



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA-UEPB
CAMPUS I
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA - CCT
CURSO DE LICENCIATURA EM FÍSICA**

BUGLEY DE FARIAS RAMOS JUNIOR

UMA ABORDAGEM DO MÉTODO DE DEFORMAÇÃO NA TEORIA SOLITÔNICA

**CAMPINA GRANDE - PB
2015**

BUGLEY DE FARIAS RAMOS JUNIOR

UMA ABORDAGEM DO MÉTODO DE DEFORMAÇÃO NA TEORIA SOLITÔNICA

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado ao Curso de Licenciatura em
Física da Universidade Estadual da Paraíba
como requisito parcial à obtenção do título de
Licenciado em Física.

Área de Concentração: Teoria de Campos e
Partículas

Orientador: Prof. Dr. Alex da Silva.

**CAMPINA GRANDE - PB
2015**

É expressamente proibida a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano da dissertação.

R175a Ramos Junior, Bugley de Farias.
Uma abordagem do método de deformação na teoria solitônica [manuscrito] / Bugley de Farias Ramos Junior. - 2015.
37 p. : il.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Física) -
Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e
Tecnologia, 2015.
"Orientação: Prof. Dr. Alex da Silva, Departamento de
Física".

1. Método de deformação. 2. Equação KDV. 3. Ondas viajantes. 4. Sólitons. I. Título.

21. ed. CDD 535.2

BUGLEY DE FARIAS RAMOS JUNIOR

**UMA ABORDAGEM DO MÉTODO DE DEFORMAÇÃO
NA TEORIA SOLITÔNICA**

Monografia apresentada ao curso de Física da
Universidade Estadual da Paraíba – UEPB como um
dos pré-requisitos para a obtenção do grau de
Licenciado Plena em Física.

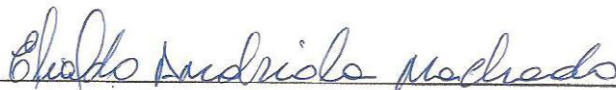
Aprovada em 22/06/2015


Banca Examinadora

Prof. Dr. Alex da Silva –DF

Universidade Estadual da Paraíba– UEPB

Professor Orientador



Prof. Msc. Elialdo Andriola Machado – DF

Universidade Estadual da Paraíba - UEPB



Profª. Dra. Morgana Lígia Farias Freire – DF

Universidade Estadual da Paraíba - UEPB

A meu avô José Jório e meu primo Douglas Junior (*in memoriam*).

AGRADECIMENTOS

Inicialmente agradeço a DEUS, por permitir que chegasse tão longe, com força de vontade, determinação, paciência e fé, me fortalecendo nos momentos mais difíceis, não me deixando desistir, mostrando que sou capaz e que tudo é possível. Agradeço a toda minha família, meus pais, meus irmãos, meus avós e meus tios por me apoiarem sempre. Aos meus amigos que caminharam junto comigo todo esse tempo, por seu companheirismo e amizade. A minha noiva por todo o carinho e atenção.

Ao CNPq juntamente com Universidade Estadual da Paraíba, pelo financiamento no decorrer das atividades realizadas através do Programa Institucional de Bolsas para Iniciação Científica (PIBIC) e monitoria. Aos meus professores, e todos os demais que compõem o Departamento e Coordenação do curso de Física por todo o conhecimento transferido e incentivo e a todos que contribuíram direta ou indiretamente para essa conquista.

Agradeço em especial ao Professor Alex da Silva, por todo o suporte que me foi dado de sua parte, bem como a compreensão e confiança. Ao Professor Elialdo Andriola Machado que me ajudou muito no início do curso, com muito incentivo e direcionamento. E também ao professor Jose Carlos Justino pela honra de ter desenvolvido as atividades de monitoria com seus ensinamentos que contribuíram bastante para minha formação.

RESUMO

Resolver sistemas não lineares é sempre um grande desafio, tanto na física quanto na matemática. Geralmente os métodos utilizados são bastantes técnicos e muitas vezes complexos, ou seja, não são nada triviais. No entanto, o método abordado nesse trabalho é simples e direto. E pode gerar soluções do tipo ondas viajantes para equações diferenciais não lineares. Um fato muito interessante desse método é que a solução para equações como a KdV e mKdV pode ser obtida a partir de uma solução simples de equação linear. E não só isso, também é possível encontrar as soluções de equações desse tipo a partir de uma solução tipo sóliton. Esse método é conhecido como método de deformação. Por sua vez, a teoria dos sólitons é uma das teorias mais fantásticas estudadas nos últimos anos. Sólitons são pulsos de energia localizada, que interagem fortemente e não mudam de forma. Isto é, possuem comportamento de partículas. Esse fenômeno vem sendo observado em diversas áreas do conhecimento, e por isso, acredita-se que seja um fenômeno de caráter universal.

Palavras-chave: Método de Deformação. Equação KdV. Ondas Viajantes. Sólitons.

ABSTRACT

Solving nonlinear systems is always a big challenge, both in physically and how much in mathematics. The methods are generally quite technical and often complex, in other words nothing trivial. However, the method discussed in this work is simple and straightforward. And can generate solutions type Travelling wave for nonlinear differential equations. A fact very interesting of this method is that the solution to equations such as KdV, mKdV and Boussinesq can be obtained from a simple linear equation solution. And not only this, you can also find the solutions for these equations from a solution type soliton. This method is known as deformation method. In turn, the theory of solitons is a of the most fantastic theory studied in recent years. Solitons are pulses of energy localized that interact strongly and do not change shape. That is, particles possess behavior. This phenomenon has been observed in various areas of knowledge, and therefore it is believed to be a universal phenomenon.

Keywords: Deformation Method. KdV equation. Travelling Waves. Solitons.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Ilustração do procedimento realizado por Russel para fabricar ondas solitárias em série.....	11
Figura 2 - Representação da interação de dois sólitons.....	13
Figura 3 - Apresentação gráfica de uma onda dispersiva.....	15
Figura 4 - Representação da evolução de uma onda descrita por uma equação não-linear.	17
Figura 5 – Representação da evolução de uma onda solitária (sóliton) descrita pela equação KdV.	18
Figura 6 – Representação esquemática do potencial associado descrito pela mKdV.	24
Figura 7 – Representação esquemática do sóliton da equação mKdV.....	25
Figura 8 - Diagrama esquemático do funcionamento do método.....	33

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
2	SÓLITONS	11
2.1	Descoberta das Ondas Solitárias	11
2.2	A teoria dos Sólitons	13
2.3	A Física não-linear	15
2.4	Aplicações dos Sólitons	18
3	TEORIAS QUE APRESENTAM SÓLITONS	20
3.1	A Equação KdV	20
3.2	A Equação mKdV	23
3.3	A Equação de Boussinesq	25
4	MÉTODO DE DEFORMAÇÃO	27
4.1	Uma Abordagem sobre o Método	27
4.2	Aplicação do Método	29
4.2.1	<i>Solução para a KdV e mKdV</i>	29
4.2.2	<i>Solução para a mKdV a partir da KdV</i>	32
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	34
	REFERÊNCIAS	35

1 INTRODUÇÃO

Sistemas integráveis não-lineares têm sido estudados com rigorosidade nos últimos anos. Desde que a equação KdV (KORTEWEG; DE VRIES, 1895) foi proposta, o assunto referente a sistemas integráveis tem se desenvolvido em diversas formas, onde se pode destacar o Método do Espalhamento Inverso (FLASCHKA, 1974), Transformações de Backlund (ABLOWTZ; CLARKSON, 1991), Integrabilidade Quântica etc. Esses desenvolvimentos são muito importantes, pois tem aberto novas áreas de pesquisas (MATHIEU, 1988). Vale salientar que todos esses métodos possuem uma certa dificuldade de manuseio, pois são indiretos e bastante técnicos.

Este trabalho propõe um método alternativo e prático para resolver sistemas e/ou equações não-lineares. Ele possibilita construir soluções tipo onda viajante para equações diferenciais não-lineares a partir de uma solução conhecida. Esse método é conhecido com método de deformação (BAZEIA et al., 2008).

A não linearidade na física surge com a equação de Navier-Stokes. Essa é a equação que rege a dinâmica dos fluídos, e é uma das equações mais importantes na ciência até hoje (é também considerada um dos grandes problemas da matemática). A partir dessa equação é possível chegar à equação KdV, que por sua vez devido ela aparecer em diversos fenômenos é uma das equações mais importantes na teoria não-linear e de sistemas integráveis (juntamente com a equação de Schrödinger não-linear). A KdV é considerada a equação básica que rege um fenômeno não linear e dispersivo (SILVA, 2008).

As investigações nos últimos anos sobre sistemas não-lineares resultaram em diversos avanços nas ciências, de modo geral, esses avanços foram em diversas áreas e não só na Física. Esses fenômenos não-lineares aparecem também na Matemática, Química (EPSTEIN, 1998), Medicina e em Processos Biológicos (BRITTON, 1986; MURRAY, 1993).

O fato mais importante da solução tipo onda viajante da KdV é que ela representa um sóliton. Os sólitons são ondas viajantes localizadas que não se deformam, conservam energia e mantêm a forma depois de interagir fortemente. A teoria dos sólitons é aplicada em colisões de ondas, cadeias atômicas, tornados, partículas elementares, redes cristalinas, macro moléculas, nas fibras óticas etc. São muitas as aplicações desse fenômeno.

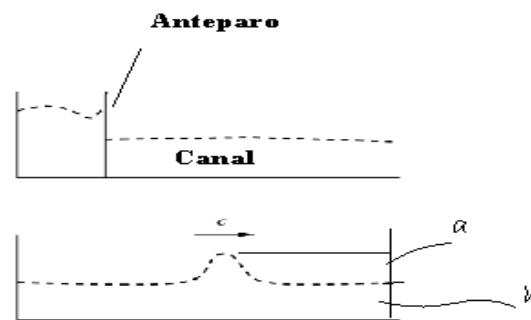
O desenvolvimento desse trabalho foi feito através de uma revisão bibliográfica de trabalhos, livros, artigos e periódicos sobre o tema tratado. O problema proposto consiste em encontrar soluções solitônicas para equações não lineares, e para isso se utilizou um método bastante eficiente e de fácil manuseio, o qual será detalhado aqui.

2 SÓLITONS

2.1 Descoberta das Ondas Solitárias

As primeiras observações envolvendo as ondas solitárias foram em 1834, pelo engenheiro naval Britânico, John Scott Russel. Ele observou um barco sendo puxado por dois cavalos às margens do canal de Edinburgh, Glasgow, quando, de repente a embarcação parou. Surgiu então, uma única onda solitária com a forma bem definida. Que se propagou ao longo do canal com uma velocidade constante de 14km/h em um trecho de aproximadamente dois quilômetros sem perder sua forma, e esta foi acompanhada por Russel a galopes de cavalo. Quase dez anos após esse acontecimento, Russel publicou um trabalho em que ele relatava como foi aquele dia, e chamou aquele fenômeno de “singular e maravilhoso”(RUSSEL, 1845). A essa onda ele chamou de *onda solitária de translação*.

Figura 1 - Ilustração do procedimento realizado por Russel para fabricar ondas solitárias em série.



Depois dessa observação, Russel realizou uma série de experimentos em laboratório gerando ondas, até que ele descobriu como as produzir “em série”; assim era feito, acumulando água em uma extremidade de um canal raso separado por um anteparo e, de repente, retirando este anteparo; a massa d’água acumulada se propagava em uma “meia-onda”, acima da linha de repouso do canal sem se deformar com velocidade constante c .

Através Figura 1 é possível compreender o procedimento realizado por Russel para fabricar ondas solitárias em série. Ele foi capaz de verificar empiricamente uma relação entre a altura da onda a (amplitude da onda) em relação ao nível de repouso da água, e h a

profundidade do canal não perturbado, com velocidade de propagação da onda c , que é dada por

$$c^2 = g(h+a), \quad (2.1)$$

onde g é a aceleração da gravidade.

Com essa expressão obtida por Russel, observa-se que quanto maior for a amplitude da onda maior será a sua velocidade de translação. Esta equação provocou certa discórdia na comunidade científica, pois estava em contradição à outra encontrada por argumentos puramente teóricos por Airy (1845). Assim Lord Rayleigh (em 1876) e Boussinesq (em 1871, 1872) tentaram resolver de uma vez por todas o problema, mas, isso só veio a ocorrer, de fato, em 1895 com o trabalho de Korteweg e de Vries.

D. J. Korteweg e G. de Vries em 1895 (Equação KdV), obtiveram teoricamente a fórmula de Russel para velocidade da onda solitária de translação, e mostraram que neste caso a forma da envoltória da onda era dada por

$$u(x,t) = a \operatorname{sech}^2(k(x-ct)), \quad (2.2)$$

onde o número de onda k , a amplitude a , e a velocidade da onda c estão relacionadas por

$$k^{-2} = \frac{4h^2(h+a)}{3a}, \quad a = 2k^2, \quad c = 4k^2. \quad (2.3)$$

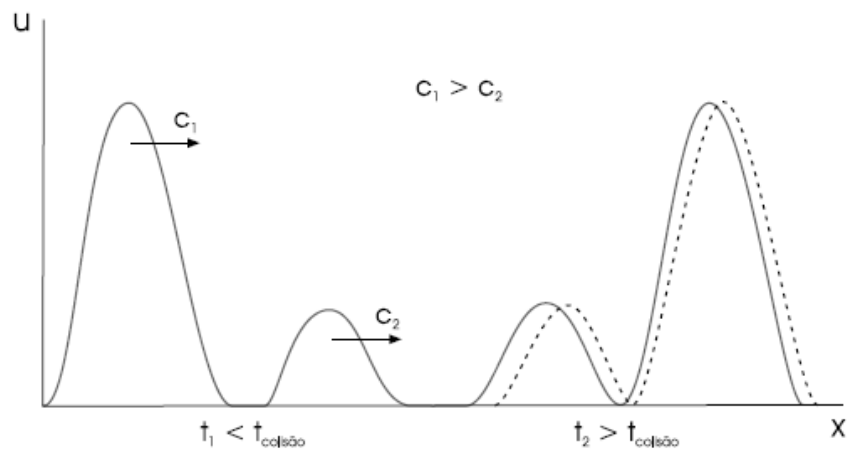
Outra observação feita por Russel em 1844, que permaneceu sem explicação por mais de um século, é que em colisões, ondas solitárias preservam suas características (RUSSEL, 1845). Em uma de suas experiências ele observou duas ondas. Elas propagavam-se com velocidades diferentes, percebeu que a onda mais veloz alcançava e ultrapassava a onda mais lenta, de modo que após o processo, ambas permaneciam intactas e não-distorcidas, como se ambas satisfizessem o princípio da superposição linear.

Percebesse a presença de efeitos não-lineares, pelo fato de que, durante a interação, as ondas sofriam um deslocamento de fase, ou seja, as ondas depois da interação não estavam na posição que deveriam estar se ambas se movessem com velocidade constante. Através da Figura 2 é possível observar como ocorre esse processo. É característico de fenômenos ondulatórios apresentarem efeito dispersivo, assim, as ondas em propagação logo perdem energia e eventualmente desaparecem em um tempo finito.

Então, apenas em 1955, esse problema foi compreendido melhor, com o trabalho de Fermi, Pasta e Ulam que estudavam os modos de propagação de ondas em redes cristalinas. A partir do resultado obtido por eles, Zabusky e Kruskal em 1965 (ZABUSKY; KRUSKAL,

1965) estudaram essa equação numericamente, então, chegaram ao resultado de que nos primeiros momentos a envoltória tomava a forma do termo não-linear. Quando chegava a essa configuração o termo dispersivo torna-se importante, ocorrendo então um balanceamento entre não linearidade e dispersão (como será visto na sessão 2.3), assim o fenômeno da quebra não ocorria.

Figura 2 - Representação da interação de dois sólitons.



Fonte: Galléas et al. (2003, p. 295)

Devido à persistência de a onda manter a sua forma, e também, a característica análoga a de partículas que conservam sua identidade após uma colisão, fez com que Zabusky e Kruskal sugerissem o nome de sólitons – em analogia as partículas, como fótons, prótons, elétrons etc. A partir da Figura 2 observa-se que as ondas no instante t_1 possuem uma forma bem definida, $t_{colisão}$ é instante em que ocorre a colisão, em seguida no instante t_2 as ondas possui a mesma forma, como se fossem partículas clássicas. Onde o sóliton com velocidade c_1 viaja com velocidade maior do que o sóliton com velocidade c_2 , pois possui uma amplitude maior (quanto maior a amplitude do sóliton maior a sua velocidade).

2.2 A teoria dos Sólitons

De acordo com a teoria matemática, sólitons são soluções de uma classe de equações diferenciais não-lineares cujo interesse se deve ao fato de muitos sistemas complexos poderem ser aproximadamente descritos por estas equações, e principalmente pelo fato de, apesar de ser não-lineares, possuírem soluções analíticas. Do ponto de vista prático, sólitons podem representar fenômenos que apresentam as características de serem não-lineares, localizados, quase-estáticos e interagem fortemente mantendo sua identidade.

Por exemplo, uma onda descrita por uma equação diferencial não-linear, o termo não-linear faz com que a onda tenda a se concentrar, o que pode ocorrer à quebra, como no caso das ondas no mar, já o termo dispersivo da equação faz com que a onda se alongue, e é importante para que haja um balanço entre não-linearidade e dispersão, de modo que a quebra não ocorra fazendo com que a onda se propague mantendo sua forma. É necessário entender a diferença que envolve essa teoria. Em geral um pulso que viaja inalterado é chamado de onda viajante, mas um pulso localizado que viaja inalterado, ou seja, cuja transição desde um estado assintoticamente constante, tal como $\varepsilon \rightarrow -\infty$, para outro, tal como, $\varepsilon \rightarrow +\infty$, está essencialmente localizado em ε que é chamada *onda solitária*. Já um pulso localizado que viaja inalterado e não se destrói quando interage com outras ondas conservando a sua identidade é denominado *sólitons* (ZABUSKY; KRUSKAL, 1965).

Os sólitons já foram observados em várias áreas da ciência, incluindo a óptica, a física da matéria condensada e também na biologia, onde essas ondas podem ser observadas durante a transferência de energia em ácidos desoxirribonucléicos (DNA).

Cientistas descobriram que os sólitons, também possuem uma estrutura interna intrincada, ou seja, um dos grandes mistérios do mundo quântico tem se apresentado também nos sólitons que é o fenômeno da dualidade onda-partícula.

A equipe do Dr. Ju Li, da universidade de Ohio, Estados Unidos, descobriu que os sólitons poderão ser analisados como partículas. O que Dr. Li mostrou é que, cada sóliton é, na verdade, um elétron circundado por outras partículas, chamadas de “fônons”. Da mesma forma que um fóton é uma partícula de luz, o fônon é uma partícula de energia vibracional. Estas descobertas têm ajudado bastante na construção de novas tecnologias (GALLEAS et al. 2003). Podemos observar que a teoria solitônica tem apresentado novas descobertas e pode ser empregado em várias áreas da ciência, sabemos que a diversidade dos sistemas físicos, matemáticos, biológicos, químicos, etc. onde existem sólitons é tão grande que não resta qualquer dúvida sobre a universalidade do fenômeno (SILVA, 2008).

2.3 A Física não-linear

O século XX pode ser chamado de era da *física linear*, pois foi dominado por equações lineares (Maxwell, Schrödinger etc), por objetivos matemáticos lineares (espaços vetoriais, em particular o espaço de Hilbert) e por métodos lineares (transformada de Fourier, teoria de perturbação etc). A não-linearidade começa com a equação de Navier-Stokes

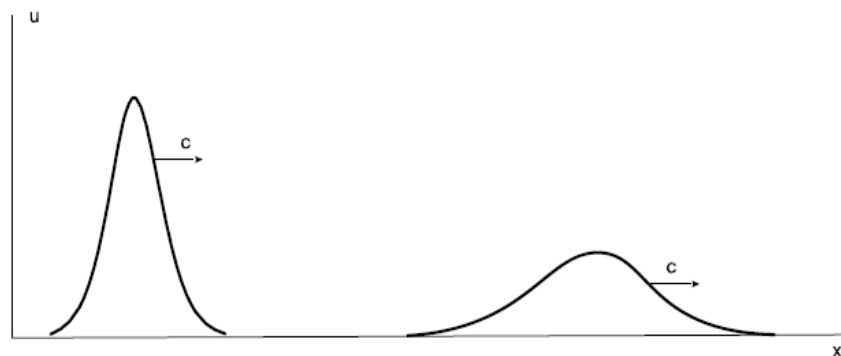
$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \vec{v} \quad (2.4)$$

e tem passagem pelas teorias da gravitação e dos campos quantizados, com aplicações em física nuclear e em física de partículas, no entanto, embora o tratamento matemático destes efeitos fossem muito difíceis, com exceção do caso de perturbação da solução básica da teoria linear (método de deformação). Tem-se tornado cada vez mais evidente, durante os últimos anos, que *não-linearidade* pode resultar em novos fenômenos, os quais não podem ser obtidos via teoria de perturbação: este é o caso de *ondas tipo sólitons*.

Podemos destacar que, quando as equações de ondas são derivadas de alguns princípios físicos subjacentes, ou governadas por equações mais gerais, são feitas certas suposições, portanto, se as suposições forem menos extremas, nós poderíamos obter equações que retêm mais do detalhe físico; por exemplo, onda dispersiva, não-lineares. Considere uma equação que represente um fenômeno dispersivo, dada por

$$u_t + u_x + u_{xxx} = 0. \quad (2.5)$$

Figura 3 - Apresentação gráfica de uma onda dispersiva.



Fonte: Silva (2008, p. 25)

Que é uma simples equação de onda dispersiva. Para se examinar a forma da solução de onda harmônica

$$u(x,t) = e^{i(kx-\omega t)}. \quad (2.6)$$

Sempre pode se escolher a parte real ou imaginária, ou da forma $Be^{i(kx-\omega t)} +$ complexo conjugado, onde B é uma constante. Agora (2.6) é uma solução da equação (2.5) se:

$$\omega = k - k^3. \quad (2.7)$$

Esta relação de dispersão determina que $\omega(k)$ para determinado k , aqui, k é o número de onda (escolher para ser real de forma que a solução (2.6) é certamente oscilatória em $t = 0$) e ω é a frequência.

Para estudos da não-linearidade, pode-se tomar uma equação não-linear, da forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (1-u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (2.8)$$

obtem-se uma solução para a Equação (2.8) dada por

$$u(x,t) = f[x - (1-u)t] = f(y), \quad (2.9)$$

onde f é uma função arbitrária. Para se verificar que (2.9) é solução de (2.8) algumas substituições serão necessárias. Definindo que $y = x - (1-u)t$, e da regra da cadeia

$$\frac{\partial u(y)}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial y} (1-u) \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial u(y)}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.11)$$

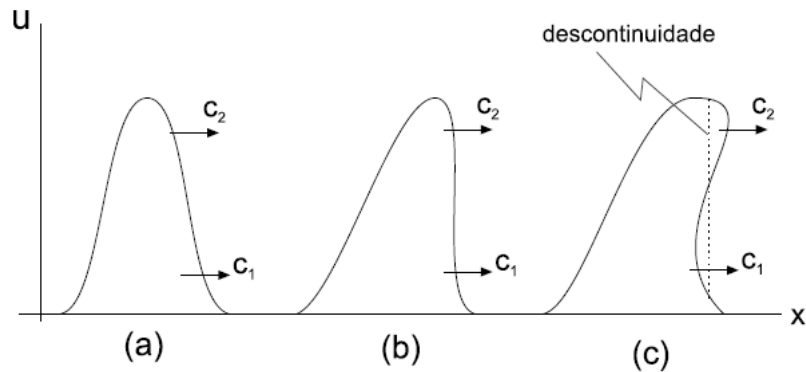
Na Figura 4 as partes altas devem ser mais rápidas que as baixas, conseqüentemente em certo momento as partes altas devem ultrapassar as partes mais baixas gerando uma quebra na onda (ABLOWITZ e CLARKSON, 1991). Este fenômeno é característico de efeitos não lineares; um exemplo comum são as ondas a beira mar.

E por fim, destaca-se a equação mais simples que exhibe junto fenômeno não linear e fenômeno dispersivo, que é a equação KdV. Após aplicar uma série de transformações de escala, a equação KdV pode ser escrita da seguinte forma:

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0, \quad (2.12)$$

onde u_x é a derivada primeira de u em relação à x , u_{xxx} é a derivada terceira e u_t a derivada de u em relação à t .

Figura 4 - Representação da evolução de uma onda descrita por uma equação não-linear.



Fonte: Silva (2008, p. 27)

Essa equação foi proposta por D. J. Korteweg e G. de Vries em 1895 com o objetivo de descrever teoricamente a fórmula de Russel para velocidade da onda solitária de translação, cuja solução da onda era dada por

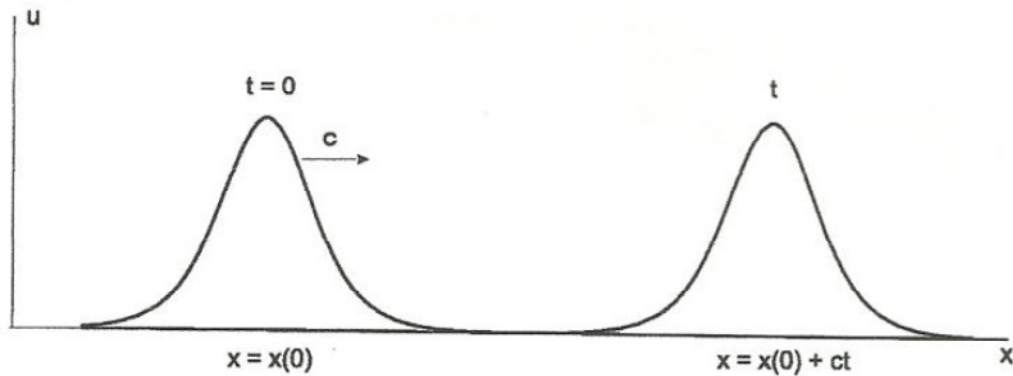
$$u(x, t) = a \operatorname{sech}^2(k(x - ct)), \quad (2.13)$$

onde o número de onda k , a amplitude a , e a velocidade da onda c são relacionadas da seguinte forma

$$k^{-2} = \frac{4h^2(h+a)}{3a}, \quad a = 2k^2, \quad c = 4k^2. \quad (2.14)$$

A Figura 5 representa a solução (2.13) encontrada para a equação (2.12) (equação de onda dispersiva não-linear), que devido à competição entre os dois efeitos, propaga-se no sentido positivo do eixo x com velocidade c constante, dessa forma representa um soliton. Depois do trabalho de Gardner, Greene, Kruskal e Miura (GARDNER et al., 1967), percebeu-se que não só a KdV, mas outras equações importantes em física e matemática possuem solução tipo onda viajante.

Figura 5 – Representação da evolução de uma onda solitária (sóliton) descrita pela equação KdV.



Fonte: Galléas et al. (2003, p. 295)

2.4 Aplicações dos Sólitons

Essa teoria é aplicada em varias áreas, como foi dito anteriormente, da física e áreas correlacionadas, tais como: hidrodinâmica (sólitons em água), ótica não-linear, física de plasma, física do estado sólido, física de partículas, redes cristalinas, cadeias atômicas e macromoléculas, condensado de Bose-Einstein, tecnologia de comunicação, meteorologia, biologiaetc.

A aplicação da teoria solitônica nas fibras óticas trouxe um avanço significativo para essa área (GALLEAS et al., 2003). O princípio físico utilizado nessas fibras é o da reflexão interna total (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2009), que não permite a “fuga” da luz para o exterior do material através das paredes do material, ou seja, ao incidir um pulso luminoso em uma das suas extremidades no interior do material, que geralmente é muito fino, atinge a superfície do material por dentro com um ângulo maior que o ângulo crítico, sofrendo então, uma reflexão total. Isso acontece várias vezes no interior do material, até que o pulso luminoso saia pela outra extremidade. Mas, a inconveniência para usar as fibras era a perda de informações ao longo da fibra, devido às impurezas absorventes, que faz com que os pulsos de luz se atenuem. Assim, uma onda quando mandada não chegavacom a informação da mesma maneira, havendo muitas perdas.

Com o uso dessa teoria física, foi possível superar o problema da dispersão dos pulsos luminosos e suas atenuações. O que levou a construção das fibras de sílica (óxido de

silício), que são 50 vezes melhores que as antigas. Um fato interessante é que esses pulsos luminosos são governados por dois processos fundamentais, sendo; um processo dispersivo, que tende a destruir o pulso, e outro processo não-linear, que tende a modificar continuamente a frequência das ondas de acordo com os pulsos. O mais excepcional é que esses processos se adequam de maneira surpreendente atingindo um equilíbrio (SILVA, 2008).

Na Condensação de Bose-Einstein (CBE) também é aplicada a teoria dos sólitons. Considerada como o quarto estágio da matéria, a CBE consiste de átomos super frios que estão depositados no mesmo estado quântico, exibindo propriedades ondulatórias, então, podem ser considerados como uma onda atômica. A aplicação dos sólitons em CBE pode ajudar na construção de novos giroscópios para navegação super precisa, e criação de relógios atômicos (SILVA, 2008).

Essa teoria também pode ser aplicada na construção de músculos artificiais. A possibilidade de construir músculos artificiais baseados em sólitons é devida a capacidade de transportar cargas elétricas ao longo de um polímero orgânico. Ao contrario de outros músculos artificiais, osque são acionados por sólitons poderão ser mil vezes mais rápidos que os músculos humanos¹.

¹ Disponível em www.inovacaotecnologica.com.br. Acessado em 10/07/2006.

3 TEORIAS QUE APRESENTAM SÓLITONS

A equação de Korteweg e de Vries, ou simplesmente equação KdV, tem esse nome em homenagem aos pesquisadores holandeses que a descobrirão. A KdV, é uma das mais importantes equações de sistemas integráveis (junto com a equação de Schrödinger não-linear). A priori, ela foi escrita para modelar a propagação de uma onda longa (amplitude muito maior que seu comprimento) em um canal raso (comprimento muito maior que profundidade) (TODDA, 1989). O que eles fizeram, foi tomar a equação básica de dinâmica dos fluidos, a equação de Navier-Stokes, e considerar uma expansão perturbativa para a propagação de uma onda com características descritas anteriormente.

A equação KdV é uma equação com grandes características de universalidade, ou seja, aparece em muitos contextos distintos. No entanto, ela passou muito tempo ignorada, até que Fermi, Pasta e Ulam, estudando os modos de propagação de ondas em redes cristalinas com acoplamento fracamente não-linear, a redescobriram (FERMI; PASTA; ULAM, 1955). Aparece também em teoria de espalhamento quântico e no estudo de fluxo de Toda. A KdV é a equação mais elementar que inclui efeitos não-linear e dispersivo.

Tem-se também a equação modificada da KdV que é conhecida como mKdV. Ela é aplicada em diversas áreas da física, por exemplo; ela aparece no contexto das ondas eletromagnéticas, em filmes de tamanhos quantizados, em colisão de plasmas (KHATER; EL-KAKAAWY; CALLEBAUT, 1968), em rede de fônons harmônicos (ONO, 1962). É encontrada também em interfaces de ondas entre dois líquidos com profundidade variando gradualmente (HELFRICH et al., 1984), em linhas de transmissão, em barreira de Schottky (ZIEGLER et al., 2001), em íons (solíton) acústicos (LONNGREN, 1998; TAJIRA; NISHIHARA, 2001; WATANABE, 1984), médias elásticas (MATSUTANI, 1991) e por fim é aplicada em problemas de fluxo de tráficos (NAGATANI, 1999).

3.1 A Equação KdV

Agora, será visto como é possível encontrar a solução da KdV usando ondas viajantes. A equação é

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0. \quad (3.1)$$

Observe que na equação (3.1) o termo não-linear é positivo, diferentemente da equação (2.12), no entanto, essa escolha é irrelevante, visto que não altera os cálculos e a solução é a mesma. Supondo que essa equação admite solução do tipo onda viajante, isto é,

$$u(x,t) = u(kx - \omega t) = u(z), \quad (3.2)$$

onde $z = kx - \omega t$. Sendo \vec{k} o vetor propagação de onda, e c a velocidade da onda. Isso resulta na seguinte equação,

$$k^3 u_{zzz} - \omega u_z + 6kuu_z = 0, \quad (3.3)$$

ou seja, obtêm-se uma EDO. Então, pode ser reescrita da forma

$$\frac{d}{dz} \left[k^2 \frac{d^2 u}{dz^2} - \left(\frac{\omega}{k} u - 3u^2 \right) \right] = 0. \quad (3.4)$$

Integrando essa equação, encontra-se

$$k^2 \frac{d^2 u}{dz^2} = \frac{\omega}{k} u - 3u^2 + \beta = \frac{dV(u)}{du}, \quad (3.5)$$

onde β é uma constante de integração. E $V(u)$ é chamado de “potencial associado”, visto que não se trata do potencial do sistema no sentido literal, mas sim, de uma definição útil como será vista mais adiante.

Assim, multiplicando a Equação (3.5) pelo fator integrante du/dz produz

$$k^2 \frac{du}{dz} \frac{d^2 u}{dz^2} - \frac{\omega}{k} u \frac{du}{dz} + 3u^2 \frac{du}{dz} = \beta \frac{du}{dz},$$

então

$$\frac{d}{dz} \left[\frac{k^2}{2} \left(\frac{du}{dz} \right)^2 - \frac{\omega}{2k} u^2 + u^3 - \beta u \right] = 0.$$

Integrando novamente, obtêm-se

$$\frac{k^2}{2} \left(\frac{du}{dz} \right)^2 = \frac{\omega}{2k} u^2 - u^3 + \beta u + \gamma = V(u), \quad (3.6)$$

onde γ é uma segunda constante de integração. Dessa equação, observa-se que o potencial associado é da seguinte forma

$$V(u) = \frac{\omega}{2k} u^2 - u^3 + \beta u + \gamma.$$

Impondo as condições de contorno

$$u|_{\pm\infty} = \frac{du}{dz}|_{\pm\infty} = \frac{d^2u}{dz^2}|_{\pm\infty} \rightarrow 0,$$

quando $z \rightarrow \pm\infty$, implica que $\beta = \gamma = 0$. Assim, da equação (3.6), resulta

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^2 = \frac{2}{k^2} \left(\frac{\omega}{2k} - u\right) u^2,$$

ou

$$\frac{du}{dz} = \frac{u}{k} \left(\frac{\omega}{k} - 2u\right)^{1/2}.$$

Fazendo $c = \omega/k$ e uma separação de variáveis, chega-se

$$\int \frac{du}{u\sqrt{c-2u}} = \pm \frac{1}{k} \int dz. \quad (3.7)$$

Escolhendo uma mudança de variável em que

$$u = \frac{c}{2} \operatorname{sech}^2 \theta \Rightarrow du = c \operatorname{sech}^2 \theta \tanh \theta d\theta. \quad (3.8)$$

Substituindo (3.8) em (3.7), resulta

$$\theta = \frac{\sqrt{c}}{2} \left(\frac{z}{k} - x_0\right), \quad (3.9)$$

onde x_0 é outra constante de integração, que significa um deslocamento de fase que indica a posição da onda no instante $t = 0$. Substituindo (3.9) em (3.8) obtêm-se

$$u(z) = \frac{c}{2} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{\sqrt{c}}{2} \left(\frac{z}{k} - x_0\right) \right].$$

Se for feito $u = 0$ em $x = 0$ e $t = 0$, levando em conta que as quantidades $A = c/2$ e $c = 4k^2$ a solução é

$$u(x,t) = A \operatorname{sech}^2(kx - \omega t), \quad (3.10)$$

onde $\omega = 4k^3$ é a frequência angular. A solução acima do tipo onda solitária, é o sóliton da KdV que só existe se $c > 0$.

3.2 A Equação mKdV

De maneira análoga ao que foi feito para a equação KdV, é possível fazer para a mKdV. Essa equação tem a seguinte forma

$$u_t + 6u^2 u_x + u_{xxx} = 0. \quad (3.11)$$

Usando novamente o fato de que a equação admite solução do tipo onda viajante, resulta

$$k^3 u_{zzz} - \omega u_z + 6ku^2 u_z = 0, \quad (3.12)$$

ou seja, obtêm-se uma EDO. Então,

$$\frac{d}{dz} \left[k^2 \frac{d^2 u}{dz^2} - \left(\frac{\omega}{k} u - 2u^3 \right) \right] = 0. \quad (3.13)$$

Integrando essa equação, encontra-se

$$k^2 \frac{d^2 u}{dz^2} - \frac{\omega}{k} u + 2u^3 = \beta, \quad (3.14)$$

onde β é uma constante de integração.

Assim, multiplicando a Equação (3.14) pelo fator integrante du/dz , produz

$$k^2 \frac{du}{dz} \frac{d^2 u}{dz^2} - \frac{\omega}{k} u \frac{du}{dz} + 2u^3 \frac{du}{dz} = \beta \frac{du}{dz}, \quad (3.15)$$

então

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dz} \left[k^2 \left(\frac{du}{dz} \right)^2 - \frac{\omega}{k} u^2 + u^4 - 2\beta u \right] = 0.$$

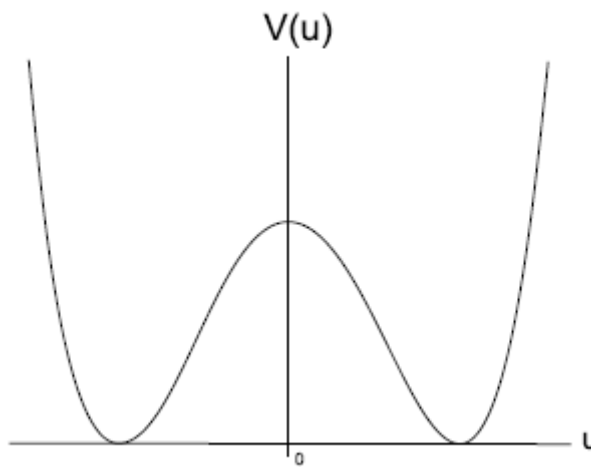
Integrando novamente, obtêm-se

$$k^2 \left(\frac{du}{dz} \right)^2 = \frac{\omega}{k} u^2 + u^4 + 2\beta u + \gamma = V(u), \quad (3.16)$$

onde γ é uma segunda constante de integração. Dessa equação, observa-se que o potencial associado dessa equação é da seguinte forma:

$$V(u) = \frac{\omega}{k} u^2 + u^4 + 2\beta u + \gamma.$$

Figura 6 – Representação esquemática do potencial associado descrito pela mKdV.



Fonte: Silva (2008)

Impondo as condições de contorno, ou seja

$$u \Big|_{\pm\infty} = \frac{du}{dz} \Big|_{\pm\infty} = \frac{d^2u}{dz^2} \Big|_{\pm\infty} \rightarrow 0,$$

quando $z \rightarrow \pm\infty$, implica que $\beta = \gamma = 0$. Assim, da Equação (3.16) resulta que

$$\left(\frac{du}{dz} \right)^2 = \frac{1}{k^2} \left(\frac{\omega}{k} + u^2 \right) u^2,$$

ou

$$\frac{du}{dz} = \pm \frac{u}{k} \left(\frac{\omega}{k} + u^2 \right)^{1/2}.$$

Fazendo uma separação de variáveis para resolver essa equação, tem-se

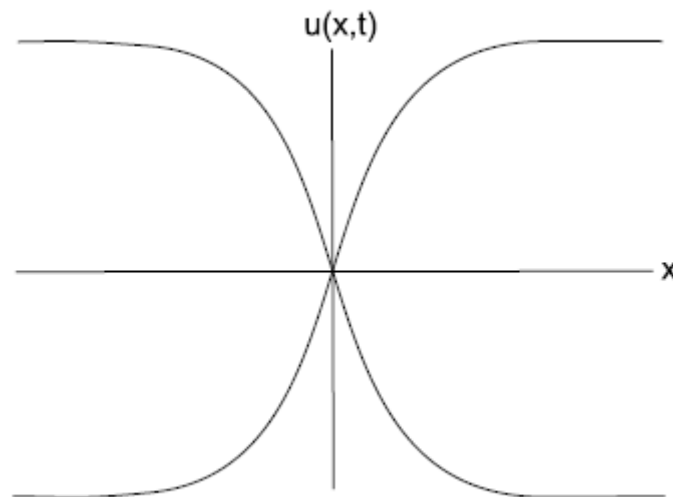
$$\int \frac{du}{\frac{u}{k} \sqrt{\frac{\omega}{k} + u^2}} = \pm \int dz. \quad (3.17)$$

Escolhendo uma mudança de variável e resolvendo a integral, encontra-se a solução tipo sóliton para a mKdV dada por

$$u(x,t) = \pm k \tanh(kx - \omega t), \quad (3.18)$$

onde a frequência angular é $\omega = -2k^3$. É possível notar que a solução possui dois sinais e o significado disso é que essa função é invariante diante a transformação $u \rightarrow -u$ como ilustra a Figura 7. Isso é possível devido à forma do potencial associado, ilustrado na Figura 6, da mKdV possuir potências par u^2 e u^4 (SILVA, 2008).

Figura 7 – Representação esquemática do sóliton da equação mKdV.



Fonte: Silva (2008)

3.3 A Equação de Boussinesq

É uma equação de quarta ordem, também não linear (BOUSSINESQ, 1872). E possui a seguinte forma

$$u_{tt} - u_{xx} - (u^2)_{xx} - u_{xxxx} = 0, \quad (3.19)$$

onde o potencial associado é

$$V(u) = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\omega}{k} \right)^2 - 1 \right) u^2 - u^3 + \beta u + \gamma. \quad (3.20)$$

Sendo β e γ constantes de integração. A solução tipo onda viajante para essa equação é

$$u(x, t) = 2k^2 \operatorname{sech}^2 \left(kx \mp k\sqrt{4k^2 + 1}t \right) \quad (3.21)$$

Essa é a única solução tipo sóliton para a equação Boussinesq.

4 MÉTODO DE DEFORMAÇÃO

A seguir, será visto como o método funciona, ou seja, como encontrar as soluções da KdV e mKdV utilizando esse método que é simples e bastante útil.

4.1 Uma Abordagem sobre o Método

Seja um sistema dinâmico descrito por uma equação diferencial na variável u , que descreve a dinâmica do sistema, e que dependa das variáveis independentes x e t . Considerando que ele admita solução do tipo onda viajante

$$u(x, t) = u(kx - \alpha t). \quad (4.1)$$

Na teoria de campos, para um campo escalar unidimensional estático (SILVA, 1996), têm-se a seguinte relação

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{dV(u)}{du}, \quad (4.2)$$

em que $V(u)$ é chamado de potencial. Aqui, será chamado de potencial associado², pois não possui nenhum significado de potencial como no sentido usual.

Supondo que um novo sistema na variável dinâmica v também admite solução do tipo onda viajante

$$v(x, t) = v(kx - \alpha t). \quad (4.3)$$

Analogamente ao caso anterior, a equação em segunda ordem desse sistema fornece

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{d\tilde{V}(v)}{dv}. \quad (4.4)$$

Fazendo uma importante observação; se existir uma função inversível, que relaciona a duas variáveis dinâmicas, que será conhecida como função deformadora, tal que

$$u = g(v). \quad (4.5)$$

² O Potencial Associado é apenas uma definição útil para a aplicação do método.

Então o potencial associado para o novo sistema será dado por

$$\tilde{V}(v) = \frac{V(g(v))}{[g'(v)]^2}, \quad (4.6)$$

onde

$$g'(v) = \frac{dg}{dv}. \quad (4.7)$$

A equação (4.6) pode ser obtida através do seguinte procedimento: multiplicando a Equação (4.2) por du/dx (fator integrante), resulta em

$$\frac{du}{dx} \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{du}{dx} \frac{dV(u)}{du} \Rightarrow \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 \right] = \frac{d}{dx} V(u). \quad (4.8)$$

Logo,

$$\frac{1}{2} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 = V(u) \Rightarrow \frac{du}{dx} = \pm \sqrt{2V(u)}. \quad (4.9)$$

Observe que essa equação satisfaz a Equação (4.2) que é de segunda ordem. Analogamente, multiplicando a Equação (4.4) em segunda ordem pelo fator integrante dv/dx , resulta em

$$\frac{dv}{dx} = \pm \sqrt{2\tilde{V}(v)}. \quad (4.10)$$

Assim, derivando a função deformadora (4.5), obtêm-se

$$\frac{du}{dx} = \frac{dg}{dv} \frac{dv}{dx}. \quad (4.11)$$

Substituindo (4.9) e (4.10) em (4.11), encontra-se

$$\pm \sqrt{2V(u)} = \pm \sqrt{2\tilde{V}(v)} \frac{dg}{dv} \Rightarrow \tilde{V}(v) = \frac{V(g(v))}{[g'(v)]^2}. \quad (4.12)$$

É importante sempre fazer a substituição $u \rightarrow g(v)$ para o potencial associado da equação com solução conhecida para que o potencial associado obtido por deformação fique em termos de v .

Portanto, encontrando o potencial associado do sistema deformado, ou seja, através da função deformadora e comparando com o potencial associado dado por (4.4) nota-se que, se existir uma solução do tipo onda viajante para o sistema na variável v , será dada por

$$v(x,t) = g^{-1}(u(x,t)) \Rightarrow v(kx - \omega t) = g^{-1}(u(kx - \omega t)). \quad (4.13)$$

É relevante observar que para o primeiro sistema (4.2) não é exigido uma função deformadora (que possui solução conhecida), e sim, para o segundo (4.4) do qual se pretende construir a solução. De modo geral, sempre que for possível construir a equação (4.4) através da função deformadora, partindo da Equação (4.2), a solução para o novo sistema será dada por (4.13).

Será feito alguns exemplos em que é possível observar o quanto esse método é eficaz e útil para construir soluções do tipo ondas viajantes para sistemas não lineares que geralmente, são muito difíceis de serem resolvidos. Nessa discussão, nota-se que o sistema não precisa ser integrável para que o método funcione. No entanto, o método é mais eficaz no caso em que os sistemas são integráveis.

4.2 Aplicação do Método

4.2.1 Solução para a KdV e mKdV

Nessa seção serão construídas soluções para equações não-lineares a partir de um sistema linear. Considerando a seguinte equação linear de terceira ordem

$$u_t + u_{xxx} = 0, \quad (4.14)$$

cuja solução tipo onda viajante é

$$u(x,t) = A \cos(kx - \omega t), \quad (4.14)$$

onde a relação de dispersão é $\omega(k) = k^3$, que é a frequência, e A é a amplitude. A equação de segunda ordem nesse caso é

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -\frac{\omega}{k}u = \frac{dV(u)}{du}, \quad (4.15)$$

que resolvendo essa equação para $V(u)$, têm-se

$$V(u) = -\frac{k^2}{2}u^2 + \gamma, \quad (4.16)$$

onde γ é uma constante de integração.

Porém, busca-se obter a solução não-trivial da equação KdV, que será o novo sistema, cuja solução “não é conhecida”. Para isso, encontra-se o potencial associado da KdV, que será dada por

$$v_t + 6vv_x + v_{xxx} = 0, \quad (4.17)$$

E que seja do tipo $v(x, t) = v(kx - \tilde{\omega}t)$, onde o potencial associado já foi encontrado na seção 3, portanto

$$V(v) = \frac{\tilde{\omega}}{2k}v^2 - v^3 + \tilde{\beta}v + \tilde{\gamma}, \quad (4.18)$$

sendo $\tilde{\beta}$ e $\tilde{\gamma}$ constantes de integração. Escolhendo uma função deformadora

$$u = g(v) = A \cos \left[\operatorname{sech}^{-1} \sqrt{\frac{v}{2k^2}} \right], \quad (4.19)$$

e escolhendo $\gamma = A^2k^2/2$. Têm-se que o potencial associado (4.12), obtido por deformação, é

$$\tilde{V}(v) = \frac{V(g(v))}{[g'(v)]^2} = \frac{\left\{ \frac{A^2k^2}{2} - \frac{A^2k^2}{2} \cos^2 \left[\operatorname{sech}^{-1} \sqrt{\frac{v}{2k^2}} \right] \right\}}{\frac{A^2k^2}{2} \sin^2 \left[\operatorname{sech}^{-1} \sqrt{\frac{v}{2k^2}} \right]} (2k^2v^2 - v^3). \quad (4.20)$$

Lembrando que $V(u) = V(g(v))$, logo

$$\tilde{V}(v) = 2k^2v^2 - v^3, \quad (4.21)$$

que é o potencial da teoria não conhecida que se pretende encontrar a solução.

Comparando (4.21) com (4.18), obtêm-se $\tilde{\beta} = \tilde{\gamma} = 0$ e $\tilde{\omega}(k) = 4k^3$, assim, os potenciais são equivalentes. Portanto, a solução para a KdV será a inversa da função deformadora (4.19). Então

$$v(x, t) = g^{-1}(u(x, t)) = 2k^2 \operatorname{sech}^2(kx - 4k^3 t), \quad (4.22)$$

essa é a solução do tipo sóliton para a KdV, que é uma solução não-trivial.

Ademais, busca-se encontrar também a solução para mKdV com esse método

$$v_t + 6v^2 v_x + v_{xxx} = 0, \quad (4.23)$$

do tipo

$$v(x, t) = v(kx - \tilde{\omega}t), \quad (4.24)$$

onde o potencial associado, encontrado na sessão 3, é

$$\tilde{V}(v) = \frac{\tilde{\omega}}{2k} v^2 + \frac{v^4}{2} + \tilde{\beta}v + \tilde{\gamma}. \quad (4.25)$$

Fazendo a escolha da função deformadora, na forma

$$u = g(v) = \pm A \cos \left[\tanh \left(\frac{v}{k} \right) \right]. \quad (4.26)$$

Escolhendo $\gamma = A^2 k^2 / 2$. Tem-se que o potencial associado (4.12), obtido por deformação, é encontrado fazendo

$$\tilde{V}(v) = \frac{V(g(v))}{[g'(v)]^2} = \frac{\left\{ -\frac{k^2 A^2}{2} \cos^2 \left[\tanh^{-1} \left(\frac{v}{k} \right) \right] + \gamma \right\}}{A^2 \sin^2 \left[\tanh^{-1} \left(\frac{v}{k} \right) \right]} k^2 \left(1 - \frac{v^2}{k^2} \right)^2, \quad (4.28)$$

logo

$$\tilde{V}(v) = \frac{k^4}{2} - k^2 v^2 + \frac{v^4}{2}, \quad (4.29)$$

assim, comparando com (4.25), observa-se que serão iguais quando

$$\tilde{\gamma} = \frac{k^4}{2}, \quad \tilde{\beta} = 0, \quad \tilde{\omega} = -2k^3.$$

Portanto, a solução para a mKdV será dada pela inversa da função deformadora (4.26),

$$v(x,t) = g^{-1}[u(kx - \tilde{\omega}t)] = \pm k \tanh(kx + k^3 t). \quad (4.30)$$

4.2.2 Solução para a mKdV a partir da KdV

Na sessão anterior foi possível construir uma solução para uma equação não-linear a partir de uma equação linear, que é mais simples de resolver. Nessa sessão, nota-se que é possível construir uma solução do tipo sóliton para um sistema integrável não-linear a partir de uma solução tipo sóliton de outro sistema não-linear, também integrável. Nesse caso, considere que o sistema não linear seja dado pela KdV,

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0, \quad (4.31)$$

cuja solução é

$$u(x,t) = 2k^2 \operatorname{sech}^2[k(x - 4k^2 t)] \quad (4.32)$$

Como já foi apresentado anteriormente, o potencial associado para a KdV é

$$V(u) = 2k^2 u^2 - u^3, \quad (4.33)$$

onde as constantes de integração são nulas, devido a análise assintótica, ou seja, as condições de contorno. O outro sistema, o qual está sendo construído a solução, será a mKdV

$$v_t + 6v^2 v_x + v_{xxx} = 0, \quad (4.34)$$

onde o potencial associado é

$$\tilde{V}(v) = \frac{\tilde{\omega}}{2k} v^2 + \frac{v^4}{2} + \tilde{\beta}v + \tilde{\gamma}. \quad (4.35)$$

Usando uma função deformadora, dada por

$$u(kx - \tilde{\omega}t) = g[v(kx - \tilde{\omega}t)] = 2(k^2 - v^2), \quad (4.36)$$

chega-se ao resultado

$$\tilde{V}(v) = \frac{V(g(v))}{(g'(v))^2} = \frac{k^4}{2} - k^2 v^2 + \frac{v^4}{2}. \quad (4.37)$$

Mas, (4.37) e (4.35) serão iguais apenas, se

$$\tilde{\gamma} = \frac{k^4}{2}, \quad \tilde{\beta} = 0, \quad \tilde{\omega} = -2k^3.$$

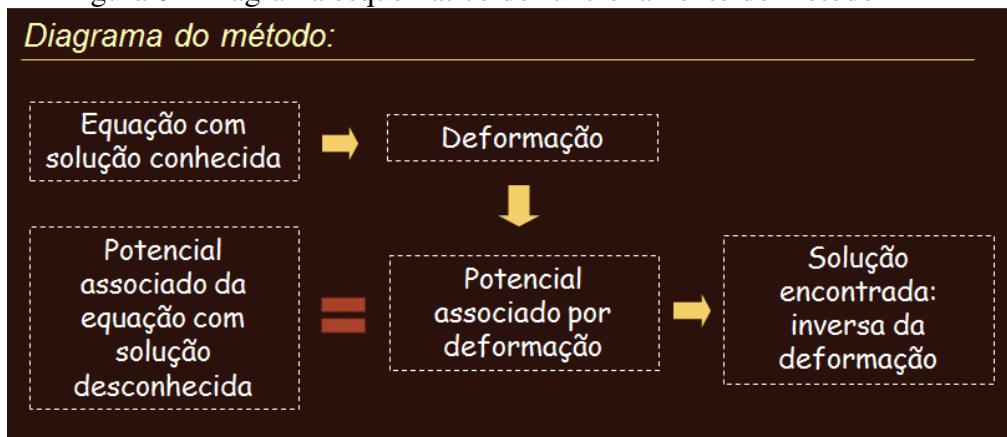
Então, a solução para a mKdV será

$$v(x,t) = g^{-1}[u(kx - \tilde{\omega}t)] = \pm k \tanh(kx + k^3t). \quad (4.38)$$

Como foi visto na Equação (4.30).

Portanto, com esse método é possível encontrar soluções não-triviais para equações extremamente complicadas a partir de uma equação com solução simples. De modo geral, basta partir de uma equação com solução conhecida (mesmo que seja não-linear), como no caso da KdV.

Figura 8 - Diagrama esquemático do funcionamento do método



5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Torna-se notável que a teoria linear é limitada cujas soluções encontradas são triviais e que não abrange múltiplos fenômenos da natureza, dos quais são governados por teorias não-lineares. A teoria dos sólitons é uma das descobertas mais espetaculares da física-matemática. Pois, além das diversas aplicações e da riqueza matemáticas envolvida, trata também de um dos maiores paradigmas da física, a dualidade onda-partícula. O sucesso dessa teoria trouxe avanços em novas tecnologias como: fabricação de fibras ópticas, construção de lasers com sólitons, criação de cristais fotônicos não lineares, condensação de vapores de átomos de metais alcalinos, avanços no estudo experimental dos plasmas e diversos sistemas em física da matéria condensada.

As equações nesse trabalho, do ponto de vista matemático, são equações integráveis. No entanto, os sólitons possuem um sentido mais generalizado, abrangendo todas as ondas solitárias, mesmo que as equações não sejam integráveis. Além disso, o método também é aplicado para equação de segunda ordem, contudo, os cálculos são feitos ligeiramente diferente. Os fenômenos não-lineares não aparecem unicamente na Física e Matemática, mas também em outras áreas, como na Biologia, Química, Geofísica etc.

Resolver equações não-lineares nem sempre é simples e exige bastante técnica e muito trabalho, pois a maioria dos procedimentos possui certa dificuldade de manuseio. No entanto, uma ferramenta útil e simples é método de deformação. Pois, a partir de uma equação com solução conhecida é possível construir uma solução não-trivial para uma equação da qual não se sabe a solução.

Dessa forma, a partir de tudo o que foi visto nota-se a simplicidade desse método. Possibilitando a construção de soluções para sistemas não-lineares partindo de uma solução conhecida, que pode ser linear ou não-linear. Vale salientar, que as equações aqui abordadas eram integráveis, porém não necessariamente elas devem ser para que o método funcione, poderia simplesmente não ser integráveis.

REFERÊNCIAS

ABLOWITZ, M. J.; CLARKSON, P. A. **“Sólitos, Nonlinear Evolution Equation and Inverse Scattering”**. London Mathematical Society Lecture Note Series. Vol. 149, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

ARFKEN, G. B.; WEBER, H. J. **Física Matemática**. New York: Academic Press, 2007.

BAZEIA, D; DAS, A.; LOSANO, L.; SILVA, A. **Annals Of Phys.** 323, 1150, 2008.

BOUSSINESQ, J. **Journal de Mathématique Pures et Appliquées.** 7, 55, 1872.

BRITON, N. F. **Reaction – Diffusion Equations and Their applications to Biology**. New York: Academic, 1986.

CHALUB, F.; ZUBELLI, J. **Sólitos: Na Crista da Onda por Mais de 100 anos**. IMPA, 2000.

DRAZIN, P. G.; JOHNSON, R. S. **Sóliton: an introduction**, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

EPSTEIN, I. R.; POJMAN, J. A. **An Introduction to Nonlinear Chemical Dynamics**. Oxford, New York, 1998.

FERMI, E.; PASTA, J. R.; ULAM, S. M. **Studies on nonlinear problems**. Technical Report LA-1940, Los Alamos Sci. Lab. 1955.

FLASCHKA, H. **On the Toda lattice. II. Inverse-scattering solution**. Progress, Theoret Physics., 51:703-716, 1974.

GALLÉAS, D. W.; YMAI, L. H., NATTI, P. L., TAKAO NATTI, E. R., **Ondas do tipo sólitons em Guias Dielétricos, Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 25, n. 3, Setembro, 2003.

GARDNER, C. S.; GREENE, J. M.; KRUSKAL, M. D.; MIURA, R. M. **Method for solving the Korteweg-de Vries equation**. Physics Review Letters., 19: 1095-1097, 1967.

HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos de Física**, v. 4, 8 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009.

HELFRICH, K. R.; MELVILL, W. K.; MILES, J.W. **J. Fluid Mech.** 149, 305.1984.

KHATER, A. H.; EL-KAKAAWY, O. H.; CALLEBAUT, D. K. **Physics Scr.** 58, 585. 1986.

KORTEWEG, D. J.; VRIES, G. de, **Phil.Mag**, P.39, 422, 1895.

LONNGREN, K. E. **Opt. Quantum Electron.** 30, 615. 1998.

- MATHIEU, P. **Supersymmetric extension of the Korteweg-de Vries equation**, Journal of Mathematical Physics. 29. 2499-2506. 1988.
- MATHIEU, P. **Superconformal algebra and supersymmetric Korteweg-de Vries equation**, Physics Letters B203 287-291.1988.
- MATSUTANI, S.; TSURU H. **J. phys. Soc. Jpn.** 60, 3640. 1991.
- MURRAY, J. D., **Mathematical Biology**, second, corrected edition. Berlin: Springer, 1993.
- NAGATANI, T. **Physics A** 264, 581. 1999.
- ONO, H. J. **Phys. Soc. Jpn.** 61, 4336. 1962.
- RUSSEL, J. S. **“Report of the fourteenth meeting of the British Association for the Advancement of Science”**.Sept. 1844, Plates XLVII-LVII: 311. York, 1845.
- SILVA, A. **Vórtices em Sistemas Planares**.1996. 58f. Dissertação (Mestrado em Física)-Departamento de Física, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 1996.
- SILVA, A. **Método para Gerar Soluções do Tipo Ondas Viajantes em Equações Diferenciais**. 2008. Tese de Doutorado - Departamento de Física – Universidade Federal da Paraíba - UFPB. João Pessoa, 2008.
- SOUSA, M. S. M. **Uma introdução sobre a teoria dos sólitons**. 2011. Monografia (Trabalho de conclusão de curso) - Departamento de Física - Universidade Estadual da Paraíba. Campina Grande, 2011.
- TAJIRI, M.; NISHIHARA, K. **J. phys. Soc. Jpn.** 54, 572. 2001.
- TODDA, M. **Nonlinear waves and sólitons**. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, Translated from the Japanese, 1989.
- WATANABE, S. **J. Phys. Soc. Jpn.** 53, 950.1984.
- ZABUSKY, N. J.; KRUSKAL, M. D. **“Interactions of sólitons in a collisionless plasma and the recurrence of the initial states”**. Physics Review Letters. 15, 240-243, 1965.
- ZIEGLER, V.; DINKEL, J.; SETZER, C.; LONNGREN, K.E. **Chaos, Sólitons Fractals**. 12, 1719. 2001.