UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAIBA

CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

SILVANEIDE TOMAZ DE SOUTO

DETERMINANTES: UM POUCO DA SUA HISTÓRIA, EXERCÍCIOS E APLICAÇÕES.

CAMPINA GRANDE - PB

2012.

SILVANEIDE TOMAZ DE SOUTO

DETERMINANTES: UM POUCO DA SUA HISTÓRIA, EXERCÍCIOS E APLICAÇÕES.

Monografia apresentada junto ao curso de Licenciatura plena em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial a obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Orientador: Prof. Msc. Fernando Luiz Tavares da Silva.

Campina Grande - PB

2012

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL – UEPB

S728t Souto, Silvaneide Tomaz de.

Determinantes [manuscrito] : Um pouco da sua história, exercícios e aplicações / Silvaneide Tomaz de Souto. – 2012.

46 f.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2012.

“Orientação: Prof. Me. Fernando Luiz Tavares da Silva, Departamento de Matemática”.

1. Determinantes. 2. História da matemática. 3. Recurso didático. I. Título.

21. ed. CDD 510.1

SILVANEIDE TOMAZ DE SOUTO

DETERMINANTES: UM POUCO DA SUA HISTÓRIA, EXERCÍCIOS E APLICAÇÕES.

Monografia apresentada junto ao curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial á obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Data da defesa 19/10/12

Nota: 8.0 (oito)

Orientador: Prof. Msc. Fernando Luiz Tavares da Silva

Comissão examinadora

Fernando Luiz Tavares da Silva

Orientador: Prof. Msc. Fernando Luiz Tavares da Silva

Universidade Estadual da Paraíba

Maria da Conceição Vieira Fernandes

Prof.ª Msc. Maria da Conceição Vieira Fernandes

Universidade Estadual da Paraíba

Núbia do Nascimento Mart

Prof.ª Esp. Núbia do Nascimento Martins

Universidade Estadual da Paraíba

Campina Grande – PB

2012

Agradecimentos

A Deus, por ter mim concedido está grande vitória de poder estar concluindo o meu curso.

A minha família por ter acreditado na minha capacidade e por ter mim ajudado a vencer todos os obstáculos.

Ao professor Fernando Luiz o meu orientador por toda paciência e dedicação.

Ao meu namorado por todo incentivo.

Dedico esta monografia a Deus, aos meus pais Antônio e Irene, as minhas irmãs Selma e Maricélia, ao meu irmão Marcos, ao meu namorado Ednaldo e aos meus tios Manoel e Maria. Afinal, a todos que contribuíram para a conclusão desta etapa importante em minha vida.

A melhor maneira que o homem dispõe para se aperfeiçoar é aproximar-se de Deus.

Pitágoras

RESUMO

Esta monografia trata do estudo dos determinantes a partir da sua história utilizando exercícios e aplicações. O surgimento dos determinantes se deu através de um estudo de sistemas lineares. Dessa forma, este trabalho monográfico aborda a importância de resgatar a sua história relatando os principais personagens que contribuíram para o seu surgimento. Estudar determinantes a partir do resgate histórico é um caminho para fazer matemática em sala de aula já que oferece uma importante contribuição no processo de ensino e aprendizagem despertando no educando o interesse pela própria matemática levando assim a refletir a sua importância em nosso cotidiano. O objetivo deste trabalho é mostrar ao educando a história dos determinantes como recurso didático com muitas possibilidades para desenvolver diversos conceitos, sem reduzi-la a fatos, datas e nomes a serem memorizado e também leva-los a refletir a sua importância dentro da própria matemática assim como em outras áreas do conhecimento. Para a realização deste trabalho acadêmico, buscamos fundamentos, especialmente através da sua história e dos principais personagens que contribuíram para o seu surgimento e também introduzimos algumas definições que nos levam a compreender melhor o assunto e, além disso, ampliamos o nosso conhecimento utilizando demonstrações e analisamos as propriedades onde podemos observar que elas nos ajudam para a realização dos nossos cálculos se tornarem menores. Por ultimo, tecemos as considerações finais a respeito dos aspectos que revelam através dos tempos que a matemática surgiu e surge em qualquer época e que ela é utilizada em nosso cotidiano.

Palavras-chave: Resgate histórico, principais personagens, recurso didático.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Nesta monografia partimos, a princípio, como fundamentação teórica da abordagem sobre o surgimento dos determinantes, apresentando os principais personagens que contribuíram para o seu surgimento. Em seguida, abordamos a importância da sua historia em sala de aula para o processo de ensino e aprendizagem também mostramos a sua utilidade em inúmeras aplicações na matemática assim como em outras áreas; além disso, discutimos as principais propriedades como uma ferramenta para facilitar os nossos cálculos.

O objetivo desta monografia é apresentar uma breve história sobre o surgimento dos determinantes abordando sua respectiva importância.

Diante da sua importância dentro da própria matemática e em outas áreas, surgiu a necessidade de fazer um estudo sobre os determinantes.

Para a realização deste estudo monográfico, primeiramente buscamos fundamentos históricos de alguns pesquisadores que discutem esse assunto, apresentamos as principais definições; analisamos as principais propriedades. Por fim, realizamos algumas aplicações do cotidiano e exercícios propostos. Diante deste contexto, vamos abordar como se deu o seu surgimento.

A origem dos determinantes se deu através de um estudo de sistemas lineares. Na matemática Ocidental antiga as aparições sobre sistemas de equações lineares foram poucas. Contudo, no oriente, o assunto mereceu uma atenção bem maior. Com seu gosto especial por diagramas, os chineses representam os sistemas lineares por meio de seus coeficientes, escritos com barras de bambu sobre os quadrados de um tabuleiro. Assim, acabaram descobrindo o método de resolução por eliminação – que consiste em anular coeficientes por meio de operações elementares. Exemplo desse procedimento encontra-se nos nove capítulos sobre a arte da matemática, um texto que data provavelmente do século CXI a.C.

Porém, através de um trabalho do Japonês Seki Kowa em 1683 que a idéia de determinante (como polinômio que se associa a um quadrado de números) veio á luz. Seki Kowa é considerado o maior matemático Japonês do século XVII, chegou a essa noção através do estudo de sistemas lineares, sistematizando o velho procedimento chinês (para o caso de duas equações apenas).

O uso dos determinantes no Ocidente começou dez anos depois num trabalho de Leibniz, ligado também a sistemas lineares. Em resumo, Leibniz estabeleceu a condição de compatibilidade de um sistema de três equações a duas incógnitas em termos de determinantes de ordem 3 formado pelos coeficientes e pelos termos independentes (este determinante deve ser nulo). Para tanto, criou uma notação com índices para os coeficientes: o que hoje, por exemplo, escreveríamos como a_{12}, Leibniz indicava por 1_2.

A conhecida regra de Cramer para resolver sistemas de n equações a n incógnitas, por meio de determinantes, é na verdade uma descoberta do Escocês Colin Maclaurim (1698-1746), datando provavelmente de 1729, embora só publicado postumamente em 1748 no seu Treatise of álgebra. Mas o nome do suíço Gabriel Cramer (1704-1752) não apareceu nesse episódio de maneira totalmente gratuita. Cramer também chegou á regra (independentemente), mas depois na sua introdução a analise das curvas planas (1750), em conexão com o problema de determinar os coeficientes da cônica geral $A + By + Cx + Dy^2 + Exy + x^2 = 0$.

O Francês Ettiénne Bézout (1730-1783) autor de textos matemáticos de sucesso em seu tempo, sistematizou em 1764 o processo de estabelecimento dos sinais dos termos de um determinante. E coube a outro francês, Alexandre Vandermonde (1735-1796), em 1796, empreender a primeira abordagem da teoria dos determinantes independentemente do estudo dos sistemas lineares embora também os usasse na resolução desses sistemas. O importante sistema de Laplace, que permitiu a expansão de um determinante através dos menos de r filas escolhidas e seus respectivos complementos algébricos, foi demostrado no ano seguinte pelo próprio Laplace num artigo, que a julgar pelo título, nada tinha a ver com o assunto: “Pesquisas sobre o cálculo integral e o sistema do mundo”.

O termo determinante surgiu em 1812 com o seu sentido atual, num trabalho de Cauchy sobre o assunto. Neste artigo, apresentado á academia de ciências, Cauchy sumarizou e simplificou o que era conhecido até então sobre determinantes, melhorou a notação (mas a atual com duas barras verticais ladeando o quadrado de números só surgiria em 1841 com Arthur Cayley) e deu uma demonstração do teorema de multiplicação de determinantes – meses antes J.F.M. Binet (1786-1856) dera a primeira demonstração deste teorema, mas a de Cauchy era superior.

Além de Cauchy, quem mais contribuiu para consolidar á teoria dos determinantes foi o alemão Carl. G.J.Jacobi. Deve-se a ele a forma simples como essa teoria se apresenta hoje elementarmente. Como alegorista, Jacobi era um entusiasta da notação de determinante, com suas potencialidades. Assim, o importante conceito Jacobiano de uma função, salientando um dos pontos mais característicos de sua obra, é uma homenagem das mais justas.

No entanto, após termos estudado como se deu o surgimento dos determinantes e os seus principais personagens podemos concluir que o conhecimento matemático baseia-se nas definições sustentadas pela prática, seja ela de maneira empírica ou científica, ou seja, através da matemática aplicada a um contexto natural da sociedade por meio de situações problemas. Portanto, propõe-se ao educando perceber a utilidade dos determinantes em seu cotidiano, além disso, é uma maneira de se construir o seu próprio conhecimento.

Logo, o desenvolvimento de uma base teórica matemática sólida supõe uma relação Inter e intrapessoal em um ambiente educacional, no qual o educando faz-se objeto de aprendizado e ensino; e não aprende somente quando exerce as atividades ministradas sob a orientação do educador, mas aprende de si próprio a construir os seus próprios conhecimentos, percebendo-os onde estão centradas suas maiores dificuldades e também suas facilidades.

No entanto, a resolução de problemas propõe uma estimulação ao educando o qual o leva a questionar sua própria resposta, e questionando o problema, ele transforma um dado problema numa fonte de novos problemas, a formular problemas a partir de determinadas informações, analisar problemas abertos – que admitem diferentes respostas em função de certas condições- evidencia uma concepção de ensino e aprendizagem não pela mera reprodução de conhecimento, mas pela via de ação refletiva que constroem conhecimentos.

Outro caminho importante para “fazer Matemática” na sala de aula é através da história da Matemática que pode oferecer uma importante contribuição ao processo de ensino e aprendizagem. Ao revelar a matemática como uma criação humana, ao mostrar necessidades e criações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, o educador cria condições para que o educando desenvolva atitudes e valores mais favoráveis diante desse conhecimento. Portanto, esse é um caminho que nos faz refletir sobre a educação matemática que se caracteriza como práxis que envolve o domínio do conhecimento especifica (a matemática) e o domínio de ideias e processos pedagógicos relativos à transmissão/ assimilação e/ou a apropriação/construção do saber matemático escolar. Entretanto, sendo a prática educativa determinada pela prática social mais ampla, ela atende a determinadas finalidades humanas e aspirações sociais concretas. Assim, podemos conceber a educação matemática como resultante das múltiplas relações que se estabelecem entre o específico e o pedagógico num contexto constituído de dimensões histórico-epistemológicas, psicocogonitivas, histórico cultural e sociopolítico (FIORENTINI, 1989, p.1);

Além disso, conceitos abordados em conexão com sua historia constituem veículos de informação cultural, sociológica e antropológica de grande valor formativo. A história da Matemática é, nesse sentido, um instrumento de resgate da própria identidade cultural.

Entretanto, essa abordagem não pode ser entendida simplesmente que o educador deva situar no tempo e no espaço cada item do programa de Matemática ou contar sempre em suas aulas trechos da história da Matemática, mas que a encare como um recurso didático com muitas possibilidades para desenvolver diversos conceitos, sem reduzi-la a fatos datas e nomes a serem memorizados.

Contudo, está pesquisa explora a definição e as propriedades de determinantes comentando os possíveis aperfeiçoamentos na prática docente de um curso de determinantes.

2. OBJETIVOS

2.1. OBJETIVO GERAL:

O objetivo desta Monografia é apresentar uma breve história sobre o surgimento dos determinantes e mostrar a sua importância dentro da própria Matemática como também em outras áreas do conhecimento.

2.1.1 OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

- Resgatar sua história apresentando os principais personagens que contribuíram para o seu surgimento;
- Introduzir suas definições;
- Analisar as principais propriedades utilizando-as como uma ferramenta para facilitar os nossos cálculos;
- Compreender a importância da sua utilidade em inúmeras aplicações na Matemática como também em outras áreas do conhecimento.

3. JUSTIFICATIVA

A escolha do tema determinante surgiu pelo fato de ser um assunto muito utilizado em inúmeras aplicações dentro da própria matemática, assim como também abrange outras áreas do conhecimento, tais como: jornalismo, computação gráfica, engenharia e etc.

No entanto, propomos introduzir este assunto apresentando uma breve história sobre o seu surgimento proporcionando ao educando o significado da sua evolução como uma forma de ensino e aprendizagem. Além disso, abordamos a importância das propriedades como uma ferramenta que nos ajuda nos nossos cálculos. Por fim, buscamos introduzir uma aplicação do cotidiano com o intuito de mostrar a sua importância tanto na área da Matemática como também em outras áreas do conhecimento.

4. DETERMINANTES

4.1. DEFINIÇÃO:

Ao longo da pesquisa que norteou esse tema, encontramos a seguinte definição:

> Determinante é a somatória de todos os produtos possíveis dos n elementos de uma matiz quadrada, de maneira que em cada parcela – formada por um produto- não haja dois elementos pertencentes a uma mesma linha e/ ou coluna. (SOARES, 1979, pg.59).

Com o objetivo de explorarmos e desenvolvermos está definição de forma literal, se faz necessário alguns conceitos para redefinirmos o determinante de uma matriz quadrada de maneira simbólico-algébrica.

4.2. REVISÃO DE CONCEITOS

4.2.1. Permutações

Definição B.1:

Uma função bijetora σ: $I_n \rightarrow I_n$ é chamada uma permutação do conjunto I_n.

Notação: $\sigma =$

Exemplo: Para $I_2 = \{1,2\}$ temos duas permutações do conjunto I_2, a saber:

id= $\sigma_1 =$, σ_2=

Obs. Sabemos que o número de funções bijetoras do conjunto $I_n = \{1, 2,..., n\}$ é dada por n! .

O conjunto de todas as permutações de n elementos será denotado por S_n, isto é,

$S_n = \{I_n: \sigma \rightarrow I_{n:}\ \sigma$ é uma bijeção$\}$

4.2.2. Permutação par ou ímpar

Definição B.2:

Seja σ = uma permutação do conjunto I_n. Seja r o número de pares ordenados (i, j) com 1≤ i < j ≤ n tais que Definimos o sinal da permutação o qual é representado por sgn (como sendo.

sgn

Uma permutação é dita par, se sgn (=1 e é ímpar se sgn (= -1.

Exemplo1:

Seja = .

Note que, o único par (i, j) com 1≤ i < j ≤ 3 e > (j) é (2,3). Então, r = 1 e sgn = -1.

Exemplo 2:

Seja = .

Neste exemplo, podemos observar que os pares (i,j) com 1≤ i < j ≤ 3 e > (j) são (1,2) e (1,3). Então, r = 2 e sgn = 1.

4.2.3. Inversão

A permutação inversa $^{-1}$ de é dada por:

$^{-1}$ = .

Note que os pares (i, j) com 1≤ i < j ≤ 3 e $^{-1}$ (j) são (1,3) e (2,3). Então r = 2 e sgn $^{-1}$) = 1

Observação:

Mostra-se que se S_n então sgn = sgn $^{-1}$).

Teorema 2 :

O número de permutação de classe par de um conjunto de n elementos, n > 1, é igual ao número de permutações de classe ímpar.

Demonstração:

Seja P_o o conjunto de todas as permutações de classe par de um conjunto de n elementos e P_1 o conjunto de todas as permutações de classe ímpar de um conjunto de n elementos.

Seja n > 1. F: $P_o \rightarrow P_1$

F $(a_{1,} a_{2,\ldots}, n_a) = (a_{2,} a_1,\ldots n_a)$

Verificamos, então, que f é uma função bijetora e que, portanto, $n(P_o) = (P_1)$.

4.3. UMA DEFINIÇÃO SIMBOLICA PARA DETERMINANTES.

Chama-se determinante da matriz A = $(a_{ij})_{nxn}$ ao número real que satisfaz a seguinte equação:

det.(A) = sgn ($a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a_{n\sigma(n).}$ Onde, pertence a S_n. Portanto para uma melhor compreensão da definição, veremos a seguir um exemplo.

Exemplo:

Seja A= .

Solução: As permutações do conjunto $I_2 = \{1,2\}$ e os respectivos sinais são: id = , sgn

(id) = 1 e = e sgn (= -1.

Então,

det. (A) = sgn (id) $a_{1id\ (1)}\ a_{2\ id\ (2)}$ + sgn ($a_1\ \ _{(1)}\ a_2\ \ _{(2)}$

= - . .

4.4. UTILIZANDO A DEFINIÇÃO PARA O DESENVOLVIMENTO EM COFATORES.

4.4.1. Matriz quadrada de segunda ordem.

Vamos inicialmente definir o determinante de matrizes A = $(a)_{1x1}$ definimos o determinante de A, indicado por det (A), e definido por det (A) = a. Vamos agora, definir o determinante de matrizes 2x2 e a partir daí definir o determinante para matrizes de ordem maior do que 2. Para matrizes A = $(a_{ij})_{2x2}$ associamos um número real, denominado determinante de A, por:

det.(A) = det. = - . .

A seguir definiremos o determinante de uma matriz A $(a_{ij})_{nxn}$ qualquer.

4.4.2. Matriz quadrada de ordem infinita

Definição:

Seja A = $(a_{ij})_{nxn}$. O determinante de A, denotado por det. (A), é definido por:

det. (A) = $a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + ... + a1_nb_{1n}$ = onde $b_{1j} = (-1)^{1+j}$ det (A_{1j}) é o cofator do elemento a_{1j}. A expressão acima é chamada desenvolvimento em cofatores do determinante A em termos da 1ª linha da matriz A.

Observação:

A matriz A_{ij} é a matriz obtida da matriz A eliminando-se a i- ésima linha e j- ésima coluna.

Exemplo: Calcule o determinante da matriz

A=

Temos: det.(A) = $(-1)^{1+1}$ 1det. + $(-1)^{1+2}$ 0 + $(-1)^{1+3}$ 2

= -4+12 = 8.

Teorema de Laplace:

Dada uma matriz $A = (a_{ij})_{nxn}$, definimos det.(A), por det.(A) = $^{i+j}$ a_{ij} det. (A_{ij}), i = 1, 2,..., n, onde A_{ij} é a matriz obtida da matriz A eliminando-se a i- ésima linha e j-ésima coluna da matriz A.

Observação: O escalar $b_{ij} = (-1)^{i+j}$ det. (A_{ij}) é chamado cofator do termo a_{ij} do det. (A) e matriz $B= (cij)_{(n-1)\,(n-1)}$ é chamada matriz dos cofatores da matriz A.

4.5. UM POUCO DE HISTÓRIA

Os primeiros trabalhos a respeito de tabelas numéricas aconteceram na China antiga. Os calculistas daquela época se interessavam bastante pelo estudo dos quadrados mágicos. Um quadrado mágico é uma tabela de números dispostos na forma de um quadrado, de tal modo que a soma dos elementos de uma linha, coluna ou diagonal seja constante. Abaixo mostraremos dois exemplos de quadrados mágicos.

Na figura Ī , um quadrado mágico de ordem 3, onde a soma dos elementos de qualquer linha, coluna ou diagonal é sempre 15. Na figura Ī Ī , o outro quadrado de ordem 3, agora tendo por constante o número 21.

No inicio do século xvĪ Ī , durantes pesquisas realizadas com o objetivo de encontrar processos que facilitassem a resolução de um sistema de equações lineares, verificou-se ser possível associar a cada matriz quadrada um único número real, que mais tarde veio a se chamar determinante da matriz. Entre aqueles que se interessaram pelo estudo dos determinantes, nessa época, podemos citar Pierre Simon Laplace (1749-1827), astrônomo, físico e matemático francês.

Figura Ī

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Figura Ī Ī

4	9	8
11	7	3
6	5	10

Joseph Louis Lagrange (1736- 1813), matemático italiano, considerado por muitos historiadores como o maior matemático do século XVĪ Ī Ī . Até o inicio do século XĪ X, o que se sabia a respeito dos determinantes era muito pouco. Coube a Augustian Louis Cauchy (1789-1857), considerado o primeiro dos grandes matemáticos francês da Idade Moderna, e contribuição decisiva para o progresso dos determinantes ao apresentar um trabalho onde desenvolvia os princípios fundamentais dessa teoria, em 1812. A partir daí, outros matemáticos deram prosseguimento ao trabalho de Cauchy. Entre eles destacamos o filósofo e matemático alemão Carl Gustav Jacob (1804-1851), que no estudo dos determinantes dedicou-se á criação dos algoritmos, regras práticas e aplicações de sua utilização. Uma dessas regras práticas que leva seu nome será estudada neste capítulo.

4.6. CÁLCULO DE DETERMINANTES.

Inicialmente, iremos introduzir certas regras que permitiam o cálculo de determinantes nos casos particulares da matriz quadrada (de elementos numéricos) de ordem 1,2 ou 3 e, a seguir após o domínio dessas regras, apresentaremos uma definição geral para determinantes de uma matriz quadrada de ordem n.

4.6.1. Determinante da matriz quadrada de ordem 1.

O determinante da matriz A = (a_{11}) é o próprio número real a_{11}. Ou: A = (a_{11}) det. A = = a_{11} ou A = (5) det. A = 5.

Exemplos:

a) Se M = [5] então det. M =5 ou = 5
b) Se M = [-3] então det. M = -3 ou = -3

4.6.2 Determinantes da matriz quadrada de ordem 2.

Dada a matriz M = , de ordem 2, por definição, temos que o determinante associado a matriz M de segunda ordem é dada por: det M = = - .

.

Portanto, o determinante de uma matriz de ordem 2 é dado pela diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária.

Exemplos:

a) Se M = , temos det. M = 2.5 – 4.3 = 10 – 12 = det. M = -2. Logo, det. M = -2.

b) Se N = , temos, det. N = 10.0,4 -).1 = 4 +4 = 8. Logo, det. N = 8

4.6.3. Determinante de uma matriz quadrada de ordem 3.

O determinante da matriz A = definido por + .

. + - $a_{33}.a_{21}.a_{12}$

Exemplo:

Solução:

De acordo com a definição dada, temos:

det B = : = det B = (2.5.2) + (-1).0.6) + (3.1.4) – (6.5.3) – (4.0.2) - (2.1.(-1) =

20 + 0 + 12 - 90 + 2 = -56. Logo, detB = -56

4.7. REGRAS DE SARRUS.

O cálculo do determinante de uma matriz quadrada de ordem 3, visto da maneira acima parece ser bastante complicado. No entanto, para facilitar nossa tarefa, o matemático francês P.F. Sarrus (1798-1861) estabeleceu uma regra bastante simples, chamada regra de Sarrus, que consiste no seguinte:

- Repetimos as duas primeiras colunas ao lado da terceira;
- Encontramos a soma do produto dos elementos da diagonal principal com os dois produtos obtidos pela multiplicação dos elementos das paralelas a essa diagonal (a soma deve ser precedida do sinal positivo);

- Encontramos a soma do produto dos elementos da diagonal secundária com os dois produtos obtidos pela multiplicação dos elementos das paralelas a essa diagonal (a soma deve ser precedida do sinal negativo);

Veja o esquema:

D = = Assim,

Det.D=
(+ . . + + = -
(+ . . + +
(Regra de Sarrus).

Exemplo:

Calcule o valor do determinante

Solução: = (2.1.1 + 3.2(-3) + (-1). 4.2) – (3.4.1 + 2.2.2 + (-1). 1. (-3)

= 2 – 18 – 8 – 12 – 8 – 3 = - 49 + 2 = - 47. Logo, det. A = - 47.

5. MATRIZ COFATOR

Dada a matriz A = chama-se cofator de a_{ij} ao número real que se obtém multiplicando-se $(-1)^{i+j}$ pelo elemento de A quando se elimina linha i e a coluna j.

Indica-se: o cofator de por A_{11}

o cofator de por A_{12}

o cofator de por A_{13}

o cofator de por A_{21}

o cofator de por A_{23}

o cofator de por A_{31}

o cofator de por A_{32}

o cofator de por A_{33}

Exemplo:

Dada a matriz A =

Determinar a matriz formada pelos cofatores dos elementos da matriz.

Solução:

$A_{11} = (-1)^{1+1}.$ A_{11} $= 1.2 = 2$

Eliminamos da matriz A 1ª linha e a 1ª coluna.

$A_{12} = (-1)^{1+2}.$ $A_{12} = (-1). (-8) = 8$

Eliminamos da matriz A 1ª linha e a 2ª coluna.

$A_{13}= (-1)^{1+3}$. $A_{13} = 1. (-8 + 1) = - 7$

Eliminamos da matriz A 1ª linha e a 3ª coluna

$A_{21}= (-1)^{2+1}$. $A_{21} = (-1). (-4-2) = 6$

Eliminamos da matriz A a 2ª linha e a 1ª coluna

$A_{22}= (-1)^{2+2}$. $A_{22} = 1. (6 + 1) = 7$

Eliminamos da matriz A a 2ª linha e a 2ª coluna

$A_{23}= (-1)^{2+3}$. $A_{23} = (-1). (6 – 2) = - 4$

Eliminamos da matriz A a 2ª linha e a 3ª coluna

$A_{31}= (-1)^{3+1}$. $A_{31} = 1. (-1) = -1$

Eliminamos da matriz A a 3ª linha e a 1ª coluna

$A_{32}= (-1)^{3+2}$. $A_{32} = (-1). 4 = - 4$

Eliminamos da matriz A a 3ª linha e a 2ª coluna.

$C_{33}= (-1)^{3+3}$. $C_{33} = 1. (3 – 8) = - 5$

Eliminamos da matriz A 3ª linha e a 3ª coluna

Chama-se Matriz Cofator a matriz cujos elementos são os Cofatores correspondentes de cada elemento da Matriz dada. Indica-se a Matriz Cofator de uma Matriz A por cofA. No nosso exemplo, temos:

cofA=

5.1. DETERMINANTE DE UMA MATRIZ QUADRADA DE ORDEM N

O processo anterior, usado para definir-se determinantes de 1ª, 2ª e 3 ª ordem, poderá se prolongar indefinidamente até uma ordem n qualquer. Todavia, vamos generalizá-lo agora em duas definições;

5.1.1 DEFINIÇÃO

Dada a matriz quadrada A = (a_{ij}) para i {1, 2,..., n} e j {1, 2,..., n} chama-se cofator do elemento a_{ij} ao produto de $(-1)^{i+j}$ pelo determinante que se obtêm em A quando se elimina a linha i e a coluna J.

Exemplo:

A = = = cof = $(-1)^{2+2}$

O enunciado da definição abaixo é conhecido como Teorema de Laplace. No processo que utilizamos a generalização da recorrência, chega-se por esse recurso de indução ao conhecido teorema.

5.1.2 TEOREMA DE LAPLACE.

Dada a matriz quadrada A = (a_{ij}), para i {1, 2,..., n} e j {1, 2,..., n}, chama-se determinante dessa matriz ao número real obtido pela soma dos produtos dos elementos de uma fila qualquer pelos seus respectivos cofatores. (Teorema de Laplace).

Exemplo 1; Seja a matriz A =

Desenvolvendo det A pela 2ª. Linha (por exemplo)

det A = $a_{21} A_{21} + a_{22} A_{22} + a_{23} A_{23} + a_{24} A_{24}$

Ou det A = $0(-1)^{2+1}$ + $1(-1)^{2+2}$ + $2(-1)^{2+3}$ + $0(-1)^{2+4}$

det A = 0 + 1. (12 + 12 + 0 – 0 + 16 – 27)-2. (48-4+0-0-40+9) + 0

ou det A = 0 + 13 -26 + 0 = -13

Exemplo 2: B =

Solução: Aplicando, o teorema de Laplace na coluna 1 temos:

B_1 = 2. $(-1)^{1+1}$. + (-2). $(-1)^{2+1}$. + 0. $(-1)^{3+1}$. = B_1=2.(1).(-4)+(-2).(-1).38+0=68.Logo, a solução é 68.

Observação:

Antes do cálculo do determinante de uma matriz é conveniente observar qual é a linha ou coluna que possuem o maior número de zeros, pois a zero corresponde um cofator que não precisa ser calculado.

6. PROPRIEDADES DOS DETERMINANTES.

As dificuldades que podem ocorrer no cálculo dos determinantes dependem naturalmente da ordem dos elementos da matriz considerada. Por isso iremos estudar a seguir algumas propriedades que poderão nos ajudar na simplificação desses cálculos.

PRIMEIRA PROPRIEDADE.

Esta primeira propriedade mostra que o determinante de uma matriz é igual ao determinante da sua transposta. Veremos a seguir a sua aplicação.

Considere a matriz quadrada A = , det A =

A^t = , det A^t =

Logo, podemos concluir que det. A = detA^t

Exemplo:

A = det A = 0 + 15 – 1 + 0 – 3 -5 = 6

A^t = det A^t = 0 – 1 + 15 + 0 – 3 -5 = 6

Portanto, det A = det A^t

Observação: Em virtude desta propriedade, em toda teoria de determinantes não será necessário distinguir linhas e colunas, pois tudo o que é válido para linhas é válido para as colunas de A.

SEGUNDA PROPRIEDADE

Esta propriedade nos mostra que se uma matriz tem uma linha ou uma coluna de zeros, seu determinante é nulo.

Considere a matriz quadrada A =

Observe que a primeira linha é composta de zeros, portanto se calcularmos o det A pela primeira linha (que é a linha com maior número de zeros) obtemos:

det A = 0 – 0 + 0

Portanto, o det. A = 0.

Exemplo:

A = det A = 0

TERCEIRA PROPRIEDADE

Esta propriedade nos mostra que se todos os elementos situados de um mesmo lado da diagonal principal de uma matriz quadrada forem iguais à zero, o determinante da matriz é o produto dos elementos da diagonal principal.

Considere a matriz A =

Calculando o determinante pela primeira linha, temos:

det A = – 0 + 0

Det. A = - 0)

Então, det A =

Exemplo:

A = det A = - 21 = 1(-3). 7

Observe que pela primeira e terceira propriedades podemos perceber que quanto maior for o número de zeros possíveis em uma matriz facilitará os nossos cálculos, isto se faz utilizando-se das transformações elementares.

QUARTA PROPRIEDADE

Esta propriedade nos mostra que se uma dada matriz A = $(a_{ij})_{nxn}$, o determinante da matriz B que se obtêm de A, trocando entre si a posição de duas linhas quaisquer (ou duas colunas quaisquer), é igual ao determinante de A com sinal trocado.

Considere a matriz A = , onde det A = - .

Considere agora a matriz B, obtida de A, trocando-se entre si as linhas 1 e 2.

B = , det B = - ou det B = - (-)

Então, det A = - det B.

Exemplo:

A = det A = 6

Seja B a matriz obtida de A, trocando-se entre si as linhas 2 e 3.

B = det B = 3 + 5 + 0 + 1 + 0 – 15 = -6

Logo, det A = - det B

QUINTA PROPRIEDADE

Esta propriedade nos mostra que se multiplicando uma linha (ou coluna) de uma matriz A por uma constante k , k 0, o seu determinante fica multiplicado por k.

Considere-se a matriz A = ,onde det A = - .

Considere agora a matriz B, obtida de A, multiplicando-se a primeira linha por um número real k qualquer diferente de zero.

B = det B = k – .Det. B = k(– . Logo, o det. B = k.detA.

SEXTA PROPRIEDADE: TEOREMA DE JACOBI

Esta propriedade nos mostra que se multiplicando uma linha (ou coluna) de uma matriz A por um número diferente de zero e adicionando-se o resultado a outra linha (ou coluna), seu determinante não se altera.

Considere a matriz A = .onde, det A = - .

Considere agora a matriz B, obtida de A, substituindo-se a primeira linha pela segunda linha multiplicada por k, somada a primeira linha.

B =

det B = (k + - (k +

det B = -

Então det A = det B

Exemplo:

A = det A = 1 – 12 +2 – 2 + 2 – 6 = - 15. Logo, det A = det B.

Seja B a matriz obtida de A, substituindo-se a segunda linha pela primeira linha, multiplicada por 2, somada a segunda linha.

B = det B = 7 + 0 + 4 – 14 -12 = -15

SÉTIMA PROPRIEDADE

Esta sétima propriedade nos mostra que se uma matriz A = $(a_{ij})_{nxn}$ tem duas linhas (ou duas colunas) formadas por elementos proporcionais, seu determinante é nulo.

Considere a matriz A = , onde os elementos da segunda linha são proporcionais aos elementos correspondentes da primeira linha, isto é, estão multiplicados por uma constante k 0.

Det A = k ou det A = 0

Exemplo:

A = ou A =

Det A = 24 -30 + 20 + 30 – 20 – 24 = 0 Det A = 0

OITAVA PROPRIEDADE: TEOREMA DE BINET

Esta propriedade envolve o teorema de Binet e nos mostra que o determinante do produto de duas matrizes é igual ao produto dos determinantes das matrizes.

Considere as matrizes A = e B = =

Calculando A.B, temos:

A.B = - . - +

Por outro lado, det A= - e det B = -

Det A. det B = - . - +

Então, det A.B = det A.det B.

Exemplo: Considere a matriz A = e a matriz B =

det A = 3-4 + 0 – 2 + 0 -18 det B = 0 +2 + 8 – 0 – 3 + 20

det A = - 21 det B = 27

det A. det B = (-21).(27) = - 567

Por outro lado,

A.B = =

Det A.B = - 286 + 288 – 55 + 24 – 780 + 242 = - 567

NONA PROPRIEDADE: TEOREMA DE CAUCHY

Este teorema mostra que a soma dos produtos dos elementos de uma linha (ou coluna) de uma matriz pelos cofatores da outra linha (ou coluna) é igual a zero.

Considere a seguinte matriz A =

Calculando os cofatores da primeira linha, por exemplo, temos:

$A_{11}=$ -

$A_{12} = -$ $a_{31}\ a_{23}$

$A_{13} =$ $a_{31}\ a_{22}$

Calculando, agora, a soma dos produtos dos elementos da segunda linha, por exemplo, pelos cofatores da primeira linha temos:

$a_{21}\ A_{11} + a_{22}\ A_{12} + a_{23}\ A_{13} = a_{21}\ (a_{22}.a_{33} - a_{32}.a_{23}) + a_{22}\ (- a_{21}.a_{33} + a_{31}.a_{23}) + a_{23}(a_{21}.a_{32} - a_{31}a_{22}) = 0$

Exemplo:

Calculando a soma dos produtos da primeira linha pelos cofatores da segunda linha, temos: $a_{11}.A_{21} + a_{12}. A_{22} + a_{13}. A_{23} =$

A_{21} = -2.2 + 1.3 = -4 + 3 = -1

A_{22} = 3.2 -1.1 = 6 -1 = 5 A_{23} = -3.3 + 1.2 = -9 + 2 = -7 = 3.(-1) + 2.5 + 1.(-7) = -3 + 10 – 7 = 0

7. REGRA DE CHIÓ

Utilizamos a regra de Chió como uma técnica que nos ajuda a facilitar os nossos cálculos com relação a uma matriz quadrada de ordem n ($n \geq 2$).

Essa regra nos permite passar de uma matriz de ordem n para outra de ordem n – 1, de igual determinante.

Veremos a seguir os passos para a realização dessa regra:

- Para que essa regra possa ser aplicada, a matriz deve ter pelo menos um de seus elementos igual a 1. Assim, fixado um desses elementos, retiramos a linha e a coluna onde ele se encontra.
- Em seguida, subtraímos do elemento restante o produto dos dois correspondentes que foram eliminados.
- Multiplicamos o determinante assim obtido por $(-1)^{i+j}$, onde i representa à linha e j a coluna retirada.

Observação: Quando a matriz não vem com um dos seus elementos igual a 1, para aplicarmos a regra de Chió devemos aplicar as propriedades dos determinantes para obter esse elemento.

Exemplo:

Calcular com o auxilio da regra de Chió, o valor do determinante.

A =

Solução: Retiramos a segunda linha e a segunda coluna, pois é nelas que encontramos um elemento igual a 1. Em seguida, subtraímos do elemento restante o produto dos dois correspondentes que foram eliminados.

= =

Multiplicamos o determinante obtido por $(-1)^{i+j}$:

det A = $(-1)^{2+2.}$ $= (-1)^4.(78 - 90) =$ **det. A = -12**

8. MATRIZ DE VANDERMONDE

Chamamos de matriz de Vandermonde toda matriz quadrada de ordem $n \geq 2$. Onde se observa que:

- Todos os elementos de uma mesma coluna são potências sucessivas de uma mesma base a_i, cujos expoentes variam de zero a $n - 1$.
- Como consequência, os elementos de cada coluna são progressões geométricas cujo primeiro elemento é 1 e cuja razão é a_i, sendo i natural variando de 1 a n.

Exemplo1:

Calcular o determinante da matriz:

A =

Solução:

Vemos que A é uma matriz de Vandermonde. Portanto, todos os elementos da segunda linha será elevado a uma potencia igual a 1, e os elementos da terceira linha será elevado a uma potência igual a 2 e os elementos da quarta linha será elevado a uma potência igual a 3; onde $a_1 = -2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 4$ e $a_4 = -1$. Logo, det. A = 5.1.6. (-5). (-4).1 = det. A = 600.

Exemplo 2:

Calcular o determinante da matriz B =

Solução:

Observando que a matriz é de Vandermonde então temos: Os elementos da segunda linha são elevados a 1 e os da terceira linha são elevados a 2. Logo, det. B = (3-2).(4-3).(4-2) = det. = 1.1.2 = det. B = 2.

9. APLICAÇÕES DA TEORIA DOS DETERMINANTES − INVERSÃO DE MATRIZES

9.1 DEFINIÇÃO:

Dada a matriz quadrada $A = (a_{ij})_{nxn}$, chama-se matriz cofator de A a matriz $B = (b_{ij})nxn$, cujos elementos são cofatores dos elementos correspondentes de A.

$B = cofA \quad b_{ij} = A_{ij}$, para todo i e para todo j.

Exemplo:

Considere a matriz A = temos: $A_{11} = 1$ $A_{12} = -2$ $A_{13} = -1$

$A_{21} = 1$ $A_{22} = -8$ $A_{23} = 5$ $A_{31} = -4$ $A_{32} = 14$ $A_{33} = -8$

Então, cofator de A =

Observações:

A transposta da matriz-cofator de A é chamada matriz adjunta de A.

$AdjA = (cofA)^t$

Sabemos da teoria das matrizes que: dada uma matriz quadrada A de ordem n, a matriz inversa de A se existir é uma matriz B tal que:

$AB = BA = I_n.$

9.2. TEOREMA

Dada a matriz quadrada $A = (a_{ij})_{nxn}$, se determinante de A é diferente de zero, então existe a inversa de A e esta é dada por: $A^{-1} = \text{——}\ (cofA)^t$

Demonstração: Este teorema é válido para uma matriz quadrada de ordem n. Faremos a demonstração para matrizes de ordem 2, pois para outros casos está é idêntica.

Vamos considerar a seguinte matriz:

Seja a matriz A =

Calculemos o produto $A.(\text{cof } A)^t$

cofA A

$(\text{cofA})^t$ =

$A.(\text{cofA})^t$=

=

Observando os elementos da diagonal principal, vemos que:

= det A (desenvolvido pela primeira linha)

= det A (desenvolvido pela segunda linha)

Para os outros elementos, pelo Teorema de Cauchy, temos:

= 0 (cofatores da segunda linha multiplicados pela primeira)

$a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} = 0$ (cofatores da primeira linha multiplicados pela segunda)

Logo,

$A.(\text{cofA})^t$ = = det A

$A. (\text{cof } A)^t = \det A. I$

Se det A 0 : A. [= —— $(\text{cofA})^t$] = I

Mas $A. A^{-1} = I$

Então: A^{-1} = —— $(\text{cofA})^t$. O que queríamos demonstrar.

Exemplo1:

Calcular, se existir, a inversa de A = .

Solução: det. A = -1-6 = det. = -7 ≠ 0.

Portanto, existe A^{-1}.

A^{-1} = —— $(cofA)^t$.

cofA = .

$(cofA)^t$ = .

A^{-1} = —.

A^{-1} = .

Exemplo 2:

Para que valores reais de k existem a inversa da matriz A = .

Solução: Existirá a inversa da matriz A se det. A 0.

det. A = k^2 – 9,então, k^2 – 9 0 ou k + 3 ou k -3.

10. APLICAÇÃO DE DETERMINANTES NA FÍSICA E NA MATEMÁTICA.

O estudo dos determinantes tem inúmeras aplicações tanto na matemática com também em outras áreas do conhecimento: A seguir, veremos uma aplicação de correntes elétricas que serão usados os conceitos matemáticos de matrizes, sistemas lineares e determinantes e outra aplicação sobre o controle de estoque de uma livraria.

Exemplo 1: Vamos calcular as correntes de um circuito elétrico que possuem:

- Dois geradores de forças eletro matrizes (fem) $E_1 = 27$ V e $E_2 = 24$ V e resistências internas $R_1 = 1$ e $R_2 = 1$;
- Três resistores: $R_1 = 2$, $R_2 = 6$ e $R_3 = 3$

Observe que neste circuito temos três correntes, representadas por $I_{1,}$ I_2 e I_3. No entanto, para calcular suas intensidades, vamos montar o sistema a seguir, que resulta da aplicação das primeiras e segundas leis de Kirchhoff.

Vejamos: $i_1 - i_2 + i_3 = 0$

$3i_1 + 6i_2 = 27$

$-6i_2 - 4i_3 = -24$

Aplicando a regra de Cramer e resolvendo os determinantes obtemos:

$D = \quad = -54$

$Di_1 = \quad = -126$

$Di_2 = \quad = -180$

$Di_3 = \quad = -54$

Portanto, = — = —— = i_1 = – A,

I_2 = — A e $i_3 = 1$. A que são os valores das correntes dos circuitos, porém esta aplicação nos mostrou a importância de utilizar os determinantes e os sistemas lineares em nosso cotidiano.

Exemplo 2: Uma coleção de livros de matemática para o ensino médio é representada por três livros:

- M_1 é o do 1 ano;
- M_2 é o do 2 ano;
- M_3 é o do 3 ano.

As livrarias A, B e C, em um relatório sobre as vendas diárias, apresentam os seguintes resultados em um determinado dia:

Livraria	**Total de vendas**	**Valor total recebido**
A	$1M_1$ $2M_2$ $3M_3$	111 reais
B	$2M_1$ $1M_2$ $2M_3$	88 reais
C	$3M_1$ $2M_2$ $5M_3$	181 reais

Com base neste relatório, determine os preços dos livros $M_{1,}$ M_2 e $M_{3.}$

Solução:

Se M_1 custar x reais, M_2 custar y reais e M_3 custar z reais, teremos o seguinte sistema:

Aplicando a regra de Cramer, temos:

-4

D_x = - 60

D_y = - 72

D_z = - 80

Assim, x = — = — = **x = 15**

y = — = — = **x = 18**

z = — = — = **x = 20**

Contudo, podemos destacar através destas duas aplicações a importância do estudo dos determinantes dentro da própria matemática assim também como em outras áreas do conhecimento.

11. EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1) Durante certo experimento, foi medida a temperatura (em graus Celsius) de três substâncias a cada 15 min. Na matriz T, as linhas representam, respectivamente, as substâncias $\overline{I}$, $\overline{II}$ e $\overline{III}$, e as colunas representam a temperatura das substâncias em cada medição.

O elemento T_{13}, por exemplo, indica que a temperatura da substância $\overline{I}$ na medição 3 era de 6 ºC.

a) Quantas medições de temperatura foram realizadas em cada substância?

Solução: Como as linhas representam as substâncias, logo, foram realizadas em cada substância 6 medições de temperatura.

b) Qual era a temperatura inicial da substância $\overline{II}$? E 45 min. Após o início do experimento?

Solução: A temperatura inicial da substância $\overline{II}$ era de 5 ºC e após 45 min era de 11ºC.

c) A substância $\overline{III}$ apresentou uma temperatura positiva a partir de qual medição?

Solução: Analisando a terceira linha podemos verificar que a substância $\overline{III}$ apresentou uma temperatura positiva a partir da terceira medição.

d) Qual foi a temperatura média obtida nas medições realizadas com a substância $\overline{I}$?

Solução: Realizando a soma de todos os números da primeira linha e dividindo por 6 medições temos:

0 + 3 + 6 + 8 + 13 + 15 = — = 7,5 ºC.

2) Seja as matrizes A = B = Determine x, de modo que det A = det B.

Solução:

Calculando os determinantes das matrizes A e B, temos:

- Det. A = = 1.3 – 2.x = 3 – 2x

- Det. B = = 2 + 0 – 2 – 3 + x – 0 = x – 3

Portanto, det. A = det. B = 3 – 2x = x – 3 = -3x = 6, logo x = 2.

3) Em certa banca de feira, 2,5 kg de laranjas (L) mais 1,6 kg de peras (P) custam 18,15 reais. Nessa mesma banca, 4 kg de laranjas mais 3,5 kg de peras custam 37,50 reais. Com base nessas informações forneça o preço de 1 kg de laranjas e 1 kg de peras.

Solução: Montando o sistema temos:

2,5 L + 1,6 P = 18,15

4 L + 3,5 P = 37,50

Aplicando a regra de Cramer, temos:

= 2,35

D_L = = 3,525

D_P = = 21,15

Assim, temos: L = — = —— = **L = 1,50**

P = — = —— = **P = 9,00**

Logo, o preço de 1 kg de laranja é 1,50 reais e o preço de 1 kg de pera é 9,00 reais.

12. TESTES

01). No quadrado mágico abaixo, a soma dos números em cada linha, coluna e diagonal é sempre a mesma:

15		**35**
50		
25	**x**	

Por isso, no lugar do x devemos colocar o número:

(a) 30

b) 20

c) 35

d) 45

e) 40

02) Certo concurso é constituído por três etapas: prova escrita, prova prática e entrevista, respectivamente, com pesos 3, 5 e 2, que podem ser representados pela matriz P = .
A matriz N apresenta as notas dos candidatos em cada etapa.

A primeira coluna refere-se a prova escrita, a segunda a prova prática e a terceira a entrevista.

A primeira linha refere-se as notas de Aline, a segunda as notas de Carlos, a terceira as notas de Felipe e a quarta as notas de Juliana.

A partir dessas informações, é correto afirmar que a nota final dos candidatos é dada por:

a) $N.P^t$ e Felipe obteve a menor nota.

b) $P^t.N$ e Aline obteve a maior nota.

c)$P.N^t$ e Carlos obteve a menor nota.

d) $N.P^t$ e Juliana obteve a maior nota.

e) $(N.P)^t$ e Aline obteve a menor nota.

3) (UFMG) Qual afirmativa errada?

a) O determinante de uma matriz que tem duas linhas (ou colunas) iguais é igual a zero

b) O determinante de uma matriz não se altera quando se trocam na matriz duas linhas (ou colunas) entre si.

c) O determinante de uma matriz fica multiplicado por k quando se multiplica uma linha (ou colunas) da matriz por k.

d) A adição a uma linha da matriz de uma combinação linear das demais não altera o valor do seu determinante.

4) (U.F.PA) O valor de um determinante é 12. Se dividirmos a primeira coluna por 6 e multiplicarmos a terceira coluna por 4, o novo determinante valerá:

a) 8

b) 18

c) 24

d) 36

e) 48

Gabarito: 1.b; 2. d; 3. b; 4. a.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

È bem verdade que, no momento, o sentimento do dever cumprido por ter concluído essa etapa da minha caminhada acadêmica, nos conforta e alegra imensamente. No entanto, devemos ter em mente que já ultrapassamos outras etapas anteriores e que outras futuras estão por vir. Acho que é assim que se comporta a mente de um estudioso, um pesquisador, um educador. Está sempre aberto ao novo, novos aprendizados, novas formas de abordagens, etc.

Foi com esse espirito e propósito, ou seja, de aprender um pouquinho mais e de buscar outros enfoques, que iniciamos um breve estudo sobre ***determinantes***, resgatando aspectos históricos e geográficos, tais como; datas, localizações e personagens. Tais aspectos; revelam através dos tempos, que a Matemática surgiu e surge, em qualquer época, diante das necessidades e dos comportamentos de diferentes culturas, em diferentes momentos e contextos. Dessa forma, o educador mostra outras realidades e convida o educando a desenvolver atitudes e valores mais significativos diante dessa diversidade de informações.

Hoje, estou convicta, que boa parte dos conteúdos ministrados em Matemática, quer sejam no ensino fundamental ou no ensino médio, deve ser planejado e trabalhado através de atividades que contemplem seus respectivos fundamentos históricos.

Com referência a fundamentação teórica, aparentemente resumida, entendemos que a abordagem feita, contém a exata quantidade de tópicos teóricos, evitando dessa forma a leitura de inúmeras definições e demonstrações, importantes, é bem verdade, porém sem muita relevância para o desenvolvimento do tema.

Por fim, apresentamos a mostra de sua utilidade dentro da própria Matemática e no estudo de outras áreas de conhecimento.

REFERÊNCIAS

BOLDRINI, José Luiz... [et al]. Álgebra Linear – 3ª. Ed. – A 383. São Paulo: Harper e Row do Brasil, 1980.

CARVALHO, João Bosco Pitombeira Fernandes. 17. Coleção **Explorando o Ensino de Matemática.** Brasília: Ministério da Educação, Secretária de Educação básica, 2010.

DOMINGUES. **Origem dos sistemas lineares e determinantes**. Disponível no site: Http://www.somatemática.com. br. Acesso em 28 de fevereiro de 2012.

FIORENTINI, Dário. 2. **História e Educação Matemática**. Portugal, 1996.

GENTIL, Nelson. Et al. **Matemática para o 2º grau.** Carlos Alberto Marcondes dos Santos, Antônio Carlos. Greco. Antônio Belloto Filho e Sérgio Emílio Greco. São Paulo: Ática, 1996.

MARCONDES, C.A. S; GENTIL, Nelson; GRECO, Sérgio Emílio. **A matemática no ensino médio**. Volume único. São Paulo: Ática, 2002.

SOARES, J.B. **Dicionário de matemática.** São Paulo: Hemus, 2001.

SOUZA, Joamir. **Novo olhar de matemática no ensino médio.** 2. 1ª. Ed. São Paulo: 2010.