UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

CLODOALDO RIBEIRO DE QUEIROZ

TEOREMA DE HAMILTON-CAYLEY

CAMPINA GRANDE – PB
2012

CLODOALDO RIBEIRO DE QUEIROZ

TEOREMA DE HAMILTON-CAYLEY

Monografia apresentada ao Curso de Graduação em Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências para obtenção do Título Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Ms. Ernesto Trajano de Lima Filho.

CAMPINA GRANDE – PB
2012

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL – UEPB

Q38t Queiroz, Clodoaldo Ribeiro de.

Teorema de Hamilton-Cayley [manuscrito] / Clodoaldo Ribeiro de Queiroz. – 2012.

32 f.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2012.

"Orientação: Prof. Ma. Ernesto Trajano de Lima Filho, Departamento de Matemática".

1. Álgebra linear. 2. Polinômios. 3. Matriz. I. Título.

21. ed. CDD 512.5

CLODOALDO RIBEIRO DE QUEIROZ

TEOREMA DE HAMILTON CAYLEY

Monografia apresentado ao Curso de Graduação em Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências para obtenção do Título de Licenciado em Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Ms. Ernesto Trajano de Lima Filho / UEPB
Orientador

Vandemberg Lopes Vieira

Profº. Dr. Vandemberg Lopes Vieira / UEPB
Examinador

Profº Dr. Juarez Dantas de Souza / UEPB

Campina Grande, 11 de julho de 2012.

CAMPINA GRANDE-PB
2012

DEDICATÓRIA

Dedico esse trabalho a Deus, que, com sua infinita bondade guia meus caminhos me proporcionando saúde, paz, amor, sabedoria e disposição para enfrentar toda luta que aqui venho concluir minha graduação.

A meus pais, Manoel Aureliano e Dona Maria de Lourdes, que com seu amor infinito e apoio incondicional são responsáveis por minha base pessoal e educacional.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus pelo o dom da vida, é dele que recebo graças divinas para crescer e tornar o que sou.

Aos meus pais, irmãos, irmãs, tios, tias, primos, sobrinhos e minha querida avó Maria de Neuma pelo o apoio e incentivo durante esta batalha.

Aos meus amigos, pelos momentos de alegrias e tristezas que compartilhamos, fazendo entender que sou capaz de ir mais além.

Aos professores que contribuíram diretamente com a minha formação, em especial, ao professor Ernesto Trajano de Lima Filho pelo seu profissionalismo, oportunidade, tempo e paciência para a realização deste trabalho que é tão significativo para mim.

“Se enxerguei longe, foi porque me apoiei em ombros de gigantes.”

(Isaac Newton)

RESUMO

Este trabalho tem por finalidade estudar o "Teorema de Hamilton-Cayley", assunto pouco explorado no curso de Licenciatura Plena em Matemática na disciplina de linear II. Dentro desta perspectiva, enfatiza a demonstração do teorema. O nosso objetivo aqui é demonstrar o teorema de três maneiras distintas, ou seja, provar que, qualquer matriz é raiz do seu polinômio característico. Uma sugestão que possibilita na compreensão do conteúdo para a aprendizagem dos alunos. Para o desenvolvimento deste trabalho consultamos vários livros de Álgebra Linear e da História da Matemática. Por fim, além de demonstrar o teorema em questão, diante de tantas aplicações citamos duas delas: cálculo das potências sucessivas de um operador linear sobre um espaço de dimensão finita e inversa de uma matriz por meio do polinômio característico de uma matriz invertível.

P**alavras – chaves:** Polinômio Característico. Álgebra Linear. Demonstração.

ABSTRACT

This work aims to study the topic "Cayley-Hamilton theorem," subject little explored or in any way in the course of Full Degree in Mathematics. Within this perspective, emphasizes the proof of the theorem. Our goal here is to demonstrate the theorem in three different ways ie, prove that any matrix is the root of the characteristic polynomial. A suggestion that enables the understanding of the content to students' learning. To develop this work refer to research in several books of linear algebra, but also the history of mathematics. Finally, as demonstrated by the theorem in question, before so many applications we mention two: calculation of successive powers of a linear operator on a finite dimensional space, inverse of a matrix by means of the characteristic polynomial of an invertible matrix.

Keywords: Characteristic Polynomials. Linear Algebra. Demonstration.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO 09

CAPÍTULO I 10

1. Triangularização 10

1.1 existência de Triangularização 12

1.2 Teorema de Hamilton-Cayley 15

CAPÍTULO II 17

2. Demonstração do . Teorema de Hamilton-Cayley 17

2.1 Primeira demonstaração 17

2.2 Segunda demonstração 18

2.3.Terceira Demonstração 21

CONSIDERAÇÕES FINAIS 24

ANEXOS 27

ANEXO A 28

ANEXO B 30

REFERÊNCIAS 32

INTRODUÇÃO

Este trabalho é fruto, antes de tudo, da curiosidade em aprofundar os conhecimentos acerca do teorema de Hamilton-Cayley, pouco explorado nos cursos de Licenciatura em Matemática.

Nosso objetivo aqui foi nos deter mais demoradamente no teorema de Hamilton-Cayley. No qual, qualquer matriz anula seu polinômio característico. Este teorema foi declarado por Arthur Cayley em 1858, para um caso particular, mas que o deixou muito confiante pelo resultado obtido, vinha afirmar que era verdade em geral. Anos antes de Cayley apresentar o teorema William Rowan Hamilton em seus estudos sobre ("Lectures on Quaternions" afirma que uma transformação de rotação no espaço tridimensional satisfaz sua própria equação característica. Embora Hamilton-Cayley nunca veio publicar uma prova do teorema no caso geral. As referências a este teorema na literatura nos permitem chamá-lo o teorema Hamilton-Cayley. O primeiro resultado apresentado no caso geral foi publicado apenas em 1878 por Georg Frobenius.

Aqui, apresentamos aqui 3 demonstrações distintas do citado teorema. No entanto, estudamos aqui, espaços vetoriais complexos, triangularização de um operador e usamos também uma das propriedades de determinantes:

.

Portanto, foi feito uma pesquisa bibliográfica e o estudo dos tópicos específicos relacionados ao tema "teorema Hamilton-Cayley" objeto deste trabalho, que possibilitaram termos as ferramentas necessárias para cumprir o objetivo geral do mesmo onde foram utilizados fortemente conceitos e resultados da Álgebra Linear.

CAPÍTULO I

1. TRIANGULARIZAÇÃO

Neste capítulo, abordaremos: triangularização de um operador linear T sobre um espaço vetorial V de dimensão finita, algumas definições, corolários, teoremas, além de exemplos importantes e principalmente o teorema de Hamilton-Cayley.

Seja V um espaço vetorial e T: V→V um operador linear. Tomemos v não nulo pertencente a V. Dizemos que v é um auto-vetor de T se existe tal que

Neste caso, dizemos que λ é um auto-valor de T associado ao vetor v que será chamado um auto-vetor de T com auto-valor λ.

Dizemos que T: V→V é diagonalizável quando existe uma base β de V tal que é uma matriz diagonal.

Exemplo: Seja uma aplicação linear tal que cuja matriz, em relação a base canônica é

Seus autovalores são e com autovetores associados e respectivamente, notemos que os autovetores formam uma base de . Seja, então, a base de formada pelos autovetores de T e por fim, encontremos a matriz do operador T na base para tal, aplicamos T em cada vetor da base e escrevemos a imagem obtida como combinação linear dos vetores da base

Assim,

Notemos que é uma matriz diagonal e representa o operador linear T na base β de autovetores.

Sabemos que, se , ,..., forem auto-valores distintos de T, então T é diagonalizável se, e somente se, V ⊕ ⊕ ⊕ .

Seja T: V→V um operador linear, dim V= n, β uma base de V e v um auto-vetor de T, sendo . Tem-se,

→ → → →
→ .

Dizemos nesse caso que é o polinômio característico de T, de modo que os auto-valores de T são as raízes do polinômio característicos. Observa-se a independência da base β acima.

Alguns operadores não possuem sequer auto-valores. Por exemplo, considere T: → , T(x, y) = (-y, x). Sua representação matricial na base canônica é e assim seu polinômio característico é que não possui raízes reais. Portanto, T é não diagonalizável.

Podemos resolver o problema da inexistência de auto-vetores passando a trabalhar com espaços vetoriais complexos. Mesmo assim, alguns operadores continuam não diagonalizáveis. Por exemplo, tome , T(x, y, z) = (x, x+y, 2z). A matriz de T na base canônica é de modo que o polinômio característico é . Os auto-espaços associados à e são:

(x, y, z); (x, x+y, 2z) = 1(x, y, z)} → (0, y, 0); } = < (0, 1,0)>

(x, y, z); (x, x+y, 2z) = 2(x, y, z) } → (0, 0, z); } = < (0, 0, 1)>

Portanto, dim = dim = 1, de modo que não conseguiremos uma base de formada de auto-vetores de T, o que implica dizer que V ≠ ⊕ . Logo, T é não diagonalizável.

1.1 EXISTÊNCIA DE TRIANGULARIZAÇÃO

Considere um espaço vetorial V de dimensão finita, com dim V= n≥1, uma aplicação linear T: V → V e W um subespaço qualquer de V. Dizemos que W é um subespaço invariante de T se, T leva qualquer elemento de W em W. Um conjunto de subespaços , onde com i = 1,..., n-1. Além disso, dim e cada sendo T-invariante é dito um leque para T. Note que .

Nesse momento, interpretaremos leques em termos de matrizes. Considere um leque para T.

Seja base de . Ampliamos até formar uma base de . Da mesma forma, estendemos até completar uma base de e assim por diante até formar uma base β = de V. A base β é dita uma base associada ao leque.

TEOREMA 1: Seja uma base associada a um leque de T. Então a matriz associada a T, com respeito a essa base, é uma matriz triangular superior.

DEMONSTRAÇÃO: Como é um subespaço invariante de T, temos que T está contido em , com i = 1,..., n. Com isto existem tais que:

Isso nos mostra, que a matriz associada a T, com relação à base considerada, é uma matriz triangular superior, isto é:

Reciprocamente se a matriz de T: V → V com relação a uma base β= for triangular superior, então:

Ou seja, se , então é um leque para T e uma base associada a tal leque é β. ■

Um operador T: V→V é dito triangularizável se existe base β de V tal que é triangular. Uma matriz A de ordem n é dita triangularizável se, o operador T: → cuja representação matricial na base canônica é A, for triangularizável.

Observe que , acarreta , ou seja, T possui um auto-valor

Vale lembrar que para uma aplicação linear considerando o corpo não-complexo, nem sempre é possível encontrar auto-valores.

TEOREMA 2: Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{C}$ e suponhamos dim V = n ≥1. Seja T: V→V uma aplicação linear. Então existe um leque de T em V.

DEMONSTRAÇÃO: provaremos por indução.

Para o caso em que dim V=1, nada a fazer, já que a representação matricial de T é de ordem n=1. Agora, suponhamos que seja verdade para dim V= n-1, n >1.

O fato de estarmos trabalhando com espaço vetorial complexo, pelo teorema fundamental da álgebra, nos diz que T possui um autovalor Seja autovetor de T associado a e .

Agora tome W como sendo um subespaço de V tal que

Observe que T não leva necessariamente W em W.

Consideremos então as projeções , definidas da seguinte forma: Para , sendo v= , e . Faça, e . Note que. é uma aplicação linear de V em V, que leva todo elemento de W em W e dim W=n-1.

Da hipótese de indução, existe um leque para . Digamos então . Defina,

, i=2,..., n

Provaremos que então é um leque para T em V.

Note que,

Assim, tome e escrevemos , e . Observe que portanto pertence a . Além disso, Tem-se Por hipótese, é uma aplicação linear de em , e assim temos concluímos que

COLORÁRIO: Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre os números complexos, com dim V≥1. Seja uma aplicação linear. Existe uma base β de V tal que a matriz de T com relação a essa base é uma matriz triangular.

DEMONSTRAÇÃO: Do teorema 1, existe leque de T em V. Basta então tomar β a base associada ao leque e teremos uma matriz triangular superior, como já vimos.

COROLÁRIO: Seja M uma matriz de números complexos. Existe uma matriz não singular B tal que é uma matriz triangular.

DEMONSTRAÇÃO: Seja M uma matriz de números complexos de ordem n. Defina , pondo e β a base canônica de . Então existe um leque para T em ℂ.

Seja a base associada ao leque, então é triangular. No entanto (veja diagrama abaixo), , onde pois sabemos que

1.2 TEOREMA DE HAMILTON-CAYLEY

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e uma aplicação linear. Se é uma base para V e para tivermos ,então .

Suponhamos .

Agora, tem-se,

bem,

Como . Assim, temos

Por hipótese, (A)=0 o que implica dizer que (T)=0.

CAPÍTULO II

2. DEMONSTRAÇÕES DO TEOREMA HAMILTON-CAYLEY

2.1. PRIMEIRA DEMONSTRAÇÃO

Esta demonstração é apresentada considerando a existência de uma base associada um leque via triangularização sobre o corpo dos complexos.

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre os números complexos de dim V≥1, e seja T: V→V uma aplicação linear. Se é seu polinômio característico, então .

DEMONSTRAÇÃO: Seja uma base associada a um leque . Do teorema 1, sabemos que existe base β de V tal que é triangular, isto é

A matriz associada a T com respeito a base associada ao leque . Então

De fato, e

Note que, o elemento pertence a . Além disso, de forma que

Vamos mostrar por indução que para todo .

Se i=1,

Agora, suponhamos para o caso i-1, i>1 seja verdade. Tome , escreva ,

Note que, e pela hipótese de indução , por outro lado e assim, portanto, para todo , temos

COROLÁRIO: Seja A de uma matriz de ordem n de números complexos, e seja e o seu polinômio característico. Então

DEMONSTRAÇÃO: Tome T: → tal que e β base canônica então, . Note que

e como , concluímos que .

COROLÁRIO: Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo , e seja uma aplicação linear. Se é o polinômio característico de T, então .

DEMONSTRAÇÃO: Tome e : → tal que , onde é base canônica de . Então , pois A é uma representação matricial tanto para T como Neste caso e assim .

2.2. SEGUNDA DEMONSTRAÇÃO

Nesta demonstração, além utilizarmos a fórmula usando o fato de que consideramos o polinômio característico de uma matriz A qualquer de ordem n.

Seja A uma matriz de ordem n e

seu polinômio característico. Então . Isto nos diz, que a matriz A satisfaz a equação seguinte:

DEMONSTRAÇÃO: Em resultado já visto anteriormente, temos a seguinte afirmação:

Sendo A uma matriz qualquer de ordem n temos que a igualdade a seguir é verdadeira,

(I)

Substituindo a matriz de A por em (I) obtemos,

(II)

Note que,

Reescrevendo (II) temos:

, para todo .

Vamos mostrar que a igualdade anterior também é verdadeira quando λ é substituído por A.

Cada entrada da matriz é um cofator de , ou seja, um polinômio de grau n-1. Portanto é uma matriz cujas entradas são polinômios em λ de grau≤ n-1. Isto é, Onde é um polinômio de grau n-1 em λ. Assim,

=

Portanto, = . (III)

Onde as são as matrizes de ordem n acima com entradas escalares. Substituindo (III) em (II) obtemos,

Reescrevendo a igualdade anterior da seguinte forma:

Daí, comparamos os coeficientes do 1º e 2º membros da igualdade

Por fim, multiplicamos as equações das igualdades anterior em sucessão por e somando os termos da esquerda note que esta soma é nula, isto é,

■

Exemplo: Considere a matriz e seu polinômio característico.

Substituindo λ por A obtemos:

→

2.3. TERCEIRA DEMONSTRAÇÃO

Nesta demonstração, usaremos indução sobre a dimensão de um espaço vetorial V. considerando polinômio característico, λ autovalor de T e v autovetor de T associado a λ sobre o corpo dos complexos.

Sejam um operador linear, V um espaço vetorial de dimensão finita sobre ℂ e polinômio característico de T. Tome , autovalor de T (raiz do polinômio) e auto-vetor de T associado a λ. Existe uma base β de V tal que e n= dim V.

Usaremos indução sobre n= dim V.

Escreva:

A matriz fica então na forma

A é a representação matricial de T na base β. Tem-se onde é um operador tal que a matriz é representada por e é a base canônica de e . Note que,

Para um polinômio qualquer tem-se:

Assim,

Da hipótese de indução . Com isto, .

Logo,

Como queríamos demonstrar.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O Teorema de Hamilton-Cayley é uma importante ferramenta utilizada na Matemática na área da álgebra. O estudo desse teorema foi de grande valia por aprimorar o conhecimento de vários conceitos utilizados durante o estudo. Através do desenvolvimento desse trabalho obteve-se uma melhor compreensão e aprofundamento de conceitos e resultados de Álgebra Linear, onde foram explorados conteúdos que normalmente não são vistos em um curso de Licenciatura. Este estudo proporcionou condições de interpretar, compreender e de construir uma base mais sólida e profunda. Para compreender este resultado, foi necessário inicialmente estudar operadores lineares, triangularização, matriz adjunta, polinômio característico, espaços vetoriais complexos.

Dentre as aplicações que o Teorema de Hamilton-Cayley nos proporciona, podemos citar algumas como:

1-cálculo das potências sucessivas de um operador linear sobre um espaço de dimensão finita.

Exemplo: sejam uma aplicação linear tal que cuja representação matricial na base canônica é

O polinômio característico desta matriz é .

Por definição temos e para cada

Usando o teorema de Hamilton-Cayley, podemos substituir λ por A no ppolinômio característico para obter um polinômio matricial identicamente nulo, isto é:

Assim, escrevemos como uma combinação linear de I e A:

A partir desta relação, podemos obter todas as potências sucessivas de A como combinações lineares das matrizes I e A.

Esse fato garante que todas as potências da matriz A com expoente n inteiro não negativo, podem ser escritas como combinações lineares das matrizes I e A.

2-Inversa de uma matriz por meio do polinômio característico de uma matriz invertível.

Consideremos polinômio característico da matriz , onde β é a base canônica.

Já vimos que pelo teorema de Hamilton-Cayley

Multiplicando essa igualdade por , temos:

Como a matriz é invertível, tem-se . Dividindo a igualdade anterior por e isolando chegamos a fórmula:

—

Exemplo: consideremos a matriz cujo polinômio característico é então:

– –

– –

– –

– –

Obs: Este cálculo somente será vantajoso quando a matriz for simétrica e possuir poucos autovalores.

ANEXOS

ANEXO A- BIOGRAFIA DE HAMILTON

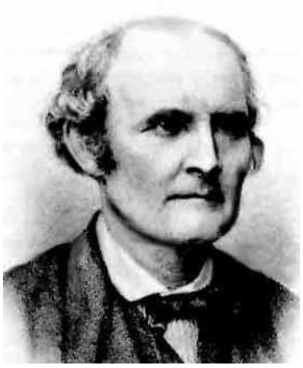
Matemático, físico e astrônomo, William Rowan Hamilton, nasceu no dia 4 de agosto de 1805 em Dublin, na Irlanda. Ficou órfão e sua educação fora confiada a um tio que educou severamente e ecleticamente dando forte ênfase a linguística. Já aos 5 anos de idade, falava diversas línguas entre elas hebraico, latim, grego, etc. Aos 13 anos passou a frequentar o Trinity College em Dublin. Aos 15, além de estudar a álgebra de Clairaut, iniciava os estudos sobre as teorias de Newton e Laplace, tornando-se antes mesmo de concluir o curso aos 22 anos de idade, astrônomo real da Irlanda. Trabalhando no observatório de Dunsink, foi reconhecido com o título de cavaleiro pela importância de seu trabalho.

Reconhecido como um dos grandes nomes da academia, Hamilton participa em 1845 do segundo encontro da associação britânica em Cambridge, tornando-se ainda o primeiro membro estrangeiro a integrar a academia de ciências dos Estados Unidos.

Sua famosa teoria dos quaternions, lhe rendeu um grande reconhecimento, principalmente na área de desenho computadorizado de gráficos vetoriais, onde é amplamente usada. Sua obra “Lectures on Quaternions” foi publicada em 1853, e depois disso, dedicou-se à preparação da obra ampliada “Elements of Quaternions”. Esta não estava terminada quando ele morreu em 1865, mas foi editada e publicada por se filho no ano seguinte. Também foi relevante seu estudo sobre a teoria dos grafos, tentando solucionar o problema das quatro cores através do olcosian, um jogo baseado no problema de Euler para localizar um circuito Hamiltoniano em um grafo. Hamilton definiu conceitos hoje muito utilizados como versor, gradiente, divergência, etc.

Hamilton trouxe grandes contribuições para álgebra, também para as outras áreas como: a dinâmica, a óptica, a solução das equações do quinto grau e soluções numéricas de equações diferenciais. Hamilton falece em 2 de setembro de 1865 na cidade de Dublin.

ANEXO B- BIOGRAFIA DE CAYLEY



Matemático e astrônomo, Arthur Cayley, filho de comerciante e de origem inglesa, nasceu em Richmond, em 16 de agosto de 1821. Estudando em várias escolas, aos 14 anos ingressa no king College School.

No ano de 1838 começa seus estudos em Cambridge, concluindo sua graduação em 1842, trabalhando a partir de 1843 na área de álgebra como nas áreas de geometria não euclidiana e geometria n-dimensional. Além disso, seu estudo se dirige também para a teoria da partição, das transformações, das curvas e superfícies, como também para à teoria das funções abeliana, teta e elíptica, com destaque principalmente em toda sua produção para o estudo acerca da teoria dos invariantes. Desempregado e com a matemática em primeiro plano, Cayley, dedicou parte de sua vida como advogado durante quatorze anos, conseguindo certa fama e lucros no qual se mantinha financeiramente. Além disso, publicou aproximadamente 250 trabalhos tratando de questões matemáticas principalmente sobre os invariantes algébricos, sendo considerado juntamente com Sylvester, o fundador da teoria dos invariantes.

Em 1863 rege a cadeira sadilariana tornando futuramente professor de matemática pura em Cambridge, onde se destacou não apenas como administrador, mas também, como pesquisador. Com um estilo de escrita individual, Cayley, reflete sua formação jurídica.

Enfim, um dos escritores de matemática mais lido de toda historia, sendo apenas superado por Euler e Cauchy, Cayley morre em 1895 no dia 26 de janeiro com aproximadamente 960 artigos publicados abrangendo todos os ramos da matemática pura. Suas obras completas foram publicadas em Cambridge, em 13 volumes, com o título “The Collected Mathematical papers of Arthur Cayley” três anos antes da publicação total de sua obra.

REFERÊNCIAS

APOSTOL, Tom M. **Calculus**. Xerox College Publishing International, Vol II, Segunda Edição. 1969.

BUENO, H. P**. Álgebra Linear:** Um Segundo Curso. Textos Universitários- SBM, 2006.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Tradução Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 1995.

LANG, S. **Álgebra Linear**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2003.

LIMA, E. L. **Álgebra Linear**. Oitava Edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.