quando se trabalha em Matemática com os alunos parece a primeira vista totalmente difícil. Afinal, no imaginário de muitos, a Matemática continua a ser uma disciplina em que os resultados a que se chega, ou estão certos ou estão errados, necessitando quase que sempre da validação atribuída pelo professor, pelo manual escolar ou por quem tem autoridade na matéria.

As tarefas de Investigação Matemática é um tipo de tarefa diferenciada, que pode ser bastante útil na mudança de atitudes, em relação à visão que os mesmos tem sobre a Matemática, tanto para alguns professores, como principalmente para a maioria dos alunos.

Segundo a autora, é de suma importância que o professor proporcione aos alunos experiências de aprendizagem em que tenham oportunidades para explicar e justificar o que dizem ou ouvem, para formular conjecturas e para se envolverem na justificação da sua plausibilidade e prova, o que se relaciona com a argumentação sobre as ideias matemáticas e a validação destas ideias. E principalmente, que isto aconteça também, desde os primeiros anos de escolaridade do aluno.

3.3.6. INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS E GEOGEBRA

Segundo Candeias (2010), trabalhar em diversos contextos é essencial para situar e aprofundar a aprendizagem da Matemática, tornando-a mais significativa do que a conseguida através de processos centrados na exposição e aplicação de conceitos previamente definidos como acontece no estilo de ensino direto.

Ainda segundo a autora, os aplicativos de geometria dinâmica podem fornecer o suporte necessário para que os alunos possam trabalhar e resolver problemas reais graficamente, uma vez que os gráficos e as figuras geométricas se tornam objetos manipuláveis, onde os mesmos podem alterar diversas características como a distancia entre dois pontos, valores de excentricidade variados e com isso estudar um maior número de hipóteses de resolução usando diferentes representações.

4. METODOLOGIA

No intuito de atingirmos o objetivo geral e os específicos deste trabalho, foi escolhida uma turma 3ª série do Ensino Médio da Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio São Sebastião composto por 25 alunos, localizada em Campina Grande no Estado da Paraíba.

A nossa pesquisa possui um caráter qualitativo e quantitativo, realizada em Maio de 2012, planejada para ser desenvolvida num total de quinze aulas de 45 minutos cada em dois momentos distintos:

- Sete aulas, sendo cinco para exposição do conteúdo e exercícios sobre as secções cônicas em sala de aula utilizando data-show e quadro branco, e duas aulas para aplicação do Teste1;

- Oito aulas no Laboratório de Informática para desenvolvermos as Investigações Matemáticas sobre elipse, parábola e hipérbole e finalizamos com o Teste2.

5. DESCRIÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

5.1. AS AULAS SOBRE CÔNICAS NO ENSINO DIRETO

Nosso primeiro contato com a turma foi no intuito de realizar meu estágio supervisionado IV, depois de ter procurado outras escolas com o objetivo de realizar esta pesquisa e não ter conseguido outra escola com um laboratório de informática disponível, decidimos ficar na Escola São Sebastião, para realizar esta pesquisa. Desde o início fomos muito bem recebidas pelo professor titular da turma, que tem uma visão de um educador matemático e está sempre preocupado com o aprendizado de seus alunos.

Todas as aulas em sala de aula que serão descritas a seguir, foram realizadas na Escola São Sebastião com o auxilio um data-show, no qual apresentei o conteúdo de Cônicas através de apresentação em PowerPoint.

Aula 1 – Realizada dia 03 de Maio de 2012

Iniciamos esta aula com uma pequena abordagem histórica sobre as cônicas em seguida passamos a definição de como se pode obter a elipse, a parábola e a hipérbole através da intersecção de um cone circular com um plano. Ver (Figura5).

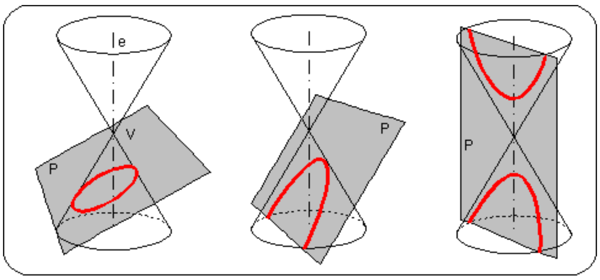


Figura5: Secções Cônicas

Após esta explanação sobre as cônicas, passamos a apresentar, na íntegra, o conteúdo, começando com a elipse. Uma pergunta veio nos inquietar: como poderíamos construir uma elipse? Então com o auxilio de figuras e animação no computador, explicamos que uma das formas mais simples de desenhar a elipse é fixar as extremidades de um fio inextensível, formando dois pontos distintos que chamaremos de **F1** e **F2** (focos) e, mantendo-o esticado, traçar com um lápis uma linha, formando a elipse como podemos ver logo abaixo na (Figura 6).

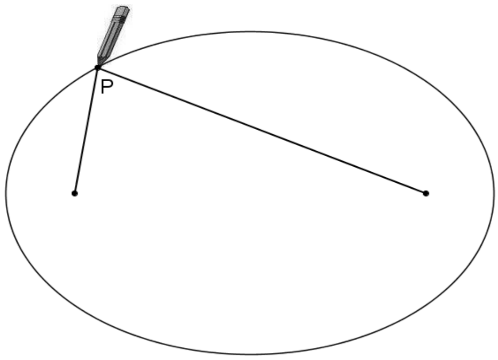


Figura 6: Construção da Elipse no papel.

Com o auxilio da figura, definimos a elipse como sendo: o conjunto dos pontos P = (x; y) tais que dist (P; F1) + dist (P; F2) = 2a. Em seguida, apresentamos os elementos da elipse, observe a Figura 7 abaixo:

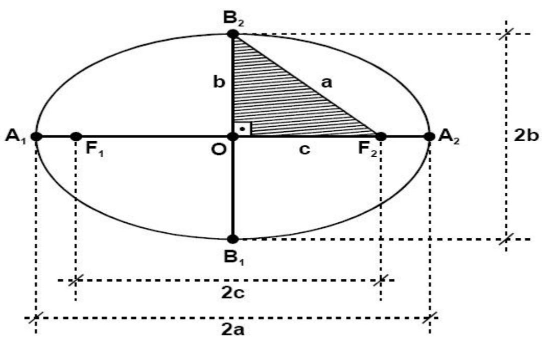


Figura 7: Elementos da Elipse

- Centro: O
- Focos: F1 e F2
- Segmento focal: F1F2
- Distância focal: 2c
- Vértices: A1; A2; B1 e B2
- Eixo maior: A1A2 = 2a
- Eixo menor: B1B2 = 2b
- Do triângulo retângulo BOF2 rachurado na Figura 3, obtemos a relação notável: $\mathbf{a^2 = b^2 + c^2}$.
- Chamamos de *excentricidade* da elipse o número real <u>e</u> tal que: $e = \frac{c}{a}$

Aulas 02 e 03 - Realizadas dia 07 de maio de 2012

Dando continuidade ao conteúdo exposto na primeira aula, apresentamos aos alunos as equações da elipse, realizamos alguns exemplos e exercícios sobre como determinar as equações reduzidas da elipse.

Em seguida, apresentamos ainda nestas duas aulas a curva cônica Parábola. Definimos que - **Parábola** é o conjunto de todos os pontos do plano que estão à mesma distância de **F e r.** Ou seja, **dist(P, F) = dist(P, r)**, observe a (Figura 8).

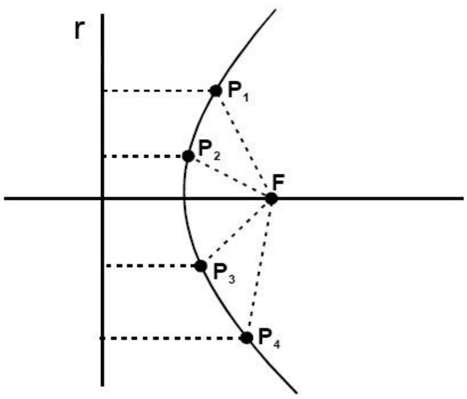


Figura 8: Parábola

Num slide seguinte, apresentamos os elementos da Parábola, as equações da Parábola e em seguida foi realizado dois exemplos de como determinar a equação reduzida desta curva. Após os dois exemplos resolvidos, foram propostos aos alunos que resolvessem mais quatro questões para determinar as equações da Parábola. E finalizamos essas duas aulas com a correção das questões propostas.

Aulas 04 e 05 – Realizadas no dia 10 de maio de 2012

Após as aulas de Elipse e Parábola ficou faltando à curva cônica Hipérbole. Logo, nestas duas últimas aulas foi apresentado aos alunos a Hipérbole como sendo, o conjunto dos pontos *P = (x, y)* do plano, tais que o módulo da diferença entre as distâncias de *P* a dois pontos fixos *F1* e *F2* (**focos**) é constante, ou seja, se *dist(F1, F2) = 2c*, então a **hipérbole** é o conjunto dos pontos *P = (x, y)* tais que |*dist (P,F1 – P, F2)*| *= 2a,* em que *a* < *c*. Verifique a (figura 9).

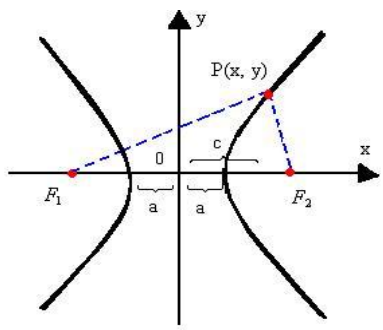


Figura 9: Hipérbole

Em seguida, apresentamos os elementos da hipérbole e as equações reduzidas da hipérbole. Dando continuidade à aula, foram realizados alguns exemplos de como determinar a equação da hipérbole. Em seguida, propomos alguns exercícios e finalizamos com as correções.

No dia 14 de maio, retornamos a escola e, em duas aulas, cedidas pelo professor, aplicamos o Teste 1 que será apresentado a seguir.

5.2. ANÁLISES DO TESTE 1

Os 25 alunos que participaram dessa pesquisa tiveram 90 minutos para resolver o teste1 que foi composto por 10 questões, das quais, de forma sucinta, apresentaremos a seguir.

A primeira questão versava sobre a definição de Secções Cônicas. Geralmente, este conteúdo de Cônicas é abordado no final do ano letivo, no entanto, através da pesquisa essa turma passou a conhecer o conteúdo com antecedência e o que não os impediu de responder a questão.

A segunda, terceira e quarta questões versavam sobre Elipse. Pedia-se para definir a cônica Elipse, identificar seus elementos e determinar as equações reduzidas da mesma de acordo com a interpretação gráfica apresentada na questão. Percebemos com o auxílio da tabela e do gráfico que os resultados foram bons nestas primeiras questões.

A quinta, sexta e sétima questões se relacionavam com a Hipérbole. Tratava de definir, identificar os elementos e determinar as equações reduzidas da cônica Hipérbole, nestas questões percebemos que houve um baixo número de acertos totais.

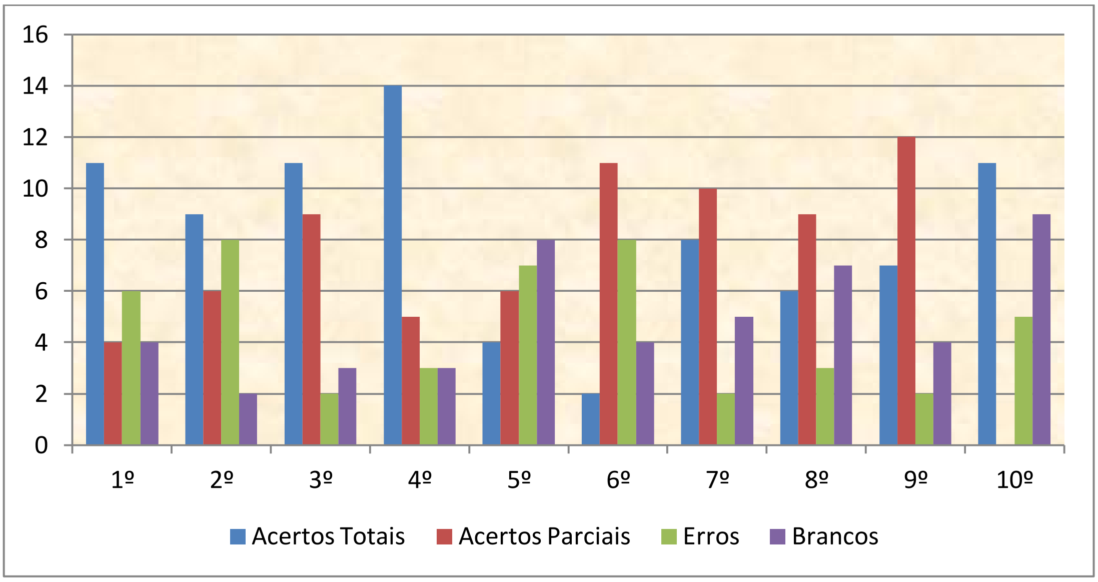
A oitava, nona e décima questões se relacionavam com a Parábola. Também foram relacionadas com a definição da Parábola, bem como na classificação de seus elementos e na identificação de suas equações reduzidas. Com o auxilio da tabela verificamos que a nona questão apresentou um alto índice de acertos parciais.

Tabela 1: Avaliação das questões do Teste1

Questões	**Acertos Totais**	**Acertos Parciais**	**Erros**	**Brancos**
1º	11 (44%)	4 (16%)	6 (24%)	4 (16%)
2º	9 (36%)	6 (24%)	8 (32%)	2 (8%)
3º	11 (44%)	9 (36%)	2 (8%)	3 (12%)
4º	14 (56)	5 (20%)	3 (12%)	3 (12%)
5º	4 (16%)	6 (24%)	7 (28%)	8 (32%)
6º	2 (8%)	11 (44%)	8 (32%)	4 (16%)
7º	8 (32%)	10 (40%)	2 (8%)	5 (20%)
8º	6 (24%)	9 (36%)	3 (12%)	7 (28%)
9º	7 (28%)	12 (48%)	2 (8%)	4 (16%)
10º	11 (44%)	0 (0%)	5 (20%)	9 (36%)

Observe o gráfico abaixo para facilitar a análise dos dados dispostos na tabela acima.

Gráfico 1: Avaliação das questões do TESTE1



5.3. AS AULAS DE INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS NO LABORATÓRIO DE INFORMÁTICA

As aulas de Investigações Matemáticas com a utilização do Aplicativo Geogebra no estudo das Secções Cônicas foram realizadas em dois dias, (21 e 25 de Maio de 2012) num Laboratório de Informática, composto por 25 computadores, na Universidade Estadual da Paraíba (UEPB). Infelizmente, não foi possível realizarmos estas aulas na Escola São Sebastião, pois, o laboratório apresentava problemas de ordem estrutural e tínhamos apenas quatro computadores funcionando. Apesar de se ter um laboratório na escola, nenhum professor utiliza e o mesmo encontra-se fechado e precisando de manutenção. Por este motivo, deslocamos a turma dos 25 alunos 3º ano do ensino médio, inseridos nesta pesquisa, para o laboratório da UEPB, através de um transporte cedido pela própria Instituição de Ensino. Logo, para a realização desta fase da pesquisa, organizamos as aulas no laboratório de informática da seguinte forma:

- No dia 21 de maio de 2012 – realizamos duas aulas de familiarização com o aplicativo GeoGebra e duas aulas para a Investigação Matemática com a Elipse.
- No dia 25 de maio de 2012 – realizamos duas aulas de Investigação Matemática com a Hipérbole e duas aulas de Investigação Matemática com a Parábola.

Descrição das quatro primeiras aulas - realizadas dia 21 de maio de 2012

As duas primeiras aulas no laboratório de informática foram de familiarização com o Aplicativo Geogebra, apresentamos de forma detalhada ferramenta por ferramenta, dando ênfase obviamente, aquelas ferramentas que diziam respeito ao conteúdo a ser trabalhado, e apresentando de forma parcial os demais itens um tanto desnecessários ao nosso conteúdo. Contamos com o auxílio de um Datashow que foi cedido pelo departamento de Mestrado Profissional Em Ensino de Ciências e Matemática da UEPB. Depois que os alunos viam a apresentação de cada ferramenta na imagem projetada sobre o quadro de giz do Laboratório, eles próprios exploravam o aplicativo e, paulatinamente, se familiarizava com o mesmo. Dando continuidade a aula foram propostas aos alunos as seguintes atividades:

Atividade 1: Construir uma casa

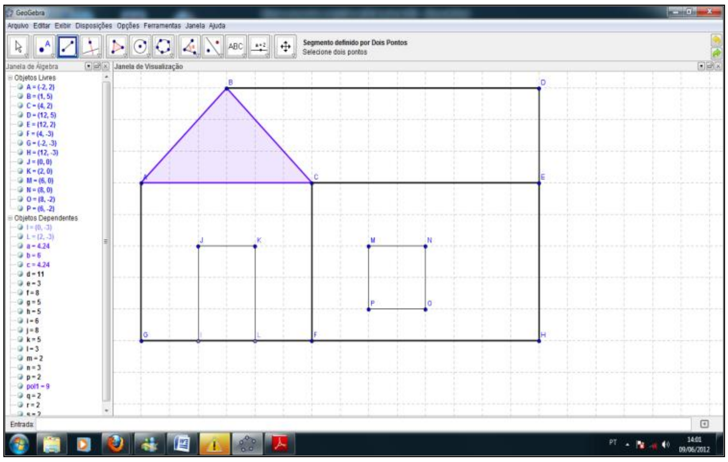
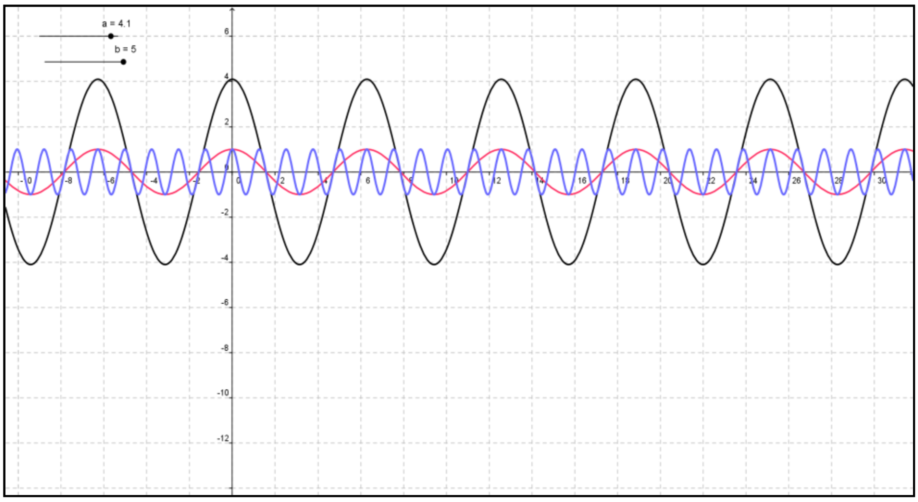


Figura 10: Construindo uma casa no Geogebra

Preparação: Abra uma nova janela. Para tal no menu Principal, clique em janela e após isto, em nova janela. No menu exibir, desmarque a opção EIXOS e marque a opção MALHA.

Construção: Tente reproduzir o desenho usando as ferramentas segmento definido por dois pontos (janela3). E polígono (janela5).

Atividade 2: Funções Trigonométricas



Fugura 11: Construção da função cosseno no geogebra

Construção:

- Crie a função f(x) = cos(x);
- Crie um seletor e chame-o de a;
- Crie outro seletor e chame-o de b;
- Crie a função g(x) = a*cos(x);
- Crie a função h(x) = cos(b*x);
- Utilize a função propriedades e pinte os gráficos.

Na atividade1 – construir uma casa, tivemos por objetivo, deixar com que os alunos se divertissem com o geogebra, de forma lúdica e prazerosa, não sabendo eles que essa “brincadeira” foi proposital para que os mesmos se familiarizassem com o aplicativo. E realmente o objetivo foi alcançado com sucesso, construíram a casa e ainda tiveram aqueles que depois montaram um carro (ver Figura12) utilizando várias outras ferramentas que a princípio não foram mencionadas na atividade proposta.

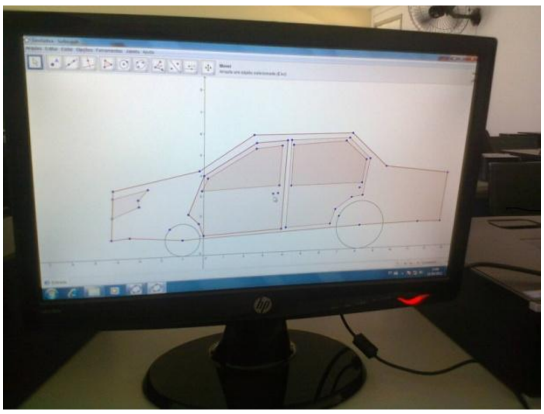
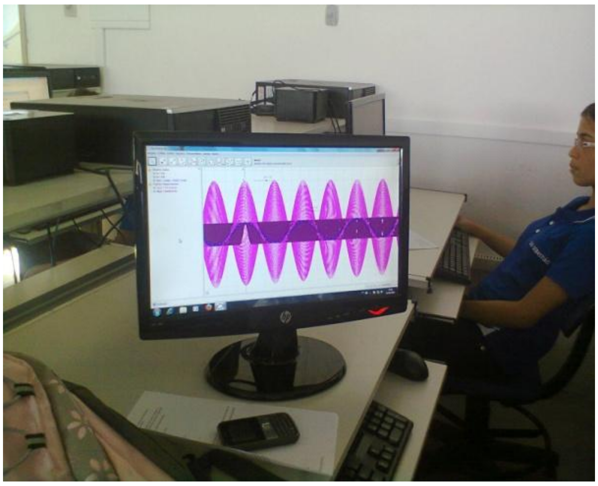
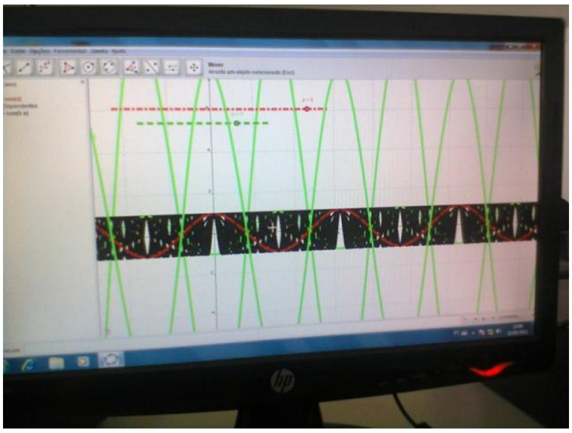


Figura12: Construção de carro no GeoGebra

Na atividade2 – funções trigonométricas, tivemos por objetivo, mostrar que alguns conteúdos matemáticos podem ser aprendidos de forma diferente e dinâmica, a exemplo disso é o conteúdo de trigonometria, a função cosseno que foi vista pelos mesmos apenas no quadro branco, aqui é apresentada de forma que esta se movimenta, tem seus parâmetros variando em termos de amplitude, frequência, etc. Além de realizarem todas as etapas propostas nesta atividade eles adicionaram diversas cores e entre outros efeitos como podemos ver nas (Figuras 13 e 14) abaixo.



Figuras13: Construções da Atividade2 no GeoGebra



Figuras14: Construções da Atividade2 no GeoGebra

Como podemos observar, as atividades foram realizadas com sucesso. Em seguida demos uma pequena pausa de quinze minutos para um intervalo e retornando ao laboratório, as duas outras aulas seguintes foram destinadas a realização da nossa primeira Investigação Matemática no aplicativo GeoGebra, que por ordem de menor dificuldade seria a Elipse como veremos logo abaixo.

A característica principal na realização de uma Investigação Matemática, se dar em quatro momentos e, no intuito de atingir os objetivos dessa pesquisa, procuraremos descrever de forma clara e objetiva essas aulas que se seguem obedecendo a estes quatro momentos principais que são de Ponte, Brocardo e Oliveira (2003):

a) Exploração e formulação de questões;
b) Formulação de conjecturas;
c) Teste e reformulação de conjecturas;
d) Argumentação, demonstração e avaliação do trabalho realizado.

Durante o processo de descrição da análise das aulas de Investigações Matemáticas realizadas no laboratório de informática, escolhemos três registros que alguns alunos realizaram durante as tarefas com o aplicativo GeoGebra e as cônicas. O critério de escolha destes registros esteve relacionado com o melhor empenho demonstrado por alguns alunos em suas anotações.

5.3.1. A INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA COM A ELIPSE

Para dar início a nossa primeira Investigação Matemática, pensamos por bem começarmos com a elipse, pois como podemos observar, logo acima, nos resultados do Teste1, as questões que versavam sobre a mesma apresentaram um melhor resultado ao entendimento do aluno. Partindo do primeiro momento de uma Investigação Matemática, foi proposto aos alunos que de posse dos conhecimentos adquiridos sobre o aplicativo nas duas primeiras aulas, construíssem uma Elipse utilizando as ferramentas do Aplicativo Geogebra, e investigassem a sua definição**: Elipse é o lugar geométrico dos pontos de um plano tais que a soma de suas distancias a dois pontos fixos, F1 e F2, denominados focos, seja constante, igual a 2a. (figura 15).**

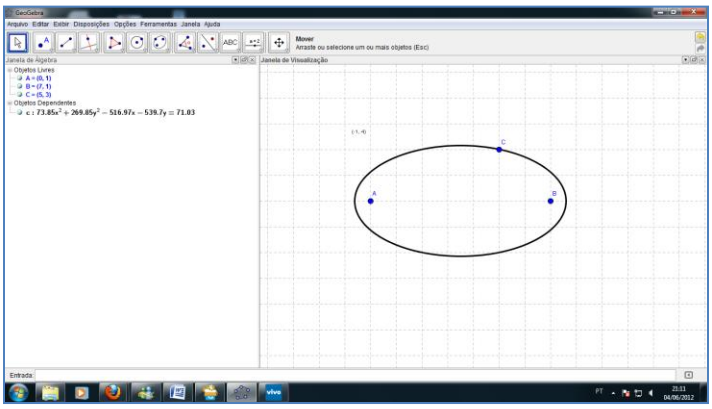


Figura 15: Construção da Elipse

Nessa situação, surgiram as seguintes questões a analisar:

- Como poderíamos mover o ponto C sem que a figura da elipse se modificasse?
- Como traçar os segmentos entre os pontos da elipse para verificar a soma das distâncias aos pontos fixos?

Entusiasmados com o desafio que tinham em mãos, os alunos passaram a fase da formulação das conjecturas, num primeiro momento um dos alunos conjecturou que era só utilizar a ferramenta, segmentos definidos por dois pontos, e traçar os segmentos entre os pontos da elipse para verificar a soma das distancias como está descrito na definição. No entanto, no momento em que foram testar esta conjectura verificaram que não seria possível, pois à medida que movimentavam o ponto C a elipse se modificava. Para solucionar essas questões lançaram mão dos seguintes passos:

a) Ocultar o terceiro ponto da Elipse, o PONTO C, construir um novo ponto D, e traçar os segmentos AD e DB. (Ver Figura 16).

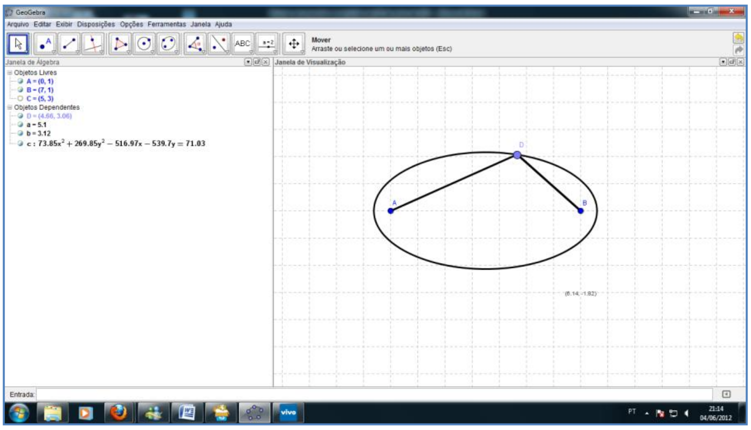


Figura16: Traçando os segmentos AD e DB

b) Sobre o ponto D construído, utilizar a ferramenta mover para deslocar este ponto sobre a elipse.

c) Digitar no Campo de Entrada S=a+b, mantendo os pontos a e b fixos, mover o ponto D e registrar o que acontecia:

Quando mover o ponto d, o valor do ponto S é constante, porque os focos a e b são fixos

Ao mover o ponto "D", o S fica constante, porque os 2 pontos são fixos, e por isso o valor de S não vai variar.
S = 5,8.

mesmo com o ponto D em movimento o S continua sem nenhuma mudança, ou seja é constante, S é a soma dos pontos fixos A e B ou f1 e f2.

e) Registrar em suas anotações, o que acontecia com o valor de S se deslocassem os pontos A e B (focos)?

Os pontos deixam de ser fixos com isso tendem a variar.

O ponto S deixa de ser constante devido aos focos f1 e f2 que deixaram de serem fixos.

O pontos A e B (focos), são fixos, mais ao deslocarmos vão deixar de ser fixos e o valor de S deixa de ser constante.

f) Escreva, o que acontece com a elipse quando aproximamos os pontos A e B até ficar um sobre o outro?

A elipse se transformará em uma circunferência, ou seja, a excentricidade ficará igual a 1.

Forma-se uma circunferência, é um caso de excentricidade, onde ela é igual a 1.

A = a + b = Ou seja quando aproximamos a de B a figura deixa de ser uma elipse e Torna-se uma circunferência devido a sua excentricidade.

À medida que os alunos iam realizando e testando estes passos, eles também registravam em suas anotações o que era pedido em cada item acima. A fase de discussão da tarefa foi relativamente breve. Os alunos observaram que na fase dos testes eles conseguiram realizar a tarefa e passaram a compreender melhor a definição da Elipse.

As duas últimas Investigações Matemáticas, realizadas no dia – 25 de Maio de 2012

5.3.2. A INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA COM A HIPÉRBOLE

Nesta segunda Investigação Matemática, propomos aos alunos que construíssem uma Hipérbole utilizando as ferramentas do Aplicativo Geogebra, e investigassem as propriedades que costa em sua definição que diz que**: Hipérbole é o lugar geométrico dos pontos P(x, y) de um plano tal que a diferença (em módulo) de suas distâncias a dois pontos fixos F1e F2 é constante, (Figura 17):**

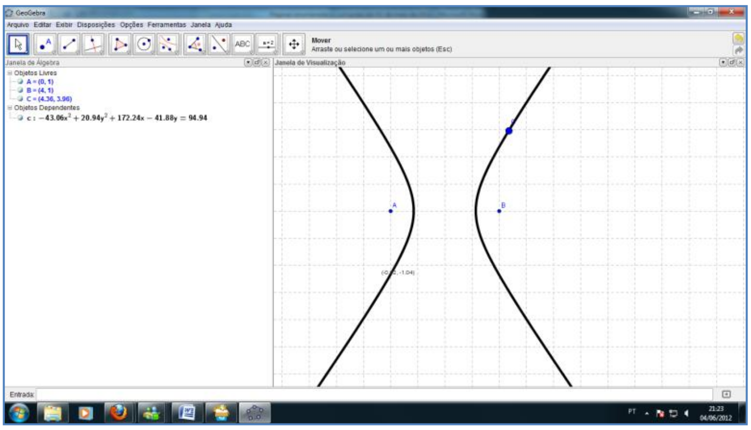


Figura 17: Construção da Hipérbole

Nesta fase do trabalho, os alunos já estavam um tanto familiarizados com as ferramentas do aplicativo geogebra e com tarefas de investigações matemáticas. Depois da investigação matemática com a Elipse, os mesmos se sentiam mais autônomos em realizar a investigação matemática com a hipérbole. Do mesmo modo que a Elipse, na Hipérbole, surgiram alguns questionamentos a serem analisados pelos alunos:

- Como poderíamos mover o terceiro ponto da Hipérbole, o ponto C, sem que a figura da Hipérbole se modificasse?
- Como traçar os segmentos entre os pontos da Hipérbole e verificar a diferença (em módulo) das distâncias aos pontos fixos?

Tais conjecturas impulsionaram os mesmos na busca de soluções, investigando e testando eles iam aprendendo cada vez mais a respeito da definição de hipérbole. Ambos Perceberam que não era possível utilizar aquele terceiro ponto já existente na figura da Hipérbole, e como foi feito na elipse, aqui também foi necessário utilizar alguns passos para a realização da investigação matemática proposta logo acima:

a) Ocultar o terceiro ponto da Hipérbole, construir um novo ponto D, traçar os segmentos AD e DB, ver (Figura 18);

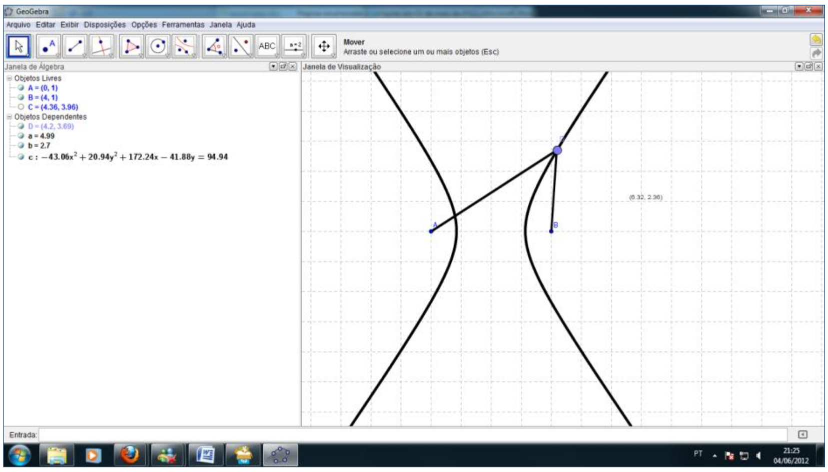


Figura 18: Construção dos segmentos AD e DB

b) Sobre o ponto D construído, utilizar a ferramenta mover para deslocar este ponto sobre a Hipérbole;

c) Digitar no Campo de Entrada d=a-b, mantendo os pontos A e B fixos, mover o ponto D e escrever o que acontece. Por quê?

- de acordo com a definição o valor; do ponto D; não varia; e a diferença entre AD e DB é uma constante de 2A. foi consta[illegible]

O valor de d permanece constante, porém um lado apresenta esse valor positivo e o outro negativo, que a diferença do segmento $|\overline{AD} - \overline{DB}| = 2$ que é contante, pois em modulo permanece o mesmo valor.

d é uma constante, o seu valor não muda. de acordo com os lados fica negativo, quando está a esquerda, mas com o módulo da fórmula: $|\overline{AD} - \overline{DB}| = 2a$ fica positivo.

c) O que acontece com o valor de D se deslocarmos os pontos A e B (focos)?

Não; variar pois os focos deixaram de ser fixo.

Como os pontos A e B deixaram de ser fixos o valor de d não é mais constante, sempre haverá um outro valor dependendo do movimento dos pontos A e B.

d é uma constante, o seu valor não muda. de acordo com os lados fica negativo, quando está a esquerda, mas com o módulo da fórmula: $|\overline{AD} - \overline{DB}| = 2a$ fica positivo.

Finalizamos esta investigação com um breve momento de discussão em grande grupo, na qual os alunos esporam suas ideias de construção e as dificuldades encontradas durante a realização dos procedimentos realizados em cada Investigação Matemática com as cônicas.

5.3.3. A INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA COM A PARÁBOLA

A terceira e última atividade de investigação matemática foi com a Parábola. Seguindo o mesmo modelo das outras investigações matemáticas logo acima, propomos aos alunos que investigassem as propriedades da definição da Parábola que diz que: **Parábola é o conjunto de todos os pontos do plano que estão à mesma distancia de F(foco) e D (reta diretriz da parábola).** Ver (Figura 19).

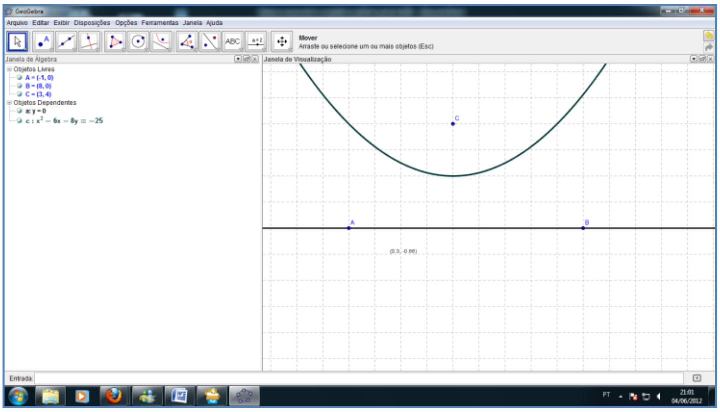


Figura 19: Construção da Parábola

Após uma breve explicação do que seria a atividade, eles passaram a manusear as ferramentas do aplicativo no intuito de construir a cônica Parábola. No entanto, foram percebendo que teriam de utilizar novas ferramentas para obter a Parábola na janela de visualização do aplicativo. Para isto foi necessário realizar os seguintes procedimentos:

a) Construir na janela de visualização: um ponto que será o foco da Parábola, uma reta que será a reta diretriz (utilizar a ferramenta reta definida por dois pontos) e, em seguida, utilizar a ferramenta de cônicas e desenhar a parábola;

b) Sabendo que qualquer ponto da parábola está a uma mesma distância do foco e da reta diretriz. Utilize a ferramenta novo ponto e construa um ponto D sobre a parábola.

Tendo construído a primeira parte da atividade, surgiram os seguintes questionamentos:

- Como podemos verificar que o conjunto de todos os pontos do plano está à mesma distancia de F e D?
- Que ferramentas do aplicativo GeoGebra serão necessárias utilizar para verificar esta igualdade nas distâncias?

Para investigar e analisar os questionamentos acima, os alunos foram realizando vários testes, e sempre que necessário solicitavam a nossa ajuda. Foi necessário realizar os seguintes procedimentos:

c) Para verificarmos a distancia entre o ponto D e a reta diretriz, construa uma reta perpendicular à reta diretriz passando pelo ponto D (utilize a ferramenta reta perpendicular), em seguida, utilize a ferramenta interseção de dois objetos e construa o ponto E de interseção entra as duas retas. Ver (Figura 20).

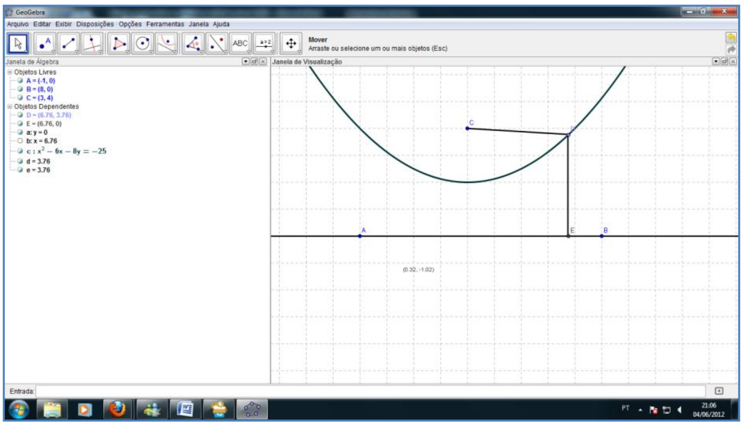


Figura 20: Construção dos segmentos DE e DA

d) Utilize a ferramenta segmento definido por dois pontos e trace os segmentos DE e DA, clique com o botão esquerdo do mouse sobre os segmentos DE e DA e faça exibir rótulo *e* e *d* .

e) Movimente o ponto D sobre a parábola e investigue o que acontece com os segmentos e e d ?

mesmo movimentando o ponto d, os segmentos d e e são iguais, ou seja temos o mesmo valor

O valor de d e e mesmo movendo o ponto d sobre a parabola, não iguais, ou nejo os pontos dos planos estaõ á mesmo distancia.

Elas Variam o seu Valos D e E com os Valore iguais. e então por isso elas não são Cantantes

f) Experimente movimentar o ponto A (foco da parábola) e verifique o que acontece. Explique.

Com o ponto A deixando de ser fixo, haverá uma mudança de valores, porém os segmentos d e E continuam sendo iguais, ou seja, tem o mesmo valor, e o ponto B e C continuam fixos.

D e E eles mudam mas continuam com o mesmo Valor ou seja Valores iguais, e os outros pontos mudam inclusive a equação.

Os valores e e d permanecem variando igualmente, e os outros pontos também vão variar, só que com valores diferentes.

Encerramos as investigações sempre com uma breve discussão em grupo, analisamos os passos que realizamos e os alunos foram registradas em papel as demais questões que surgiram ao longo da atividade. Após a conclusão das Investigações Matemática, realizadas no laboratório de informática da UEPB, retornamos a Escola São Sebastião no dia 28 de maio de 2012 e finalizamos a nossa pesquisa com aplicação do Teste2, que será analisado a seguir.

5.4. ANÁLISE DO TESTE2

O Teste2 foi elaborado de acordo com o Teste1, composto por dez questões que não se diferenciaram muito do Teste1. Mudamos apenas a primeira questão, e nas questões de definição das cônicas, foi pedido aos alunos que definissem de acordo com o que foi realizado nas aulas de Investigação Matemática com a Elipse, Hipérbole e a Parábola. Os alunos tiveram 90 minutos para responderem as dez questões.

A primeira questão do Teste2 diferenciava-se da primeira questão do Teste1, pelo fato de apresentar um caráter mais aberto, perguntamos aos alunos se, a utilização do Aplicativo Geogebra contribuiu na compreensão da definição das secções cônicas? E se sim, como? E obtivemos um resultado bastante significativo nesta questão, onde 92%

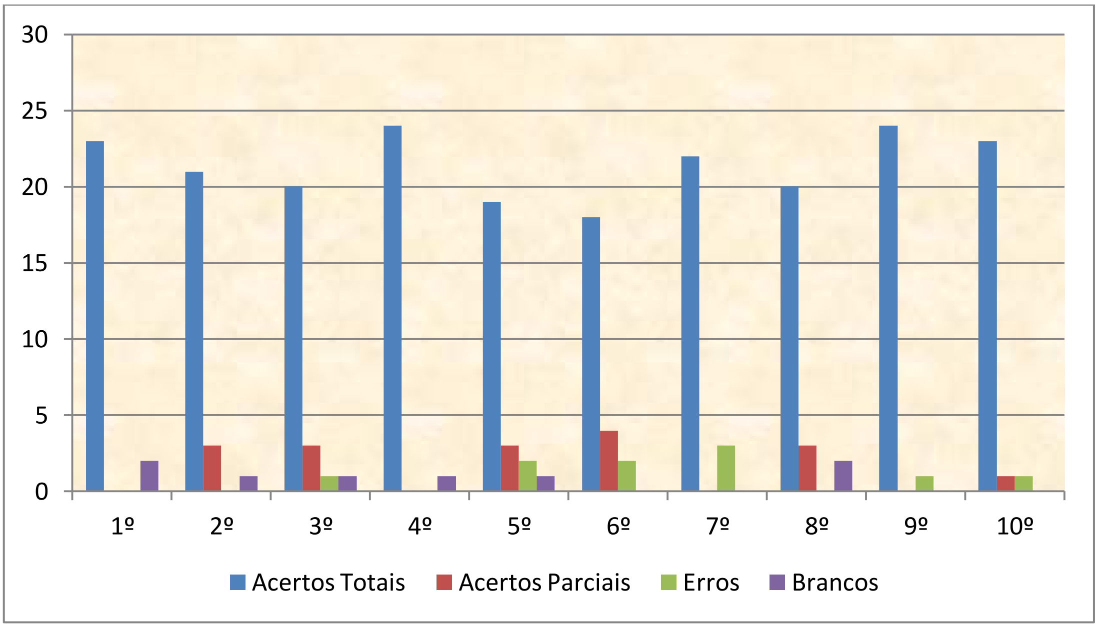
consideraram que o aplicativo GeoGebra realmente contribui muito na compreensão das secções cônicas, por apresentar uma forma dinâmica e diferente de aprender. A tabela e o gráfico mostrados a seguir, evidenciam os bons resultados que obtivemos em nossa pesquisa.

Tabela 2 Avaliação das questões do Teste2

Questões	Acertos Totais	Acertos Parciais	Erros	Brancos
1º	23 (92%)	0 (0%)	0(0%)	2 (8%)
2º	21 (84%)	3 (12%)	0 (0%)	1 (4%)
3º	20 (80%)	3 (12%)	1 (4%)	1 (4%)
4º	24 (96%)	0 (0%)	0 (0%)	1 (4%)
5º	19 (76%)	3 (12%)	2 (8%)	1 (4%)
6º	18 (72%)	4 (16%)	2 (8%)	0 (0%)
7º	22 (88%)	0 (0%)	3 (12%)	0 (0%)
8º	20 (80%)	3 (12%)	0 (0%)	2 (8%)
9º	24 (96%)	0 (0%)	1 (4%)	0 (0%)
10º	23 (92%)	1 (4%)	1 (4%)	0 (0%)

Para facilitar a leitura dos dados encontrados na tabela acima observe o gráfico abaixo.

Gráfico 2: Avaliação das questões do TESTE2



Ao voltarmos nossa atenção para os acertos totais, mostrados no gráfico, logo acima percebemos que o índice desses, referente a cada questão, foi bem maior no Teste2 do que no Teste1.

No tocante aos acertos parciais, obtivemos no Teste2 índices nulos nas questões: 1º, 4º, 7º e 9º. Enquanto que nas questões: 2º, 3º, 5º, 6º, 8º e 10º computamos um baixo índice em relação ao Teste1, o que nada mais é do que um ponto bastante positivo.

Ao analisarmos o quesito erro, verificamos que na sétima questão o número de erros no Teste1 é menor do que no Teste2, acredito que isso aconteceu devido à pequena falta de atenção que alguns alunos têm quando estão lidando com as equações matemáticas, pois as equações reduzidas da Hipérbole são bem parecidas com as da Elipse.

Por último, ao visualizarmos o gráfico intitulado Branco concluirmos que, em todas as questões, o número dessas deixadas sem respostas no Teste2 diminuiu significativamente quando comparado ao Teste1. O alto índice de questões em branco constatado no Teste1 se deve ao fato dos alunos não possuírem ainda um nível cognitivo suficiente para solucionar alguns problemas relacionados à forma de definir algum item matemático, com a ajuda do aplicativo eles tiveram um olhar mais de entendimento em relação às definições das secções cônicas que foi iniciado através do ensino direto.

6. CONCLUSÃO

A partir de uma comparação entre as análises realizadas no Teste1 e no Teste2 podemos afirmar que, não são necessários muitos esforços para percebermos que o estudo o qual realizamos, proporcionou aos alunos um progresso cognitivo com relação ao estudo das Secções Cônicas abordadas em duas estratégias de ensino utilizando o Aplicativo GeoGebra e, com isso, conseguimos atingir nossos objetivos.

A maneira pela qual organizamos as aulas no estilo do ensino direto, a estratégia de utilizarmos tarefas de Investigações Matemáticas com o aplicativo GeoGebra, e principalmente o grande entusiasmo, interesse e empenho da turma em pesquisa, foram fatores determinantes que ocasionaram o êxito final de nosso trabalho.

É importante ressaltarmos também que, o tempo que estivemos em contato com os alunos foi extremamente importante, e que nos possibilitou de ir mais longe ao que concerne ao desenvolvimento, pelos alunos, de habilidades como explorar, refletir, supor, tentar, discutir, conjecturar, testar e provar, para que, se apoiando no professor quando necessário, o aluno aprenda a construir o seu próprio conhecimento.

O objetivo geral desse Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) foi utilizar, numa turma do 3º ano do Ensino Médio, Tarefas de Investigação Matemática, com as Secções Cônicas com o aplicativo GeoGebra, com o intuito de melhorar o aprendizado dos alunos em relação a este conteúdo que, e que na maioria das vezes, não é ao menos ministrado na rede pública estadual de ensino .

Quanto aos objetivos específicos, procuramos atinge-lós rigorosamente, iniciando com as aulas de Secções Cônicas no estilo de ensino direto, priorizando a exposição do conteúdo e aplicação de exercícios. Tais aulas foram realizadas na escola São Sebastião em sala de aula, escolhemos utilizar um datashow para não atrasar as aulas e, principalmente, para auxiliar na apresentação das figuras das cônicas e de algumas animações realizadas com estas. Contávamos com o laboratório de informática da escola para a realização das aulas de ensino exploratório com tarefas de investigação matemática, no entanto, nos deparamos com uma situação muito precária, como já citamos anteriormente neste trabalho, e isto foi um desafio que tivemos de enfrentar.

Devido às condições indesejadas encontradas no laboratório da escola, a solução foi levar os alunos para o laboratório de informática da UEPB, onde, inicialmente, apresentamos aos mesmos o aplicativo GeoGebra. Logo nas duas primeiras aulas, a maioria dos alunos apresentou uma ótima desenvoltura com as ferramentas do aplicativo, alguns destes haviam baixado o programa em casa dias antes, durantes as aulas no ensino direto nós havíamos pedido para que os mesmos pesquisassem e baixasse o aplicativo, isso mostrou o verdadeiro interesse da turma em pesquisa.

Dando continuidade às aulas no laboratório de informática, foi apresentada aos mesmos a primeira investigação matemática com a Elipse. Inicialmente, eles ficaram sem entender bem o que iriam fazer, sendo necessário um maior apoio por nossa parte, levando em consideração que os mesmos nunca havia trabalha desse modo, foi necessário explicar com clareza as primeiras ideias da atividade em questão. Á medida que foram realizando a tarefa eles nos questionavam bastante, anotavam os dados em papel e discutiam ideias com os colegas ao lado. A experiência foi gratificante. No dia seguinte, para a realização das duas últimas investigações com a Hipérbole e a Parábola, percebemos que os alunos apresentaram uma desenvoltura melhor que na aula anterior, desenvolviam um trabalho mais autônomo e nos questionavam menos, deixamos claro aos alunos, que eles deveriam partilhar as ideias de como proceder na tarefa com os colegas, caracterizando um trabalho em equipe.

O aspecto qualitativo da pesquisa foi alcançado graças aos nossos esforços de solucionarmos as dificuldades encontradas, enquanto que no aspecto quantitativo foi em resposta ao qualitativo, a quantidade de acertos totais no Teste2 foi bastante significativo, o que mostrou que a qualidade e organização do trabalho foi fundamental.

Fica evidente, portanto, que as tarefas de Investigações Matemáticas com um aplicativo de geometria dinâmica, apesar de não serem imprescindíveis, são importantes para proporcionar aos alunos uma melhor compreensão. Além do mais, o aluno demonstra maior interesse, por se tratar de um modo de ensino diferente do que eles estão habituados, e não podemos deixar de esclarecer que a inserção do computador nas aulas de matemática, quando bem planejadas como foi nesta pesquisa, pode ser de fundamental importância para a compreensão do conhecimento.

Algumas dificuldades encontradas na realização da pesquisa foram solucionadas com êxito devido primeiramente, ao espírito de trabalho em equipe, a cooperação dos envolvidos e principalmente ao empenho de não nos desestimularmos diante dos desafios que encontramos ao longo do caminho, como quando apontamos as dificuldades encontradas no laboratório de informática da escola. O que fizemos mostra que, quando queremos e encontramos outras condições favoráveis podemos alcançar êxito na implementação de propostas atualizadas como esta que operacionalizamos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AMORIM, Joni de Almeida. **A educação matemática, a internet e exclusão digital no Brasil**. Educação Matemática em Revista. Ano 10, n. 14, p. 58-65. 2003.

ARAÚJO, Luís Cláudio Lopes de. Revista do Professor de Matemática: **GeoGebra, um bom software livre**. RPM 67 2008.

ARAÚJO, Luís Cláudio Lopes de. Revista do Professor de Matemática: **Cuidado no uso do Computador!** RPM 70, 2008.

ARAÚJO, Luís Cláudio Lopes de. **Aprendendo Matemática com o GeoGebra** / Luís Cláudio Lopes de Araújo, Jorge Cássio Costa Nóbrega. - São Paulo: Editora Exato, 2010.

BOAVIDA, Ana Maria Roque. **A experiência matemática no ensino básico.** Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores dos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico. Editor Ministério da Educação, 2008.

BOYER, Carl B. **História da Matemática** / Carl B. Boyer, revista por Uta C. Merzbach; tradução Elza F. Gomide – 2º Ed. - - São Paulo: Blücher, 1996.

CANDEIAS, Anabela Fernandes Ferreira**. Aprendizagem das Funções no 8.º ano com o auxilio do software GeoGebra.** Dissertação de Mestrado. Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 2010.

CAJORI, Florian. **Uma História da Matemática**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna LTDA., 2007.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: Contexto e Aplicação** / Luiz Roberto Dante. - - São Paulo: Ática, 2010.

LINDQUIST, Mary Montgomery. Alberto P. Shulte. **Aprendendo e ensinando geometria**; tradução de Hygino H. Domingues. – São Paulo: Atual, 1994.

MARÇULA, Marcelo. **Informática: Conceitos e Aplicações** / Marcelo Marçula, Pio Armando Benini Filho. –2. ed.—São Paulo: Érica, 2007.

MEDEIROS, K. M. **O contrato didático e a resolução de problemas matemáticos em sala de aula**. Educação Matemática em Revista. Ano 8, n. 9, p. 32-39. 2001.

MONTEIRO, Mário A.. **Introdução á Organização de Computadores** / Mário A. Monteiro. -- 4º edição--, Rio de Janeiro: LTC, 2002.

OLIVEIRA, Hélia. CIEFCUL hmoliveira@fc.ul.pt. António *Domingos*. FCT-UNL amdd@fct.unl.pt. Grupo de *Discussão* B. **Software no ensino e aprendizagem *da* Matemática: Algumas Ideias para Discussão.** Encontro de Investigação em Educação *Matemática* – XVII EIEM *2008.*

PALIS, Gilda. Revista do Professor de Matemática: **Uso de computadores e o papel do professor** RPM 41, 1999.

PONTE, João Pedro. **Gestão curricular em Matemática**. In: GTI (Ed.) O professor e o desenvolvimento curricular**.** Lisboa: APM, 2005.

PONTE, João Pedro da. **Investigações Matemáticas na sala de aula** / João Pedro da Ponte, Joana Brocardo, Hélia Oliveira. – Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

PONTE, João Pedro da. **Tecnologia de informação e comunicação na formação de professores: que desafios?** Revista Iberoamericana de Educação. Ano 24, n. 24, 2000.

POLYA, G. (George), 1887- P841a **A arte de resolver problemas**: um novo aspecto do método matemático / G. Polya; tradução e adaptação Heitor Lisboa de Araújo. - 2. reimpr. - Rio de Janeiro: interciência, 1995, 196p.

SANTOS, Cícero dos. **O estudo do gráfico da função afim com o software winplot através da resolução de problemas [manuscrito]** / Cícero dos Santos. – 2011.

STRUIK, D.J. **História Concisa da Matemática.** 1ed. Lisboa: Gradiva, 1992.

SITES REFERIDOS

O ESTUDO DAS SECÇÕES CÔNICAS
http://www.dmm.im.ufrj.br/projeto/rived/modulo_conicas/int.htm
Acesso em: 25 de abril de 2012 as 22:25h

http://www.somatematica.com.br/emedio/conicas/conicas.php
Acesso em: 5 de maio de 2012

O GEOGEBRA
http://www.geogebra.org/cms/index.php?lang=pt
Acesso em: 2 de maio de 2012

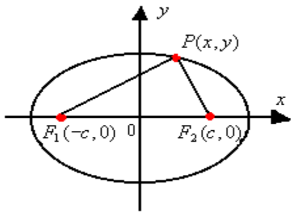
ANEXOS

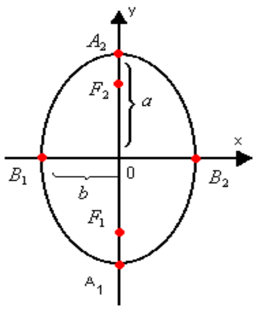
ANEXO A - TESTE1

Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio São Sebastião
Disciplina: Matemática
Professora Estagiária: Jaqueline Mendes Gonçalves.
Aluno:

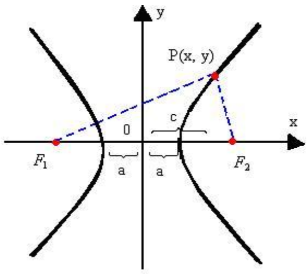
Questões

1. De acordo com o que estudamos e visualizamos em figuras defina Secções Cônicas?
2. Como podemos definir a Elipse?
3. Cite alguns elementos da Elipse.
4. De acordo com cada figura escreva ao lado a equação da Elipse.





5. Observe a figura abaixo, defina o que é uma Hipérbole?



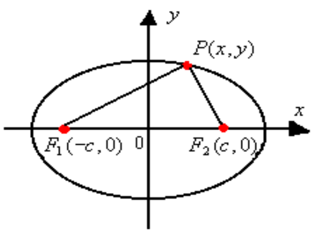
6. Quais os elementos da Hipérbole?
7. Quais são as equações da Hipérbole quando os focos pertencem ao eixo OX e quando os focos pertencem ao eixo OY?
8. Defina Parábola?
9. Cite os elementos da Parábola?
10. Escreva a equação da parábola com diretriz d paralela ao eixo y e foco á direita de d.

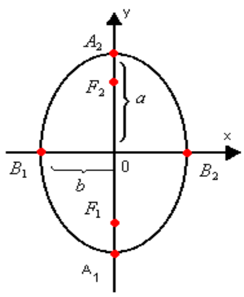
ANEXO B – TESTE2

Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio São Sebastião
Disciplina: Matemática
Professora Estagiária: Jaqueline Mendes Gonçalves.
Aluno:

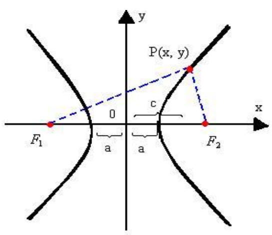
Q u e s t õ e s

1. A utilização do Aplicativo Geogebra contribuiu na compreensão da definição das secções cônicas? Se sim, como?
2. De acordo com o que foi visto no Geogebra defina Elipse?
3. Cite alguns elementos da Elipse.
4. De acordo com cada figura escreva ao lado a equação da Elipse.





5. De acordo com o que foi visto no Geogebra defina Hipérbole?



6. Quais os elementos da Hipérbole?
7. Quais são as equações da Hipérbole quando os focos pertencem ao eixo OX e quando os focos pertencem ao eixo OY?
8. De acordo com o que foi visto no Geogebra defina Parábola?
9. Cite os elementos da Parábola?
10. Escreva as equações da Parábola?

ANEXO C - EXERCÍCIOS PROPOSTOS

CÔNICA: ELIPSE

1. Determine a equação reduzida da elipse sabendo que um dos focos é F1(0 , -3) e que o eixo menor mede 8.

2. Determine a equação reduzida da elipse sabendo que um dos focos é F1(0 , -3) e que o eixo menor mede 8.

3. Determine a equação da elipse conhecendo:
   a) Os focos F1 (3,0) e F2 (-3, 0) e o comprimento do eixo maior , 8;
   b) Os focos F1 (0, 4) e F2 (0, -4) e as extremidades do eixo maior A1 (0,6) e A2(0,-6);

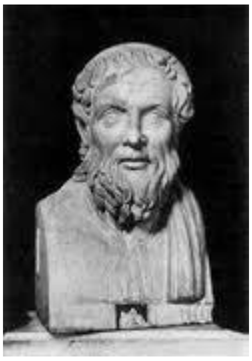
CÔNICA: PARÁBOLA

1. Encontre o foco e a diretriz da parábola $y^2 + 10x = 0$.
2. Encontre o vértice, o foco e a diretriz da parábola $4x^2 = -y$.
3. Determine o foco, o vértice e a diretriz da parábola, a partir das equações:
   a)$x^2=10y$
   b)$x^2=-4y$
   c)$y^2=28x$
   d) $y^2= -16x$

CÔNICA: HIPÉRBOLE

1. Determine a equação reduzida da hipérbole com eixo real 6, focos F1(-5 , 0) e F2(5, 0).
2. Encontre a equação reduzida da hipérbole que possui dois focos com coordenadas F2 (0, 10) e eixo imaginário medindo 12.
3. Determine a equação da hipérbole, dados:
   a) Os focos F1 (8, 0) e F2 (-8, 0) e os vértices A1 (5, 0) e A2 (-5, 0);
   b) Os vértices A1 (3, 0) e A2 (-3, 0) e a distância entre os focos igual a oito;

ANEXO D – BIOGRAFIA DE APOLÔNIO DE PERGA



Apolônio nasceu em Perga (sul da Ásia Menor), e acredita-se que tenha vivido por volta de 262 a 190 a.C. e morreu cerca de 222 a 205 a.C.. Segundo Cajori (2007), Apolônio ocupa, incontestavelmente, o segundo lugar em distinção entre os matemáticos antigos. Estudou em Alexandria, onde por algum tempo também foi professor. Passou por Éfeso e posteriormente também foi professor em Pérgamo.

Boyer (1996) afirma que, o brilhantismo dos trabalhos de Apolônio fez com que merecesse o título de "Grande Geômetra" da antiguidade, escreveu importantes tratados e entre suas obras, a maioria desaparecida, citam-se *Resultados rápidos*, *Dividir em uma razão*, *Cortar uma área*, *Sobre secção determinada*, *Tangências*, *Inclinações* e *Lugares planos*. Seis das obras de Apolônio estavam incluídas junto com dois dos tratados mais avançados (hoje perdidos) de Euclides, numa coleção chamada "Tesouro da análise". O "Tesouro" consistiu em grande parte de obras de Apolônio, consequentemente deve ter incluído muito do que hoje chamamos geometria analítica.

Afirma o autor, no entanto, que aquela que pode ter sido sua obra prima foi preservada, *As cônicas* (225 a. C.), em sete livros, que inferiorizou todas as outras publicações antigas sobre seções cônicas, e introduzindo na terminologia matemática os termos *elipse*, *hipérbole* e *parábola*. Contendo 487 proposições, analisa a elipse, a hipérbole e a parábola com o rigor característico dos mestres gregos. As suas teorias sobre as seções cônicas, foram de fundamental importância para a evolução da dinâmica terrestre e da mecânica celeste, notadamente para os estudos de Newton e Kepler, especialmente usado por Newton quando escreveu os *Principia*. Neste tratado sobre as secções cônicas reproduziu os conhecimentos de Menaecmus, acrescentando, ainda, centenas de teoremas novos sobre as secções cônicas, deduzidos de uma maneira puramente geométrica.