UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Um Passeio na Sequência de Fibonacci

TIAGO ALVES DE SOUSA

CAMPINA GRANDE - PB
Dezembro de 2012

TIAGO ALVES DE SOUSA

Um Passeio na Sequência de Fibonacci

Trabalho Acadêmico Orientado apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática do Departamento de Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba em cumprimento às exigências legais para obtenção do título de licenciado em Matemática.

Orientador: Dr. Aldo Trajano Lourêdo

CAMPINA GRANDE-PB

Dezembro de 2012

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL – UEPB

S725u Sousa, Tiago Alves de .

Um passeio na sequência de Fibonacci [manuscrito] / Tiago Alves de Sousa. – 2012.

28 f. : il. color.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2012.

“Orientação: Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo, Departamento de Matemática”.

1.Sequência Fibonacci. 2. Numero de ouro. 3. Teoria dos números. I. Título.

21. ed. CDD 512

TIAGO ALVES DE SOUSA

Um Passeio na Sequência de Fibonacci

Aprovado em: 12/12/2012

COMISSÃO EXAMINADORA

Aldo Trajano Lourêdo

Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo

Dpto. Matemática - CCT/UEPB

ORIENTADOR

Fernando Luiz Tavares da Silva

Prof. Ms. Fernando Luiz Tavares da Silva

Dpto. Matemática - CCT/UEPB

EXAMINADOR

Francisco de Sá Ribeiro.

Prof. Ms. Franscisco de Sá Ribeiro

Dpto. Matemática - CCT/UEPB

EXAMINADOR

Dedicatória

Dedico este trabalho a minha mãe, a Sra. Maricéu Alves de Medeiros, que em momento algum deixou de me apoiar ou de me incentivar para que chegasse até aqui.

Agradecimentos

Ressalto primeiramente o meu mais profundo agradecimento a Deus, que me proporcionou saúde e sabedoria durante esse período muito importante para a minha vida. Este que sempre é Pai e nunca se abdicou desse seu filho, e que jamais me deixou desistir dos meus sonhos, mesmo quando pareceu que a chama já tinha sido extinta. Agradeço veemente a minha querida mãe Maricéu Alves de Medeiros, que sempre foi inconfundível no ato de amar e que sempre procurou me mostrar os caminhos da fé, dignidade e prosperidade através dos seus atos lindos e incontestáveis. Aos amigos, José Cláudio Teodista e Wesklemyr Lacerda que juntos me mostraram o verdadeiro sentido de estudar em grupo, e pela colaboração como as diversas "discursões" sobre a prática docente. Ao professor Francisco de Sá Ribeiro, por quem tenho grande admiração, um exemplo de profissional e ser humano que carregarei sempre comigo, e jamais me esquecerei desse professor e dos seus conselhos e ensinamentos. Ao professor Fernando Luiz Tavares, por todos os conselhos e por ter me ensinado a ter foco e direcionamento nos meus objetivos, que me mostrou diversas vezes que determinação e ética são qualidades que devem acompanhar todo profissional. Ao meu orientador e professor Aldo Trajano Lourêdo, por todas as oportunidades que me proporcionou de aprender matemática, pelos diversos conselhos e lições de vida que sempre me passou, pela atenção, compreensão e paciência que sempre teve comigo. Por fim, estendo um agradecimento muito especial ao amigo e professor Orlando Batista de Almeida, um profissional e um ser humano que dispensa comentários. Pela incondicional confiança e apoio, por sempre ter me incentivado e dado força de vontade para vencer os obstáculos da vida, pois as dificuldades existem para serem superadas. E mais, por ter me ensinado que o importante não é sermos pessoas de sucesso, mas pessoas de valor e caráter.

Epígrafe

Não que, por nós mesmos, sejamos capazes de pensar alguma coisa, como se partisse de nós; pelo contrário, a nossa suficiência vem de Deus.

(II Coríntios 3:5)

Resumo

O trabalho foi realizado com o objetivo de mostrar a história de Leonardo de Pisa, mais conhecido como Fibonacci, mostrando sua formação e inclinação matemática. Mostraremos também a história da sequência de Fibonacci, desde o surgimento do problema da reprodução dos coelhos, até a sua ligação com o número de ouro. Apresentaremos a sua definição, e algumas propriedades que mais adiante serão úteis para demonstrarmos que se uma sequência obedece à lei de formação da sequência de Fibonacci, então os termos desta sequência são escritos como combinação dos termos da sequência de Fibonacci. Demonstraremos a fórmula de Binet onde prova a relação da sequência de Fibonacci com o número de ouro e para isso usamos conceitos de Álgebra Linear. Abordaremos também a fórmula generalizada e a função geratriz da sequência de Fibonacci. Da teoria para a prática, são dadas algumas aplicações da sequência de Fibonacci, do número de ouro, do retângulo áureo e da espiral logarítmica.

Palavras chave: Sequência de Fibonacci, Número de Ouro, Retângulo Áureo.

Abstract

The study was conducted with the aim of showing the story of Leonardo of Pisa, known as Fibonacci, showing their training and inclination mathematics. We will also show the history of the Fibonacci sequence, since the emergence of the problem of breeding rabbits until their connection with the gold number. Will present its definition, and some properties that will be useful later to demonstrate that a sequence obeys the law of formation of the Fibonacci sequence, then the terms of this sequence are written as a combination of the terms of the Fibonacci sequence. Demonstrate the formula of Binet test where the ratio of the Fibonacci sequence with the number of gold, for this we use concepts from linear algebra. We will also explore the generalized formula and generating function of the Fibonacci sequence. From theory to practice, are given some applications of the Fibonacci sequence, the golden number, the golden rectangle and the logarithmic spiral.

Key words: *Fibonacci Sequence, Number of Gold, Golden Rectangle.*

Lista de Figuras

Sumário

Capítulo 1

Introdução Histórica

Leonardo Pisano ou Leonardo de Pisa, mais conhecido como Fibonacci (filius Bonacci, ou seja, filho de Bonacci) nasceu em Pisa na Toscânia (Itália) por volta de 1175, e ficou conhecido como Leonardo Fibonacci, devido ao fato de Fibonacci ser um diminutivo de fillius Bonacci, foi um importante matemático italiano, escritor do livro Liber Abacci (livro do Ábaco), em 1202, e grande responsável pela expansão dos algarismos hindu arábicos na Europa. No início do século XII, Pisa era um dos grandes centros comerciais italianos, tais como Gênova e Veneza, e tinha vários entrepostos comerciais espalhados pelos portos do Mediterrâneo.

O pai de Leonardo ocupou o lugar de chefe de um desses entrepostos, no norte da costa da África (Bugia, atualmente Bejaia na Argélia), foi lá que Leonardo iniciou os seus estudos de matemática com professores islâmicos. E devido ao trabalho de seu pai nos portos do Mediterrâneo, é que Fibonacci aprendeu desde cedo sobre o mundo do comércio e diversas técnicas matemáticas, técnicas essas ainda desconhecidas pelo povo europeu, desenvolvidas pelos matemáticos do Oriente. Através do contato com a cultura oriental, conheceu os algarismos arábicos e, pela simplicidade e praticidade deles, optou por adotá-los em sua obra Liber Abacci (Livro de cálculo), um tratado de aritmética e álgebra elementar, onde faz referências ao seu uso. Durante suas viagens pelo Mediterrâneo acumulou conhecimentos e estudou diversos problemas de Teoria dos Números, entre eles, o problema do Resto Chinês e o problema dos Coelhos.

O Liber Abacci (o Livro do Ábaco ou do Cálculo) foi escrito por Fibonacci em 1202, e foi baseado na aritmética e "Álgebra" que Fibonacci aprendeu durante as suas viagens pelo

Mediterrâneo. Em 1228 o livro foi de novo publicado após uma revisão.

Entre os inúmeros problemas ali propostos um foi o responsável pela introdução da Sequência de Fibonacci e dos Números de Fibonacci. Estamos falando do problema dos coelhos: este problema é conhecido por relacionar a quantidade de pares de coelhos ao longo dos meses de um ano com os números presentes na sequência de Fibonacci. Além deste problema, a sequência possui propriedades interessantes estudadas pela Teoria dos Números, além de aplicações a fenômenos naturais, como na árvore genealógica das abelhas ou ramificações dos galhos de uma árvore. Nestes casos, o que se observa é a constante presença do Número de Ouro, definido como o limite da razão entre dois termos consecutivos da sequência.

Capítulo 2

A Sequência de Fibonacci

Neste capítulo abordaremos o problema dos coelhos, o problema mais famoso, entre todos tratados por Fibonacci. Este problema está relacionado a uma importante descoberta da matemática: A Sequência de Fibonacci.

Depois faremos um estudo e uma verificação dessa sequência na árvore genealógica das abelhas.

Mais a frente, mostraremos que os números de Fibonacci podem ser usados para caracterizar diversas propriedades na natureza.

Mostraremos também que a sequência de Fibonacci é uma sequência recursiva e que possui uma fórmula que nos permitirá determinar qualquer termo dessa sequência, por outro lado essa sequência possui uma função geratriz que possibilita também encontrar qualquer termo dessa sequência.

Em seguida viajaremos um pouco na história do número de ouro, analisando a sua relação com esta sequência.

2.1 O problema dos pares de coelhos

No início do século XIII, Fibonacci visitou uma fazenda onde havia uma criação de coelhos e pôs-se a refletir sobre a reprodução rápida desses animais.

Dentre os problemas contidos no Liber Abacci, destaca-se o conhecido "problema dos coelhos", criado por Fibonacci para ilustrar os termos de sua sequência.

"Um homem pôs um par de coelhos num lugar cercado por todos os lados por um muro. Quantos pares de coelhos podem ser gerados a partir desse par em um ano se, supostamente, todo mês cada par dá à luz a um novo par, que é fértil a partir do segundo mês."

Este problema sugere uma situação fictícia, onde os coelhos são colocados numa área em que nenhum coelho, externo ou interno, pode entrar ou sair do cercado; os coelhos não morrem de velhice, fome ou doença.

Para que um par de filhotes possa procriar, é necessário que se passe um mês após o seu nascimento e cada par de coelhos dá a luz a um único par de filhotes a cada mês, que estarão aptos a procriar no próximo mês.

Ao fixar o primeiro mês como sendo o início do processo, teremos neste mesmo mês, um par de coelhos filhotes. Após o primeiro mês, esse par de coelhos já será adulto e estará apto a se reproduzir.

Considerando-se que um par de coelhos adulto produz um novo par a cada mês, teremos no início do terceiro mês dois pares de coelhos, sendo esses um adulto e outro filhote.

No início do quarto mês, o par adulto terá produzido novamente um par de coelhos filhotes, enquanto que o outro par de filhotes completará um mês de vida e ainda não estará apto a se reproduzir. Assim, neste mês existiram três pares de coelhos, sendo um par adulto, um par de filhotes com um mês de idade (agora adulto) e outro par de filhotes recém-nascido.

No início do quinto mês, os dois pares de coelhos adultos, cada um produzirá um novo par de coelhos filhotes e o outro par de filhotes completará um mês de vida tornando-se adulto. Logo, existiram neste mês cinco pares de coelhos, sendo dois pares adultos, um par de filhotes com um mês de vida (agora adulto) e dois pares de filhotes recém-nascidos.

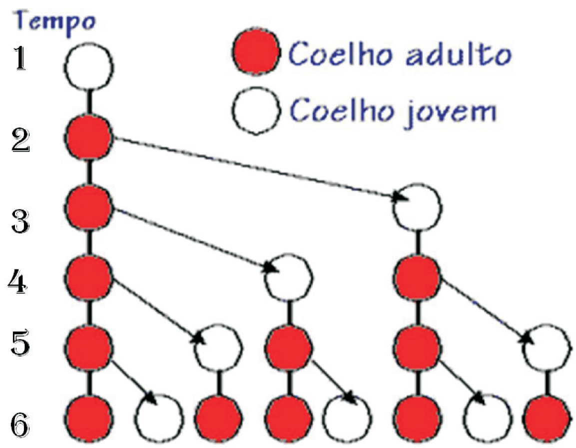

Figura 2.1: Crescimento da população de coelhos

Notemos que no próximo mês, o sexto, o número de pares de coelhos será a soma do número de pares de coelhos do mês atual, mais o número de pares de coelhos do mês anterior, pois, serão estes que irão contribuir com o acréscimo do número de coelhos para o próximo mês, já que quando chegar o sexto mês estarão aptos a procriar.

Logo, o sexto mês terá oito pares de coelhos: os cinco pares presentes no quinto mês, mais três pares de filhotes, dois pares gerados pelo par inicial e o outro pelo primeiro par de filhotes que o par inicial teve. A figura abaixo ilustra os primeiros sete meses.
Colocando os números em uma tabela, temos que ao longo de um ano o número de pares de coelhos será 144.

Mês	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Número de pares	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

Obtendo assim a famosa Sequência de Fibonacci, cujos primeiros termos são:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \ldots.$$

Se quisermos, podemos também examinar somente o número de pares de coelhos adultos em um determinado mês, e podemos observar que esse número é formado também pela soma dos pares de coelhos adultos dos dois meses anteriores, e a mesma experiência vale para os pares de coelhos filhotes. No século XIX essa sequência foi devidamente chamada de *sequência de Fibonacci* pelo matemático francês Edouard Lucas (1842-1891).
Podemos representar essa sequência por:

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \text{ com } n \in \mathbb{N} \text{ e } F_1 = F_2 = 1.$$

Essa notação foi introduzida em 1634 pelo Matemático Albert Girard.
A sequência de Fibonacci é definida recursivamente (isto é, por recorrência), ou seja, por intermédio de um termo que permite calcular qualquer termo em função do(s) antecessor(es) imediato(s).

2.2 A sequência de Fibonacci na árvore genealógica das abelhas

O plano genealógico das abelhas forma um padrão no tempo. Os ovos de abelhas operárias, quando não fertilizados, se desenvolvem em zangões por um processo conhecido como partenogênese.
Consequentemente, cada zangão não tem pai, mas uma mãe (e um avô por parte materna).

Uma abelha fêmea, no entanto, possui pai e mãe.

Um zangão, assim, tem uma "mãe", dois avós (os pais da mãe), três bisavós (os pais da sua avó e um do seu avô), cinco tataravôs (dois para cada bisavós e um para seu bisavô), e assim por diante.

Os números dessa árvore genealógica,

$$1, 1, 2, 3, 5, \ldots,$$

formam desta maneira, a Sequência de Fibonacci que nos que permite calcular o número de ancestrais de um zangão n gerações atrás.

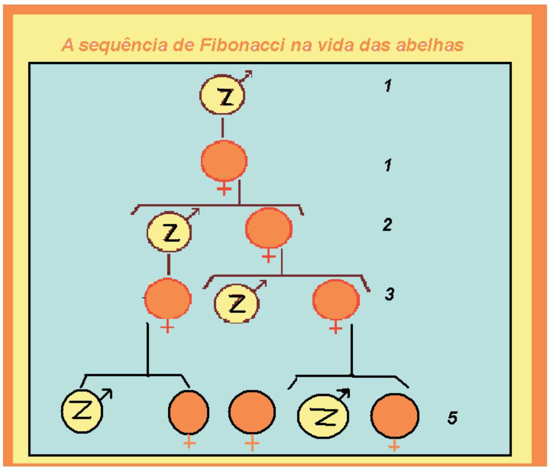

Figura 2.2: Árvore genealógica de um zangão

Considerando F_n o número de antepassados fêmeas e M_n o número de antepassados machos da geração n, tem-se:

$$F_{n+1} = F_n + M_n,$$

porque, cada macho ou fêmea tem uma mãe e

$$M_{n+1} = F_n,$$

pois, só as fêmeas têm pai. A cada geração n o número de antepassados, o qual será denotado por U_n, é a soma dos zângãos e das abelhas fêmeas, logo:

$$U_n = F_n + M_n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}^*.$$

Resumindo as três propriedades anteriores, obtemos:

$$U_{n+1} = F_{n+1} + M_{n+1} = F_n + F_n + M_n = U_n + F_n = U_n + U_{n-1},$$

logo:

$$U_{n+1} = U_n + U_{n-1}.$$

Portanto, cada termo é a soma dos dois anteriores, logo a sucessão do número de antepassados em cada geração é uma sucessão de Fibonacci.

2.3 A sequência de Fibonacci nos ramos e troncos de plantas

No nosso mundo, existe um número aproximado de 250.000 espécies de plantas superiores (aquelas que nos são mais familiares), com raízes, caules, folhas e flores. A estrutura detalhada das folhas, as formas, o tamanho e as cores das flores nestas diversas espécies apresentam uma formidável diversidade, um espetáculo de beleza e inventiva variedade. Subjacente a essa diversidade, no entanto, observa-se um surpreendente grau de ordem. Apesar da profusão de formas de folhas nas plantas superiores, elas se distribuem ao longo de uma haste ou tronco de acordo com apenas algumas maneiras básicas.
Os números de Fibonacci ligam-se facilmente à natureza. É possível encontrá-los no arranjo das folhas do ramo de uma planta, nas copas das árvores ou até mesmo no número de pétalas das flores.
Certas plantas mostram os números de Fibonacci no crescimento de seus galhos. Suponhamos que nasça um novo broto de um galho a cada mês, sendo que um broto leva dois meses para produzir o seu primeiro broto. Existem várias plantas cujo crescimento se parecem com o descrito aqui. A planta *Achillea Ptarmica* possui estas características.

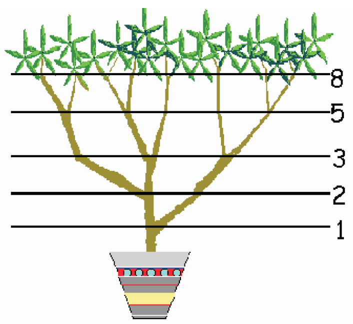

Figura 2.3: Representação da Achillea Ptarmica

2.3.1 Arranjo das folhas

Os arranjos das folhas de algumas plantas em torno do caule são números de Fibonacci. Com este arranjo, todas as folhas conseguem apanhar os raios solares de igual forma. Quando chove, o escoamento da água torna-se também mais fácil.

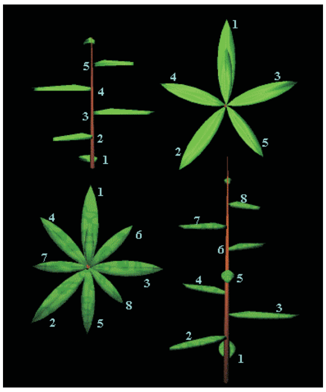

Figura 2.4: Arranjo das folhas

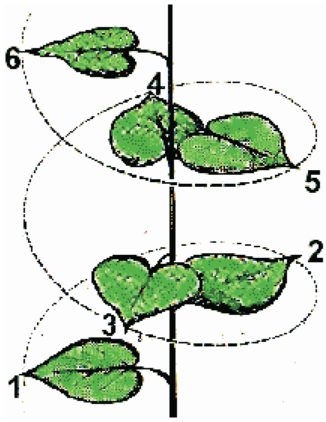

Figura 2.5: Arranjo das folhas

Na figura acima, podemos contar as folhas, seguindo-as pela ordem que aparecem, até encontrar uma folha exatamente na vertical da primeira.
Na planta do topo contamos três rotações no sentido horário, antes de encontrarmos a folha na mesma direção da primeira. Passamos por cinco folhas, até que isso aconteça.
Se contarmos no sentido anti-horário, precisamos de duas rotações. Os algarismos 2, 3 e 5 são como vimos números da sucessão de Fibonacci. Podemos escrever então 3/5 de volta por folha.
Na outra planta, para encontrarmos a folha na mesma direção da primeira tem de se fazer cinco rotações no sentido horário. Passamos por oito folhas até que isso aconteça. Se contarmos no sentido anti-horário, precisamos de três rotações. Os algarismos 3, 5 e 8 são como vimos números da sucessão de Fibonacci. De igual modo podemos escrever 5/8 de volta por folha.

2.4 Fórmula generalizada da Sequência de Fibonacci

Devido à sequência de Fibonacci ser uma sequência recursiva é possível determinar uma fórmula capaz de encontrar o valor de qualquer número Fibonacci, F_n, se seu lugar na sequência, n, for conhecido.

Esta propriedade nos garante que para obter todas as soluções da equação recursiva de Fibonacci:

$$F_{n+1} = F_{n-1} + F_n,$$

válida para todo inteiro $n > 1$, basta obter quaisquer duas soluções não proporcionais, assim pela propriedade linear da multiplicação por escalar, podemos escolher uma sequência de Fibonacci cujo primeiro termo seja igual a 1.

Vamos considerar então a sequência W_n que seja uma progressão geométrica com $W_1 = 1$ e a razão não nula q, isto é:

$$W_n = q^{n-1}.$$

Para que esta sequência seja de Fibonacci, devemos ter que:

$$W_{n-1} + W_n = W_{n+1}.$$

Ou seja,

$$q^{n-2} + q^{n-1} = q^n.$$

Cuja equação característica é

$$1 + q = q^2$$

Resolvendo esta equação do segundo grau, obtemos:

$$q_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad q_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

que são as raízes da equação característica.

Observe que:

$$q_1 + q_2 = 1 \quad \text{e} \quad q_1 \cdot q_2 = -1$$

Para cada raiz, obtemos uma sequência de Fibonacci, logo podemos construir $\{V_n\}$ e $\{W_n\}$ através de:

$$V_n = q_1^{n-1} \quad \text{e} \quad W_n = q_2^{n-1}.$$

Logo, U_n pode ser escrita como combinação linear de $\{V_n\}$ e $\{W_n\}$, isto é:

$$U_n = a \cdot V_n + b \cdot W_n = a \cdot \left[\frac{(1+\sqrt{5})}{2}\right]^{n-1} + b \cdot \left[\frac{(1-\sqrt{5})}{2}\right]^{n-1}$$

E esta é a forma mais geral possível para uma sequência de Fibonacci, logo se tomarmos em particular:

$$a + b = 1 \quad \text{e} \quad a \cdot q_1 + b \cdot q_2 = 1.$$

Teremos:

$$a = \frac{(1+\sqrt{5})}{2 \cdot \sqrt{5}} \quad \text{e} \quad b = -\frac{(1-\sqrt{5})}{2 \cdot \sqrt{5}}, \tag{2.1}$$

e substituindo na expressão de U_n, obtemos uma fórmula que torna possível determinar qualquer termo da sequência, sem a necessidade de conhecermos os termos anteriores.
Esta fórmula foi descoberta em meados do século XIX, pelo matemático francês Phillipe Marie Binet (1786-1856), e ficou conhecida como a *Fórmula de Binet.*

$$U_n = a \cdot \left[\frac{(1+\sqrt{5})}{2}\right]^{n-1} + b \cdot \left[\frac{(1-\sqrt{5})}{2}\right]^{n-1} \tag{2.2}$$

Substituindo (2.1) em (2.2), obtemos:

$$U_n = \frac{(1+\sqrt{5})}{2 \cdot \sqrt{5}} \left[\frac{(1+\sqrt{5})}{2}\right]^{n-1} - \frac{(1-\sqrt{5})}{2 \cdot \sqrt{5}} \left[\frac{(1-\sqrt{5})}{2}\right]^{n-1} \Rightarrow$$

$$U_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{(1+\sqrt{5})}{2} \left[\frac{2}{(1+\sqrt{5})}\right] \left[\frac{(1+\sqrt{5})}{2}\right]^{n} - \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{(1-\sqrt{5})}{2} \left[\frac{2}{(1-\sqrt{5})}\right] \left[\frac{(1-\sqrt{5})}{2}\right]^{n}.$$

Portanto,

$$U_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

2.5 Função geratriz dos números de Fibonacci

Um outro modo de se obter os termos da sequência de Fibonacci é construindo uma função geratriz através de uma série de potências.

Definição 2.5.1. *Se $c_0, c_1, c_2, \ldots$ são constantes e x uma variável, então uma série da forma*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$$

é chamada série de potências em x.

Dada a série de potências em x, com constantes $c_0, c_1, c_2, \ldots$ iguais aos termos da sequência de Fibonacci, ou seja, $c_0, c_1, c_2, \ldots$ iguais a 1, 1, 2, $\ldots$, respectivamente, convergente para $x \in (-\infty, \infty)$.
Temos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = 1 + 1x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + \cdots$$

ou

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} F_n x^n$$

como $F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$ para $n > 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} \left(F_{n-2} + F^{n-1}\right) \cdot x^n.$$

Separando o somatório e depois colocando x e x^2 em evidência, vem

$$1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1} x^n = 1 + x + x^2 \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2} x^{(n-2)} + x \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1} x^{(n-1)}.$$

Colocando $j = n - 2$ e $k = n - 1$

$$1 + x + x^2 \sum_{j=0}^{\infty} F_j x^j + x \sum_{n=0}^{\infty} \left(F_k x^k - 1\right) = 1 + x + x^2 \sum_{j=0}^{\infty} F_j x^j + x \sum_{k=0}^{\infty} F_k x^k - x$$

Logo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = 1 + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n + x \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n$$

Ao juntarmos os somatórios, temos que

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n \cdot \left(1 - x^2 - x\right)$$

Como

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = \frac{1}{(1 - x^2 - x)}$$

Chegamos que a função geradora pode ser escrita como

$$f(x) = \frac{1}{(1 - x^2 - x)}$$

Proposição 2.5.1. *Seja* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n$, *para* $x \in (-\infty, \infty)$ *temos que* $F_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

Prova: Como

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = F_0 + F_1 x + F_2 x^2 + \cdots$$

temos que $f(0) = F_0$ e

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot F_n x^{(n-1)} = F_1 + \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot F_n x^{(n-1)}$$

$$f^{(2)}(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot (n-1) \cdot F_n x^{(n-2)} = 2 \cdot 1 \cdot F_2 + \sum_{n=3}^{\infty} F_n x^n n \cdot (n-1) \cdot F_n x^{(n-2)}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n \cdot (n-1) \ldots (n-(k-1)) \cdot F_n \cdot x^{(n-k)}$$

Logo

$$f^{(k)}(x) = k \cdot (k-1) \ldots (k-(k-1)) \cdot F_k + \sum_{n=k+1}^{\infty} n - (n-1) \ldots (n-(k-1)) \cdot F_n \cdot x^{(n-k)}$$

e

Assim, $f^{(k)}(0) = k! F_n$ ou

$$F_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

Portanto, para todo $n \geq 1$ temos

$$F_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Assim, um outro modo de encontrar um termo qualquer da sequência de Fibonacci pode ser dado por

$$F_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

sendo $f(x) = \dfrac{1}{(1 - x^2 - x)}$ ■

Assim, supondo que se deseja conhecer o termo de posição 2, basta fazer:

$$F_2 = \frac{f^{(2)}(0)}{2!}.$$

Capítulo 3

O número de ouro

O número de ouro é um dos números irracionais mais misterioso e enigmático. Símbolo da proporcionalidade, ele aparece na natureza, nas grandes construções realizadas pelos homens, na música e na arte.

O *número de ouro,* também chamado de *proporção áurea, razão de ouro ou número áureo* é representado pela letra ϕ, em homenagem a *Fídias (Phídeas)*, famoso escultor grego, por ter usado a proporção de ouro em muitos dos seus trabalhos e é definido por:

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

A contribuição de Fibonacci para o número de ouro está relacionada com a solução do problema dos coelhos publicado no seu livro Liber Abacci.

É que as sucessivas razões entre um número da sequência de Fibonacci e o que o antecede vão-se aproximando do número de ouro.

Outra forma de ver a forte ligação do número de ouro é observar a expressão

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right],$$

do termo geral da sequência de Fibonacci.

O número de ouro é considerado como símbolo da harmonia e beleza, e podemos encontra-lo tanto nas pirâmides ou papiros do Egito, como em obras de arte de Botticelli, Leonardo da Vinci e Salvador Dalí.

3.1 Fibonacci e o número de ouro

Nesta seção veremos algumas propriedades do número de ouro. Também relacionaremos a sequência de Fibonacci com este número.

Proposição 3.1. *A razão entre dois termos consecutivos da sequência de Fibonacci tende ao número de ouro quando n vai para o infinito, ou seja,*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\phi$$

Prova: Temos pela fórmula generalizada que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)}{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right)}.$$

Assim,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}.$$

Como

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right),$$

podemos escrever

$$F_n\cdot\sqrt{5}=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\quad\text{e}\quad\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}=F_n\cdot\sqrt{5}+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}.$$

Ficando o limite

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(F_n\cdot\sqrt{5}+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right)-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}{F_n\cdot\sqrt{5}}.$$

Fazendo a distributividade e colocando em evidência $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}$ obtemos:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}+\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\cdot\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right)}{F_n\cdot\sqrt{5}}$$

Logo,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)+\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}{F_n}. \tag{3.1}$$

Pela sequência de Fibonacci, temos que $F_n \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}$. Assim,

$$\left| \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{F_n} \right| \leq \left| \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right|.$$

Como,

$$\lim_{n\to\infty} \left| \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right| = 0,$$

pois,

$$\left| \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right| < 1.$$

Temos, pelo Teorema do Confronto que

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{F_n} \right| = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{F_n} = 0.$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{F_n} = 0. \tag{3.2}$$

Portanto, de (3.1) e(3.2), obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

■

3.2 O retângulo áureo e sua espiral

Os números de Fibonacci possuem uma ocorrência considerável na natureza. Na arte e na arquitetura, o seu emprego tem sido bastante recorrente. Para elucidar essa afirmação, é oportuno o conhecimento do *retângulo áureo.*

Vamos construir um conjunto de retângulos usando os números de Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, e 34 que nos levam a alguns *designs* encontrados na natureza.

Começamos anexando dois quadrados com lado lado l medindo um unidade, isto é, $l = 1$, teremos um retângulo 2x1, sendo o lado maior igual à soma dos lados dos quadrados anteriores.

Anexamos agora outro quadrado com lado $l = 2$ (o maior lado do retângulo 2x1) e teremos um retângulo 3x2.

Continuamos a anexar quadrados com lados iguais ao maior dos comprimentos dos retângulos obtidos no passo anterior. A sequência dos lados dos próximos quadrados são:

$$3, 5, 8, 13, \ldots,$$

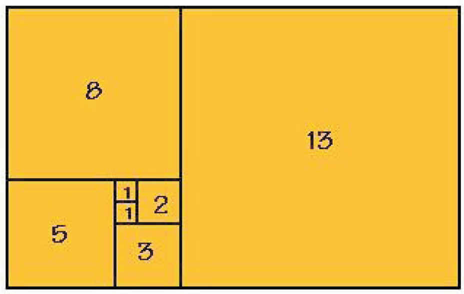

Figura 3.1: Retângulo áureo

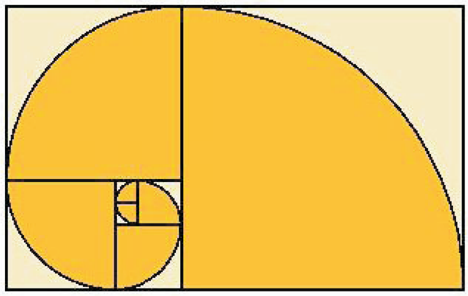

Figura 3.2: A partir dos lados do Retângulo Áureo

que é a sequência de Fibonacci.

Com um compasso, tracemos quartos de circunferências nos quadrados de lado $l = 13,\ l = 8,\ l = 5,\ l = 3,\ l = 2,\ l = 1 \quad \text{e} \quad l = 1.$

Considerando as concordâncias dessas curvas, obteremos uma espiral como a que aparece na figura, chamada *espiral dourada*.

3.3 A espiral logarítmica

A Espiral Dourada ou Espiral Áurea é um exemplo da Razão Áurea na natureza, conhecida também como *espiral logarítmica*, Jacques Bernoulli associou-a com a Razão Áurea, o nome vem do princípio que o raio da espiral aumenta entre os rolamentos conforme nos afastamos do centro sem alterar sua forma, característica conhecida como auto similaridade.

No mínimo essa espiral nos deixa com um sentimento de curiosidade em saber como as coisas da natureza se formam dessa maneira. A figura a seguir representa a Espiral Logarítmica.

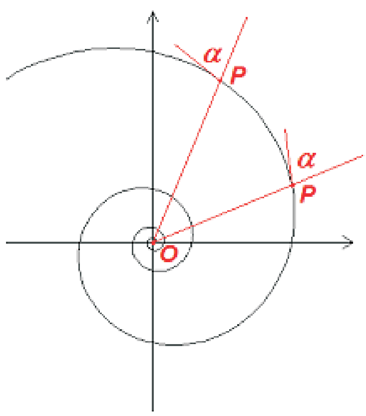

Figura 3.3: Espiral logarítmica

Essa Espiral Logarítmica também é conhecida como Espiral Equiangular, nome dado pelo matemático e filósofo René Descartes (1596-1650) em 1638.
Ao traçar uma reta do foco (ponto inicial da espiral) até qualquer ponto da curva teremos sempre o mesmo ângulo, essa propriedade só pode ser obtida na Espiral Logarítmica.

3.4 O número de ouro na natureza

A regularidade com que ϕ aparece na natureza é algo surpreendente. Animais, plantas, o homem, todos obedecem a uma ordem que os levam à razão de ouro. No que segue veremos alguns exemplos.

3.4.1 O Nautilus Marinho

O Nautilus é um molusco que vive no sudoeste do oceano pacífico. O nautilus é um dos seres vivos que apresenta a razão áurea em seu desenvolvimento, sendo assim chamado de Espiral de Ouro.
O nautilus possui uma concha de estrutura espiralada. Esta espiral pode ser construída aplicando-se a sequência de Fibonacci como visto anteriormente, na formação de uma série de quadrados que, unidos, formam um retângulo áureo (rever a figura anterior se necessário).

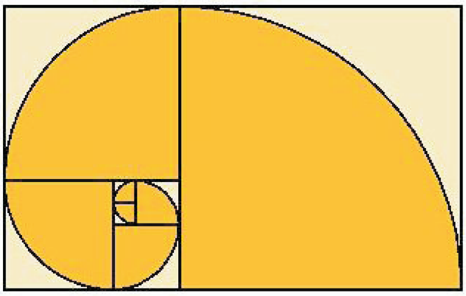

Figura 3.4: Espiral traçada pelos quadrados do retângulo áureo

Figura 3.5: Nautilus Marinho

3.4.2 Na flor de girassol

A natureza “arrumou” as sementes do girassol sem intervalos, na forma mais eficiente possível, formando espirais logarítmicas que tanto curvam para a esquerda como para a direita.

O curioso é que os números de espirais em cada direção são (quase sempre) números vizinhos na sequência de Fibonacci. Os raios destas espirais variam de espécie para espécie.
Nos arranjos mais comuns (por exemplo, na flor de girassol ou de margarida ou, ainda, nos pinhões), a visão é atraída para padrões notáveis que unem cada elemento ao vizinho mais próximo, formando, assim, as espirais.

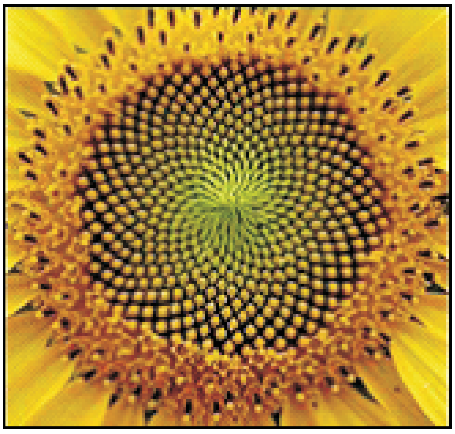

Figura 3.6: Girassol

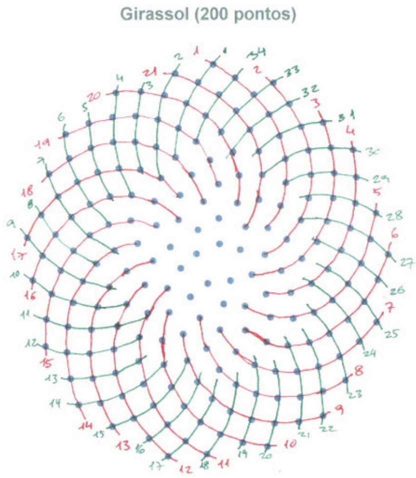

Figura 3.7: Espirais da flor de girassol

Observe que a superfície é totalmente coberta com um número i de espirais "paralelas", orientadas numa direção, e um número j, orientada na outra.
Chamemos estas espirais de "aparentes", uma vez que sua aparência é facilmente percebida pela nossa visão.
Todos os padrões obtidos apresentam espirais com um dado conjunto de números de *parastíqueos* (i, j). Parastíqueos (parastichies) é a denominação botânica para essas espirais aparentes ao olho humano.
O mais surpreendente é que (i, j), são quase sempre dois números consecutivos da série de Fibonacci,

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots.$$

Como, vimos anteriormente, cada novo termo da sequência de Fibonocci é a soma dos dois precedentes.

3.4.3 O corpo humano

Sabemos que para os gregos antigos, uma pessoa seria considerada bela, se possuísse um padrão relacionado com o número 1,618.
Uma das áreas que Leonardo da Vinci estudou foi às proporções do corpo humano e aqui uma vez mais temos a razão de ouro.
Em seus trabalhos relacionados à anatomia, Da Vinci se preocupou com os sistemas internos do corpo humano.
Leonardo da Vinci era um gênio de pensamento original que usou exaustivamente os seus conhecimentos de matemática, principalmente o número de ouro em suas obras de arte.
O Homem Vitruviano é um desenho famoso que acompanhava as notas que Leonardo da Vinci fez ao redor do ano 1490 num dos seus diários.
Descreve uma figura masculina desnuda separadamente e simultaneamente em duas posições sobrepostas com os braços inscritos num círculo e num quadrado. A cabeça é calculada como sendo um décimo da altura total.

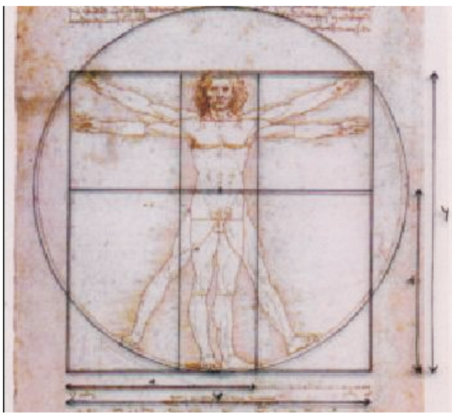

Figura 3.8: O Homem Vitruviano

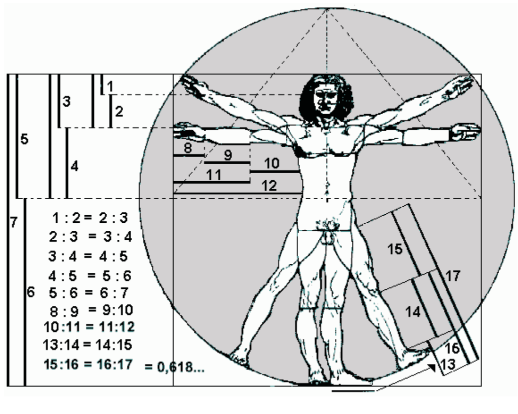

Figura 3.9: O Homem Vitruviano e suas proporções

O desenho atualmente faz parte da coleção da Gallerie dell'Accademia (Galeria da Academia) em Veneza, Itália.
Examinando o desenho, pode ser notado que a combinação das posições dos braços e pernas forma quatro posturas diferentes.
As posições com os braços em cruz e os pés são inscritas juntas no quadrado. Por outro lado, a posição superior dos braços e das pernas é inscrita no círculo. Isto ilustra o princípio que na mudança entre as duas posições, o centro aparente da figura parece se mover, mas, de fato, o

umbigo da figura, que é o verdadeiro centro de gravidade, permanece imóvel.
O Homem Vitruviano é baseado numa famosa passagem do arquiteto romano Marcus Vitruvius Pollio, em que ele descreve as proporções do corpo humano:

- Um palmo é a largura de quatro dedos
- Um pé é a largura de quatro palmos
- Um antebraço é a largura de seis palmos
- A altura de um homem é quatro antebraços (24 palmos)
- Um passo é quatro antebraços
- A longitude dos braços estendidos de um homem é igual à altura dele
- A distância entre o nascimento do cabelo e o queixo é um décimo da altura de um homem
- A distância do topo da cabeça para o fundo do queixo é um oitavo da altura de um homem
- A distância do nascimento do cabelo para o topo do peito é um sétimo da altura de um homem
- A distância do topo da cabeça para os mamilos é um quarto da altura de um homem
- A largura máxima dos ombros é um quarto da altura de um homem
- A distância do cotovelo para o fim da mão é um quinto da altura de um homem
- A distância do cotovelo para a axila é um oitavo da altura de um homem
- A longitude da mão é um décimo da altura de um homem
- A distância do fundo do queixo para o nariz é um terço da longitude da face
- A distância do nascimento do cabelo para as sobrancelhas é um terço da longitude da face
- A altura da orelha é um terço da longitude da face

O redescobrimento das proporções matemáticas do corpo humano no século XV por Leonardo e os outros é considerado uma das grandes realizações que conduzem ao Renascimento italiano. O desenho é considerado um símbolo perfeito da simetria do corpo humano e um marco do antropocentrismo. Um símbolo da interconexão do homem com o universo.
O estudo ficou celebrizado como *"Homem Vitruviano"*, sendo aceito como símbolo universal da humanidade. Essa ilustração do Leonardo Da Vinci é usada como referencia estética de simetria e proporção no mundo todo. O desenho e o texto são considerados o "Cânone das Proporções".
É interessante observar que a área total do círculo é idêntica à área total do quadrado e este desenho pode ser considerado um algoritmo matemático para calcular o valor do número irracional $\phi = 1,618\ldots$

Capítulo 4

Propriedades dos números de Fibonacci

"Nenhuma investigação humana pode se considerar verdadeira ciência se não passar por demonstrações matemáticas."
Leonardo da Vinci

Neste capítulo mostraremos algumas propriedades interessantes dos números de Fibonacci.
Seja a sequência de Fibonacci

$$F_0, F_1, F_2, \ldots, F_n \quad \text{com} \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad F_0 = F_1 = 1.$$

Temos as seguinte propriedades:

Proposição 4.1. *A soma dos n primeiros números da sequência de Fibonacci é dada por*

$$F_0 + F_1 + \ldots + F_{n-1} = F_{n+1} - 1$$

Prova: Por Indução Finita, provamos ser válida para o primeiro termo $n = 1$

$$F_0 = 1 = 2 - 1 = F_2 - 1$$

supondo ser verdadeira para $n = k$

$$F_0 + F_1 + \ldots + F_k = F_{k+1} - 1$$

devemos provar para $n = k + 1$. De fato,

$$(F_0 + F_1 \ldots + F_{k-2}) + F_k = (F_{k+1} - 1) + F_k = F_{k+2} - 1$$

■

Proposição 4.2. *A soma dos termos da sequência de índices ímpares pode ser dada por*

$$F_1 + F_3 + F_5 \ldots + F_{2n} - 1 = F_{2n} - 1$$

com $n > 0$.

Prova: A demonstração é feita por indução finita. Provamos a fórmula ser válida para o primeiro termo $n = 1$. Temos,

$$F_1 = 1 = 2 - 1 = F_2 - 1.$$

Supondo ser verdadeira para $n = k$, isto é,

$$F_1 + F_3 + \ldots + F_{2k} - 1$$

provemos que vale para $n = k + 1$.

Usando a hipótese de indução, podemos escrever:

$$\begin{aligned} F_1 + F_3 + F_{2k-1} + F_{2(k+1)-1} &= (F_1 + F_3 + F_{2k-1}) + F_{2k+2-1} \\ &= (F_{2k} - 1) + F_{2k+1} \\ &= F_{2k+2} - 1 \\ &= F_{2(k+1)} - 1, \end{aligned}$$

o que mostra a validade da fórmula para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Proposição 4.3. *A soma dos termos da sequência de índices pares pode ser dada por*

$$F_0 + F_2 + F_4 + \ldots + F_{2n} = F_{2n+1}$$

Prova: A prova é feita por indução finita. Provamos que a fórmula é válida para o primeiro termo $n = 0$,

$$F_0 = 1 = F_{2 \cdot 0+1} = F_1.$$

Supondo verdadeira para $n = k$,

$$F_0 + F_2 + F_4 + \ldots + F_{2k} = F_{2k+1}$$

provemos sua validade para $n = k + 1$. De fato, usando a hipótese de indução, temos

$$\begin{aligned} F_0 + F_2 + F_{2k} + F_{2(k+1)} &= (F_{2k+1}) + F_{2k+2} \\ &= (F_{2k+3}) \\ &= F_{2(k+1)+1}, \end{aligned}$$

o que mostra a validade da fórmula para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Proposição 4.4. *A soma dos quadrados dos termos da sequência, pode ser dada por*

$$F_0^2 + F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \ldots + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1}$$

Prova: A prova é por indução finita. Mostraremos que a fórmula é válida para o primeiro termo $n = 0$. Temos

$$F_0 = 1 = 1 \cdot 1 = F_0 \cdot F_1.$$

Suponha verdadeira para $n = k$, isto é,

$$F_0^2 + F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 \ldots + F_k^2 = F_k \cdot F_{k+1}.$$

Provaremos sua validade para $n = k + 1$. Usando a hipótese de indução, obtemos

$$\begin{aligned} F_0^2 + F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 \ldots + F_k^2 + F_{k+1}^2 &= F_k \cdot F_{k+1} + F_{k+1}^2 \\ &= F_{k+1} \cdot (F_k + F_{k+1}) \\ &= F_{k+1} \cdot F_{k+2}. \end{aligned}$$

Portanto, pelo princípio de indução finita, a proposição segue. ■

Definição 4.1. *Dados dois números inteiros a e b, dizemos que a e b são primos entre si se o único divisor comum entre eles for 1.*

Teorema 4.1. *Os números consecutivos de Fibonacci são primos entre si.*

Prova: Vamos supor por absurdo que F_n e F_{n+1} possuem um divisor inteiro $d > 1$ em comum, logo $F_n - F_{n+1} = F_{n-1}$ também é divisível por d.
Se tomarmos F_n e F_{n-1} e repetirmos o processo, teremos que F_{n-2} também será divisível por d.
Por Indução Finita sobre m podemos provar que se F_{n-m} e $F_{n-(m+1)}$ possuem um divisor d em comum, então $F_{n-(m+2)}$ também é divisível por d, sendo $m \leq n - 2$.

Temos que para $m = 0$ é verdade (mostrado acima).

Supondo verdade para $m = k$, temos

$$F_{n-k} - F_{n-(k+1)} = F_{n-(m+2)}$$

com d divisor de ambos os lados.

Temos que provar para $m = k + 1$

$$F_{n-(k+1)} - F_{n-(k+2)} = F_{n-(k+3)} = F_{n-((k+1)+2)}$$

Como o lado esquerdo, $F_{n-(k+1)}$ e $F_{n-(k+2)}$ são divisíveis por d, então o lado direito, $F_{n((k+1)+2)}$, também é divisível por d.

Assim, repetindo-se o processo várias vezes, teremos que F_0 é divisível por d, o que é absurdo, pois $F_0 = 1$ e $d > 1$.

Logo F_n e F_{n+1} são primos entre si. ■

Provaremos a seguir uma identidade útil sobre números de Fibonacci:

Proposição 4.5. $F_{m+n} = F_m F_{n-1} + F_{m+1} F_n \quad \forall m, n \in \mathbb{N}, n \geq 1.$

Prova: Provando por Indução Finita, sobre m temos que para $m = 1$

$$\begin{aligned} F_{n+2} &= F_1 F_{n-1} + F_2 F_n \\ &= F_{n-1} + 2F_n \\ &= (F_{n-1} + F_n) + F_n \\ &= F_{n+1} + F_n \end{aligned}$$

Logo,

$$F_{n+2} = F_{n+1} + 2F_n = F_1 F_{n+1} + F_2 F_n$$

Para $m = 2$, vem:

$$
\begin{aligned}
F_{n+3} &= F_2F_{n-1} + F_3F_n \\
&= 2F_{n-1} + 3F_n \\
&= F_{n-1} + F_{n-1} + F_n + F_n + F_n \\
&= (F_{n-1} + F_n) + (F_{n-1} + F_n) + F_n \\
&= F_{n+1} + F_{n+1} + F_n \\
&= F_{n+1} + F_{n+2}
\end{aligned}
$$

Logo,

$$F_{n+3} = F_2F_{n-1} + F_3F_n$$

Supondo verdadeiro para $m = k$

$$F_{k+n+1} = F_kF_{n-1} + F_{k+1}F_n$$

Temos que provar que vale para $m = k + 1$, como supomos verdadeiro até um certo ponto $m = k$, temos que pela hipótese indutiva a fórmula é válida para $m = k - 1$.
Assim,

$$
\begin{aligned}
F_{(k+1)+n+1} &= F_{k+n} + F_{k+n+1} \\
&= (F_{n-1}F_{n-k} + F_nF_k) + (F_kF_{n-1} + F_{k+1}F_n) \\
&= F_{n-1}(F_{k-1} + F_k) + F_n(F_k + F_{k+1}) \\
&= F_{n-1}F_{k+1} + F_nF_{k+2} \\
&= F_{n-1}F_{k+1} + F_nF_{(k+1)+1}
\end{aligned}
$$

■

Proposição 4.6. *A diferença entre os quadrados dos termos da sequência de Fibonacci cujos índices diferem em dois é também um número de Fibonacci.*

Prova: De acordo com a propriedade anterior, temos

$$F_{m+n+1} = F_mF_{n-1} + F_{m+1}F_n$$

e para o caso particular de $m = n$, obtemos:

$$\begin{aligned} F_{2n+1} &= F_n F_{n-1} + F_{n+1} F_n \\ &= F_n \left(F_{n-1} + F_{n+1} \right) \end{aligned}$$

Como

$$F_{n+1} = F_{n-1} + F_n \implies F_n = F_{n+1} - F_{n-1}$$

Temos

$$F_{2n+1} = \left(F_{n+1} - F_{n-1} \right) \cdot \left(F_{n+1} + F_{n-1} \right) = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2$$

■

Teorema 4.2. $mdc\,(F_m, F_n) = F_{mdc(m,n)}$, $\forall m, n \in \mathbb{N}$.

Prova: Observemos primeiro que $mdc\,(F_n, F_{n+1}) = 1$, $\forall m, n \in \mathbb{N}$. Isso vale para $n = 0$ pois $F_1 = 1$ e, por indução,

$$mdc\,(F_{n+1}, F_{n+2}) = mdc\,(F_{n+1}, F_{n+1} + F_n) = mdc\,(F_{n+1}, F_n) = 1$$

.

Além disso, se $m = 0$, $mdc\,(F_m, F_n) = mdc\,(0, F_n) = F_n = F_{mdc(m,n)}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Vamos então provar o fato acima por indução em m.
Suponha que a afirmação do enunciado seja válida para todo $m < k$ (onde $k \geq 2$ é um inteiro dado) e para todo $n \in \mathbb{N}$.
Queremos provar que ela vale para $m = k$ e para todo $n \in \mathbb{N}$, isto é, que $mdc\,(F_k, F_n) = F_{mdc(k,n)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
Note que, se $n < k$, $mdc\,(F_k, F_n) = mdc\,(F_n, F_k) = F_{mdc(F_n, F_k)} = F_{mdc(F_k, F_n)}$, por hipótese de indução. Já se $n \geq k$,
$F_n = F_{(n-k)+k} = F_{(n-k)} F_{(k-1)} + F_{(n-k+1)} F_k$, e logo
$mdc\,(F_k, F_n) = mdc\,\big(F_k, F_{(n-k)} F_{(k-1)} + F_{(n-k+1)} F_k\big) = mdc\,\big(F_k, F_{(n-k)} F_{(k-1)}\big) = mdc\,(F_k, F_{n-k})$,
pois $mdc\,(F_k, F_{k-1}) = F_{mdc(k,n-k)} = F_{mdc(k,n)}$ ■

Corolário 4.1. *Se* $m \geq 1$ *e* m *é um divisor de* n *então* F_m *divide* F_n*.*
Além disso, se $m \geq 3$ *vale a recíproca: se* F_m *divide* F_n *então* m *divide* n*.*

Referências Bibliográficas

[1] ALENCAR FILHO, Edgard de. Teoria Elementar dos Números. São Paulo: Nobel, 1981.

[2] AZEVEDO, Alberto. Sequências de Fibonacci. Revista do Professor de Matemática, São Paulo, n. 45, pág. 44-47, 2001.

[3] BOYER; Carl B.. História da matemática. São Paulo: Edgard Blücher Ltda., 1996. EVES, Howard. Introdução à história da matemática. Campinas: Unicamp, 2004.

[4] BROWN, Dan. O Código da Vinci. Rio de Janeiro: Sextante, 2004.

[5] CALLIOLI, Carlos A. DOMINGUES, Hygino H. COSTA, Roberto C. F. Álgebra Linear e Aplicações. São Paulo: Atual, 1990, 6ª ed. 352p.

[6] CARVALHO, João Pitombeira de. Um Problema de Fibonacci. Revista do Professor de Matemática, São Paulo, n. 17, pág. 04.

[7] EVES, Howard. Introdução à história da matemática. Campinas: Unicamp, 2004.

[8] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. Um curso de cálculo. 2 ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1987. v.1. 579 p.

[9] HUNTLEY, H. E. A Divina Proporção: um ensaio sobre a beleza da Matemática. Trad. De Luiz Carlos Ascênsio Nunes. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1985.

[10] LIMA, Elon Lages. Álgebra linear. 5 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2001. 357 p.

[11] LIMA, Elon Lages. et al. A Matemática do Ensino Médio, Vol. 2. Rio de janeiro: SBM, 2003.

[12] MARTINEZ, Fábio Brochero; et al. Teoria dos Números: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro. Rio de Janeiro: IMPA, 2011. 450p.

[13] VOROB'EV, N. N. Números de Fibonacci. Carlos Vega. (Trad.) Moscou: Editorial Mir Moscu, 1974. 114 p.