UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
COORDENAÇÃO DE MATEMÁTICA

EMANUELA RÉGIA DE SOUSA COELHO

Introdução à Integral de Lebesgue

Campina Grande, PB
Julho de 2012

EMANUELA RÉGIA DE SOUSA COELHO

INTRODUÇÃO À INTEGRAL DE LEBESGUE

Trabalho de Conclusão do Curso Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba. Em cumprimento às exigências para obtenção do Título de Licenciada em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. ALDO TRAJANO LOURÊDO

Campina Grande, PB
Julho de 2012

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL – UEPB

C650i Coelho, Emanuela Régia de Sousa.

Introdução à Integral de Lebesgue [manuscrito] / Emanuela Régia de Sousa Coelho. – 2012.

59 f. : il.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2012.

"Orientação: Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo. Departamento de Matemática".

1. Matemática – Teoria dos Números. 2. Teoria da Integração. 3. Integral de Lebesgue. 4. Integral de Riemann. I. Título.

21. ed. CDD 512.7

EMANUELA RÉGIA DE SOUSA COELHO

INTRODUÇÃO À INTEGRAL DE LEBESGUE

Trabalho de Conclusão do Curso Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba. Em cumprimento às exigências para obtenção do Título de Licenciada em Matemática.

BANCA EXAMINADORA:

Aldo Trajano Lourêdo

Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo
Departamento de Matemática - CCT/UEPB
Orientador

Luciana Roze de Freitas

Profa. Dra. Luciana Roze de Freitas
Departamento de Matemática - CCT/UEPB
Examinador

Joselma Soares dos Santos

Profa. Ms. Joselma Soares dos Santos
Departamento de Matemática - CCT/UEPB
Examinador

Campina Grande, Julho de 2012

Dedicatória

Aos anjos que me protegem diariamente:

mainha e painho.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a quem me incentiva diariamente a correr atrás dos meus sonhos e me permite fazer isso: meus pais, Alda e Enoque, o casal mais humano que conheço.

Aos amigos que caminharam comigo em alguns momentos importantes dessa trajetória: Lincoln, Diego, Jaqueline, Klécio, Jairo, Vanlex, Dani e Danilo seres mais que especiais.

Aos meus irmãos, Anderson pela compreensão e apoio e Alvaro pelo abraço apertado na volta pra casa.

As professoras Luciana e Joselma por aceitarem examinar este trabalho.

Por fim, agradeço especialmente ao professor Aldo Trajano, pelos 2 anos de orientação em Iniciação Científica e, mais que isso, pelo exemplo de ser humano e de profissional que é. Agradeço pela paciência, apoio, incentivo e, principalmente, por acreditar e confiar no meu trabalho.

Resumo

A teoria de Lebesgue foi a primeira tentativa frutífera de organização matemática da noção de integral e, nesse sentido, costuma-se dizer que a teoria da integração foi criada no século XX. O conceito de Integração de Lebesgue revolucionou a Análise Matemática, não apenas pelo fato de se basear numa teoria de medida, mas por ser muito mais aplicável que os conceitos de Riemann usados até então. Este trabalho trata de apresentar a integral introduzida por Lebesgue, bem como fazer uma breve comparação entre esta e a integral de Riemann. Dividimos o texto em três partes onde, no primeiro capítulo apresentamos alguns dos principais resultados sobre quadraturas ao longo da história que culminam com a Integral de Lebesgue; no segundo capítulo introduzimos o conceito de medida de Lebesgue para então definirmos sua Integral e, por fim, faremos uma comparação entre as integrais de Riemann e Lebesgue, apresentando a ideia da construção da integral feita por Lebesgue e o resultado que garante que a classe das funções integráveis à Riemann está contido na classe das funções integráveis à Lebesgue.
Palavras-Chave: Teoria da Integração; Integral de Lebesgue; Integral de Riemann; Teoria da Medida.

Abstract

Lebesgue's theory was the first attempt to organize fruitful mathematical concept of the integral and, accordingly, it is said that the theory of integration was created in the twentieth century. The concept of Lebesgue Integration revolutionized the Analysis Mathematics, not only because it is based on a theory of measure, but because it is much more applicable than the concepts of Riemann used hitherto. This work aims to present the integral introduced by Lebesgue, as well as a brief comparison between this and the Riemann integral. We divide the text into three parts where the first chapter we present some of the main results on squares throughout history culminating in the Lebesgue Integral, in the second chapter we introduce the concept of Lebesgue measure and then define its integral, and finally, we will compare the integrals of Riemann and Lebesgue, presenting the idea of construction of the Lebesgue integral and the result by ensuring that the class of Riemann integrable functions is contained in the class of the Lebesgue integrable functions.
Keywords: integration theory, Lebesgue Integral, Riemann Integral, Measure Theory.

Sumário

Introdução

Pode-se dizer que Lebesgue criou a primeira teoria da integração de fato. Várias definições, teoremas e exemplos antecederam seu trabalho, mas não tinham a consistência e a completude de uma verdadeira teoria. No entanto, estes resultados anteriores contribuíram diretamente para a elaboração de uma teoria sofisticada de integração. Especificamente, permitiram a Lebesgue ter a medida como ponto de partida à criação de sua integral e forneceram-lhe uma quantidade razoável de problemas teóricos descobertos no estudo da integral de Riemann.

Lebesgue percebeu que a integral de Riemann tem o defeito de só se aplicar em casos excepcionais, pois ela assume não mais que uns poucos pontos de descontinuidade para uma função. Se uma função $y = f(x)$ tem muitos pontos de descontinuidade, então à medida que o intervalos (x_{i-1}, x_i) vão diminuindo, os valores $f(x_{i-1})$ e $f(x_i)$ não se tornam necessariamente próximos. Assim, ao invés de particionar o domínio da função, Lebesgue decompôs a imagem de f em intervalos Δy_i e definiu "somas integrais" a partir dessa decomposição e da medida dos conjuntos dos pontos do domínio tal que a imagem de f esteja contida em Δy_i, tendo o valor da integral quando os comprimentos dos intervalos da decomposição tendem a zero.

As ideias de Lebesgue se afastaram tanto das usadas na época que foram, em principio, refutadas e extremamente criticadas, ou ainda, aceitas com desconfiança (inclusive o próprio Lebesgue foi tomado por dúvidas interiores acerca de seus trabalhos). Porém, com o passar do tempo o valor de suas ideias encontrou constante reconhecimento e a noção de medida e integral no sentido de Lebesgue foi se tornando cada vez mais imprescindível ao desenvolvimento e organização de novas teorias , principalmente, no campo da Análise Matemática.

Este trabalho trata de apresentar a integral introduzida por Lebesgue, bem como fazer uma breve comparação entre esta e a integral de Riemann.

Cabe salientar que nosso trabalho foi baseado nos resultados obtidos no Programa de Iniciação Científica da UEPB, a partir do projeto intitulado "Introdução à Integral de Lebesgue, Análise Funcional e Aplicações". Porém, no desenvolvimento do mesmo nos utilizamos do método de Riesz para a construção da Integral de Lebesgue, o qual não vamos tratar nesse texto, devido aos objetivos traçados para este trabalho.

Assim, dividimos o texto em três partes, onde no primeiro capítulo, nossa proposta é "fazer um passeio" pela história da Teoria da Integração, apresentando alguns dos principais resultados sobre quadraturas que culminam com a Integral de Lebesgue; no segundo capítulo apresentamos alguns resultados acerca da medida de Lebesgue para então introduzirmos sua Integral e, por fim, faremos uma comparação entre as integrais de Riemann e Lebesgue, além de apresentar a ideia da construção da integral feita por Lebesgue e demonstrar o resultado que garante que a classe das funções integráveis à Riemann está contido na classe das funções integráveis à Lebesgue.

Capítulo 1

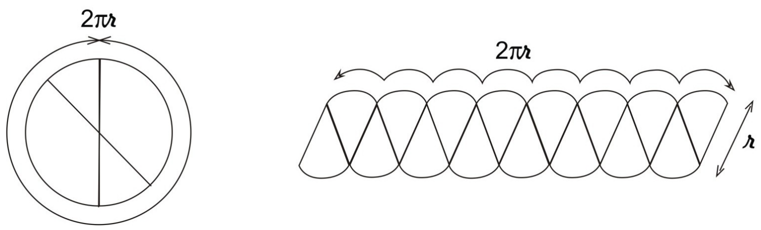
Destaques Históricos

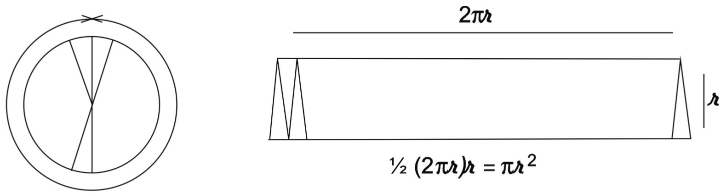
Uma das principais características que diferem a matemática de outras ciências é o fato de que, com o passar do tempo, seus conceitos são sempre extendidos, jamais corrigidos. Cada grande matemático acrescenta algo novo ao já existente, mas nada tem que ser retirado.

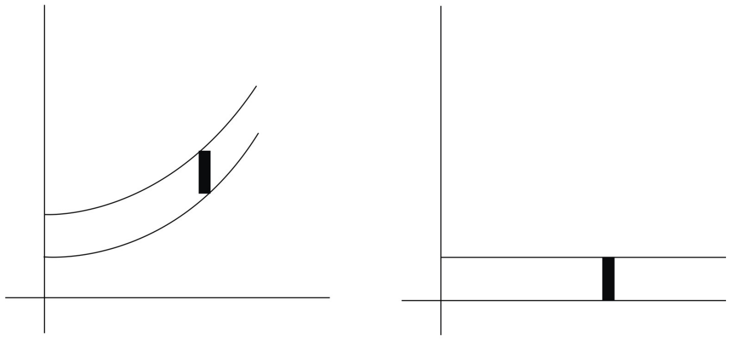
O conceito de integral, como parte dessa história, também obedece a regra: Cada nova ideia é uma extensão da anterior. Por isso, dedicamos este capítulo a uma breve apresentação das maiores descobertas sobre quadraturas que culminam com a integral de Lebesgue.

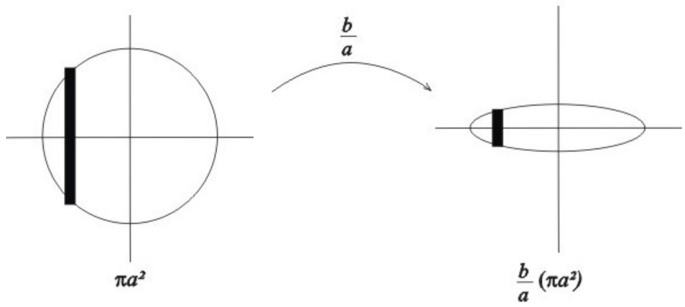
1.1 Rearranjos

Há centenas de anos os matemáticos usam os rearranjos para tentar encontrar a área de regiões curvas. O método consiste em "reorganizar" a figura de modo que fique semelhante a uma imagem cuja área é conhecida. Seguem alguns exemplos desse método.









1.2 Eudoxo (408-355 a.C.) e o Método da Exaustão

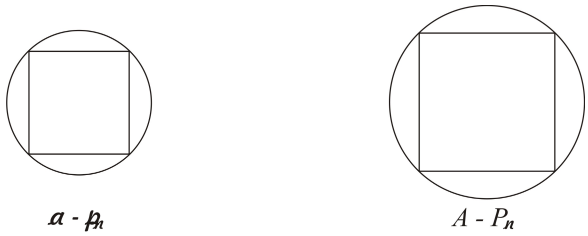
Eudoxo foi o responsável pela noção de aproximação de regiões curvas através de regiões poligonais. Esta noção foi usada para mostrar que as áreas de dois círculos estão uma para a outra como os quadrados de seus diâmetros, o que é óbvio para polígonos regulares. Esse resultado é baseado no famoso Axioma de Eudoxo o qual é apresentado a seguir:

> Se de uma grandeza qualquer subtrairmos uma parte não menor que sua metade e do resto novamente subtrai-se uma parte não menor que a metade e se esse processo de subtração é continuado, finalmente restará uma grandeza menor que qualquer grandeza de mesma espécie.

Em terminologia moderna: Dados M e $\epsilon > 0$, com $0 < \epsilon < M$, considere: $M, M - rM - (1-r)M, (1-r)M - r(1-r)M - (1-r)^2M, ...$, com $\frac{1}{2} < r \leq 1$. O axioma garante que para n suficientemente grande, existe N tal que, $(1-r)^N M < \epsilon$ ou ainda, equivale a dizer que $\lim_{n\to\infty} M(1+r)^n = 0$. Uma consequencia disso, diz que os números naturais não são limitados superiormente.

Retornando ao problema, devemos mostrar que dados os círculos c e C com áreas a e A e diâmetros d e D respectimente, temos $a/A = d^2/D^2$.

Suponha que $a/A > d^2/D^2$, então, existe $a^* < a$, com $0 < a - a^*$ e $a^*/A = d^2/D^2$. Seja $\epsilon < a - a^*$. Inscreva polígonos regulares de áreas p_n e P_n nos círculos c, C e considere as áreas $a - p_n$ e $A - P_n$:



Agora, dobrando o número de lados temos $a - p_{2n} < \frac{1}{2}(a - p_n)$. Logo, em cada fase da duplicação nós subtraimos um valor maior que a metade do valor anterior.

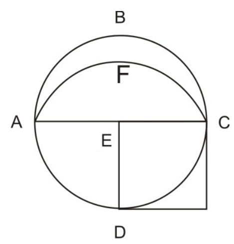
Assim, dobrando sucessivamente o número de lados podemos, pelo Axioma de Eudoxo, determinar N tal que,

$$0 < a - p_N < \epsilon < a - a^*$$

ou seja, temos um polígono regular de N lados inscrito no círculo c, cuja área $p_N > a^*$. Mas, $p_N/P_N = d^2/D^2$ e desde que $a^*/A = d^2/D^2$, então $p_N/P_N = a^*/A$, o que acarreta $P_N > A$. Absurdo, pois P_N é a area de um poligono inscrito no circulo C de área A. De forma análoga mostramos que não pode ser $a/A < d^2/D^2$. Donde podemos concluir $a/A = d^2/D^2$

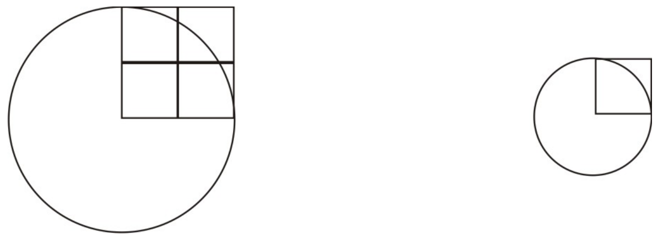
1.3 As lunas de Hipócrates (430 a.C)

Hipócrates de Chios, um comerciante de Atenas, foi um dos primeiros indivíduos a encontrar a área de uma figura plana limitada por curvas. Ele teve grande sucesso na quadratura de certas lunas especiais (uma luna é uma figura limitada por dois arcos circulares de raios diferentes). Como exemplo do trabalho de Hipócrates, observemos a figura abaixo:

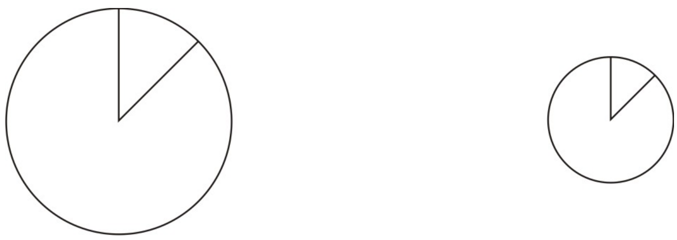


ABC e AFC são arcos circulares de centro E e D, respectivamente. Hipócrates mostrou que a área da região limitada pelos arcos círculares ABC e AFC é exatamente a área do quadrado cujo lado é o raio do círculo. A demonstração depende dos seguintes pressupostos:

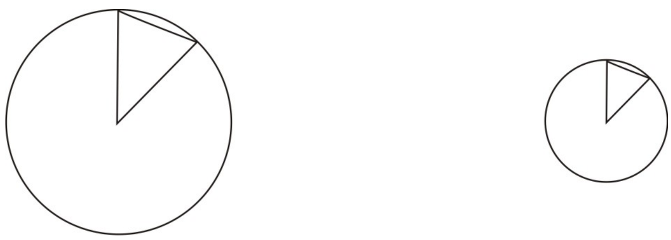
(a) As áreas dos dois círculos estão, uma para a outra, como os quadrados de seus raios.



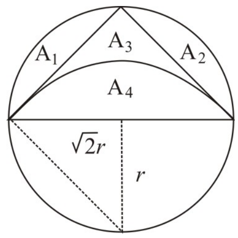
(b) A partir da hipótese anterior concluímos que os setores circulares de mesmo ângulo central dos dois círculos, estão um para o outro como o quadrado de seus raios.



(c) Os segmentos de dois círculos com ângulo central igual estão um para o outro como os quadrados dos seus raios.



Segue, então, o argumento de Hipócrates:



Partindo de (c), temos que $A_1/A_4 = r^2/(\sqrt{2}r)^2 = 1/2$. Assim, $A_1 = \frac{1}{2}A_4$, $A_2 = \frac{1}{2}A_4$ e ainda $A_1 + A_2 = A_4$.

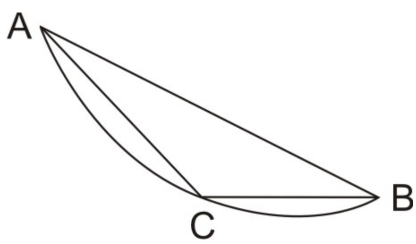
Logo, a área da luna é

$$\begin{aligned} \text{área da luna} &= A_1 + A_2 + A_3 \\ &= A_4 + A_3 \\ &= \text{área do triângulo} \\ &= \frac{1}{2}(\sqrt{2}r)(\sqrt{2}r) \\ &= r^2 \\ &= \text{área do quadrado.} \end{aligned}$$

1.4 Arquimedes (287 - 212 a.C.)

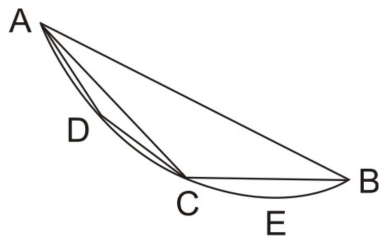
Arquimedes de Saracusa é considerado um dos maiores intelectuais de todos os tempos e o maior matemático da Antiguidade. Um de seus grandes feitos foi resolver a questão de quadrar uma secção cônica, mais especificamente, um segmento de parábola, o qual fez primeiramente pelo método de exaustão de Eudoxo, sendo a prova, por este caminho, longa e elaborada. Arquimedes demonstrou rigorosamente que a área K de um segmento parabólico é $4/3$ da área de um triângulo inscrito ABC, tendo a mesma base e mesma altura. Arquimedes deu, também, uma segunda prova para esse mesmo teorema, diferente da primeira, a qual vamos apresentar a seguir.

Considere um segmento de parábola como o da figura abaixo.



A demonstração segue da seguinte forma: Combinadas, as áreas do triângulos ADC e BEC equivalem a $1/4$ da área do triângulo ACB, isto é,

$$\triangle ADC + \triangle BEC = \frac{1}{4}(\triangle ACB)^1$$



Repetindo o processo na tentativa de "esgotar" a área entre a curva parabólica e o triângulo inscrito, obtemos:

$$\begin{aligned}
\text{K} &= \text{área do segmento parabólico} \\
&= \triangle ACB + \frac{1}{4}(\triangle ACB) + \frac{1}{4}\big(\frac{1}{4}(\triangle ACB)\big) + ... \\
&= \triangle ACB\big(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + ...\big) \\
&= \frac{4}{3}(\triangle ACB)
\end{aligned}$$

1.5 Pierre Fermat (1601 - 1665)

Por volta de 1630, o matemático italiano Cavalieri demonstrou que

$$\int_0^b x^n dx = \frac{b^{n+1}}{n+1}$$

para $n = 1, 2, 3, ..., 9$ usando um argumento geométrico que comparava potências dos segmentos num paralelogramo paralelos à base com as potências correspondentes de segmentos em qualquer dos dois triângulos em que uma diagonal divide o parelogramo.

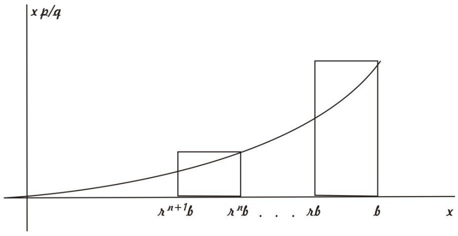
Fermat, então, provou que

$$\int_0^b x^{\frac{p}{q}} dx = \frac{b^{\frac{p}{q}+1}}{\frac{p}{q}+1}$$

onde p/q é um número racional positivo.

O raciocínio de Fermat é apresentado a seguir: Fermat dividiu o intervalo $[0, b]$ numa sequencia infinita de subintervalos com as extremidades da forma br^n, $0 < r < 1$ e ergueu um retângulo de altura $(br^n)^{\frac{p}{q}}$ sobre o intervalo $[br^{n+1}, br^n]$.

[1] O símbolo $\triangle$ está sendo usado para denotar "área de"



Denotando por S_r a soma das áreas dos retângulos, segue que:

$$
\begin{aligned}
S_r &= (b - br)b^{\frac{p}{q}} + (br - br^2)(br)^{\frac{p}{q}} + ... + (br^n - br^{n+1})(br^n)^{\frac{p}{q}} + ... \\
&= b^{\frac{p}{q}+1}(1-r)\left[1 + r^{\frac{p}{q}+1} + r^{(\frac{p}{q}+1)2} + ... + r^{(\frac{p}{q}+1)n} + ...\right] \\
&= \frac{b^{\frac{p}{q}+1}(1-r)}{1 - r^{\frac{p}{q}+1}} \\
&= b^{\frac{p}{q}+1} \frac{\left[1 - (r^{\frac{1}{q}})^q\right]}{(1 - r^{\frac{1}{q}})} \frac{(1 - r^{\frac{1}{q}})}{\left[1 - (r^{\frac{1}{q}})^{p+q}\right]} \\
&= b^{\frac{p}{q}+1} \frac{(1 + r^{\frac{1}{q}} + ... + r^{\frac{q-1}{q}})}{(1 + r^{\frac{1}{q}} + ... + r^{\frac{p+q-1}{q}})} \longrightarrow_{r \to 1} b^{\frac{p}{q}+1} \frac{q}{p+q} \\
&= \frac{b^{\frac{p}{q}+1}}{\frac{p}{q}+1}.
\end{aligned}
$$

1.6 Leibnitz (1646 - 1716); Newton (1642 - 1723)

Durante os séculos dezessete e dezoito a integral foi pensada em sentido descritivo, como uma antiderivada, isso por causa do Teorema Fundamental do Cálculo (TFC), tal como foi desenvolvido por Leibnitz e Newton. Atualmente, Newton e Leibnitz são tidos como os inventores do Cálculo Diferencial, seus trabalhos aperfeiçoaram o método de Arquimedes, lançando as bases do Cálculo Integral.

Uma função particular f definida em $[a, b]$ estava integrada quando encontrava-se uma antiderivada F, isto é, $F' = f$ ou encontrando uma expansão em séries de potências e usando o TFC para integrar termo a termo. A integral de Leibnitz-Newton de f assumia o valor de $F(b) - F(a)$, ou seja,

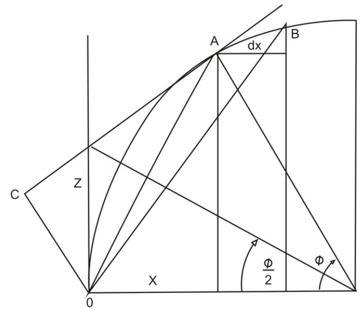
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

onde $F' = f$.

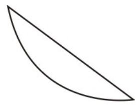
A seguir, apresentaremos um argumento de Leibnitz e um resultado de Newton para mostrar a capacidade desses gênios.

Leibniz mostrou que: $\dfrac{\pi}{4} = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + ...$

Tomando um quarto do círculo $(x-1)^2 + y^2 = 1$, $0 \leq x \leq 1$ cuja área é $\pi/4$:



Leibniz determinou a área do setor circular

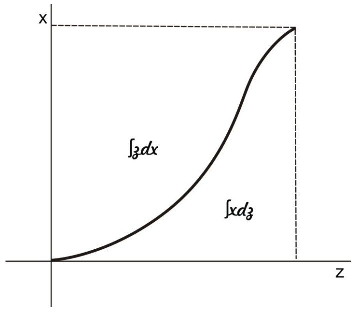


dividindo-a em triângulos infinitesimais OAB, sendo A e B dois pontos próximos, pertencentes a circunferência, e somando suas áreas. (Para estimar a área de OAB, vamos escrever, de agora em diante ΔOAB). Ele traçou a tangente do círculo no ponto A, com a perpendicular, passando pela origem, em C. Então $\Delta OAB \approx 1/2 AB \times OC$. Pelo conhecimento de triângulos semelhantes, $AB/dx = z/OC$, assim $\Delta OAB = 1/2 z dx$.

Note que:

$$x = 1 - \cos\phi = 2\text{sen}^2\frac{\phi}{2} \;\text{ e }\; z = \tan\frac{\phi}{2}$$

isto é, $x = 2z^2/(1+z^2)$. Leibniz sabia que $xz = \int z dx + \int x dz$:



Portanto

$$\begin{aligned}
\text{Área do setor circular} &= \int_0^1 \frac{1}{2} z dx \\
&= \frac{1}{2}\left[xz|_0^1 - \int_0^1 x dz \right] \\
&= \frac{1}{2}\left[1 - \int_0^1 \frac{2z^2}{1+z^2} dz \right] \\
&= \frac{1}{2} - \int_0^1 z^2(1 - z^2 + z^4 - ...) dz \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ...
\end{aligned}$$

e, adcionando$1/2$ a ambos os membros

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - ...$$

Newton mostrou que: $\frac{\pi}{4\sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ...$

Uma vez que Newton habitualmente integrava séries termo a termo, e $(1+x^2)/(1+x^4) = (1+x^2)(1-x^4+x^8-...) = 1+x^2-x^4-x^6+...$, obtemos

$$\int_0^1 \frac{1+x^2}{1+x^4} dx = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - ....$$

Vamos completar o argumento observando que

$$\frac{1+x^2}{1+x^4} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-\sqrt{2}x+x^2} + \frac{1}{1+\sqrt{2}x+x^2} \right]$$

e depois avaliando as integrais adequadas com a substituição

$$x + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \tan\theta,$$

donde temos que

$$\int_0^1 \frac{1+x^2}{1+x^4} dx = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}.$$

1.7 Cauchy (1789-1857)

Cauchy foi um dos primeiros matemáticos a usar o conceito de limite tal qual conhecemos hoje, o que lhe serviu para redefinir a derivação e integração. A definição de Cauchy de derivada deixava claro que a derivada não existe num ponto em que a função é descontínua, mas a integral poderia não ter dificuldades nesse mesmo ponto. Em 1823, Cauchy formulou uma arquitetada definição de integral, recordando as aproximações de Cavalieri e Fermat, mas com uma diferença fundamental: ao invés de funções específicas $(x^2, x^{1/3}, ...)$ ele começou com uma função genérica f definida em $[a, b]$ e estabeleceu a soma:

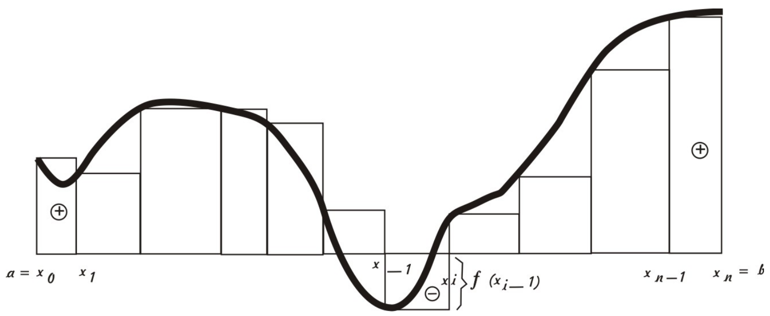
$$S = f(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_1)(x_2 - x_1) + \ldots + f(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}),$$

onde $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ é uma partição de $[a, b]$. A integral de Cauchy era o limite de tal soma quando o máximo dos $(x_n - x_{i-1})$,denotado por $\|\Delta x\|$, se aproxima de zero:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|\Delta x\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}).$$

Cauchy argumentou que se f é continua em $[a, b]$, então este limite existe. Além disso, devemos mencionar que Cauchy provou o Teorema Fundamental do Cálculo, e assim fixava a integração de funções contínuas em intervalos fechados e limitados. Cabe ressaltar, também, que é do conceito de Cauchy de integral como limite de soma em vez de antiderivação que provieram as muitas e frutíferas generalizações da integral.

A construção de Cauchy:



$$f(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_1)(x_2 - x_1) + \ldots + f(x_{n-1})(x_n - x_{n-1})$$

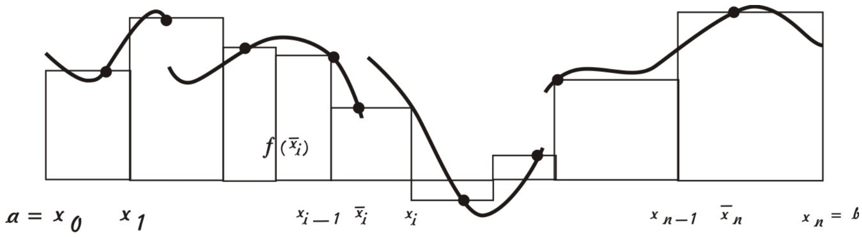
1.8 Riemann (1823-1866)

Distraído investigando as Séries de Fourier e, consequentemente, a questão da convergência, Riemann (1854) questionou: "O que se deve entender por $\int_a^b f(x)dx$?". Sua resposta (que é a mais usada na definição de integral), é a chamada Integral de Riemann:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|\Delta x\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\widetilde{x}_i)(x_i - x_{i-1}),$$

onde $\widetilde{x}_i$ é um ponto arbitrário de $[x_{i-1}, x_i]$ e f é limitada em $[a, b]$.

A construção de Riemann:



$$f(\widetilde{x}_1)(x_1 - x_0) + \ldots f(\widetilde{x}_i)(x_2 - x_1) + \ldots + f(\widetilde{x}_n)(x_n - x_{n-1})$$

Com esta nova definição, Riemann determinou uma exigência menor com relação a obrigatoriedade da continuidade discrita por Cauchy. Ele provou que o limite

$$\lim_{\|\Delta x\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\widetilde{x}_i)(x_i - x_{i-1})$$

existe se, e somente se, f é limitada em $[a, b]$ e para cada par de números positivos ε e δ, existe um $\eta > 0$ tal que, sendo P uma partição de $[a, b]$ onde $\|\Delta x\| < \eta$, a soma dos comprimentos dos subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$, com

$$\sup_{[x_{i-1}, x_i]} f - \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f \geq \delta$$

é menor que ϵ. Em outras palavras uma função f é integrável à Riemann em $[a, b]$ se, e somente se, as grandes oscilações de f são restritas a um "pequeno"conjunto.

Em seguida, Riemann dá um exemplo genial de uma função f que é descontínua em um conjunto de pontos denso em $\mathbb{R}$, mas, no entanto, é integrável à Riemann.

Exemplo 1.8.1. Função/Exemplo de Riemann:

$$f(x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)}{n^2},$$

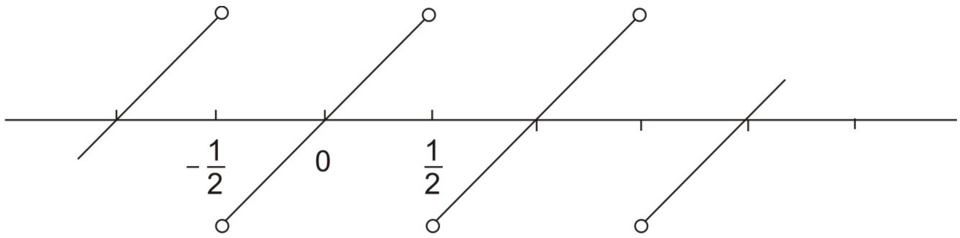
onde (x) denota a diferença entre x e o inteiro mais próximo, se x não é da forma $k + \frac{1}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Caso contrário, se x é da forma $k + \frac{1}{2}$ então $(x) = 0$. Vamos examinar cuidadosamente esta função.

Seja $\phi_n(x) = (nx)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

- Se $n = 1$; ϕ_1 é descontínua em $x = \frac{2k+1}{2}$. Pois,

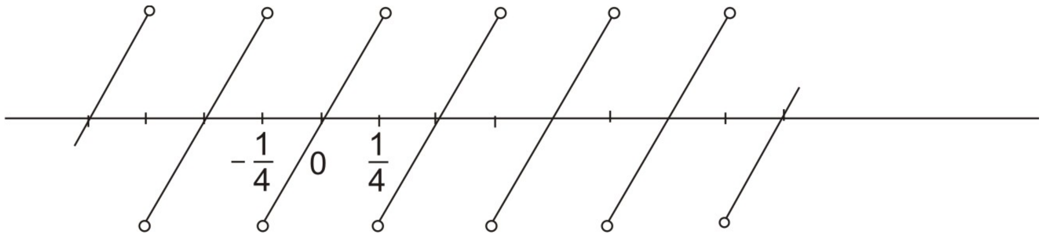
$$\phi_1\Big(\Big(\frac{2k+1}{2}\Big)^{-}\Big) = +\frac{1}{2}, \phi_1\Big(\frac{2k+1}{2}\Big) = 0 \text{ e } \phi_1\Big(\Big(\frac{2k+1}{2}\Big)^{+}\Big) = -\frac{1}{2}.$$ [2]

[2] $(\frac{2k+1}{2})^{-}$denota o limite de $\phi_1(x)$ quando x se aproxima de $(\frac{2k+1}{2})$ pela esquerda, analogamente, $(\frac{2k+1}{2})^{+}$ é o limite a direita de $\phi_1(x)$ quando x tende a $(\frac{2k+1}{2})$.



- Se $n = 2$; ϕ_2 é descontínua em $x = \frac{2k+1}{4}$. Pois,

$$\phi_2\Big(\Big(\frac{2k+1}{4}\Big)^-\Big) = +\frac{1}{2}, \phi_1\Big(\frac{2k+1}{4}\Big) = 0 \ \text{ e } \ \phi_1\Big(\Big(\frac{2k+1}{4}\Big)^+\Big) = -\frac{1}{2}$$

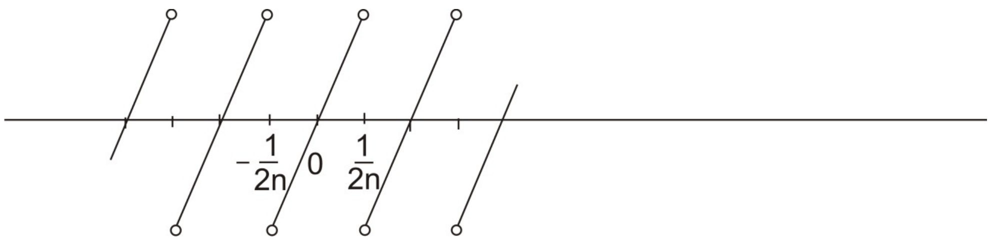


$$\vdots$$

- Para $n \in \mathbb{N}$ ϕ_n é descontínua em $x = \frac{2k+1}{2n}$. Pois,

$$\phi_1\Big(\Big(\frac{2k+1}{2n}\Big)^-\Big) = +\frac{1}{2}, \phi_1\Big(\frac{2k+1}{2n}\Big) = 0 \ \text{ e } \ \phi_1\Big(\Big(\frac{2k+1}{2n}\Big)^+\Big) = -\frac{1}{2}$$

.



E assim por diante.

Agora, em quais pontos $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)}{n^2}$ é contínua? Pelo Teorema de Weirstrass, a sequência $f_m(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{m} \frac{(nx)}{n^2}$ converge uniformemente para f em $\mathbb{R}$. Portanto, se x_0 não é da forma $(2k+1)/2n$; $n, k = 1, 2, 3, \ldots$ então ϕ_n é contínua para todo n, e desde que a convergência uniforme de uma sequência de funções contínuas garante a continuidade da função limite, f é contínua em x_0. Resta-nos mostrar que f é descontínua num conjunto de pontos

$$\{(2k+1)/2n; k, n = 1, 2, 3, \ldots\}$$

denso em $\mathbb{R}$.

Denote $(g(x^-) - g(x^+))$ por $\Delta g(x)$.

- Para $n = 1$. Seja $x = \frac{2k+1}{2}$. Logo, $\Delta\phi_1 = 1,\ \Delta\phi_2 = 0,\ \Delta\phi_3 = 1$ e em geral, $\Delta\phi_{2i} = 0,\ \Delta\phi_{2i-1} = 1,\ \ i \in \mathbb{N}$. Assim,

$$\Delta f\Big(\frac{2k+1}{2}\Big) = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + ... = \frac{\pi^2}{8}.$$

- Para $n = 2$. Seja $x = (2k+1)/4$. Logo, $\Delta\phi_1 = 0,\ \Delta\phi_2 = 1,\ \ \Delta\phi_3 = 0, \Delta\phi_4 = 0,\ \Delta\phi_5 = 0, \Delta\phi_6 = 1,\ \Delta\phi_7 = 0$, etc. Repetindo sempre o seguinte padrão $\underbrace{0, 1, 0, 0}, 0, 1$. Assim,

$$\begin{aligned}\Delta f\Big(\frac{2k+1}{4}\Big) &= \frac{1}{2^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{10^2} + ... \\ &= \frac{1}{2^2}\left[\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots\right] \\ &= \frac{1}{2^2} \times \frac{\pi^2}{8}.\end{aligned}$$

$$\vdots$$

- Para $n \in \mathbb{N}$. Seja $x = \frac{2k+1}{2n}$. Logo, $\Delta\phi_1 = \Delta\phi_2 = \ldots = \Delta\phi_{n-1} = 0,\ \Delta\phi_n = 1,\ \Delta\phi_{n+1} = \ldots = \Delta\phi_{2n} = 0, \ldots$. Repetindo sempre o seguinte padrão $\underbrace{0, 0, \ldots, 0, 0, 1}_{n \text{ fatores}}, \underbrace{0, 0, \ldots, 0, 0, 0}_{n \text{ fatores}}, 0, \ldots$.

  Assim,

$$\begin{aligned}\Delta f\Big(\frac{2k+1}{2n}\Big) &= \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(3n)^2} + \frac{1}{(5n)^2} + ... \\ &= \frac{1}{n^2}\left[\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots\right] \\ &= \frac{1}{n^2} \times \frac{\pi^2}{8}.\end{aligned}$$

Observe que no cálculo de Δf usamos o fato da convergência ser uniforme, e assim "$\lim \sum = \sum \lim$", e então mostramos que f é descontínua num conjunto denso de pontos

$$\{(2k+1)/2n; k, n = 1, 2, 3, \ldots\}$$

, onde os "saltos" em $(2k+1)/2n$ são $\Delta f((2k+1)/2n) = 1/n^2 \times \pi^2/8$. Caso contrário, f é contínua. Desde que $\pi^2/8 > \delta$ para apenas um número finito de valores de n, podemos "cobrir" com um número finito de pequenos intervalos, e assim f é integrável segundo Riemann.

Agora, como $\int_0^1 \phi_n(x)dx = \int_0^1 (nx)dx = 0$, podemos concluir que,

$$\int_0^1 \sum \frac{(nx)}{n^2} dx = \sum \frac{1}{n^2} \int_0^1 (nx)dx = 0$$

pois como a convergência é uniforme podemos alternar "$\sum$"e "$\int$". Isto completa nossa discussão acerca da função de Riemann.

Durante os últimos anos do século dezenove várias reformulações da integral de Riemann foram feitas por Peano, Jordan, Volterra, Darboux, e outros os quais vamos reunir sob as "somas de Darboux".

Darboux (1875) introduziu as integrais superior ($\int_a^{-b} f(x)dx$) e inferior ($\int_{-a}^b f(x)dx$) de Riemann para funções limitadas em $[a, b]$:

$$\int_{-a}^b f(x)dx = \sup_P \sum_{i=1}^n \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f.(x_i - x_{i-1})$$

$$\int_a^{-b} f(x)dx = \inf_P \sum_{i=1}^n \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f.(x_i - x_{i-1})$$

sobre toda partição P de $[a, b]$.

Assim, f é dita integrável à Riemann se, e somente se, $\int_a^{-b} f(x)dx = \int_{-a}^b f(x)dx$. Essa definição é equivalente à de Riemann, porém sendo mais fácil de aplicar.

1.9 Emile Borel (1871 - 1956), Camile Jordan (1838 - 1922), Giuseppe Peano (1858 - 1932)

Peano tentou fazer a conexão entre integrabilidade de uma função não-negativa com a "área" do conjunto $S = \{(x, y); a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$. Esta já era uma ideia usada pelos antigos matemáticos para funções específicas, mas a contribuição de Peano (1887) foi formular matematicamente uma definição de área. Ele definiu a área interna de S, o qual denotou por $a_i(S)$, como o menor limite superior das áreas de todos os polígonos que estão contidos em S, e área externa de S, $a_0(S)$, como o maior limite inferior da área de todos os polígonos que contêm S. O conjunto S foi, então, definido como tendo área sempre que $a_i(S) = a_0(S)$. Nota: Se $S = \{(x, y); 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x, y$ irracional$\}$ então $a_i(S) = 0, a_0(S) = 1$.

Jordan (1892) introduziu a ideia de conteúdo interior de um conjunto S, $c_i(S)$, e conteúdo externo, $c_0(S)$, determinados por coberturas finitas para definir a medida de Jordan. O $c_0(S)$ era dado por $\inf \sum_{k=1}^{n} \text{amp}(I_k)$, onde $\bigcup_{k=1}^{n} I_k$ recobre S e os I_k são dois a dois disjuntos, analogamente o $c_i(S) = \sup \sum_{k=1}^{n} \text{amp}(I_k)$ assim, um conjunto seria mensurável à Jordan quando $c_i(S) = c_0(S)$ e sua medida de Jordan era denotada por $c(S)$. Em seguida, ele passou a definir a integral de uma função limitada em um conjunto mensurável de Jordan da seguinte forma:

Seja P uma partição do conjunto mensurável E em conjuntos mensuráveis $E_1, \ldots, E_n$, onde os E_i são dois a dois disjuntos. Então as integrais superior e inferior de f são dadas por:

$$\int_{-a}^{b} f(x)dx = \sup_{P} \sum_{i}^{n} \inf_{E_i} f.c(E_i)$$

e

$$\int_{a}^{-b} f(x)dx = \inf_{P} \sum_{i}^{n} \sup_{E_i} f.c(E_i).$$

Quando valer a igualdade, tem-se a integral de f segundo Jordan.

O que difere a ideia de Jordan das ideias de Cauchy e Riemann é o fato de ele particionar o intervalo $[a, b]$ em conjuntos mensuráveis ao invés de subintervalos.

Borel (1898) caracterizou uma medida em conjuntos, determinando quais propriedades uma aplicação deve satisfazer para ser considerada uma medida:

- Uma medida é não negativa.
- A medida da soma de conjuntos disjuntos é a soma das medidas dos conjuntos individuais.
- A medida da diferença de dois conjuntos, quando um é um subconjunto do outro, é a diferença entre as medidas.
- Se a medida de um conjunto é diferente de zero então ele é não enumerável.

Tendo descrito as propriedades referentes a uma medida, Borel disse que esta deveria ser restrita a conjuntos E que podem ser "construídos" por:

- Uma união, finita ou enumerável, de intervalos disjuntos;

- O complementar de qualquer conjunto E que pode ser construído pela união, finita ou enumerável, de intervalos disjuntos, com respeito a qualquer outro conjunto G que também pode ser "construível"como E e que cobre E.

Por exemplo, a medida de Borel de um intervalo seria seu comprimento, a medida de um conjunto aberto seria a soma dos comprimentos dos intervalos que o compõem. Em seguida, poderíamos medir um conjunto fechado como sendo o complemento de um aberto, etc.

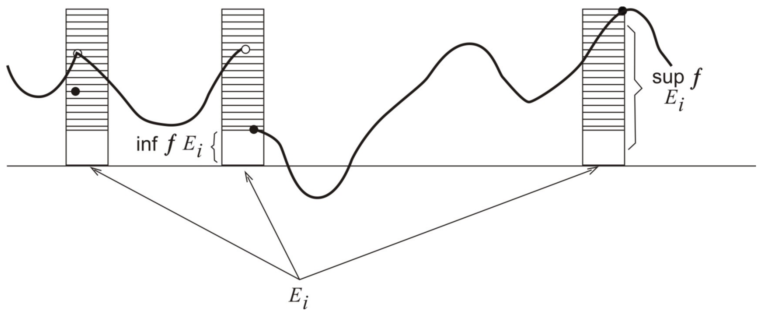
Na integral de Jordan

$$\int_{-a}^{b} f(x)dx = \inf_{E_1} f.c(E_1) + \ldots \inf_{E_i} f.c(E_i) + \ldots + \inf_{E_n} f.c(E_n)$$

$$\int_{a}^{-b} f(x)dx = \sup_{E_1} f.c(E_1) + \ldots \sup_{E_i} f.c(E_i) + \ldots + \sup_{E_n} f.c(E_n)$$

Os conjuntos E_i são mensuráveis à Jordan, pois são aproximações de intervalos limitados.

O desenho a seguir mostra a construção de jordan.



1.10 Henri Lebesgue (1875-1941); William Young (1863-1942)

William Young desenvolveu uma teoria de medida e uma teoria de integração independentemente de Lebesgue, mas cerca de três ou quatro anos depois. Porém ele não conseguiu combinar as ideias de área de uma forma coerente, como fez Lebesgue. Por outro lado, ele foi responsável por mostrar que a abordagem de Lebesgue poderia ser vista como uma generalização muito natural da integral de Jordan:

$$amp([x_{i-1}, x_i]) \to c(E_i) \to m(E_i).$$

Young também mostrou que sua definição de conjuntos mensuráveis era equivalente a de Lebesgue e levantou a questão da existência de conjuntos não mensuráveis, questão essa que foi resolvida por Vitali em 1905.

Henri Lebesgue, matemático francês, publicou , em 1901, uma pequena nota no "C.R. Acad. Paris, 132, (1901) pp.86-88" modificando de modo profundo a maneira de definir a integral da idealizada por Riemann. Como a integral de Riemann foi a mais aceita entre os matemáticos por um longo período, as ideias de Lebesgue foram, em princípio, bastante refutadas e severamente criticadas ou, na melhor das hipóteses, aceitas com desconfiança. A integral de Lebesgue foi a primeira tentativa frutífera de organização matemática da noção de integral, e, talvez por isso, ela se tornou cada vez mais imprescindível ao desenvolvimento e organização de novas teorias, principalmente no campo da Análise Matemática.

A integral de Lebesgue veio sanar, ou ao menos diminuir, várias deficiências da Integral de Riemman, como, por exemplo, a comutatividade de Σ com $\int$, ou seja, $\displaystyle\int_a^b \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b f_k(x)$ o qual, na integral de Riemman, só é possível se a série das funções (f_k) converge uniformemente.

No último capítulo desse trabalho tratamos de abordar de forma mais clara as principais diferenças entre as duas integrais, e apresentar, de forma breve, o conteúdo da primeira nota de Lebesgue sobre sua integral onde ele faz uma construção técnica de sua integral a partir da integral de Riemman.

Capítulo 2

A integral de Lebesgue

Embora a integração seja tão antiga quanto o tempo de Arquimedes, como vimos no capítulo anterior, costuma-se dizer que "a teoria da integração foi criada no século XX" e grande parte desse mérito se deve do conceito de integral introduzido por Lebesgue.

Este capítulo trata da apresentação da integral de Lebesgue e algumas de suas propriedades, bem como dos conceitos de conjuntos e funções mensuráveis à Lebesgue.

2.1 Medida Exterior

Definição 1. Dado $E \subset \mathbb{R}$, chama-se medida exterior de E, e denota-se por $m_e(E)$ o número

$$m_e(E) = \inf_{\{I_k\} \in \mathfrak{A}} \sum_{k=1}^{\infty} amp(I_k)^1 \tag{2.1}$$

onde $\mathfrak{A}$ denota a coleção de todos os recobrimentos $\{I_k\}$ enumeráveis de E por intervalos I_k abertos ou não.

Observação 1. Em (2.1) podemos supor os intervalos I_k abertos.

De fato, dado $\varepsilon > 0$, existe $\{I_k\} \in \mathfrak{A}$ tal que $\sum_{k=1}^{\infty} amp(I_k) < m_e(E) + \frac{\varepsilon}{2}$, isto pela caracterização do ínfimo. Assim, se a_k e b_k são os extremos de I_k e se designarmos por I'_k, $k = 1, ...$,

[1] $amp(I_k)$ denota a amplitude, ou seja, o comprimento do intervalo I_k

o intervalo aberto $\left(a_k - \frac{\varepsilon}{2^{k+2}}, b_k + \frac{\varepsilon}{2^{k+2}}\right)$, temos

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} amp(I_k) &= \sum_{k=1}^{\infty} amp(I'_k) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{k+2}} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} amp(I'_k) + \frac{\varepsilon}{2} < m_e(E) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Proposição 1. A medida exterior de E satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $m_e(E) \geq 0$

(ii) $m_e(\varnothing) = 0$

(iii) $m_e(E) \leq m_e(F)$ se $E \subset F$

(iv) $m_e(\{x\}) = 0$, qualquer que seja o $x \in \mathbb{R}$

(v) $m_e(E \cup F) \leq m_e(E) + m_e(F)$

(vi) $m_e(I) = amp(I)$, para todo intervalo $I \subset \mathbb{R}$

Prova: **(i)** Como $amp(I_k) \geq 0, \forall I_k \subset \mathbb{R}$, segue que

$$\sum_{k=1}^{\infty} amp(I_k) \geq 0,$$

para toda familia $\{I_k\} \subset \mathfrak{A}$. Donde segue o resultado.

(ii) Para todo $\varepsilon > 0$ dado, o conjunto vazio pode ser coberto por um único intervalo aberto de comprimento ε, segue daí que $m_e(\varnothing) = 0$.

(iii) Seja $\{I_k\}$ um recobrimento enumerável de F por intervalos abertos. Assim,

$$E \cup F \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k.$$

Agora, como $E \subset F$ existe $\{J_r\} \subset \{I_k\}$ tal que $\{J_r\}$ recobre E, logo

$$\inf_{E \subset \bigcup J_r \subset \bigcup I_k} \sum_{r=1}^{\infty} amp(J_r) \leq \inf_{F \subset \bigcup I_k} \sum_{k=1}^{\infty} (I_k)$$

ou seja,

$$m_e(E) \leq m_e(F).$$

(iv) A prova se dá com o mesmo argumento usado em (ii).

(v) Dado $\varepsilon > 0$, sejam $\{I_k\}$ e $\{I_r\}$ recobrimentos enumeráveis de E e F respectivamente, tais que

$$m_e(E) > \sum_k amp(I_k) + \frac{\varepsilon}{2}$$

e

$$m_e(F) > \sum_r amp(I_r) + \frac{\varepsilon}{2},$$

o que é possível pela caracterização do ínfimo. Logo,

$$m_e(E) + m_e(F) > \sum_k amp(I_k) + \sum_r amp(I_r) + \varepsilon$$

Pondo $\{J_s\} = \{I_k\} \cup \{I'_r\}$, temos que $\{J_s\}$ é um recobrimento enumerável de $E \cup F$ e

$$\sum_s amp(J_s) \leq \sum_k amp(I_k) + \sum_r amp(I'_r)$$

Daí,

$$m_e(E) + m_e(F) > \sum_k amp(I_k) + \sum_r amp(I'_r) + \varepsilon \geq \sum_s amp(J_s) + \varepsilon \geq m_e(E \cup F) + \varepsilon$$

Donde

$$m_e(E) + m_e(F) > m_e(E \cup F) + \varepsilon$$

como ε é qualquer, segue o resultado. (vi) Consideremos inicialmente $I = [a, b]$, fechado e limitado.

Dado $\varepsilon > 0$, temos que o intervalo aberto $(a - \varepsilon, b + \varepsilon)$ contém $[a, b]$. Assim,

$$m_e([a, b]) \leq amp((a - \varepsilon, b + \varepsilon)) = b - a + 2\varepsilon$$

ou seja,

$$m_e([a, b]) \leq b - a. \tag{2.2}$$

Agora, seja $\{I_k\}$ um recobrimento enumerável de $[a, b]$ por intervalos abertos. Segue do Teorema de Borel-Lebesgue que $\{I_k\}$ possui um subrecobrimento finito de $[a, b]$, o qual vamos denotar por $\{J_1, \ldots, J_n\}$. Assim

$$\sum_{i=1}^{n} amp(J_i) \leq \sum_{k=1}^{\infty} amp(I_k).$$

Como $a \in \bigcup_{i=1}^{n} J_i$, então $a \in J_{i_0}$ para algum $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$. Denotemos este intervalo por (a_1, b_1), deste modo, temos $a_1 < a < b_1$. Se $b_1 \leq b$, então $b_1 \in [a, b]$. Como $b_1 \notin (a_1, b_1)$, então para algum $i_1 \in \{1, \ldots, n\}$, $b_1 \in J_{i_i} = (a_2, b_2)$ e $a_2 < b_1 < b_2$.

Prosseguindo com este raciocínio segue que existem $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)$ intervalos abertos em $\{J_i\}$, tais que $a_1 < a < b_1,\ a_2 < b_1 < b_2,\ \ldots,\ a_n < b < b_n$. Donde podemos concluir que $a_1 < a$ e $b < b_n$. Logo,

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{N}} amp(I_k) &\geq \sum_{i=1}^{n} amp(J_i) = (b_n - a_n) + \ldots \\ &+ (b_1 - a_1) = b_n - (a_n - b_{n-1}) - \ldots - \\ &- (a_2 - b_1) - a_1 > b_n - a_1 > b - a\end{aligned}$$

Portanto,

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} amp(I_k) > b - a. \tag{2.3}$$

Segue de 2.2 e 2.3 que $(b-a)$ é cota superior e cota inferior de $m_e([a,b])$, donde concluímos que

$$m_e([a,b]) = b - a$$

Seja $I = (a, b]$. Como $[a,b] = (a,b] \cup \{a\}$ e $(a,b] \subset [a,b]$ segue de (iii) que

$$m((a,b]) \leq m([a,b]) = b - a.$$

Agora, por (iv) e (v), obtemos

$$b - a = m_e([a,b]) \leq m_e((a,b]) + m_e(\{a\}) = m_e((a,b]).$$

Logo,

$$b - a \leq m_e((a,b]) \leq (b - a).$$

Assim

$$m_e((a,b]) = b - a.$$

Os outros casos para intervalos limitados são análogos.

Se I é um intervalo ilimitado, digamos $I = [a, +\infty)$, tome I_c fechado, com $I_c \subset I$, tal que $amp(I_c) = c,\ \forall c > 0$.

Assim,

$$m_e(I) \geq m_e(I_c) = c, \quad \forall c > 0.$$

Donde segue que

$$m_e(I) = amp(I) = +\infty.$$

■

Proposição 2. Seja $\{M_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ uma família enumerável de conjuntos e seja $M = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} M_k$. Então,

$$m_e(M) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} m_e(M_k).$$

Prova: Se para algum $k \in \mathbb{N}$, $m_e(M_k) = +\infty$, então nada a fazer. Se $m_e(M_k) < +\infty$, $\forall k \in \mathbb{N}$ então, dado $\varepsilon > 0$, para cada k existe uma coleção enumerável $\{I_{k,i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ de intervalos abertos, tal que $\{I_{k,i}\}_{i\in\mathbb{N}}$, recobre M_k e

$$\sum_{i\in\mathbb{N}}^{M} amp(I_{k,i}) < m_e(M_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Daí, $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} \{I_{k,i}\}$ é um recobrimento enumerável de M por intervalos abertos e ainda,

$$\begin{aligned} m_e(M) &\leq \sum_{k,i} amp(I_{k,i}) = \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\sum_{i\in\mathbb{N}} amp(I_{k,i}) \right) \\ &< \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(m_e(M_k) + \frac{\varepsilon}{2^k} \right) = \sum_{k\in\mathbb{N}} m_e(M_k) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto,

$$m_e(M) < \sum_{k\in\mathbb{N}} m_e(M_k) + \varepsilon.$$

Como ε é arbitrário, segue o resultado. ■

Corolário 1. Se E é um conjunto enumerável, então $m_e(E) = 0$.

Prova: Sendo E enumerável, temos

$$E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{p_n\}, \qquad p_n \in \mathbb{R}.$$

Como, para cada $n \in \mathbb{N}$, $m_e\{P_n\} = 0$, segue que

$$0 \leq m_e(E) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} m_e(p_n) = 0.$$

Logo, $m_e(E) = 0$. ■

2.2 Conjuntos Mensuráveis

Salvo menção explícita, todos os conjuntos considerados nessa seção são subconjuntos de um intervalo $[a, b]$ de $\mathbb{R}$.

Definição 2. Um conjunto $E \subset [a, b]$ é dito mensurável à Lebesgue quando

$$m_e(E) + m_e(E^c) = b - a,$$

onde E^c denota o complementar de E relativo a $[a, b]$. Neste caso, $m_e(E)$ é dita medida de Lebesgue de E e é denotada por $m(E)$.

Observação 2.

- Segue da definição que se E é mensurável à Lebesgue, então E^c também o é.

- $m_e(E) + m_e(E^c) \geq b - a$, qualquer que seja $E \subset [a, b]$.

De fato, sejam $\{I_k\}$, $\{J_s\}$ recobrimentos enumeráveis de E e E^c, respectivamente, por intervalos abertos, tais que

$$m_e(E) + \frac{\varepsilon}{2} > \sum_k amp(I_k) \quad e \quad m_e(E^c) + \frac{\varepsilon}{2} > \sum_j amp(J_s),$$

onde $\varepsilon > 0$ é arbitrário.

Daí, temos que $\{I_k\} \cup \{J_s\}$ é um recobrimento de $[a, b]$, donde pelo Teorema de Borel-Lebesgue, admite um recobrimento finito, $\{S_1, \ldots, S_n\}$, de $[a, b]$.

Agora,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n} amp(S_i) &\leq \sum_k amp(I_k) + \sum_s amp(J_s) \\ &< m_e(E) + m_e(E^c) + \varepsilon, \end{aligned}$$

como $[a, b] \subset \bigcup_{i=1}^{n} S_i$, segue que

$$b - a \leq \sum_{i=1}^{n} amp(S_i) < m_e(E) + m_e(E^c) + \varepsilon.$$

Como ε é arbitrário, segue que

$$b - a \leq m_e(E) + m_e(E^c).$$

Proposição 3. Se $m_e(E) = 0$, então E é mensurável.

Prova: Devemos mostrar que

$$b - a \geq m_e(E) + m_e(E^c).$$

De $E^c \subset [a, b]$, segue que $m_e(E^c) \leq b - a$. Por hipótese, $m_e(E) = 0$, logo $m_e(E) + m_e(E^c) \leq 0 + b - a = b - a$. ■

Proposição 4. Sejam $E, F \subset [a,b]$ mensuráveis, então:

(i) $E \cup F$ é mensurável;

(ii) Se $E \subset F$, então $F \setminus E$ é mensurável e

$$m(F \setminus E) = m(F) - m(E).$$

Prova: **(i)** Devemos mostrar que

$$M_e(E \cup F) + m_e((E \cup F)^c) = m_e(E \cup F) + m_e(E^c \cap F^c) \leq b - a.$$

Note que $E \cup F = F \cup (E \cap F^c)$, logo $m_e(E \cup F) \leq m_e(F) + m_e(E \cap F^c)$. Assim,

$$m_e(E \cup F) + m_e(E^c \cap F^c) \leq m_e(F) + m_e(E \cap F^c) + m_e(E^c \cap F^c). \tag{2.4}$$

Agora, para toda família $\{I_k\}$ que recobre $E \cap F^c$ e $\{J_s\}$ que recobre $E^c \cap F^c$, temos

$$m_e(E \cap F^c) \leq \sum_k amp(I_k)$$

e

$$m_e(E^c \cap F^c) \leq \sum_s amp(J_s).$$

Como F^c é a união disjunta de $E^c \cap F^c$ e $E \cap F^c$, segue que $\{S_r\} = \{I_k\} \cup \{J_s\}$ recobre F^c e essa união pode ser considerada disjunta para alguma família $\{I_k\}$ que recobre $E \cap F^c$ e $\{J_s\}$ que recobre $E^c \cap F^c$.

Assim,

$$m_e(E \cap F^c) + m_e(E^c \cap F^c) \leq \sum_k amp(I_k) + \sum_s amp(J_s) = \sum_r amp(S_r).$$

Donde obtemos,

$$m_e(E \cap F^c) + m_e(E^c \cap F^c) \leq m_e(F^c).$$

Substituindo em (2.4), obtemos

$$m_e(E \cup F) + m_e(E^c \cap F^c) \leq m_e(F) + m_e(F^c) = b - a,$$

pois, por hipótese $F \subset [a,b]$ é mensurável.

(ii) Como $E \subset F$, segue que $F = E \cup (F \cap E^c)$.

Seja $\{I_k\}$ um recobrimento enúmeravel de F por intervalos abertos, tal que dado $\varepsilon > 0$, $m(F) + \varepsilon > \sum_{s \in \mathbb{N}} amp(I_k)$. Temos que $\{I_k\} = \{J_s\} \cup \{S_r\}$ onde $\{S_r\}$ recobre $(F \cap E^c)$, e $\{J_s\}$ é um recobrimento de E.$\{J_s\}$ e $\{S_r\}$ podem ser considerados disjuntos, visto que $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k$ é aberto e portanto pode ser escrito como a união disjunta de intervalos abertos. Daí, $m(E) \leq \sum_{s \in \mathbb{N}} amp(J_s)$ que implica em $-m(E) \geq -\sum_{s \in \mathbb{N}} amp(J_s)$, donde,

$$\begin{aligned} m(F) - m(E) + \varepsilon &> \sum_{k \in \mathbb{N}} amp(I_k) - \sum_{s \in \mathbb{N}} amp(J_s) = \sum_{r \in \mathbb{N}} amp(S_r) \\ &\geq m_e(F \cap E^c) = m_e(F - E). \end{aligned}$$

Assim, $m(F) - m(E) + \varepsilon > m_e(F - E)$, como ε é arbitrário, segue que

$$m(F) - m(E) \geq m_e(F - E) \tag{2.5}$$

Por outro lado, $(F \cap E^c)^c = (F^c \cup E)$ donde

$$m_e\left((F - E)^c\right) = m_e(F^c \cup E) \leq m(F^c) + m(E) \tag{2.6}$$

De 2.5 e 2.6, obtemos

$$m(F) - m(E) + m(F^c) + m(E) \geq m_e(F - E) + m_e\left((F - E)^c\right)$$

$$\Rightarrow b - a = m(F) + m(F^c) \geq m_e(F - E) + m_e\left((F - E)^c\right)$$

Como, pela Observação 2:

$$m_e(F - E) + m_e\left((F - E)^c\right) \geq b - a$$

segue

$$m_e(F - E) + m_e\left((F - E)^c\right) = b - a. \tag{2.7}$$

Logo $F - E$ é mensurável.

Agora, por 2.6 segue que

$$m\left((F - E)^c\right) \leq m(F^c) + m(E).$$

Usando 2.7 e o fato de F ser mensurável obtemos

$$b - a - m(F - E) \leq b - a - m(F) + m(E)$$

donde, $m(F-E) \geq m(F) - m(E)$.

Como, em 2.5 temos a desigualdade contraria, segue que

$$m(F-E) = m(F) - m(E).$$

■

Lema 1. *Sejam $E_1, \cdots, E_n$ uma sequência finita de conjuntos mensuráveis disjuntos. Então*

$$m\Big(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} m(E_i)$$

Prova: Podemos considerar que $\bigcup_{i=1}^{n} E_i = [a,b]$, pois do contrário consideramos $[a,b] = \bigcup_{i=1}^{n+1} E_i$, onde $E_{n+1} = [a,b] - \bigcup_{i=1}^{n} E_i$.

A prova segue por indução sobre n. Para $n = 1$ a igualdade é trivial.

Suponha que a igualdade vale para $n = k-1$, ou seja,

$$m\Big(\bigcup_{i=1}^{k-1} E_i\Big) = \sum_{i=1}^{k-1} m(E_i).$$

Note que $E_k^c = \bigcup_{i=1}^{k}(E_i - E_k) = \bigcup_{i=1}^{k-1} E_i$.Daí,

$$\begin{aligned} b - a &= m(E_k) + m(E_k^c) = m(E_k) + m\Big(\bigcup_{i=1}^{k-1} E_i\Big) \\ &= m(E_k) + \sum_{i=1}^{k-1} m(E_i) = \sum_{i=1}^{k} m(E_i). \end{aligned}$$

■

Proposição 5. Seja $\{M_k;\ k \in \mathbb{N}\}$ uma família enumerável de conjuntos mensuráveis e seja $M = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} M_k$. Então

(i) Se os M_k são dois a dois disjuntos, então M é mensurável e vale $m(M) = \sum_{k=1}^{\infty} m(M_k)$;

(ii) Se a família $\{M_k; k \in \mathbb{N}\}$ é crescente, isto é, $M_1 \subset M_2 \subset \ldots \subset M_k \subset \ldots$ então M é mensurável e tem-se $m(M) = \lim_{k\to\infty} m(M_k)$;

(iii) Se os M_k são qualquer, então M é mensurável e vale $m(M) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(M_k)$

Prova: **(i)** Seja $F_n = \bigcup_{k=1}^{n} M_k$ segue que F_n é mensurável, por aplicações sucessivas do item (i) da Proposição 4 e $F_n^c \supset M^c$.

Assim,

$$b - a = m(F_n) + m(F_n^c) \geq m(F_n) + m_e(M^c),$$

segue do Lema anterior que $m(F_n) = \sum_{k=1}^{n} m(M_k)$, logo,

$$b - a \geq \sum_{k=1}^{n} m(M_k) + m_e(M^c),$$

donde passando ao limite quando $n \to \infty$, obtemos

$$b - a \geq \sum_{k=1}^{\infty} m(M_k) + m_e(M^c) \geq m_e(M) + m_e(M^c).$$

Portanto, M é mensurável e

$$m(M) = \lim_{n\to\infty} m(F_n) = \lim_{n\to\infty} \Big(\sum_{k=1}^{n} m(M_k) \Big) = \sum_{k=1}^{\infty} m(M_k).$$

(ii) Considere $F_1 = M_1, F_2 = M_2 - M_1, \ldots, F_k = M_k - M_{k-1}$. Segue do item (ii) da Proposição 4 que os F_k são mensuráveis e tem-se que $m(F_k) = m(M_k) - m(M_{k-1})$. Além disso, eles são dois a dois dsjuntos e $M = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$. Logo, pelo item (i), temos M mensurável e vale

$$m(M) = \sum_{k=1}^{\infty} m(F_k) = \sum_{k=2}^{\infty} (m(M_k) - m(M_{k-1})) + m(M_1) = \lim_{k\to\infty} m(M_k).$$

(iii) Considere $\{F_k;\ k \in \mathbb{N}\}$ onde $F_k = \bigcup_{n=1}^{k} M_n$. Então cada F_k é mensurável e vale $F_1 \subset F_2 \subset \ldots \subset F_k \subset \ldots$. Além disso, $M = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$.

Daí, por (ii) tem-se que M é mensurável e vale

$$m(M) = \lim_{k\to\infty} m(F_k) = \lim_{k\to\infty} m\Big(\bigcup_{n=1}^{k} M_n \Big) \leq \lim_{k\to\infty} \Big(\sum_{n=1}^{k} m(M_n) \Big) = \sum_{k=1}^{\infty} m(M_k).$$

$\blacksquare$

Proposição 6. Seja $\{M_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ uma família de conjuntos mensuráveis, e seja $M = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} M_k$. Então

(i) M é mensurável

(ii) Se a família $\{M_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ é decrescente no sentido de inclusão, então $\lim\limits_{k\to\infty} m(M_k)$.

Prova: **(i)** Como $M^c = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} M_k^c$ e cada M_k^c é mensurável, pois M_k é mensurável para todo $k \in \mathbb{N}$, segue da Proposição 4 que M^c é mensurável e portanto M é mensurável.

(ii) Sendo a família $\{M_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ decrescente, segue que a família $\{M_k^c,\ k \in \mathbb{N}\}$ é crescente. Como, $M^c = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} M_k$, segue pela Proposição 5 que $m(M^c) = \lim\limits_{k\to\infty} m(M_k^c)$, ou seja,

$$\begin{aligned} b - a - m(M) &= \lim_{k\to\infty} ((b-a) - m(M_k)) \\ &= b - a - \lim_{k\to\infty} m(M_k). \end{aligned}$$

Donde, $m(M) = \lim\limits_{k\to\infty} m(M_k)$.

■

2.3 Funções Mensuráveis

Nesta seção apresentamos o conceito de funções mensuráveis e algumas de suas propriedades.

Definição 3. Uma função $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ é dita mensurável a Lebesgue se o conjunto

$$\{x \in (a,b); f(x) \leq c\}$$

for mensurável qualquer que seja $c \in \mathbb{R}$.

Proposição 7. Seja $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ uma função. Então, são equivalentes:

(a) $\{x \in (a,b),\ f(x) \leq c\}$ é mensurável $\forall c \in \mathbb{R}$;

(b) $\{x \in (a,b),\ f(x) > c\}$ mensurável $\forall c \in \mathbb{R}$;

(c) $\{x \in (a,b),\ f(x) \geq c\}$ é mensurável $\forall c \in \mathbb{R}$;

(d) $\{x \in (a,b),\ f(x) < c\}$ é mensurável $\forall c \in \mathbb{R}$.

Prova: Os conjuntos $\{x \in (a,b),\ f(x) \geq c\}$ e $\{x \in (a,b),\ f(x) < c\}$ são complementares, logo $(a) \iff (b)$, pelo mesmo motivo $(c) \iff (d)$.

$(b) \Rightarrow (c)$ Seja $c \in \mathbb{R}$. Note que

$$\{x \in (a,b),\ f(x) \geq c\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{x \in (a,b);\ f(x) > c - \frac{1}{n}\right\}.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ o cojunto $\{x \in (a,b),\ f(x) > c - \frac{1}{n}\}$ é mensurável por hipótese. Segue da Proposição 5 que a interseção arbitrária é mensurável, donde $\{x \in (a,b),\ f(x) \geq c\}$ é mensurável.

$(c) \Rightarrow (b)$ Como

$$\{x \in (a,b),\ f(x) > c\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{x \in (a,b);\ f(x) \geq c + \frac{1}{n}\right\}.$$

Então, como por hipótese, $\{x \in (a,b),\ f(x) \geq c + \frac{1}{n}\}$ é mensurável para cada $n \in \mathbb{N}$, a união arbitrária é mensurável, donde segue o resultado.

■

Corolário 2. Se $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, então $\{x \in (a,b),\ f(x) = c\}$ é mensurável para todo $c \in \mathbb{R}$.

Prova: Temos que

$$\{x \in (a,b),\ f(x) = c\} = \{x \in (a,b),\ f(x) \leq c\} \cap \{x \in (a,b),\ f(x) \geq c\}$$

como a intersecão de conjuntos mensuráveis é mensurável segue o resultado. ■

Proposição 8. Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e f e g funções mensuráveis em (a,b). Então, são mensuráveis:

(i) $f + \alpha$;

(ii) αf;

(iii) $f + g$;

(iv) $f - g$;

(v) fg.

Prova: **(i)** Para todo $c \in \mathbb{R}$ vale $\{x \in (a,b),\ f(x) + \alpha > c\} = \{x \in (a,b),\ f(x) > c - \alpha\}$, onde o conjunto da direita é mensurável por hipótese. Logo $f + \alpha$ é mensurável.

(ii) Se $\alpha = 0$ então $\alpha f \equiv 0$, $\forall x \in (a,b)$.

Afirmação: toda função constante é mensurável.

De fato, seja $g : (a,b) \to \mathbb{R}$, tal que $g(x) = L$, $L \in \mathbb{R}$. Se $c \geq L$, o conjunto

$$\{x \in (a,b),\ g(x) \leq c\} = (a,b).$$

Se $c < L$, então o conjunto

$$\{x \in (a,b),\ g(x) \leq c\} = \varnothing.$$

Como (a,b) e $\varnothing$ são mensuráveis, segue o resultado.

Da afirmação, segue que αf é mensurável.

Se $\alpha > 0$, temos $\{x \in (a,b),\ (\alpha f)(x) > c\} = \{x \in (a,b),\ f(x) > \alpha^{-1}c\}$, como o conjunto da direita é mensurável, segue o resultado.

Se $\alpha < 0$, $\{x \in (a,b),\ (\alpha f)(x) > c\} = \{x \in (a,b),\ f(x) < \alpha^{-1}c\}$ o qual é mensurável $\forall c \in \mathbb{R}$. Logo, αf é mensurável.

(iii) Note que $f(x) + g(x) > c \Leftrightarrow f(x) > c - g(x)$. Seja $r \in \mathbb{Q}$, tal que $f(x) > r > c - g(x)$ o que é possível devido a densidade de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$. Assim, $f(x) + g(x) > c$, se

$$g(x) > c - r \quad e \quad f(x) > r.$$

Portanto,

$$\{x \in (a,b),\ f(x) + g(x) > c\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \{x \in (a,b),\ f(x) > r\} \cap \{x \in (a,b),\ g(x) > c - r\},$$

que é mensurável, pois é a reunião enumerável de interseção de mensuráveis.

(iv) Como $f - g = f + (-g)$, segue pelo feito anteriormente que $f - g$ é mensurável.

(v) Como $f.g = \frac{1}{4}\left((f+g)^2 - (f-g)^2\right)$ resulta que nosso problema se reduz a mostrar que f^2 é mensurável se f é mensurável, pois a soma e a diferença de funções mensuráveis são mensuráveis.

Seja $c \in \mathbb{R}$. Se $c \geq 0$, então

$$\{x \in (a,b),\ f(x)^2 > c\} = \{x \in (a,b),\ f(x) > \sqrt{c}\} \cup \{x \in (a,b),\ f(x) < -\sqrt{c}\},$$

como a direita da igualdade temos a união de conjuntos mensuráveis, segue que $\{x \in (a,b),\ f(x)^2 > c\}$ é mensurável se $c \geq 0$.

Se $c < 0$ então $\{x \in (a,b),\ f(x)^2 > c\} = (a,b)$, que é mensurável.

Logo, f^2 é mensurável e portanto $f.g$ é mensurável. ∎

Proposição 9. Seja (f_k) uma sucessão de funções mensuráveis definidas em (a,b). Então são mensuráveis:

(i) $\sup\limits_{1\leq i\leq k} f_i$, para todo $k \in \mathbb{N}$;

(ii) $\inf\limits_{1\leq i\leq k} f_i$, para todo $k \in \mathbb{N}$;

(iii) $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}} f_k$;

(iv) $\inf\limits_{k\in\mathbb{N}} f_k$;

(v) $\lim\limits_{k\to\infty} \sup f_k$;

(vi) $\lim\limits_{k\to\infty} \sup f_k$.

Prova: (i) Desde que

$$\left\{x \in (a,b);\ \sup_{1\leq i\leq k} f_i(x) > c\right\} = \bigcup_{i=1}^{k} \{x \in (a,b); f_i(x) > c\} \tag{2.8}$$

segue o resultado visto que a direita da igualdade temos a união de conjuntos mensuráveis.

Mostraremos a igualdade 2.8

Sejam $A = \left\{x \in (a,b);\ \sup\limits_{1\leq i\leq k} f_i(x) > c\right\}$ e $B = \bigcup\limits_{i=1}^{k}\{x \in (a,b); f_i(x) > c\}$.

Daí, se $x_\circ \in A$, então $\sup\limits_{1\leq i\leq k} f_i(x_\circ) > c$, donde $f_{i_\circ}(x_\circ) > c$ para algum $i_\circ \in \{1, \ldots,\ k\}$, logo $x_\circ \in \{x \in (a,b);\ f_{i_\circ} > c\}$, portanto $x_\circ \in B$, ou seja, $A \subset B$.

Agora, se $x_\circ \in B$ então, para algum $i_\circ \in \{1, \ldots,\ k\}$ tem-se $f_{i_\circ}(x_\circ) > c$. Assim, $\sup\limits_{1\leq i\leq k} f_i(x_\circ) \geq f_{i_\circ}(x_\circ) > c$ e portanto, $x_\circ \in A$. Logo $B \subset A$, donde temos 2.8.

(ii) Da relação

$$\inf_{1\leq i\leq k} f_i = -\sup_{1\leq i\leq k}(-f_i),$$

segue o resultado, pois $-f_k$ é mensurável desde que f_k é mensurável, $\forall k \in \mathbb{N}$, por **(i)** $\sup\limits_{1\leq i\leq k}(-f_i)$ e mensurável e portanto $-\sup\limits_{1\leq i\leq k}(-f_i)$ é mensurável.

(iii) Como

$$\left\{x \in (a,b),\ \sup_{k\in\mathbb{N}} f_k(x) > \alpha\right\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \in (a,b);\ f_k(x) > \alpha\}$$

segue que o $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}} f_k$ é mensurável, pois é reunião enumerável de conjuntos mensuráveis.

(iv) Temos que

$$\inf_{k\in\mathbb{N}} f_k = -\sup_{k\in\mathbb{N}}(-f_k),$$

donde concluímos que $\inf\limits_{k\in\mathbb{N}} f_k$ é mensurável.

(v) Desde que

$$\lim_{k\to\infty} \sup f_k = \inf_{k\in\mathbb{N}} (\sup_{i\geq k} f_i),$$

segue de **(iii)** e **(iv)** o resultado.

(vi) De

$$\lim_{k\to\infty} \inf f_k = -\lim_{k\to\infty} \sup(-f_k),$$

temos que $\lim\limits_{k\to\infty} \inf f_k$ é mensurável.

■

Corolário 3. Se f, g são mensuráveis, então $f \vee g$, $f \wedge g$, f^+, f^- e $|f|$ são mensuráveis, onde $(f \vee g)(x) = \max\{f(x),\ g(x)\}$, $(f \wedge g)(x) = \min\{f(x),\ g(x)\}$, $f^+(x) = (f \vee 0)(x)$, $f^-(x) = (-f \vee 0)(x)$ e $|f|(x) = f^+(x) + f^-(x)$, com $0(x) = 0$, $\forall x \in (a, b)$.

Corolário 4. Se (f_k) é uma sequência de funções mensuráveis e $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$, então $f(x)$ é mensurável.

Prova: Como (f_k) é convergente, segue que

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x) = \lim_{k\to\infty} \sup f_k(x)$$

Do item **(v)** da Proposição 9, temos que $f(x)$ é mensurável. ■

2.4 A Integral de Lebesgue

Definição 4. Dizemos que uma propriedade vale quase sempre (abreviamos por q.s.) num conjunto E, quando é valida em E exceto num subconjunto de E cuja medida é nula.

Considere uma função f limitada e mensurável definida num intervalo limitado $[a, b]$. Seja (m, M) um intervalo contendo o conjunto de valores de f, isto é, $m < f(x) < M$, $\forall x \in (a, b)$.

Seja P uma decomposição de (m, M) pelos pontos $m = y_0 < y_1 < \ldots < y_k = M$ e considere as "somas integrais"

$$s_P(f) = \sum_{j=0}^{k-1} y_j m(E_j) \ \ e \ \ S_P(f) = \sum_{j=0}^{k-1} y_{j+1} m(E_j), \tag{2.9}$$

onde $E_j = \{x \in (a, b);\ y_j < f(x) \leq y_{y+1}\}$, $j = 0, 1, \ldots,\ k - 1$.

Note que as igualdades de 3.1 fazem sentido, visto que f é por hipótese, mensurável e portanto os E_j, $j = 0, 1, \ldots,\ k-1$ são conjuntos mensuráveis qualquer que seja a decomposição π de (m, M).

Nessas condições, definimos a integral de f em $[a, b]$ como sendo o limite de $s_P(f)$ quando $\delta(P) \to 0$, onde $\delta(P)$ denota a amplitude máxima dos intervalos (y_{j-1}, y_j) da decomposição P de (m, M).

Se f é uma função mensurável e não limitada definida em $[a, b]$, vamos admitir inicialmente que f é não negativa. Neste caso, para cada $k \in \mathbb{N}$ considere a função $f_k(x) = min\{f(x),\ k\}$. Logo f_k é não-negativa, mensurável e limitada, pois $0 \leq f_k(x) \leq k$, $\forall x \in [a, b]$ e para cada $k \in \mathbb{N}$, onde temos f_k integrável em $[a, b]$.

Assim, a sucessão (f_k) é uma sucessão crescente, de funções integráveis convergindo q.s., para f.

Se sucessão das integrais $\int f_k$ for convergente, então definimos a integral de f em $[a, b]$ como sendo

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{k\to\infty} \int_a^b f_k(x)dx.$$

No caso geral, quando f é não limitada, escrevemos $f = f^+ - f^-$, e dizemos que f é integrável se o forem f^+ e f^-, definindo a integral de f como a diferença das integrais de f^+ e f^-, isto é, $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f^+(x)dx - \int_a^b f^-(x)dx$.

Observação 3. Segue da definição que, se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ for mensurável e limitada então f é integrável.

Proposição 10. O conjunto das funções integráveis em $[a, b]$ constitui um Espaço Vetorial Real. (Na verdade, um subespaço das funções reais definidas em $[a, b]$).

Prova: Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funções integráveis, limitadas em $[a, b]$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Por serem integráveis segue que $f,\ g$ são mensuráveis. Logo, pela Proposição 8, $\alpha f + \beta g$ é mensurável. Agora, como f, g são limitadas então $\alpha f + \beta g$ é integrável.

Se $f,\ g$ são quaisquer em (a, b), então existem sucessões de funções integráveis e limitadas convergindo q.s. para $f,\ g$ em (a, b). Da primeira parte segue que a soma e o produto por escalar de cada elemento da sequencia é integrável, donde segue o resultado por passagem ao limite.

■

2.4.1 Teoremas de Convergência

Nesta seção apresentamos vários resultados referentes a convergência de funções integráveis.

Lema 2. *Se* $h(x) \geq 0, \forall x \in [a,b]$, *então*

$$\int_a^b h(x)dx \geq 0.$$

Prova: Seja $M \in \mathbb{R}$, tal que $0 \leq h(x) \leq M$ e seja P uma partição de $[0,M]$, pelos pontos $0 = y_0 < y_1 < \ldots < y_k = M$. Assim

$$s_P(h) = \sum_{j=1}^{k} y_{j-1} m(E_j),$$

onde $E_j = \{x \in (a,b],\ y_{j-1} < h(x) \leq y_j\}$.

Agora, $y_{j-1} \geq 0$ e $m(E_j) \geq 0$, $\forall j = 1, \ldots, k$, donde segue que $s_P(h) \geq 0$ e portanto $\lim_{\delta(P) \to 0} s_P(h) \geq 0$, ou ainda $\int_a^b h(x)dx \geq 0$. ■

Corolário 5. Se f, g são integráveis e $f(x) \leq g(x)$ então $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

Prova: Considere $h(x) = g(x) - f(x)$. Temos que h é integrável e $h(x) \geq 0\ \forall x \in [a,b]$. Donde $\int_a^b h(x)dx \geq 0$. Mas

$$\int_a^b h(x)dx = \int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

Logo,

$$\int_a^b g(x)dx \geq \int_a^b f(x)dx.$$

■

Teorema 1. *(Beppo Levi) Seja* (f_k) *uma sucessão crescente de funções integráveis em* $[a,b]$, *cuja sucessão das integrais* $(\int f_k)$ *é limitada superiormente. Então* (f_k) *converge q.s. para uma função integrável* f *e* $\int_a^b f(x)dx = \lim_{k\to\infty} \int_a^b f_k(x)dx$.

Prova: Consultar Referência [5].

■

Teorema 2. *(Beppo Levi) Se* (f_k) *é uma sucessão decrescente de funções integráveis em* $[a,b]$, *cujo sucessão das integrais é limitada inferiormente, então* (f_k) *converge q.s. para uma função integrável* f *e* $\int_a^b f(x)dx = \lim_{k\to\infty} \int_a^b f_k(x)dx$.

Prova: Segue da forma crescente do Teorema 1, considerando a sucessão $(-f_k)$. ■

Observação 4. Seja $f_\circ$ uma função integrável em (a,b). Denotemos por $L_s(f_\circ)$ o conjunto das funções f integráveis em (a,b), tal que $f(x) \leq f_\circ(x)$, $\forall x \in (a,b)$.

Como $f \leq g \Rightarrow \int f \leq \int g$ segue que $\int f \leq \int f_\circ$ para toda função $f \in L_s(f_\circ)$. Assim, se (f_k) é uma sucessão de funções em $L_s(f_\circ)$, a sucessão das integrais é limitada superiormente. Agora, se (f_k) é crescente, segue pelo Teorema 1 (Beppo Levi) que (f_k) converge em $[a,b]$ para f, onde f é integrável em (a,b), e ainda, como $f_k \leq f_\circ$ $\forall k \in \mathbb{N}$, segue que $\lim\limits_{k\to 0} f_k = f \leq f_\circ$. Assim, $f \in L_s(f_\circ)$.

Concluímos então que $L_s(f_\circ)$ é fechado por passagem ao limite de sucessões crescentes. Analogamente o conjunto $L_i(f_\circ)$ constituido pelas funções f integráveis em $[a,b]$, tais que

$$f(x) \geq f_\circ(x), \ \ \forall x \in (a,b),$$

é fechado por passagem ao limite de sucessões decrescentes.

Daí, se $f_\circ \geq 0$, o conjunto $L(f_\circ)$ formado pelas funções f integráveis em $[a,b]$, tais que

$$-f_\circ(x) \leq f(x) \leq f_\circ(x) \ \ \forall x \in (a,b)$$

é fechado por passagem ao limite de sucessões monótonas.

Como consequência desse resultado, temos que, para toda sucessão (f_k) de funções de $L_s(f_\circ)$, a função $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}} f_k \in L_s(f_\circ)$, uma vez que $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}} f_k = \lim\limits_{k\to\infty} g_k$, onde $g_k(x) = \max\limits_{1\leq i\leq k}\{f_i(x)\}$, que é uma sucessão crescente. Analogamente, $\inf\limits_{k\in\mathbb{N}} f_k \in L_i(f_\circ)$, se $(f_k) \in L_i(f_\circ)$.

Donde concluímos que $\inf\limits_{k\in\mathbb{N}} f_k$, $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}} f_k$ pertencem a $L(f_\circ)$ para toda sucessão $(f_k) \subset L(f_\circ)$, e desse modo, $\lim\limits_{k\to\infty} \sup f_k$ e $\lim\limits_{k\to\infty} \inf f_k$ pertencem a $L(f_\circ)$, visto que $\lim\limits_{k\to\infty} \sup f_k = \lim\limits_{k\to\infty} \left(\sup\limits_{k\geq n} f_n\right)$ e $\lim\limits_{k\to\infty} \inf f_k) = \lim\limits_{k\to\infty} \left(\inf\limits_{k\geq n} f_n\right)$.

Teorema 3. *(Convergência Dominada ou Teorema de Lebesgue) Seja (f_k) uma sucessão de funções integráveis em $[a,b]$, convergente q.s. para a função f. Se existir uma função integrável $f_\circ$, tal que $|f_k| \leq f_\circ$ q.s. para toda $k \in \mathbb{N}$, então f é integrável e vale*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{k\to\infty} \int f_k.$$

Prova: Podemos supor que para todo $k \in \mathbb{N}$, $|f_k(x)| \leq f_\circ(x)$, $\forall x \in [a,b]$. Caso contrário, podemos redefinir as f_k em conjuntos de medida nula, as funções obtidas serão ainda integráveis, suas integrais coincidirão com as de f_k e a sucessão delas ainda será convergente quase sempre para f em $[a,b]$.

Da observação 4, segue que $\lim\limits_{k\to\infty} \inf f_k$ é integrável e vale $-f_\circ \leq \lim\limits_{k\to\infty} \inf f_k \leq f_\circ$.

Como, por hipótese, (f_k) é convergente q.s. para f, temos $f = \lim\limits_{k\to\infty} \inf f_k$ q.s. donde f é integrável.

Agora,

$$\lim_{k\to\infty} \inf f_k = \lim_{k\to\infty}\left(\inf_{n\geq k} f_n\right)$$

Assim, f é limite q.s. da sucessão crescente (g_k) onde $g_k = \inf\limits_{n\geq k} f_n$ e ainda, temos $g_k \leq f_m \leq f_\circ$ $m \geq k$, donde

$$\int_a^b g_k(x)dx \leq \int_a^b f_m(x)dx \leq \int_a^b f_\circ(x)dx \ , \quad m \geq k, x \in (a,b)$$

De $\int_a^b g_k(x)dx \leq \int_a^b f_\circ(x)dx,$ resulta que a sucessão de integrais $\left(\int g_k\right)$ tem um majorante finito, e portanto, pelo Teorema 1,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{k\to\infty} \int_a^b g_k(x)dx.$$

De $\int_a^b g_k(x)dx \leq \int_a^b f_m(x)dx$, $m \geq k$, resulta que $\lim\limits_{k\to\infty} \displaystyle\int g_k dx \leq \lim\limits_{k\to\infty} \inf \int_a^b f_m(x)dx$ portanto,

$$\int_a^b f(x)dx \leq \lim_{k\to\infty} \inf \int_a^b f_k(x)dx.$$

Analogamente considerando $g_k = \sup\limits_{n\geq k} f_n$, concluímos que

$$\int_a^b f(x)dx \geq \lim_{k\to\infty} \sup \int_a^b g_k(x)dx,$$

Logo, $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \lim_{k\to\infty} \int_a^b g_k(x)dx.$ ■

Teorema 4. *(Lema de Fatou) Seja (f_k) uma sucessão de funções integráveis em $[a,b]$ e não negativos, convergente quase sempre para uma função f. Suponhamos que existe uma constante $c \in \mathbb{R}$, tal que $0 \leq \displaystyle\int_a^b f_k(x)dx \leq c \; \forall k \in \mathbb{N}$. Então f é integrável em $[a,b]$ e tem-se $0 \leq \displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq c$.*

Prova: Para cada $k \in \mathbb{N}$, seja $g_k = \inf_{n \geq k} f_n$. Então, $g_k \leq g_{k+1}$ e pela Observação 4 , $g_k \in L_i(0)$. Logo, (g_k) é uma sucessão crescente de funções integráveis. Além disso, $g_k \leq f_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e, portanto,

$$\int_a^b g_k(x)dx \leq \int_a^b f_k(x)dx \leq c \tag{2.10}$$

donde a útima desigualdade segue das hipóteses sobre (f_k). Temos então que (g_k) é uma sucessão crescente de funções integráveis cuja sucessão das integrais tem um majorante finito, donde pelo Teorema 1, (g_k) converge quase sempre para uma função integrável g e $\displaystyle\int_a^b g(x)dx = \lim_{k\to\infty} \int_a^b g_k(x)dx$.

Agora, como (g_k) é crescente, resulta que

$$g = \lim_{k\to\infty} g_k = \sup_{k\in\mathbb{N}} g_k = \sup_{k\in\mathbb{N}} \left(\inf_{n\leq k} f_n \right) = \lim_{k\to\infty} \inf f_k = f.$$

Portanto f é integrável e

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx = \lim_{k\to\infty} \int_a^b g_k(x)dx \leq c.$$

Donde a desigualdade segue de 2.10. ■

Capítulo 3

A integral de Riemann à Lebesgue

A nota publicada por Lebesgue em 1901 que revolucionou a teoria da integração continha, basicamente, os seguintes pontos:

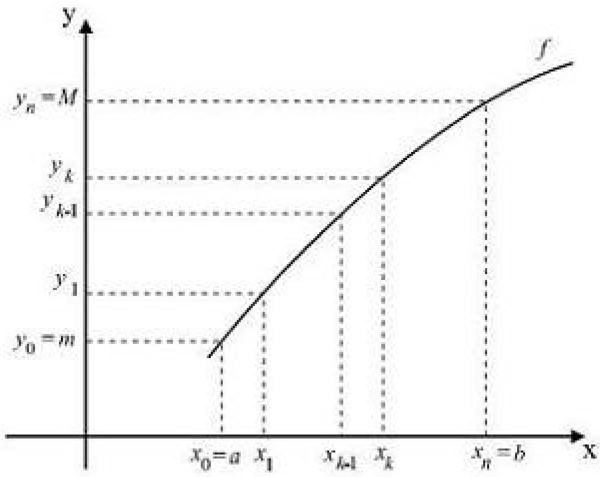
- Construção técnica de sua integral a partir da integral de Riemann.
- Primeiras definições de medida, função (limitada) mensurável e função integrável.
- Inclusão da integral de Riemann na construção feita por Lebesgue.
- Algumas propriedades básicas das funções integráveis segundo Lebesgue.
- Exemplo de uma função não integrável à Riemann, mas integrável à Lebesgue.

Alguns desses pontos serão descritos neste capítulo.

3.1 Construção de Lebesgue

Para definir seu novo conceito de integral, Lebesgue fez a seguinte observação:

Suponha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, limitada e crescente, sendo m, M, respectivamente, o ínfimo e o supremo de f em $[a, b]$. Agora observe a figura abaixo:

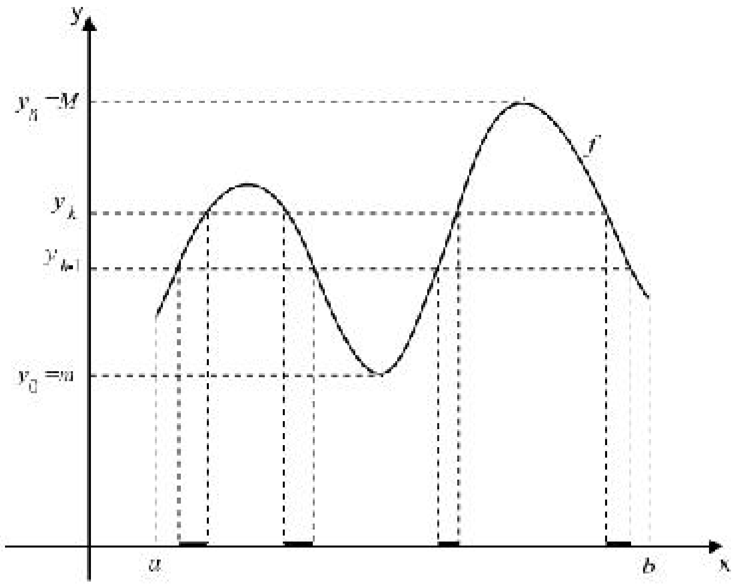


Considere uma partição P de $[a, b]$ em intervalos $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \ldots, n$. P determina uma partição de $[m, M]$ em intervalos $[y_{k-1}, y_k]$, $k = 1, \ldots, n$. Reciprocamente, em face de f ser crescente em $[a, b]$, um partição de $[m, M]$ em intervalos $[y_{k-1}, y_k]$, $k = 1, \ldots, n$, determina uma partição de $[a, b]$ em intervalos $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \ldots, n$. Portanto, no caso crescente, qualquer método de partição de $[a, b]$ ou de $[m, M]$ conduz a um mesmo conceito de integral, considerando-se as somas:

$$s_P(f) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) y_{k-1} \quad e \quad S_P(f) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) y_k. \tag{3.1}$$

Lebesgue então concluiu que no caso em que f é crescente e limitada, obtém-se as integrais superior e inferior de Riemann-Darboux com partições de $[a, b]$ ou $[m, M]$, conduzindo ao mesmo conceito de integral. O caso decrescente limitado é analisado de modo análogo.

Seja agora $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitada mas não necessariamente monótona (ver figura abaixo).



Uma partição de $[a, b]$ em intervalos $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \ldots, n$, permite definir as somas de Darboux conduzindo ao conceito de integral de Riemann. Mas, tomando-se uma partição de $[m, M]$ em intervalos $[y_{k-1}, y_k]$, $k = 1, \ldots, n$, com $m = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = M$, não obtemos uma partição de $[a, b]$ em intervalos, como podemos ver na imagem acima, para um caso simples. Nesses casos, em $[a, b]$ obtém-se os conjuntos:

$$\{x \in (a, b); y_{k-1} \leq f(x) \leq y_k\}$$

que, no nosso exemplo, compõe-se da união de quatro intervalos, sem ponto comum. Se f for muito oscilante em $[a, b]$, a partição de $[m, M]$ determina subconjuntos bem gerais em $[a, b]$.

A definição proposta por Lebesgue segue o seguinte raciocínio: Da partição $[y_{k-1}, y_k]$, $k = 1, \ldots, n$, $m = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = M$, de $[m, M]$, resulta em $[a, b]$ a partição

$$E_k = \{x \in [a, b]; y_{k-1} \leq f(x) \leq y_k, k = 1, \ldots, n\} \tag{3.2}$$

em subconjuntos E_k.

Desejando-se manter as somas 3.1 para obter o novo conceito de Lebesgue, surgiu então o problema: Como atribuir aos E_k dados por 3.2 um número positivo que corresponda a "medida" dos E_k da mesma forma que $x_k - x_{k-1}$ mede o comprimento dos intervalos $[x_{k-1}, x_k], k = 1, \ldots, n$?

O problema estava resolvido com a definição de medida de Lebesgue que a cada E_k , dado por 3.2, atribui-se um número positivo representado por $\mu(E_k)$, o qual se lê "medida do conjunto E_k ", generalizando o conceito de amplitude do intervalo $[x_{k-1}, x_k]$. A estes conjuntos E_k aos quais atribui-se uma medida, Lebesgue denominou mensuráveis. Os intervalos $[x_{k-1}, x_k]$ são mensuráveis.

Desta forma, as somas 3.1 são reescritas particionando $[m, M]$ em intervalos $[y_{k-1}, y_k]$, $k = 1, \ldots, n$, $m = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = M$, sob a forma:

$$s_P(f) = \sum_{k=1}^{n} y_{k-1}\mu(E_k) \quad e \quad S_P(f) = \sum_{k=1}^{n} y_k \mu(E_k) \tag{3.3}$$

E surge, então, um segundo problema: Para quais funções limitadas $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ os conjuntos E_k são mesuráveis? Lebesgue restringe, então, as funções limitadas a uma classe que ele denominou de "funções mensuráveis". Dada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, limitada, ele denominou "mensurável" quando para todo par de números $\alpha < \beta$, o conjunto

$$\{x \in [a, b]; \alpha < f(x) < \beta\}$$

for mensurável. Conclui-se que tudo fica em ordem para as funções $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, limitadas e mensuráveis. Ele observa que as funções contínuas a menos de um conjunto de medida nula são exemplos de funções mensuráveis. Assim, com as novas definições de conjunto e função mensurável, se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ for limitada e mensurável as somas s_P e S_P definidas em 3.3 estão bem definidas. Logo, pode-se definir as integrais inferior e superior, respectivamente, por $\sup_P\{s_P\}$ e $\inf_P\{S_P\}$. Quando estas integrais forem iguais, este valor comum denomina-se integral de Lebesgue da função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

3.2 Exemplos de Funções Integráveis

Segue um exemplo de função que é integrável segundo a nova definição de Lebesgue, mas não é integrável segundo Riemman e um exemplo de função integrável à Riemann e à Lebesgue.

Exemplo 3.2.1. Seja $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se} \quad x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

Particionando $[0, 1]$ em intervalos da forma $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ $k = 1, \ldots, n$, $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1$, segue que cada I_k possui pontos racionais e pontos irracionais, donde o $\inf\limits_{x \in I_k} f = 0$ e $\sup\limits_{x \in I_k} f = 1$ para $k = 1, 2, \ldots, n$. Logo,

$$(\mathfrak{R})\text{[1]} \underline{\int_0^1} f(x)dx = 0 \quad e \quad (\mathfrak{R})\overline{\int_0^1} f(x)dx = 1.$$

Donde concluímos que a $\int f$ no sentido de Riemann não existe.

Por outro lado, $f = 0$ q.s. em $[0, 1]$, visto que o conjunto dos racionais é enumerável e portanto, pelo Corolário 1, tem medida de Lebesgue nula, assim tanto a soma integral $s_P(f)$ de Lebesgue quanto a soma integral $S_P(f)$ tem valor zero. Logo, f é integrável segundo Lebesgue e

$$(\mathfrak{L}) \int_0^1 f(x)dx = 0.$$

[1] O $(\mathfrak{R})$ está sendo usado para indicar que as integrais superior e inferior foram calculadas no sentido de Riemann. Da mesma forma usaremos $(\mathfrak{L})$ para indicar a integral no sentido de Lebesgue.

Exemplo 3.2.2. Dizemos que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função-escada quando existem uma partição P pelos pontos $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ de $[a,b]$ e números reais $c_1, \ldots, c_n$ tais que $f(x) = c_i$ quando $x_{i-1} < x < x_i$.

Sabemos que toda função-escada é integrável à Riemann e vale:

$$(\mathfrak{R}) \int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} c_k(x_k - x_{k-1}).$$

Por outro lado, f é integrável segundo Lebesgue em $[a,b]$.

De fato, sejam $m, M \in \mathbb{R}$ tais que $m < f(x) < M$ para todo $x \in [a,b]$ e seja $A = \{f(x_0), \ldots, f(x_n)\}$. O conjunto A é finito, logo tem medida de Lebesgue nula.

Consideremos a partição P de (m, M) dada pelos pontos $m = y_0 < y_1 < \ldots < y_j = M$ com $y_i = c_k$ para $i = 1, \ldots, j-1$ e algum $k = 1, \ldots, n$. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ considere $F = \{x \in [a,b]; f(x) > \alpha\}$. Assim: se $\alpha < y_1$ então $F = [a,b]$ a menos de um subconjunto de A que tem medida de Lebesgue nula; $y_{j-1} < \alpha$ então $F = \emptyset$ a menos de um subconjunto de A que tem medida de Lebesgue nula e se $c_i < \alpha < c_j$, $i \neq j$ então F é a união de intervalos abertos, a menos de um subconjunto de A cuja medida de Lebesgue é nula.

Em qualquer um dos casos, temos $F = \{x \in [a,b]; f(x) > \alpha\}$ mensurável e, portanto, f é integrável segundo Lebesgue.

A soma integral $S_P(f)$ de Lebesgue de f com relação a partição P é dada por:

$$s_P(f) = \sum_{i=1}^{j} y_{i-1} m(E_i),$$

onde $E_i = \{x \in [a,b]; y_{i-1} \leq f(x) < y_i, i = 1, \ldots, j\}$, ou seja, para cada $i = 1, \ldots, j$ $E_i = (x_{k-1}, x_k)$ para algum $k = 1, \ldots, n$ ou $E_i = \emptyset$. Donde segue que:

$$s_P(f) = \sum_{k=1}^{n} c_k amp(x_{i-k}, x_k) = \sum_{k=1}^{n} c_k(x_k - x_{i-k}).$$

Assim, passando ao limite quando $\delta(P) \to 0$, onde $\delta(P)$ denota a amplitude máxima dos intervalos (y_{i-1}, y_i) da partição P, temos

$$(\mathfrak{L}) \int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta(P) \to 0} s_P(f) = \sum_{k=1}^{n} c_k(x_k - x_{k-1}) = (\mathfrak{R}) \int_a^b f(x)dx.$$

3.3 A Integral de Lebesgue como extensão da Integral de Riemann

O teorema seguinte mostra que a integral de Lebesgue é uma extensão da integral de Riemann, ou seja, que se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é integrável segundo Riemann então f é integrável segundo Lebesgue e o valor das integrais coincidem.

Teorema 5. *Seja f uma função integrável segundo Riemann em $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Então f é integrável à Lebesgue e*

$$(\mathfrak{R}) \int_a^b f(x)dx = (\mathfrak{L}) \int_a^b f(x)dx.$$

Prova: Seja P uma partição de $[a, b]$ pelos intervalos $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ $k = 1, \ldots, n$, com $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Para cada $k = 1, \ldots, n$ seja $m_k = \inf\{f(x); x \in I_k\}$ e $M_k = \sup\{f(x); x \in I_k\}$. Nessas condições ficam definidas em $[a, b]$ as seguintes funções escada:

$$\begin{array}{rcl} l_P(x) & = & m_k \ \text{ para } \ x \in I_k,\ k = 1, \ldots, n \\ L_P(x) & = & M_k \ \text{ para } \ x \in I_k,\ k = 1, \ldots, n \\ l_P(x_k) & = & L_P(x_k) = f(x_k), k = 1, \ldots, n-1 \end{array}$$

Agora, pelo Exemplo 3.2.2, as funções l_P e L_P são integráveis segundo Lebesgue e vale:

$$(\mathfrak{L}) \int_a^b l_P(x)dx = \sum_{k=1}^n m_k amp(I_k) \ \ e \ \ (\mathfrak{L}) \int_a^b L_P(x)dx = \sum_{k=1}^n M_k amp(I_k).$$

Por outro lado, por definição, as somas inferior, $s(f; P)$, e superior, $S(f; P)$, de Riemann-Darboux de f, com relação a partição P, se dão por:

$$s(f; P) = \sum_{k=1}^n m_k amp(I_k) \ \ e \ \ S(f; P) = \sum_{k=1}^n M_k amp(I_k).$$

Donde segue que

$$(\mathfrak{L}) \int_a^b l_P(x)dx = s(f; P) \ \ e \ \ (\mathfrak{L}) \int_a^b L_P(x)dx = S(f; P).$$

Seja $(P_i)_{i \in \mathbb{N}}$ uma sucessão crescente de partições de $[a, b]$, ou seja, para cada $i \in \mathbb{N}$, todo ponto de P_i é ponto de P_{i+1}. Denotaremos essa inclusão por $P_i < P_{i+1}$. Representaremos as funções l_{P_i} e L_{P_i} por l_i e L_i, respectivamente, para $i \in \mathbb{N}$, por simplicidade de notação.

Note que

$$P_i < P_{i+1} \Longrightarrow l_i \leq l_{i+1} \ \ e \ \ L_i \geq L_{i+1}, \quad \forall i \in \mathbb{N},$$

ou seja, $(l_i)_{i\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão crescente e $(L_i)_{i\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão decrescente de funções integráveis à Lebesgue. E, como $l_i(x) \leq f(x) \leq L_i(x)$ para todo $x \in [a,b]$, segue que $(l_i)_{i\in\mathbb{N}}$ e $(L_i)_{i\in\mathbb{N}}$ são convergentes e tem-se:

$$l(x) = \lim_{i\to\infty} l_i(x) \leq f(x) \leq \lim_{i\to\infty} L_i(x) = L(x).$$

Para toda partição P de $[a,b]$, temos que

$$s(f;P) \leq (\mathfrak{R}) \int_a^b f(x)dx.$$

Donde segue que

$$(\mathfrak{L}) \int_a^b l_i(x)dx \leq (\mathfrak{R}) \int_a^b f(x)dx.$$

Assim, $(l_i)_{i\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão crescente de funções integráveis segundo Lebesgue cuja sucessão das integrais é limitada superiormente, logo, pelo Teorema de Beppo Levi, $l(x)$ é integrável segundo Lebesgue e vale

$$(\mathfrak{L}) \int_a^b l(x)dx = \lim_{i\to\infty} (\mathfrak{L}) \int_a^b l_i(x)dx.$$

Por outro lado, de f ser integrável à Riemann, a sucessão $(P_i)_{i\in\mathbb{N}}$ pode ser escolhida de modo que $S_i(f) - s_i(f)$ converge para zero. Assim, a sucessão $\left((\mathfrak{L}) \int_a^b (L_i - l_i)\right)_{i\in\mathbb{N}}$ converge para zero, daí $(L_i - l_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge para zero q. s., visto que $L_i - l_i \geq 0$ em $[a,b]$ e, portanto $L(x) = l(x)$ q.s. em $[a,b]$.

Logo

$$l(x) = f(x) = L(x) \quad \text{q.s. em } [a,b]$$

Donde,

$$\begin{aligned}(\mathfrak{R}) \int_a^b f(x)dx &= \sup_P s(f;P) = \lim_{i\to\infty} s(f;P_i) = \lim_{i\to\infty} (\mathfrak{L}) \int_a^b l_i(x)dx \\ &= (\mathfrak{L}) \int_a^b l(x)dx = (\mathfrak{L}) \int_a^b f(x)dx\end{aligned}$$

■

Considerações Finais

A teoria de Lebesgue foi a primeira tentativa frutífera de organização matemática da noção de integral e, nesse sentido, costuma-se dizer que a teoria da integração foi criada no século XX.

Com a evolução do pensamento matemático, a noção de medida e integral de Lebesgue foi se tornando cada vez mais imprescindível ao desenvolvimento e organização de novas teorias.

É fato então, que o conceito de Integração de Lebesgue revolucionou a Análise Matemática, não apenas pelo fato de se basear numa teoria de medida, mas por ser muito mais aplicável que os conceitos de Riemann usados até então, isto é, a integral de Lebesgue abrange um conjunto maior de funções que a integral de Riemann visto que aquela faz menos exigências sobre a função. Além disso, no que diz respeito ao estudo de sucessões convergentes de funções integráveis a teoria de Lebesgue nos permite garantir a integrabilidade da função limite sob condições mais fracas que a teoria de Riemann, o qual pudemos perceber na seção que trata dos teoremas de convergência.

Hoje, a Teoria da Integração é certamente um dos blocos fundamentais da Matemática, e é especialmente relevante para múltiplas das suas áreas fundamentais e aplicadas, como a Análise Funcional, o Cálculo de Variações, as Equações Diferenciais, e a Teoria das Probabilidades. As suas ideias repercutem-se em algumas das teorias mais centrais da Física Moderna, e são prevalentes no esclarecimento de questões oriundas da Engenharia. Um exemplo disso, é que o "espaço dos estados" do átomo de hidrogênio, o mais simples átomo da natureza, é um espaço de (classes de equivalência) de funções de quadrado integrável no sentido de Lebesgue.

Assim, podemos concluir que a Integral de Lebesgue além de constituir um marco na história da teoria da integração é uma ferramenta bastante eficiente, quando comparada a integral de Riemann, no que diz respeito a sua aplicação.

Referências Bibliográficas

[1] BARRA, G. Measure Theory and Integration. New Age International Publishers,2000.

[2] BOYER, C.B. História da Matemática.Edgard Blucher,2ed. São Paulo, 1996.

[3] BURK, F. Lebesgue Measure and Integration, An Introdution. John wiley & Sons, Inc.1998.

[4] LIMA, E,L. Curso de análise: Vol I. 8Ed. Rio de Janeiro: IMPA. 1976.

[5] MEDEIROS, L. A. e MELLO, E. A., A integral de Lebesgue. Universidade Federal do Rio de Janeiro,6 ed., Rio de Janeiro, 2011.

[6] FERNANDES, R.L. O integral de Lebesgue. Disponível em http://www.math.ist.utl.pt/ acannas/AMIII/Materiais/loja_fernandes.pdf Acessado em 04/06/12.

[7] ZAHN,M. Noções de Medida e Integral de Lebesgue. UFPEL. Disponível em: http://minerva.ufpel.edu.br/ mauricio.zahn/Med_Int_Lebesgue.pdf Acessado em 20/05/12.

[8] ZAMORANO, C. e MARTIN, P. La integral de Lebesgue em su contexto histórico. Disponível em http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/barcelo/historia/La%20integral %20de%20Lebesgue.pdf. Acessado em 04/06/12.