UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

LUANA MARGARIDA RAMOS DE OLIVEIRA

O PRODUTO DE MATRIZES E SUAS APLICAÇÕES

Campina Grande/PB

2012

LUANA MARGARIDA RAMOS DE OLIVEIRA

O PRODUTO DE MATRIZES E SUAS APLICAÇÕES

Monografia apresentada no Curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências para obtenção do Título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Msc. Castor da Paz Filho

Campina Grande/PB

2012

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL – UEPB

O48p Oliveira, Luana Margarida Ramos de.
O produto de matrizes e suas aplicações [manuscrito] / Luana Margarida Ramos de Oliveira. – 2012.
39 f. .

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2012.
“Orientação: Prof. Me. Castor da Paz Filho, Departamento de Matemática”.

1. Matemática. 2. Matrizes - Aplicações. 3. Produto. I. Título.

21. ed. CDD 512.943.4

LUANA MARGARIDA RAMOS DE OLIVEIRA

O PRODUTO DE MATRIZES E SUAS APLICAÇÕES

Monografia apresentada no Curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências para obtenção do Título de Licenciado em Matemática.

Aprovada em 17 de dezembro de 2012.

BANCA EXAMINADORA

Castor da Paz Filho

Prof. Msc. Castor da Paz Filho
Departamento de Matemática – CCT/UEPB
Orientador

Kátia Suzana Medeiros Graciano

Profª. Msc. Kátia Suzana Medeiros Graciano
Departamento de Matemática – CCT/UEPB
Examinador

Prof. Esp. Roberto Aroldo Pimentel
Departamento de Matemática – CCT/UEPB
Examinador

A meu amigo-irmão, Maciel Evaristo de Souza (in memorian), por ter me proporcionado os melhores momentos da vida e quem vou sempre lembrar e amar.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por ter me dado à vida, minha família, sabedoria e a oportunidade de concluir um curso universitário.

Aos meus pais, Margarene Ramos de Oliveira Rodrigues e José Ailton Rodrigues de Oliveira, pela força, dedicação, amor, carinho, proteção, incentivo, pelas abdicações que fizeram para que nada faltasse durante toda minha vida e por acreditarem na minha capacidade.

A minha irmã e companheira de viagem, Margarida Néta, por está sempre comigo, tirar minhas dúvidas, ajudar na conclusão deste trabalho e principalmente por ter sido um exemplo de força e persistência, de continuar correndo atrás dos seus sonhos, mesmo no momento mais difícil de sua vida.

A meu namorado, Alerson Rodrigo, por toda força e compreensão.

Aos meus tios, Tio Rona e Geraldo, por confiarem em mim. Em especial quero agradecer a Tio Dim, Toiinho e Val que sempre me ajudaram algumas vezes financeiramente outras fazendo a feira pra que eu levasse pra Campina.

As minhas tias, Garet e Ny, por estarem sempre presentes em minha vida, e a Tia Gracinha que me deu um livro num momento que estava sem condições de comprar.

As minhas primas, Paloma Margarida, pela ajuda e por tudo que faz por mim, a Danielle Margarida, por toda a força e por ter mim ajudado na conclusão deste trabalho, e a Paola Margarida, pelas vezes que tentando estudar ela me distraia, mas ficava do meu lado.

Aos meus primos, Gledson, Marcelo, Júnior, Neto, Rafa, Bia, Débora, Tatá e stefany, por estarem sempre do meu lado, pelo carinho e atenção que eles têm por mim.

A Uzito e Zelma, que disponibilizaram a casa pra eu ficar durante um ano e meio, e a Josildo e Geni, que todas as vezes que precisei abriram as portas de suas casas para mim.

Aos amigos, Marcely e Paulo, que sempre estiveram ao meu lado e sempre que possível, atenderam os meus pedidos. Ao amigo, Moacir que várias vezes me emprestou seus livros, e a João Paulo, que além de emprestar livros, emprestava também o caderno nos dias que eu faltava aula.

Aos meus chefes, Gustavo e Renato, que sempre entenderam quando foi preciso eu faltar no trabalho para estudar, e a Ciro, que além de me entender e incentivar, me presenteou com o anel de formatura.

Aos motoristas, Biu de Zezé e Bel, por toda responsabilidade, dedicação e paciência.

Ao professor, Castor da Paz Filho, orientador deste trabalho, por todo apoio, atenção e dedicação.

Aos professores, Kátia Suzana e Roberto Aroldo que compõem a banca examinadora, pela participação e contribuição que deram para o melhoramento deste trabalho.

Enfim, meu eterno agradecimento a todos aqueles que direta ou indiretamente contribuíram para minha formação profissional.

Nada poderá me abalar. Nada poderá me derrotar. Pois minha força e vitória tem um nome, é Jesus.

(Padre Marcelo Rossi)

RESUMO

Este trabalho de conclusão de curso tem como objeto de estudo relatar a história das matrizes e especificamente explorar o produto de matrizes, suas propriedades e aplicações. Com o objetivo principal desenvolver de forma explícita, completa e detalhada o produto de matrizes e suas propriedades. Contribuindo para um conhecimento amplo daqueles que têm interesse sobre este assunto, servindo também para que essas pessoas entendam com mais facilidade o produto de matrizes, suas propriedades e utilidades. Das operações com matrizes, a multiplicação é a mais importante e também a mais complexa para o entendimento e execução. Além disso, foram abordadas aplicações do produto de matrizes, as quais podem ser empregadas em várias situações do cotidiano e em diversas áreas do conhecimento humano, tais como: na computação gráfica, culinária, nutrição, futebol, dentre outras.

Palavras-chave: Matrizes, Produto de Matrizes, Propriedades, Aplicações.

ABSTRACT

This course conclusion work has as its object of study relating the story of the matrices and specifically explore the product of matrices, their properties and applications. With the main objective to develop explicit, complete and detailed product matrices and their properties. Contributing to a broad knowledge of those who are interested on this subject, also serving for these people to understand more easily the product of matrices, their properties and uses. Of matrix operations, multiplication is the most important and also the most complex to understand and implement. In addition, applications were dealt matrix product, which can be used in various everyday situations and in various areas of human knowledge, such as in computer graphics, cooking, nutrition, football, among others.

Key Words: Matrix, Matrix Product, Properties, Applications.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO **11**
2. OBJETIVOS **12**
2.1. OBJETIVO GERAL 12
2.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS 12
3. UM POUCO DA HISTÓRIA DAS MATRIZES **13**
4. PRODUTO DE MATRIZES **15**
4.1. CONCEITO 15
4.2. DEFINIÇÃO 16
4.3. PROPRIEDADES 17
4.4. OBSERVAÇÕES 17
4.4.1. A multiplicação de matrizes não é comutativa 18
4.4.2. Na multiplicação de matrizes não vale a propriedade do cancelamento 19
4.4.3. Na multiplicação de matrizes não vale a propriedade do anulamento 20
4.5. EXEMPLOS 21
5. APLICAÇÕES **29**
6. CONSIDERAÇÕES FINAIS **38**
7. REFERÊNCIA BIBLIOGRAFICA **39**

1. INTRODUÇÃO

Este trabalho de conclusão de curso tem como objeto de estudo relatar a história das matrizes e especificamente explorar o produto de matrizes, suas propriedades e aplicações.

O mesmo iniciará com uma breve introdução da história das matrizes citando os principais contribuintes para o seu desenvolvimento e aplicações; e quais necessidades os levaram ao seu desenvolvimento.

No capítulo IV, onde será desenvolvido o trabalho, serão estudados: o conceito de produto de matrizes, introduzido através de uma situação problema, a definição e suas propriedades, algumas observações e em seguida vários exercícios resolvidos.

O produto de matrizes é utilizado em algumas situações do nosso cotidiano, por exemplo: na confecção de doces e no resultado de um campeonato de futebol.

Das operações com matrizes, a multiplicação é a mais importante e também a mais complexa para o entendimento e execução. Por isso, devemos introduzi-la a partir de um exemplo prático e de sua resolução construir o processo.

Baseado no que foi apresentado nos parágrafos anteriores, neste trabalho será realizado um estudo introdutório da história das matrizes, a resolução de exercícios usando a definição e suas aplicações em várias áreas do conhecimento humano.

Com este trabalho, pretendemos dar uma boa base para aqueles que pretendem estudar o produto de matrizes, através de exemplos práticos alternados com a teoria formal, tornando mais fácil a compreensão.

Nos capítulos seguintes, apresentaremos um pouco da história das matrizes, a teoria básica do produto de matrizes, algumas aplicações e as conclusões sobre o que acabamos de relatar.

2. OBJETIVOS

2.1. OBJETIVO GERAL

- Promover o gosto pelo estudo do Produto de Matrizes a partir do uso de Situação Problema.

2.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Facilitar a didática do professor quanto a maneira mais fácil do aluno entender;
- Desmistificar o ensino da Matemática, promovendo a sua importância.

3. O SURGIMENTO DAS MATRIZES

O primeiro matemático a usar o termo “matriz” foi James Joseph Sylvester, em 1850. Seu amigo Cayley, em 1858, divulgou esse nome e começou a demonstrar sua utilidade, com sua famosa *Memoir on the Theory of Matrices*.

Sylvester usou o significado original da palavra matriz, ou seja, local onde algo se gera ou cria, “...um bloco retangular de termos... o que não representa um determinante, mas é como se fosse uma matriz a partir da qual podemos formar vários sistemas de determinantes, ao fixar um número p e escolher à vontade p linhas e p colunas...” (artigo publicado na *Philosophical Magazine* de 1850, pág. 363 – 370).

Para Sylvester, as matrizes ainda eram mero ingrediente dos determinantes. Só com Cayley que elas passam a ter vida própria e aos poucos começam a vencer os determinantes em importância.

Um primeiro curso de Teoria das Matrizes, ou de sua versão mais abstrata, a Álgebra Linear, deve ir no mínimo até o Teorema Espectral. Esse teorema e alguns resultados auxiliares já eram conhecidos antes de Cayley começar a estudar as matrizes.

Como isso pode ser explicado? A maior parte dos resultados básicos da Teoria de Matrizes foi descoberta quando os matemáticos dos séculos XVIII e XIX passaram a investigar a Teoria das Formas Quadráticas. Hoje, é indispensável estudar essas formas através de notação e metodologia matricial, mas naquela época eram tratadas escalarmente.

Eis aqui a representação de uma forma quadrática de duas variáveis, por notação escalar e notação matricial.

$$q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 = \quad . \quad .$$

O primeiro uso implícito da noção de matriz ocorreu quando Lagrange, em 1790, reduziu a caracterização dos máximos e mínimos, de uma função real de várias variáveis, ao estudo do sinal da forma quadrática associada a matriz das segundas derivadas dessa função. Sempre trabalhando escalarmente, Lagrange chegou à conclusão que hoje expressamos em termos de matriz positiva definida. Já no século XIX, a Teoria das Formas Quadráticas foi um dos assuntos mais importantes em termo de pesquisa. Tendo como resultado desta pesquisa, a descoberta de uma grande quantidade de resultados e conceitos básicos de matrizes.

Com isso, podemos dizer que a Teoria das Matrizes teve como mãe a Teoria das Formas Quadráticas. Hoje, contudo, o estudo das formas quadráticas é apenas um capítulo da Teoria das Matrizes.

Observemos também, que os determinantes não contribuíram em nada para o desenvolvimento da Teoria das Matrizes.

4. PRODUTO DE MATRIZES

4.1. CONCEITO

A multiplicação de matrizes não é uma operação tão simples como as outras já estudadas até aqui; não basta multiplicar os elementos correspondentes.

Vamos introduzi-la por meio da seguinte situação.

Durante a primeira fase da Copa do Mundo de futebol, realizada na França em 1998, o grupo **A** era formado por quatro países: Brasil, Escócia, Marrocos e Noruega. Observe os resultados (números de vitórias, empates e derrotas) de cada um, registrados em uma tabela e em uma matriz **A**, de ordem 4 x 3:

	Vitória	**Empate**	**Derrota**
Brasil	2	0	1
Escócia	0	1	2
Marrocos	1	1	1
Noruega	1	2	0

A =

Pelo regulamento da Copa, cada resultado (vitória, empate ou derrota) tem pontuação correspondente (3 pontos, 1 ponto ou 0 ponto). Veja esse fato registrado em uma tabela e em uma matriz **B**, de ordem 3 x 1.

Número de pontos	
Vitória	3
Empate	1
Derrota	0

B =

Terminada a primeira fase, a classificação foi obtida com o total de pontos feitos por cada país. Essa pontuação pode ser registrada numa matriz que é representada por **AB** (produto de **A** por **B**). Veja como é obtida a classificação:

Brasil: $2 \,.\, 3 + 0 \,.\, 1 + 1 \,.\, 0 = 6$

Escócia: $0 \,.\, 3 + 1 \,.\, 1 + 2 \,.\, 0 = 1$

Marrocos: $1 \,.\, 3 + 1 \,.\, 1 + 1 \,.\, 0 = 4$

Noruega: $1 \,.\, 3 + 2 \,.\, 1 + 0 \,.\, 0 = 5$

AB =

Esse exemplo sugere como deve ser feita a multiplicação de matrizes. Observe a relação que existe entre as ordens das matrizes:

$$A_{4 \times 3} \quad . \quad B_{4 \times 1} \quad = \quad AB_{4 \times 1}$$

✓ **Para refletir:** Como é determinado cada elemento de **AB**?

Cada elemento de **AB** é obtido multiplicando-se ordenadamente os elementos da linha **i** da matriz **A** pelos elementos da coluna **j** da matriz **B** e somando-se os produtos obtidos.

4.2. DEFINIÇÃO

Dada uma matriz $A = (a_{ij})$ do tipo m x n e uma matriz $B = (b_{jk})$ do tipo n x p, o produto da matriz **A** pela matriz **B** é a matriz $C = (c_{ik})$ do tipo m x p tal que o elemento c_{ik} é calculado multiplicando-se ordenadamente os elementos da linha **i**, da matriz **A**, pelos elementos da coluna **j**, da matriz **B**, e somando-se os produtos obtidos. Ou seja,

$$c_{ik} = a_{i1} \,.\, b_{1k} + a_{i2} \,.\, b_{2k} + a_{i3} \,.\, b_{3k} + \dots + a_{in} \,.\, b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \,,$$

para todo i {1, 2, ..., m} e todo k {1, 2, ..., p}.

Observações

1ª) A definição dada garante a existência do produto **AB** somente se o número de colunas de **A** for igual ao número de linhas de **B**, pois **A** é do tipo m x n e **B** é do tipo n x p.

2ª) A definição dada afirma que o produto **AB** é uma matriz que tem o número de linhas de **A** e o número de colunas de **B**, pois **C = AB** é do tipo m x p.

4.3. PROPRIEDADES

A multiplicação de matrizes goza das propriedades seguintes:

i. Associativa: (AB)C = A(BC),
quaisquer que sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{jk})_{n \times p}$ e $C = (c_{kl})_{p \times r}$.

ii. Distributiva à direita em relação à adição: (A + B)C = AC + BC,
quaisquer que sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{m \times n}$ e $C = (c_{jk})_{n \times p}$.

iii. Distributiva à esquerda: C(A + B) = CA + CB,
quaisquer que sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{m \times n}$ e $C = (c_{ki})_{p \times m}$.

iv. (kA)B = A(kB) = k(AB),
quaisquer que sejam o número k e as matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{jk})_{n \times p}$.

✓ **Para refletir:** É preciso cuidado com a posição das matrizes envolvidas. Não se pode garantir, por exemplo, que A(BC) e (BA)C sejam iguais. Justifique.

- A(BC) = (AB)C

Entretanto, (AB)C = (BA)C somente quando **A** e **B** comutam, isto é, quando AB = BA.

4.4. OBSERVAÇÕES

4.4.1. A multiplicação de matrizes não é comutativa

Observe os seguintes exemplos:

1º) Dadas as matrizes **A** e **B** vamos calcular AB e BA.

A = e B =

$\Rightarrow$ AB existe, sendo uma matriz 2 x 2

AB = =

$\Rightarrow$ BA existe, sendo uma matriz 2 x 2

BA = =

Notamos que AB BA.

2º) Se **A** é uma matriz de ordem 2 x 3 e **B**, uma matriz de ordem 3 x 4, podemos calcular AB mas não podemos calcular BA.
Temos então mais um caso em que AB BA.

3º) Vejamos agora para A = e B = .

A é de ordem 2 x 2 e **B** é de ordem 2 x 2. Logo podemos calcular AB e também BA.

AB = = BA = =

Neste caso AB = BA. Quando isto acontece, dizemos que as matrizes **A** e **B** comutam ou **A** comuta com **B**.

Concluindo: Em um produto de duas matrizes **A** e **B**, a ordem em que os fatores aparecem é importante, pois a multiplicação de matrizes não é comutativa, ou seja, AB nem sempre é igual a BA.

- ✓ **Para refletir:** Com números reais: a . b = b . a, a, b R.
  Com matrizes: AB e BA podem ou não ter resultados iguais.

Observações: Sempre que forem possíveis as multiplicações envolvidas, são válidas as deduções seguintes:

- A = B $\Rightarrow$ AC = BC (multiplicar a mesma matriz à direita)
- A = B $\Rightarrow$ CA = CB (multiplicar a mesma matriz à esquerda)

Atenção: Não é válida a dedução A = B $\Rightarrow$ AC = CB, pois a multiplicação de matrizes não é comutativa.

4.4.2. A multiplicação de matrizes não é comutativa

Dadas as matrizes **A**, **B** e **C**, vamos calcular AB e AC.

A = , B = e C =

AB = =

AC = =

Note que podemos ter AB = AC, com B C.

Se **A**, **B** e **C** são matrizes tais que AB = AC, não podemos garantir que **B** e **C** sejam iguais.

- ✓ **Para refletir:** Com números reais, se ab = ac, com a 0, então b = c.

4.4.3. Na multiplicação de matrizes não vale a propriedade do anulamento

Dadas as matrizes **A** e **B**, não nulas, vamos calcular AB.

A = e B =

AB = = = 0

Notamos que AB = 0, mas A 0 e B 0.

Se **A** e **B** são matrizes tais que AB = 0 (matriz nula), não podemos garantir que uma delas (**A** ou **B**) seja nula.

Observação: A definição de multiplicação de matrizes e o fato de ela não ser comutativa nos levam com cuidado a propriedade do elemento neutro.

Seja **A** uma matriz quadrada, por exemplo, de ordem 3: A = .

Veja o que acontece fazendo AI_3 e I_3A:

$AI_3 =$ $\qquad\qquad\qquad =$ $\qquad\qquad = A$

$I_3A =$ $\qquad\qquad\qquad =$ $\qquad\qquad = A$

Agora, seja **A** uma matriz não quadrada, por exemplo, de ordem 2 x 3:

A = .

Podemos dizer: $A \,.\, I_3 =$ $\qquad\qquad =$ $\qquad\qquad = A$

$I_2 \,.\, A =$ $\qquad\qquad =$ $\qquad\qquad = A$

Podemos escrever:

- Se **A** é uma matriz quadrada de ordem **n**, então $AI_n = I_nA = A$.
- Se **A** é uma matriz de ordem m x n, com m n, então $AI_n = I_mA = A$.

✓ **Para refletir:** Com números reais, 1 . a = a . 1 = a, a R.

4.5. EXEMPLOS

Exemplo 1 – Responda, pensando na definição:

a) Dadas duas matrizes quaisquer, é sempre possível determinar o seu produto?
Resposta: Não.

b) Pela definição, se **A** é uma matriz m x n e **B** é uma matriz n x p, existe o produto AB? Se existir, de que tipo é a matriz AB?

Resposta: Sim. O produto AB será uma matriz m x p.

c) Se **A** é uma matriz 2 x 3 e **B** é uma matriz 3 x 4, existe o produto AB? Existindo o produto, de que tipo é a matriz AB?

Resposta: Sim. O produto AB será uma matriz 2 x 4.

d) Dadas duas matrizes quadradas de ordem **n**, seu produto sempre existe? Se existir, de que tipo é a matriz-produto?

Resposta: Sim. A matriz-produto é quadrada de ordem n.

Exemplo 2 – Determine o produto AB, sabendo que:

a) A = e B =

Resolução: Como **A** é uma matriz 3 x 2 e **B** é uma matriz 2 x 2, o número de colunas de **A** é igual ao número de colunas de **B**; assim, está definido o produto AB, que será uma matriz 3 x 2, isto é:

AB = = = =

=

b) A = e B =

Resolução:

$\Rightarrow$ AB será uma matriz 2 x 2.

AB = = = =

Exemplo 3 – Dadas as matrizes A = e B = , determine:

a) $\mathbf{A^2}$, em que A^2 = AA

Resolução: =

b) $\mathbf{B^2}$, em que B^2 = BB

Resolução: =

c) (A + B)(A - B)

Resolução:

A + B = + = e A – B = - =

Logo, (A + B)(A - B) = =

d) $A^2 – B^2$

Resolução: - =

Exemplo 4 – Observando os resultados obtidos no exercício anterior, responda: para essas matrizes **A** e **B** valem a igualdade (A + B)(A - B) = $A^2 - B^2$?

Resposta: Não vale a igualdade.

Exemplo 5 – As matrizes A = e B = comutam, isto é, são tais que AB = BA. Calcule **x** e **y**.

Resolução:

AB = = =

BA = = =

Como AB = BA, pela igualdade de matrizes, temos:

Resolvendo o sistema:

$3x = 18 \Rightarrow x = 6$ e $3y = 6 \Rightarrow y = 2$

Esses valores satisfazem também as outras duas equações.

Exemplo 6 – Sendo A = , B = e C = , verifique que:

a) AB = BA

Resolução: AB = =

BA = =

Logo, AB = BA.

b) A(BC) = (AB)C

Resolução: BC = =

A(BC) = =

AB =

(AB)C = =

Logo, A(BC) = (AB)C.

c) A(B + C) = AB + AC

Resolução: B + C = + =

A(B + C) = =

AC = =

AB + AC = + =

Portanto, A(B + C) = AB + AC.

d) BC CB

Resolução: BC =

CB = =

Logo, BC CB.

e) $BI_2 = I_2B = B$

Resolução: BI_2 = = = B

I_2B = = = B

Logo, $BI_2 = I_2B = B$.

Exemplo 7 – Sendo A = e B = , mostre que $(AB)^2$ A^2B^2.

Resolução: AB = =

$(AB)^2$ = =

A^2 = =

B^2 = =

A^2B^2 = =

Logo, $(AB)^2$ A^2B^2.

Exemplo 8 – Considere **A** e **B** matrizes quadradas de mesma ordem. As afirmações $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ e $(A + B)(A - B) = A^2 – B^2$ podem ou não ser verdadeiras. Justifique e diga em que casos elas são verdadeiras.

Resposta: $(A + B)^2 = (A + B)(A + B) = A^2 + AB + BA + B^2$,

$AB + BA = 2AB$ se, e somente se, $AB = BA$, ou seja, se **A** e **B** comutam.

$$(A + B)(A - B) = A^2 – AB + AB + B^2,$$

$-AB + BA = 0$ se, e somente se, $AB = BA$, ou seja, se **A** e **B** comutam.

✓ **Para refletir:** Se a e b são números reais, as afirmações $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ e $(a + b)(a - b) = a^2 – b^2$ são sempre verdadeiras. Justifique.

Porque a multiplicação de números reais é comutativa, isto é, $ab = ba$, a, b R.

Então:

$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a + b)(a - b) = a^2 – ab + ba + b^2 = a^2 – b^2$

Exemplo 9 – Calcule a matriz **X** sabendo que:

a) A = , B = e AX = B

Solução: Pela definição de multiplicação de matrizes, a matriz **X** deve ter:

- número de linhas = número de colunas de A
- número de colunas = número de colunas de B

Logo, X é uma matriz 2 x 1, ou seja, X = .

Então:

$$= \quad \Rightarrow \quad = \quad \Rightarrow \quad \Rightarrow 6x = 30 \Rightarrow x = 5$$

$2x – y = 6 \Rightarrow 2 . 5 – y = 6 \Rightarrow -y = 6 – 10 \Rightarrow y = 4$

X =

b) X = I_2

Solução: X é uma matriz quadrada de ordem 2, ou seja, X = .

Então:

= $\Rightarrow$ =

$\Rightarrow$ a = – e b = -2

$\Rightarrow$ c = -1 e d = 1

Logo, X = – .

Exemplo 10 – Provar que se **A** e **B** são matrizes comutáveis, então valem as seguintes igualdades:

a) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

Resolução: Lembrando que **A** e **B** matrizes comutáveis $\Leftrightarrow$ AB = BA, temos:

$(A + B)^2 = (A + B)(A + B) = A(A + B) + B(A + B) = AA + AB + BA + BB =$
$= A^2 + 2AB + B^2$

b) $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$

Resolução: Sabendo que **A** e **B** comutam, ou seja, AB = BA. Temos:

$(A + B)^3 = (A + B)^2(A + B) = (A^2 + 2AB + B^2)(A + B) =$
$= A(A^2 + 2AB + B^2) + B(A^2 + 2AB + B^2) = AA^2 + A2AB + AB^2 + BA^2 + B2AB +$
$+ BB^2 =$
$= A^3 + 2A^2B + AB^2 + BA^2 + 2AB^2 + B^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$

5. APLICAÇÕES

Existem inúmeras aplicações usando o produto de matrizes, este pode ser utilizado em diversas áreas do conhecimento humano. A seguir apresentaremos várias aplicações básicas.

Na produção de produtos como televisores e carros, no cálculo das notas dos alunos no final de um bimestre, no cálculo do valor calórico que uma pessoa gasta fazendo exercícios físicos e na produção de doces são situações em que encontramos o produto de matrizes.

Aplicação 1 – Uma indústria fabrica três modelos diferentes de televisores: A, B e C. A tabela I mostra o número de teclas e alto-falantes usados em cada modelo e a tabela II mostra a produção que a fábrica planeja fazer para os meses de novembro e dezembro.

Tabela I

		Modelo		
		A	**B**	**C**
Componente	**Teclas**	10	12	15
	Alto-falantes	2	2	4

Tabela II

		Mês	
		Novembro	**Dezembro**
Modelo	**A**	800	2 000
	B	1.000	1.500
	C	500	1.000

Quantas teclas e quantos alto-falantes serão necessários para a produção nesses dois meses?

Resolução: Para resolver o problema podemos proceder da seguinte forma: multiplicar os elementos da primeira linha da tabela I pelos elementos da primeira coluna da tabela II e somar os produtos, obtendo os dados referentes ao uso de teclas no mês de novembro:

$$10 . 800 + 12 . 1000 + 15 . 500 = 27.500 \text{ teclas}$$

Para os alto-falantes, fazemos:

$$2 . 800 + 2 . 1000 + 4 . 500 = 5.600 \text{ alto-falantes}$$

Do mesmo modo, calculamos os dados referentes a dezembro:

- número de teclas: $10 . 2\,000 + 12 . 1\,500 + 15 . 1\,000 = 53.000$
- número de alto-falantes: $2 . 2\,000 + 2 . 1\,500 + 4 . 1\,000 = 11.000$

Assim, para os meses de novembro e dezembro a fábrica deverá utilizar 80.500 teclas e 16.600 alto-falantes.

Outro modo:

Podemos também resolver este problema utilizando o produto de matrizes.

Primeiro representamos os dados da tabelas I e II pelas matrizes **A** e **B**, respectivamente:

A = B =

Depois, fazemos A . B:

=

A matriz A . B gera a tabela III, que pode ser chamada Componentes por mês:

Tabela III

		Mês	
		Novembro	**Dezembro**
Componente	**Teclas**	27 500	53 000
	Alto-falantes	5 600	11 000

A partir da tabela, é possível concluir que serão necessários 80.500 teclas e 16.600 alto-falantes para a produção nos meses de novembro e dezembro.

Aplicação 2 – As tabelas a seguir fornecem os pesos das notas 1º, 2º, 3º e 4º bimestre dos colégios I e II e as notas de Matemática dos alunos Ana do colégio I, Pedro e Bia do colégio II:

		Bimestres			
		1º	**2º**	**3º**	**4º**
Colégios	**I**	2	2	3	3
	II	2	3	2	3

		Alunos		
		Ana	**Pedro**	**Bia**
Bimestres	**1º**	1	5	3
	2º	4	8	2
	3º	6	0	10
	4º	7	9	6

Para comparar a soma de pontos que cada um desses alunos teve no seu colégio com a que teria no outro, fizemos os seguintes cálculos:

Colégio I

Colégio II

Organizando esses valores em uma tabela, temos:

		Alunos		
		Ana	**Pedro**	**Bia**
Colégios	**I**	49	53	58
	II	47	61	50

Podemos representar os pesos e as notas dos alunos nos 4 bimestres por duas matrizes:

matriz dos pesos dos bimestres nos colégios I e II.

matriz das notas bimestrais de Matemática dos três alunos.

Podemos também representar a soma dos pontos dos alunos nos 4 bimestres, seja no colégio onde estudam, seja no outro, usando matrizes:

=

= =

=

Aplicação 3 – Para que você conheça o gasto calórico aproximado de algumas atividades, montamos a tabela abaixo. Esta tabela é baseada numa pessoa de 60 Kg de peso corporal em atividades físicas, num tempo de 1 hora:

Peso	**Andar de bicicleta**	**Caminhar acelerado**	**Correr a 12Km/h**	**Hidroginástica**
60 Kg	252 calorias	552 calorias	890 calorias	300 calorias

Suponhamos um acompanhamento de uma pessoa com este peso por meio de um programa com estes exercícios ao longo de uma semana:

Horas por dia para cada atividade

Dia da semana	**Andar de bicicleta**	**Caminhar acelerado**	**Correr a 12Km/h**	**Hidroginástica**
2ª feira	1	0	0	1
3ª feira	0	0	1	0
4ª feira	0,5	0,5	0	0
5 feira	0	0	0,5	1,5
6ª feira	0,5	1	0	0

Com as informações da primeira tabela montamos uma matriz 4 x 1 e com as informações da segunda tabela montamos uma matriz 5 x 4. Assim podemos dizer quantas calorias esta pessoa queimará após cada dia de exercício físico, simplesmente multiplicando-as.

= =

A pessoa a que nos referimos nesta situação, com este programa de exercícios, queimará 552 calorias na segunda-feira, 890 calorias na terça-feira, 1016 calorias na quarta-feira, 895 calorias na quinta-feira e 678 calorias na sexta-feira.

Aplicação 4 – Uma indústria fabrica certo aparelho em dois modelos, P e Q. Na montagem do aparelho P são utilizados 6 transistores, 9 capacitores e 11 resistores, e, no modelo Q, 4 transistores, 7 capacitores e 10 resistores.

Podemos dispor esses dados em uma tabela e em uma matriz.

	P	**Q**
Transistores	6	4
Capacitor	9	7
Resistor	11	10

A =

Essa mesma indústria recebeu as seguintes encomendas para os meses de janeiro e fevereiro:

- janeiro: 8 aparelhos do modelo P e 12 do modelo Q;
- fevereiro: 10 aparelhos do modelo P e 6 do modelo Q.

Vamos dispor esses dados em uma tabela e em uma atriz.

	Janeiro	**Fevereiro**
P	8	10
Q	12	6

B =

Com esses dados , vamos calcular o que se pede.

a) Quantos transistores serão necessários para atender às encomendas de cada mês?

Resolução: Mês de janeiro: 6 . 8 + 4 . 12 = 98 (Usamos as informações da 1ª linha de A e da 1ª coluna de B.)

Mês de fevereiro: 6 . 10 + 4 . 6 = 84 (Usamos as informações da 1ª linha de A e da 2ª coluna de B.)

b) Quantos capacitores serão necessários para atender às encomendas de cada mês?

Resolução: Mês de janeiro: 9 . 8 + 7 . 12 = 156 (Usamos as informações da 2ª linha de A e da 1ª coluna de B.)

Mês de fevereiro: 9 . 10 + 7 . 6 = 132 (Usamos as informações da 2ª linha de A e da 2ª coluna de B.)

c) Quantos resistores serão utilizados para atender às encomendas de cada mês?

Resolução: Mês de janeiro: 11 . 8 + 10 . 12 = 208 (Usamos as informações da 3ª linha de A e da 1ª coluna de B.)

Mês de fevereiro: 11 . 10 + 10 . 6 = 170 (Usamos as informações da 3ª linha de A e da 2ª coluna de B.)

Com os dados obtidos, podemos construir a tabela:

	Janeiro	**Fevereiro**
Transistor	96	84
Capacitor	156	132
Resistor	208	170

A matriz C = , associada à tabela acima, corresponde

exatamente ao produto da matriz A pela matriz B, que indicaremos por AB. Logo, o que fizemos ao realizar as operações com o objetivo de responder às questões propostas foi calcular o produto da matriz A pela matriz B. Então:

= =

Aplicação 5 – Uma doceira produz dois tipos A e B de doces.

Para a produção desses doces são utilizados os ingredientes X, Y e Z, conforme indica a tabela.

	Doces	
	A	**B**
X	5	8
Y	3	2
Z	4	7

A tabela dada será representada pela matriz A: A = .

Suponha que sejam fabricados 50 doces do tipo A e 20 doces do tipo B, por dia.

Esta quantidade de doces pode ser representada pela matriz coluna: B = .

Se quisermos determinar a quantidade de ingredientes X, Y e Z utilizados por dia, procedemos da seguinte forma:

Ingrediente X: 5 . 50 + 8 . 20 = 410

Ingrediente Y: 3 . 50 + 2 . 20 = 190

Ingrediente Z: 4 . 50 + 7 . 20 = 340

Estas quantidades podem ser representadas pela matriz: C = .

Podemos obter esta matriz C, denominada matriz produto de A por B, da seguinte forma:

A . B = C $\Rightarrow$ = =

Cada elemento da matriz C é a soma dos produtos ordenados de uma linha da matriz A pela coluna da matriz B, isto é:

410 = 5 . 50 + 8 . 20
190 = 3 . 50 + 2 . 20
340 = 4 . 50 + 7 . 20

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A realização deste trabalho de conclusão de curso foi fundamental para uma compreensão aprofundada sobre o produto de matrizes.

Conseguimos através deste, atingir o objetivo principal que consistia em desenvolver de forma explícita, completa e detalhada o produto de matrizes e suas propriedades. Contribuindo para um conhecimento amplo daqueles que têm interesse sobre este assunto.

O mesmo servirá também para que essas pessoas entendam com mais facilidade o produto de matrizes, suas propriedades e utilidades.

Além disso, foram abordadas aplicações do produto de matrizes, as quais podem ser empregadas em várias situações do cotidiano e em diversas áreas do conhecimento humano, tais como: na computação gráfica, culinária, nutrição, futebol, dentre outras.

Portanto, podemos concluir que a multiplicação de matrizes se torna uma operação fácil e de simples entendimento, quando é introduzida através de situações problemas e exemplos práticos.

7. REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

BIANCHINI, Edwaldo; PACCOLA, Herval. **Componente Curricular: Matemática.** 1. ed. São Paulo: Moderna, 2004. v. 2.

CAMPOS, Cristiani dos Santos. **Tratamento da Diabetes:** Uma aplicação de matrizes. 2008. Universidade Estadual de Londrina, Paraná.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática.** 1. ed. São Paulo, ática, 2006. v. 2.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática Contexto & Aplicações.** 2. ed. São Paulo: Ática, 2001. v. 2.

GIOVANNI, José Ruy; BONJORNO, José Roberto; GIOVANNI JR., José Ruy. **Matemática Fundamental.** Volume único. São Paulo: FTD, 1994.

IEZZI, Gelson; HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de Matemática Elementar:** sequências, matrizes, determinantes, sistemas. 2. ed. São Paulo: Atual, 1977. v. 4.

SILVA, Claudio Xavier da; BARRETO FILHO, Benigno. **Matemática aula por aula.** 2. ed. São Paulo: FTD, 2005. v. 2.

SMOLE, Kátia C. Stocco; DINIZ, Maria I. S. Vieira. **Matemática Ensino Médio.** 5. ed. São Paulo: Saraiva, 2005. v. 2.

SITES REFERIDOS

A ORIGEM DAS MATRIZES
http://profrogeriomat.blogspot.com.br/2009/10/origem-das-matrizes.html.
Acesso em: 18 de outubro de 2012.

SURGIMENTO DA TEORIA DAS MATRIZES
http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/passa3b.html.
Acesso em: 18 de outubro de 2012.