UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA

CAMPUS I CAMPINA GRANDE

CENTRO CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

ADEILMA DE FÁTIMA GUIMARÃES PEREIRA

A INTEGRAL DE RIEMANN E ALGUMAS APLICAÇÕES

CAMPINA GRANDE- PB

2014

ADEILMA DE FÁTIMA GUIMARÃES PEREIRA

A INTEGRAL DE RIEMANN E ALGUMAS APLICAÇÕES

Monografia apresentado no curso de Licenciatura em Matemática, da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento das exigências para a obtenção do título de Licenciada em Matemática

Orientadora: Me. Kátia Suzana Medeiros Graciano

CAMPINA GRANDE

2014

P436i Pereira, Adeilma de Fátima Guimarães.
A integral de Riemann e algumas aplicações [manuscrito] / Adeilma de Fátima Guimarães Pereira. - 2014.
72 p. : il. color.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2014.
"Orientação: Profa. Ma. Kátia Suzana Medeiros Graciano, Departamento de Matemática".

1.Cálculo integral. 2.Técnicas de integração. 3. Teorema fundamental do cálculo. I. Título.

21. ed. CDD 515.25

ADEILMA DE FÁTIMA GUIMARÃES PEREIRA

A INTEGRAL DE RIEMANN E ALGUMAS APLICAÇÕES

Aprovada em: 16/12/2014.

BANCA EXAMINADORA

Kátia Suzana Medeiros Graciano

Prof. Me. Kátia Suzana Medeiros Graciano (Orientador)

Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Maria Isabella Silva

Prof. Dr^a. Maria Isabella Silva

Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Luciana R. Freitas

Prof. Dr^a. Luciana Roze de Freitas

Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

DEDICATÓRIA

A Deus aquele que é digno de toda honra glória e louvor, aquele que durante toda minha jornada foi o meu grande professor, orientador e amigo. Sempre esteve ao meu lado me ajudando e me dando forças para enfrentar os desafíos. Em meio às dificuldades sempre me orientou a escolher os melhores caminhos, sua palavra que assim diz "Não to mandei eu? Sê forte e corajoso; não temas, nem te espantes, porque o Senhor, teu Deus, é contigo por onde quer que andares" (Josué 1-9), essa certeza foi a que me conduziu a chegar hoje até aqui.

AGRADECIMENTO

Aos meus pais Edmilson e Antônia, pelo apoio por muitas vezes terem abdicado de seus sonhos para fazer com que os meus tornassem realidade, a vocês o meu muito obrigado pelos vossos esforços de proporcionar-me um dos maiores bens intransferível que é o estudo.

Aos meus irmãos Andréa, Edilma, Edivânia, Ailson, pelo apoio e incentivo por estar sempre ao meu lado, a vocês meus queridos irmão meu muito obrigado.

Aos meus amigos Claudio, José Pereira, Jucileide, Wesklemyr e Tiago que estivemos juntos durante boa parte do curso, eles que muitas vezes abriram mão de suas tardes de folga para estudarmos juntos, sei que juntos passamos muitas lutas, mas, sabemos que não há vitória sem luta, e tudo o que passamos serviu de ensinamento para que hoje eu pudesse olhar pra vocês e dizer que valeu a pena todo o esforço, e que vocês fazem parte da minha família.

A Eliane Lins que com o seu bom humor tornava nossas aulas mais divertidas, vou levar pra sempre aquelas cenas em que você tomava o lápis de minha mão sempre que conseguia descobrir as questões que estávamos estudando.

A Dayse, Eliane Dias, Josiel, Luciana, Maria José, Tatiane, meus amigos de sala, foi muito bom estudar com vocês obrigado por fazer parte da minha história.

A Dona Marluce e Rita que sempre quando precisei delas estiveram prontas pra me ajudar, obrigado a vocês que muitas vezes cederam as suas casas para que pudéssemos estudar.

Aos professores do curso que contribuíram de maneira grandiosa para a minha formação.

A minha orientadora Ms. Kátia Suzana Medeiros Graciano pela compreensão, paciência e por suas valiosas orientações, a você meu muito obrigado.

Enfim agradeço a todos os que contribuíram direta ou indiretamente, para que o meu sonho se realizasse.

"A Matemática é o alfabeto que Deus usou para escrever o Universo”. (Galileu Galilei)

RESUMO

Nesse trabalho foi feito um estudo sobre o Cálculo Integral. Ao longo dele fizemos uma abordagem histórica, onde procuramos traçar as principais contribuições dadas por cada profissional nesse campo da matemática, para o desenvolvimento de seus métodos sempre buscando compreender como deu-se o processo de construção do mesmo. Acreditamos que dessa forma podemos contribuir com o trabalho de professores e ao mesmo tempo como a aprendizagem dos alunos. Tendo por objetivo desenvolver e compreender na prática algumas técnicas de integração, auxiliando os alunos como fonte de pesquisa para ampliar a capacidade de manipular fórmulas, conceitos e equações. Em cumprimento desse objetivo foram estudados os conceitos básicos de antiderivadas, as técnicas de integração por substituição e por partes, abordamos também o Teorema Fundamental do Cálculo, e as integrais definidas, bem como algumas aplicações, para que possamos identificar em situações do dia-a-dia a aplicabilidade desse conteúdo.

PALAVRAS- CHAVE: Cálculo Integral; Técnicas de integração; Aplicações.

ABSTRACT

In this, paper a study on the Integral Calculus. Along it made a historical approach, where we try to trace the major contributions made by each professional in the field of mathematics, to develop their methods always seeking to understand how took place the same construction process. We believe that this way we can contribute to the work of teachers and at the same time as student learning. With the objective to develop and understand in practice some integration techniques, helping students as a source of research to expand the ability to manipulate formulas, concepts and equations. In pursuance of this objective the basics of anti-derivatives were studied, integration techniques by substitution and by parts also approached the Fundamental Theorem of Calculus, and definite integrals and some applications, so we can identify in day-to situations -day the applicability of this content.

Key words: Integral Calculus; Integration techniques; Applications.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

O Cálculo Integral é ensinado em diversos cursos da graduação na área das ciências exatas, bem como na Matemática, na Física, na Engenharia entre outras. Visando melhor compreender os conceitos abordados nessa disciplina, nosso trabalho será desenvolvido como base na demonstração e exemplificação dos conteúdos e também como há uma ampla rede de aplicação, nos deteremos apenas na aplicação das integrais Definidas.

Esse trabalho cujo tema é “Aplicação da Integral” trará uma abordagem de conceitos, teoremas e algumas aplicações da integral com relação a sólidos de Revolução, aplicação na economia e na física. Os resultados serão obtidos no decorrer do trabalho, para que haja a compreensão dos assuntos abordados.

A escolha do referido tema justifica-se pelo fato desse assunto ser um dos mais temidos dentro da área das exatas, e por ser um conteúdo que não é abordado em séries anteriores, boa parte dos acadêmicos apresentam dificuldades, motivado por esse fato é que nosso trabalho será desenvolvido visando apresentar o conteúdo de maneira simples e com uma linguagem acessível ao aluno tornando assim o estudo do mesmo uma tarefa fascinante e prazerosa.

Os pilares fundamentais da nossa pesquisa serão o estudo das técnicas de integração por substituição, por partes bem como sua aplicação nas integrais definidas.

Iniciaremos com uma abordagem histórica, mostrando como ocorreu o processo evolutivo da integral, falaremos um pouco sobre Leibniz, sua vida, sua história e suas contribuições para o cálculo.

Em seguida exploraremos as antiderivadas, sua notação, as técnicas de integração por substituição e partes e faremos também a demonstração do Teorema Fundamental do Cálculo.

Para finalizar faremos algumas aplicações da integral definida, e uma aplicação na Economia e na física.

2. ABORDAGEM HISTÓRICA

O Cálculo Integral até chegar a nomenclatura que utilizamos hoje sofreu um processo de aperfeiçoamento muito grande, pois o mesmo surgiu da necessidade de resolver problemas de quadratura e cubatura, problemas esses que consistia em encontrar a área de uma região ou superfície tridimensional limitada pelo menos por uma curva.

As primeiras quadraturas foram utilizadas por Hipócrates de Chios (cerca de 440 A.C) quando encontrou a área de certas lúnulas. Mais tarde Antiphon (cerca de 430 A.C) achava que poderia encontrar a área de um círculo através de uma sequência infinita de polígonos, mas deparou-se com uma impossibilidade de seu método, como o mesmo dependia de uma sequência infinita de polígonos nunca pode ser concluída. Porém Antiphon tinha início de uma brilhante ideia, o então chamado método da exaustão que cerca de 200 anos depois viria a ser desenvolvido por Eudoxo (cerca de 370 A.C).

Um dos maiores matemáticos da antiguidade, Arquimedes (287-212 A.C) munido do método da Exaustão, procurou de maneira engenhosa encontrar a área de uma parábola, utilizando-se de uma aproximação feita engenhosamente por triângulos e o argumento de redução ao absurdo, com isso conseguiu rigorosamente provar o resultado e evitou qualquer problema que envolvesse infinito.

Arquimedes também utilizou o método da Exaustão para encontrar a área do círculo, conseguindo assim uma aproximação para o número π.

Dos séculos 9 a 13 matemáticos mulçumanos estudiosos de Arquimedes, mas, desconhecedores do método de Arquimedes para volumes de um conóide, desenvolveram suas próprias quadraturas.

Com o passar dos tempos e do modo como as coisas foram evoluindo, quando os europeus começaram a explorar o globo viu-se a necessidade de se ter um mapa que determinasse as distancias a serem trilhada sob a superfície da terra. Gerard Mercator (1512-1594) embora não tenha explicado seus critérios geométricos, desenvolveu sua projeção, tarefa essa que mais tarde foi assumida por Edward Wright (1561-1615) quando providência uma tabela com as distâncias ao longo das retas de rumos cujas distâncias seriam aproximações somando os produtos $(\sec f \ \ Df)$ onde f é latitude, ou seja, uma aproximação para integral de $\sec f$.

Johannes Kepler (1571-1630) em um de seus trabalhos procurou fazer aproximações para encontrar o volume de vários sólidos tridimensionais, mais para isso ele subdividiu o sólido em fatias muito finas, ou seja em cada caso a soma dessas fatias resultaria em uma aproximação do volume desejado.

Bonaventura Cavalieri (1598-1647) desenvolveu a teoria de indivisíveis, para isso Cavalieri pensou na área de uma região bidimensional como sendo um único número, resultado da coleção de "todas as retas".

Evangelista Torricelli (1608-1648) usou indivisíveis para provar quadraturas, o "Chifre de Gabriel" é uma cubatura que foi descoberta por Torricelli.

Pierre Fermat (1601-1665) utilizando o método da compressão desenvolveu uma técnica para encontrar as áreas sob cada uma das "Parábolas de ordem Superior" ($y = kx^n$, onde $k > 0$ é constante e $n = 2{,}3{,}4$), empregou também série geométrica para encontrar a área de uma curva ($y = kx^n$ para $n = -2, -3, -4$ ...), mas nunca pode estender esses métodos para "hipérboles de ordem superior"($y^m = kx^n$).

A formula geral para integral de parábolas de ordem superior tornou-se conhecida por volta de 1640, por Blaise Pascal, Gilles Personne de Roberval, René Descartes, Torricelli, Marin Mersenne e outros.

John Wallis (1616-1703) tratou a parábola, a elipse e a hipérbole como curvas plana, definidas por equações em duas variáveis, em vez de seções de um cone. Ele também estendeu a fórmula de quadratura para $y = k\,x^n$ em casos onde n era racional positivo, usando indivisíveis e raciocínio lógico por analogia.

As funções seno e cosseno e a quadratura das mesmas para o primeiro quadrante, foram plotadas pela primeira vez por Roberval e Pascal.

Isaac Newton (1642-1727) seguindo o mesmo raciocínio de James Gregory (1638-1675) pensou na área de uma região entre uma curva e o eixo horizontal como sendo uma variável, deste modo o extremo direito seria fixo mas o extremo esquerdo poderia variar. Esse modo de pensar lhe permitiu estender algumas fórmulas das quadraturas de Wallis e o levou ao Teorema Fundamental do Cálculo. As técnicas de integração por parte e substituição as quais utilizamos hoje, foram desenvolvidas por Newton, usando para isso o Teorema Fundamental do cálculo.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) via a curva como um polígono com infinitos lados, mas não se conteve somente nisso, tomou *y* como sendo uma ordenada da curva e *dx* a distância infinitesimal de uma abcissa para a próxima, então representou a área de uma figura pelas somas de todas os infinitesimais, limitadas pela ordenada e diferença das abcissas, e assim representou o cálculo da figura por $\int y\, dx$. Leibniz também representou a integral por “S” alongado que vem do latim *summa* e *d* do latim *diferentia* notação essa que permanece até hoje.

O termo integral como usamos hoje foi criado por Johann Bernoulli(1667-1748), mais foi primeiramente publicado por seu irmão mais velho Jakob Bernoulli(1654-1705), como consequência do Teorema fundamental do cálculo de Newton e Leibniz. Johann Bernoulli também desenvolveu procedimentos para calcular a integral de todas as funções racionais, o então chamado método das frações Parciais.

2.1 LEIBNIZ

Gottfried Wilhelm Von Leibniz filho do professor de Filosofia moral na Universidade de Leipzig, Friedrich Leibniz e Catharina Schmuck, nasceu no dia 1 de julho de 1646 em Leipzig, Alemanha, ingressou na escola aos sete anos de idade era autodidata aprendeu sozinho o latim e grego, e assim passou a frequentar a biblioteca de seu Pai, lugar onde teve acesso a várias leituras – Poetas, Juristas, Filósofos, Historiadores, Matemáticos e Teólogos.

Ingressou na Universidade aos 15 anos de idade e aos 21 anos já encontrava-se habilitado pra receber seu título de doutor em Direito, o que por opção sua foi recusado devido sua pouca idade, sendo assim deixou Leipzig e foi para a Universidade de Altdorf, onde obteve o doutorado defendendo uma tese cujo título era *De Casibus Perplexis In Jure*. Mais tarde foi chamado para integrar o corpo docente de Universidade de Altdorf, mas preferiu ingressar no serviço público.

Como representante governamental influente Leibniz teve a oportunidade de viajar muito durante toda sua vida. No ano de 1672 foi para Paris onde conheceu Huygens, o qual lhe sugeriu que se ele quisesse tornar-se um matemático a leitura do tratado de 1658. Em Janeiro de 1673 em uma visita a Londres fez amizade com membros da Royal Society, na mesma ocasião expôs a essa academia uma máquina de calcular à qual ele mesmo inventara, que por sua vez era mais versátil do que a de Pascal.

Em seu retorno a Paris em Abril de 1673 foi eleito membro da Royal Society. Dedicou-se ao estudo da Matemática, em especial à Geometria, iniciando uma série de estudos originais que por sua vez resultou no desenvolvimento do cálculo infinitesimal.

O primeiro trabalho sobre Cálculo Diferencial foi publicado por Leibniz em 1684 cujo título era *Nova mathodus pro maximis et minimis, itemque trangentibus, qua nec irrationales Moratur.*

Dois anos mais tarde publicou também no periódico *Acta Eruditorum*, um trabalho sobre Cálculo Integral. Esse trabalho comtempla problemas de quadraturas como um caso especial do método do inverso das Tangentes. Leibniz também generalizou o teorema do binômio em Teorema do Multinômio para expressões do tipo $(x + y + z)^n$. Ele também deu sua contribuição para o teorema da probabilidade e a análise combinatória.

Em Hanover Leibniz assumiu diversos cargos: foi engenheiro de minas, diplomata, conselheiro, historiador da corte.

Enfim dentre os muitos atributos de Leibniz destacou-se pela sua coragem e sua energia e disposição, os três papéis por ele desempenhados (cortesão, servidor público e o de Erudito) foram marcados por muita dedicação, esforço notório devido muitas das vezes ter que fazer suas refeições à mesa do trabalho e dormir muito pouco. Embora Leibniz fosse um homem que gostasse de ler o mesmo gostava também de se misturar com a pessoas em busca de aprender algo.

3. INTEGRAIS INDEFINIDAS E DEFINIDAS

3.1 ANTIDERIVADAS

Na matemática aplicada nos deparamos frequentemente com situações em que conhecemos a derivada de uma função e desejarmos encontrar a função que o originou. Podemos conhecer a velocidade de uma partícula ($ds/\,dt$) e desejarmos encontrar a equação do movimento ($s = f(t)$). Para encontrarmos a solução desse problema faz-se necessário desfazer a operação de diferenciação, ou seja é necessário antidiferenciar.

Dadas as funções $f(x)$ e $g(x)$ tais que $g'(x) = f(x)$ então g é uma antiderivada de *f*. Por exemplo $g(x) = x^3$ é uma antiderivada de $f(x) = 3x^2$, pois $f(x) = g'(x)$

DEFINIÇÃO: Uma função *g* é dita uma antiderivada de uma função *f* sobre um conjunto de números *I* se *g'(x)*= *f(x)* para todos os valores de *x* em *I*. O procedimento para achar antiderivada é chamado antidiferenciação.

Se conhecemos a antiderivada de *f* e não está explicito o conjunto I da definição então considera-se que I é todo o domínio de *f*, tal que $g'(x) = f(x)$ tal que $x \in D(f)$

Exemplo 1: Prove que $g(x) = \frac{2x+1}{2x-1}$ é uma antiderivada de $f(x) = \frac{-4}{(2x-1)^2}$.

Solução:

Seja $g'(x) = \frac{2(2x-1)-2(2x+1)}{(2x-1)^2} = \frac{4x-2-4x-2}{(2x-1)^2} = \frac{-4}{(2x-1)^2}$.

Logo $g(x)$ é uma antiderivada de $f(x)$. Observe que $g(x) + C$ também é uma antiderivada de $f(x)$, pois a derivada de $g(x) + C$ também é $f(x)$. Portanto se $g(x)$ é uma antiderivada de $f(x)$, todas as funções da forma $g(x) + C$ também são derivadas de $f(x)$.

Exemplo 2: Sabendo se que $g(x) = \frac{\mathrm{x}+1}{\mathrm{x}-1}$ é uma antiderivada de $f(x) = \frac{-2}{(x-1)^2}$, então encontre o número infinito de antiderivadas de *f*.

Solução:

Sendo *C* uma constante arbitrária, definiremos $h = g + C$, isto é;

$$h(x) = \frac{\mathrm{x}+1}{\mathrm{x}-1} + \mathrm{C} = \frac{x + 1 + C\mathrm{x} - \mathrm{C}}{\mathrm{x}-1}$$

Desse modo temos, quaisquer dessas funções *h* é uma antiderivada de *f*.

TEOREMA: ANTIDIFERENCIAÇÃO DA FUNÇÃO NULA.

Seja *g* uma função tal que $g'(x) = 0$ vale para todos os valores de *x* em algum intervalo aberto *I*. Então $g(x)$ tem um valor constante em *I*.

Prova:

É suficiente provar que o valor de $g(x)$ em um número *a* em *I* é o mesmo valor de $g(x)$ em qualquer outro ponto *b* em *I*. Pelo Teorema do Valor Médio, existe um número *c* entre *a* e *b* tal que:

$$g(b) - g(a) = g'(c)(b - a) = (b - a) = 0$$

Assim, $g(a) = g(b)$, e o teorema está provado.

Veremos no Teorema a seguir como encontrar todas as antiderivadas de uma função em um intervalo aberto, desde que conheça uma dessas antiderivadas.

TEOREMA: ANTIDIFERENCIAÇÃO EM UM INTERVALO ABERTO.

Suponha que $g(x)$ é uma antiderivada da função *f* no intervalo aberto *I*. Então uma função $h(x)$ com domínio *I* é uma antiderivada de $f(x)$ em *I* se e somente se,
$h(x) = g(x) + C$ para alguma constante *C*.

Prova:

Se $h(x) = g(x) + C$ então $h'(x) = g'(x) = f(x)$, então $h(x)$ é uma antiderivada de *f* em *I*. Inversamente, suponha que *h* é uma antiderivada de *f* em *I*. Então a função $h(x) - g(x)$ satisfaz $(h - g)'(x) = h'(x) - g'(x) = f(x) - f(x) = 0$ no intervalo aberto *I*. Segue do Teorema 3.2 que existe uma constante *C* tal que $h(x) - g(x) = C$ isto é, $h(x) = g(x) + C$.

Exemplo 3: Dado que a função $g(x) = \frac{1}{5}x^5$é uma antiderivada da função, $f(x) = x^4$ ache todas as antiderivadas de *f*.

Solução:

Vejamos que aqui o intervalo I é $\mathbb{R}$. Pelo Teorema 3.3 temos que as antiderivadas de f são todas as funções h da forma $h(x) = \frac{1}{5}x^5 + C$, onde C é uma constante arbitrária.

NOTAÇÃO PARA ANTIDERIVADAS

Como vimos anteriormente a nomenclatura para antiderivada teve forte influência de Leibniz, a simbologia por ele utilizada prevalece até hoje. Ele obteve êxito no seu modo de pensar na diferencial dy como uma "porção infinitesimal de *y*" e em *y* como sendo a soma de todos esses infinitos. O mesmo utilizou a letra *s* deu-lhe um novo estilo, a qual ficou da seguinte forma $\int$ para "somatórios", tal que $y = \int dy$ simbolizando a ideia de que "*y* é a soma de todas suas diferenciais individuais". Mas Johann Bernoulli foi mais além sugeriu que esse processo de Leibniz deveria ser chamado de Integração ao invés de Somatório.

Essa sugestão foi aceita e portanto o símbolo agora $\int$ é chamado de sinal de Integral. Então, suponhamos que *g* é a antiderivada de *f*, tal que$g'(x) = f(x)$. Se tomarmos $y = g(x)$, então $dy = g'(x)dx = f(x)dx$ tal que

$y = \int dy = \int f(x)\, dx$; isto é, $g(x) = \int f(x)\, dx$.

Sendo C uma constante qualquer, então $g(x) + C$ é também uma antiderivada de *f*.

DEFINIÇÃO: Se $g(x)$ é uma antiderivada de $f(x)$ tal que $x \in D(f)$. O conjunto de todas as antiderivadas de f é a integral indefinida de f em relação a x, denotada por:

$$\int f(x)\, dx = g(x) + C.$$

Onde $\int$ é o sinal da integral, a função f é o integrando e *x* é a variável de integração.

PROPRIEDADES DA INTEGRAL INDEFINIDA

PROPOSIÇÃO: Sejam f, g: I → ℝ e *k* uma constante. Então:

i. $\int k\, f(x)\, dx = k \int f(x)\, dx$.

ii. $\int \big(f(x) + g(x)\big) dx = \int f(x) dx + \int g(x)\, dx$.

Demonstração item i:

Seja $F(x)$ uma primitiva de $f(x)$. Então $k\, f(x)$ é uma primitiva de $k\, f(x)$, pois $\big(k\, F(x)\big)' = k\, F'(x) = k\, f(x)$. Dessa forma, temos:

$$\int k\, f(x)dx = K\, F(x) + C = K\, F(x) + K\, C_1$$

$$= K[F(x) + \; C_1] = K \int f(x)\, dx.$$

Demonstração item ii:

Sejam $F(x)$ e $G(x)$ funções primitivas de $f(x)$ e $g(x)$, respectivamente. Então, $F(x) \; + \; G(x)$ é uma primitiva da função $\big(f(x) \; + \; g(x)\big)$, pois:

$$[F(x) + G(x)]' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x).$$

Portanto,

$$\int \big(f(x) + g(x)\big)\, dx \; = \; [F(x) + G(x)] \; + C \; = [F(x) + G(x)] + C_1 + C_2\,.$$

Onde $C = C_1 + C_2$.

$= [F(x) + C_1] + [G(x) + C_2] =$

$= \int \big(f(x) + g(x)\big)\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx.$

Podemos descobrir as integrais das funções elementares partindo do conhecimento de suas integrais, obtenha assim a tabela das integrais imediatas.

Exemplo 4:

i. Sabemos que $(sen\ x)' = \cos x$. Então $\int \cos x\, dx = sen\ x + C$.
ii. Como $(-\cos\theta)' = sen\ \theta$, então $\int sen\ \theta\ d\theta = \; -cos\theta + C$.
iii. $\int e^x dx = e^x + C$, pois $(e^x)' = e^x$.
iv. $\int x^{\frac{2}{3}}\ dx = \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + C$, pois $\left(\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}\right)' = x^{\frac{2}{3}}$.
v. $\int \frac{dx}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} + C$, pois $\left(2\sqrt{t}\right)' = \frac{1}{\sqrt{t}}$.

TABELA DE INTEGRAIS IMEDIATAS.

1) $\int du = u + C$.
2) $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$.
3) $\int u^\alpha\, du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ (α é constante $\neq -1$).

4) $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C.$

5) $\int e^u du = e^u + C.$

6) $\int sen\, u\, du = -\cos u + C.$

7) $\int \cos u\, du = sen\, u + C.$

8) $\int sec^2 u\, du = tg\, u + C.$

9) $\int cosec^2\, u\, du = -cotg\, u + C.$

10) $\int \sec u \cdot\, tg\, u\, du = \sec u + C.$

11) $\int cosec\, u \cdot cotg\, u\, du = -cosec\, u + C.$

12) $\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = arc\, sen\, u + C.$

13) $\int \frac{du}{1+u^2} = arc\, tg\, u + C.$

14) $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}} = arc \sec u + C.$

Exemplo 5: Use as regras básicas para calcular $\int (x^5 + \sqrt{x} - 4)dx$.

Solução:

$$\int (x^5 + \sqrt{x} - 4)dx \;= \int x^5\, dx + \int \sqrt{x}\, dx - \int 4\, dx$$

$$= \int x^5\, dx + \int x^{\frac{1}{2}}\, dx - 4 \int\; dx = \left(\frac{x^{5+1}}{5+1} + C_1\right) + \left(\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C_2\right) - 4(x + c_3)$$

$$= \frac{1}{6}x^6 + \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} - 4x + C_1 + C_2 - 4C_3 = \frac{1}{6}x^6 + \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} - 4x + C.$$

Onde $C = C_1 + C_2 - 4C_3$.

Quando utilizamos as propriedades das integrais indefinidas, as constantes de integração que aparecem individualmente podem ser convertida em uma única constante. Desse modo a solução acima de maneira genérica pode ser obtida da seguinte maneira:

$$\int (x^5 + \sqrt{x} - 4)dx = \int x^5\, dx + \int x^{\frac{1}{2}}\, dx - 4 \int\; dx \;= \frac{1}{6}x^6 + \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} - 4x + C\ .$$

Exemplo 6: Calcule as antiderivadas dadas:

a) $\int \frac{x^3+3x^2+9}{x} dx$

Solução:

$$\int \frac{x^3+3x^2+9x}{x}dx \ = \int \left(\frac{x^3}{x}+\frac{3x^2}{x}+\frac{9x}{x}\right)dx = \int (x^2+3x+9)dx$$

$$= \int x^2 dx + \int 3x\ dx + \int 9\ dx\, 9 = \frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+x+C.$$

b) $\int (\ y\sqrt[3]{y}+1)^2\ dy$

Solução

$$\int \left(y \cdot y^{\frac{1}{3}}+1\right)^2 dy = \int \left(y^{\frac{4}{3}}+1\right)^2 dy = \int \left(y^{\frac{8}{3}}+2y^{\frac{4}{3}}+1\right)dy$$

$$= \int y^{\frac{8}{3}}\,dy + \int 2y^{\frac{4}{3}}\,dy + \int 1\,dy = \frac{y^{\frac{11}{3}}}{\frac{11}{3}} + \frac{2y^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}} + y + C$$

$$= \frac{3y^{\frac{11}{3}}}{11} + \frac{6y^{\frac{7}{3}}}{7} + y + C.$$

c) $\int (3\sec x\ tg\ x + cosec^2 x)dx$

Solução:

$$= 3\int \sec x\ tg\ x\ dx + \int cosec^2 x\ dx = 3\ secx - cotg\ x + C$$

Então:

$$\int (3\sec x\ tg\ x + cosec^2 x)dx = \ 3\ secx - cotg\ x + C.$$

MÉTODO DA SUBSTITUIÇÃO OU MUDANÇA DE VARIÁVEL PARA INTEGRAÇÃO.

Algumas integrais não podem ser calculadas diretamente pela tabela, então procuramos fazer uma substituição, transformando-a em uma integral imediata. Esse método é análogo à regra da cadeia para derivação e pode ser justificado como segue:

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ duas funções tais que $g'(x) = f(x)$. Suponhamos que h seja outra função derivável tal que $Im\,(h) \subset D(g)$. Considerando $g \circ h$, pela regra da cadeia temos: $[g(h(x))]' = g'\,(h(x)) \cdot h'(x) = f(h(x)) \cdot h'(x)$, isto é, $g(h(x))$ é primitiva de $f(h(x)) \cdot h'(x)$.

Então:

$\int f(h(x)) \cdot h'(x)dx = g(h(x)) + C.$ (I)

Para facilitar fazemos uma mudança de variável, chamando $u = h(x)$, consequentemente $du = h'(x)dx$, substituindo em (I), temos:

$$\int f(h(x)) \cdot h'(x)\,dx = \int f(u)du = g(u) + C.$$

Resumindo, devemos escolher $u = h(x)$ de forma que a integral obtida seja mais simples.

Exemplos 7: Usando o método de substituição calcule as integrais indefinidas:

a) $\int \frac{3xdx}{(4-3x^2)^8}$

Solução:

Seja $u = 3x$ e $du = 3\,dx$ ou $dx = \frac{1}{3}du$ assim

$$\int \frac{3xdx}{(4-3x^2)^8} = \frac{1}{3}\int \frac{u\,du}{(4-u^2)^8}$$

Vejamos que quando fizemos as manipulações exigidas nas etapas nos deparamos com uma limitação, ou seja, a escolha do *u* não tornou a integral imediata. Portanto faremos agora uma nova escolha pra o *u*.

Tomemos $u = 4 - 3x^2$ e $du = -6x\,dx$ ou $-\frac{1}{2}du = 3x\,dx$ então:

$\int \frac{3xdx}{(4-3x^2)^8} = \int \frac{-\frac{1}{2}du}{(u)^8} = -\frac{1}{2}\int (u)^{-8}du = -\frac{1}{2}\left(\frac{u^{-8+1}}{-8+1}\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{u^{-7}}{-7}\right)$

$$= -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{7u^7}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{7u^7}\right) + C.$$

Substituindo $u = 4 - 3x^2$ temos:

$$\int \frac{3xdx}{(4-3x^2)^8} = \frac{1}{14(4-3x^2)^7} + C$$

b) $\int x^2 \sqrt{3-2x}\, dx$

Solução:

Seja $u = 3 - 2x$. Então $du = -2dx$ ou seja $-\frac{1}{2}du = dx$. Resolvendo a equação $u = 3 - 2x$, para *x*, temos $x = \frac{(3-u)}{2}$. Segue que $x^2 = \left(\frac{3-u}{2}\right)^2 = \frac{9-6u+u^2}{4}$

Portanto

$$\int x^2 \sqrt{3-2x}\, dx = \int \frac{9-6u+u^2}{4}\sqrt{u}\left(-\frac{1}{2}du\right) = -\frac{1}{8}\int (9-6u+u^2)u^{\frac{1}{2}}\, du$$

$$= -\frac{1}{8}\int \left(9u^{1/2} - 6u^{3/2} + u^{5/2}\right) du = -\frac{1}{8}\left(9\frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}} - 6\frac{u^{5/2}}{\frac{5}{2}} + \frac{u^{7/2}}{\frac{7}{2}}\right) + C$$

$$= -\frac{3}{4}u^{3/2} + \frac{3}{10}u^{5/2} - \frac{1}{28}u^{7/2} + C$$

Substituindo $u = 3 - 2x$ teremos :

$$\int x^2 \sqrt{3-2x}\, dx = -\frac{3}{4}(3 - 2x)^{3/2} + (3 - 2x)^{5/2} - \frac{1}{28}(3 - 2x)^{7/2} + C.$$

c) $\int sen\,^2 x \cos x\, dx.$

Solução:

Se fizermos $u = sen\, x$ então $du = \cos x\, dx$. Assim:

$$\int sen\,^2 x \cos x\, dx = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C$$

Substituindo *u*, temos:

$$\int sen\,^2 x \cos x\, dx = \frac{sen^3 x}{3} + C\ .$$

d) $\int (x + sec^2\, 3x)\, dx.$

Solução:

Podemos escrever:

$\int(x + sec^2\, 3x)\, dx = \int x\, dx\ + \int sec^{\,2}\, 3x\, dx = \frac{x^2}{2} + \int sec^2\, 3x\, dx.$

Para resolver $\int sec^2\, 3x\, dx$, fazemos a substituição $u = 3x$. Temos, então, $du = 3dx$ ou $dx = \frac{1}{3}du$. Assim:

$$\int sec^2\, 3x\, dx = \int sec^2 u \cdot \frac{1}{3}du = \frac{1}{3}\int sec^2 u\, du = \frac{1}{3}tg\, u + C.$$

Substituindo na integral original temos;

$\int(x + sec^2\, 3x)\, dx = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3}tg\, 3x + C.$

e) $\int \frac{du}{u^2+a^2}$ $(a \neq 0)$.

Solução:

Como $a \neq 0$, podemos escrever a integral dada na forma

$$\int \frac{du}{u^2+a^2} = \int \frac{\frac{du}{a^2}}{\frac{u^2+a^2}{a^2}} = \frac{1}{a^2}\int \frac{du}{\frac{u^2}{a^2}+1}$$

Fazendo a substituição $v = \frac{u}{a}$. Temos, então, $dv = \frac{1}{a}du$ ou $du = a\, dv$. Portanto ,

$$\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{a\, dv}{v^2+1} = \frac{1}{a}\int \frac{dv}{v^2+1} = \frac{1}{a}\ arc\ tg\ v + C$$

Substituindo *v* temos:

$$\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a} arc\ tg\ \frac{u}{a} + C.$$

INTEGRAÇÃO POR PARTE.

Quando estumamos derivadas aprendemos que $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ a função $f \cdot g$ é uma antiderivada de $f' \cdot g + f \cdot g$.

Sendo $f = f(x)$ e $g = g(x)$ então temos

$$\int [f'(x)g(x) + f(x)g'(x)]\, dx = f(x)g(x) + C$$

Ou

$$\int f'(x)g(x)dx + \int f(x)\, g'(x)dx = f(x)g(x) + C$$

Podemos reescrever essa última equação da seguinte forma:

$$\int f(x)g'(x)dx = \ f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\, dx$$

Na prática, costumamos reescrever a fórmula

$$\int f(x)g'(x)dx = \ f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\, dx$$

Em termos das variáveis u e v, para facilitar a memorização. Tomamos $u = f(x),\ du = f'(x)dx,\ \ v = g(x)$ e $du = g'(x)dx$.

Substituindo temos:

$$\int u\, dv = u\, v - \int v\, du.$$

Essa fórmula que acabamos construir é chamada de fórmula de Integração por Partes.

Exemplo 8: Calcule a $\int x \cos x\, dx$

Solução:

Para utilizarmos integração por parte é necessário primeiramente identificarmos quem será o meu u e dv. Façamos $u = x$ e $dv = \cos x\, dx$ tal que $du = dx$ e $v = \int \cos x\, dx = sen\, x + C_0$. Portanto

$$\int \underbrace{x}_{u}\ \underbrace{\cos x\, dx}_{dv} = \int u\, dv = u\, v - \int v\, du = x\,(sen\, x + C_0) - \int (sen\, x + \ C_0)\, dx$$

$$= x\, sen\, x + xC_0 - \int sen\, x\, dx + \int C_0\, dx = x\, sen\, x + xC_0\ + \cos x + C - C_0$$

$$= x\, sen\, x + \cos x + C.$$

A constante C_0 que aparece na integração de $v = \int \cos x\, dx$ é automaticamente cancelada, pois na integração por parte a constante da integral $v = \int dv$ não necessita ser escrita. Portanto podemos escrever

$$\int x \cos x\, dx = \int u\, dv = u\, v - \int v\, du = x\, sen\, x - \int senx\, dx$$

$$= x\ sen\ x + \cos x + C.$$

Observação: Ao escolher u e v, devemos ter cuidado para que o produto entre v e du seja o mais simples possível, facilitando o resolução da integral. Caso se torne mais complicado do que a integral original, é evidente que a escolha foi equivocada.

Exemplo 9: Calcule as integrais dadas usando integração por partes.

a) $\int x \ln x\, dx$

Solução:

Escolha $u = \ln x$, $dv = x\, dx$, então $du = \frac{1}{x} dx$ e $v = \int x\, dx = \frac{x^2}{2}$

$\int v\, du = \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{x} dx = \frac{1}{2} \int x\, dx = \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{4}$

Portanto

$\int x \ln x\, dx = u\, v - \int v\, du = \ln x\ \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4} + C.$

b) $\int x\, e^{3x} dx$

Solução:

Escolha $u = x$,$dv = e^{3x}$, então $du = dx$ e $v = \int e^{3x} dx = \frac{1}{3} e^{3x}$

Calculando $\int v\, du = \int \frac{1}{3} e^{3x} dx = \frac{1}{3}\frac{1}{3} e^{3x} = \frac{1}{9} e^{3x}$

$\int x\, e^{3x} dx = u\, v - \int v\, du = x \cdot \frac{1}{3} e^{3x} - \frac{1}{9} e^{3x} + C = \frac{1}{3}\left(x e^{3x} - \frac{1}{3} e^{3x}\right) + C$

c) $\int x \cos 2x\, dx$

Solução:

Escolhamos $u = x$, $dv = \cos 2x\, dx$, deste modo temos que $du = dx$ e

$v = \int \cos 2x\, dx = \ sen\ 2x.$

Calcularemos

$\int v\, du = \int \frac{1}{2} sen\ 2x\, dx = \frac{1}{2} \int sen\ 2x\, dx = \frac{1}{2}\frac{1}{2} \cos 2x = -\frac{1}{4} \cos 2x$

Então:

$$\int x \cos 2x\, dx = u\, v - \int v\, du = x \cdot \left(\frac{1}{2} sen\ 2x\right) - \left(-\frac{1}{4} \cos 2x\right) = \frac{1}{2} x\ sen\ 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C.$$

INTEGRAÇÕES SUCESSIVAS POR PARTES

Vimos na secção anterior que a fórmula expressa por $\int u\, dv = u\, v - v\, du$, da integração por parte converte problemas do cálculo de$\int u\, dv$, em termos de uma segunda integral $\int v\, du$. Escolhendo-se o u e o dv de maneira correta podemos dirimir eventual problemas na resolução de $\int v\, du$, pois a integral resultante deve ser mais fácil de resolver do que a primeira. Entretanto nem sempre podemos resolver $\int v\, du$ de maneira direta, ou seja, uma segunda integração por parte pode ser necessária., ou ainda várias integrações por partes podem ser necessárias. Vejamos um exemplo.

Exemplo 10: Calcule $\int x^2 e^{2x}\, dx$

Solução:

Façamos $u = x^2$ e $dv = e^{2x}\, dx$, temos $du = 2x\, dx$ e $v = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x}$. Logo,

$$\int x^2 e^{2x}\, dx = u\, v - \int v\, du = \frac{1}{2} x^2 e^{2x} - \int x\, e^{2x}\, dx.$$

Embora $\int x\, e^{2x}\, dx$ seja mais simples que $\int x^2 e^{2x}\, dx$, uma segunda integração por parte é necessária. Portanto, fazendo $u_1 = x$ e $dv_1 = e^{2x}\, dx$, temos $du_1 = dx$ e $v_{1 = \int e^{2x}\, dx = \frac{1}{2}} e^{2x}$.

Agora,

$$\int x\, e^{2x}\, dx = u_1 v_1 - \int v_1 du_1 = \frac{1}{2} x\, e^{2x} - \int \frac{1}{2}\, e^{2x}\, dx = \frac{1}{2} x\, e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C_1$$

Assim,

$$\int x^2 e^{2x}\, dx = \frac{1}{2} x^{\,2} e^{2x} - \int x e^{2x}\, dx = \frac{1}{2} x\, e^{2x} - \left(\frac{1}{2} x\, e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x}\right) = \frac{1}{2} x\, e^{2x} - \frac{1}{2} x\, e^{2x} + \frac{1}{4} e^{2x},$$

Logo: $\int x^2 e^{2x}\, dx = \frac{1}{2} x\, e^{2x} - \frac{1}{2} x e^{2x} + \frac{1}{4} e^{2x} + C$

Podemos também calcular sucessivas integrais por partes da formato *u v'*, onde *u* é um polinômio, utilizando o método da tabela o então chamado integração tabular. Lembrando sempre que esse método só poderá ser utilizado em situações em que *f* pode ser derivada rapidamente até chegar em zero e *g* ser integrada rapidamente sem nenhuma dificuldade. Vejamos a seguir as etapas do método da tabela.

Etapa 1: Escreva o integrando na forma *uv'*, onde *u* é um polinômio.

Etapa 2: Faça duas colunas paralelas, nomeando-as de "coluna dos *u*" e "colunas do *v'*". Na "coluna dos *u*" listamos os polinômios *u* na "coluna dos *v'*" listando os *v'*.

Etapa 3: sucessivas entradas na coluna dos *u* são obtidas por repetidas diferenciações até 0. Entradas sucessivas correspondentes na "coluna dos *v*'" são obtidas por repetidas integrações indefinidas omitindo-se as constantes em cada estágio, até que a coluna dos *v'* seja tão longa quanto *u*.

Etapa 4: Multiplique cada elemento da "coluna dos *u*" pela entrada seguinte dos *v'* , troque o sinal de todas os outros produtos assim obtidos e some os resultados obtidos. A integral desejada é esta soma mais uma constante arbitrária de integração.

Exemplo 11: Usando o método da tabela calcule as integrais sucessivas por parte.

$$\int x^2 sen\ 3x\ dx$$

$$\begin{array}{ll} \boldsymbol{u} & \boldsymbol{v'} \\ \downarrow & \downarrow \\ \downarrow & \boldsymbol{sen\ 3x} \end{array}$$

$$x^2 \rightarrow vezes \rightarrow -\frac{1}{3}\cos 3x \rightarrow (+) \rightarrow = -\frac{x^2 \cdot \cos 3x}{3}$$

$$3x \rightarrow vezes \rightarrow -\frac{1}{3}\frac{1}{3} \cdot sen\ 3x \rightarrow (-) \rightarrow = \frac{2x\ sen\ 3x}{9}$$

$$2 \rightarrow vezes \rightarrow -\frac{1}{9}\left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right) \rightarrow (+) \rightarrow = \frac{2}{27}\cos 3x$$

Somando-se todos os termos da coluna da direita temos:

$$\int x^2 sen\ 3x\ dx = \frac{x^2 \cdot \cos 3x}{3} + \frac{2x\ sen 3x}{9} + \frac{2\cos 3x}{27} + C$$

Quando sucessivas integrais por parte retornam para integrandos semelhantes aos originais, a equação resultante pode ser resolvida utilizando como incógnitas a integral desconhecida. Vejamos o exemplo a seguir

Exemplo 12: Calcule $\int e^x \cos x\ dx$

Solução:

Uma primeira integração por parte com $u = e^x$, $dv = \cos x \; dx, du = e^x dx$ e $v = sen\, x$, nos dá

i. $\int e^x \cos x \; dx = e^x sen\, x - \int e^x sen\, x \, dx + C_1$.

Uma segunda integração por partes com $u_1 = e^x, dv_1 = sen\, x\, dx,\; du_1 = e^x dx,$ e $v_1 = \cos x$, aplicada a $\int e^x \, sen\, x\, dx$ nos dá

ii. $\int e^x sen\, x\, dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x\, dx$.

Substituindo ii em i temos:

iii. $\int e^x \cos x\, dx = e^x\, sen\, x - (-e^x \cos x + \int e^x \cos x\, dx)$, ou

iv. $\int e^x \cos x \; dx = e^x \, senx + e^x \cos x - \int e^x \cos x\, dx$. Resolvendo a equação $\int e^x \cos x \; dx$, obtemos $2\int e^x \cos x \; dx = e^x \, senx + e^x \cos x$, logo,

v. $\int e^x \cos x \; dx = \frac{e^x \, senx + e^x \cos x}{2} + C$

a) Calcule $\int e^{3x} sen\, 4x\, dx$

Solução:

Façamos a primeira integração por parte, seja $u = e^{3x}$, $dv = sen\, 4x\, dx,\; du = 3e^{3x} dx$

e $v = \int sen\, 4x\, dx = -\frac{1}{4}\cos 4x$

$$\int e^{3x} sen\, 4x\, dx = -e^{3x} \cdot \frac{1}{4}\cos 4x + \frac{1}{4}\int 3e^{3x} \cos 4x\, dx$$

$$= -\frac{e^{3x}\cos 4x}{4} + \frac{3}{4}\int e^{3x} \cos 4x\, dx$$

Chamaremos $\int e^{3x} sen\, 4x\, dx$ = I

Vejamos que a $\int v\, du$ resultou em outra integral que aparentemente apresenta as mesmas características da original. Faz-se necessário aplicarmos integração por parte mais uma vez.

Chamaremos $\int e^{3x} \cos 4x\, dx$ = II

Então $u_1 = e^{3x}$, $dv_1 = \cos 4x,\; du_1 = 3e^{3x} dx$ e $v_1 = \int \cos 4x dx = \frac{1}{4} sen\, 4x$

Resolvendo II temos:

$\int e^{3x} \cos 4x \, dx \ = e^{3x} \frac{1}{4} sen\ 4x - \frac{3}{4} \int e^{3x} sen\ 4x\ dx$

Perceba que $\int v_1 \ du_1 = \mathrm{I}$

Podemos escrever

$\mathrm{I} = -\frac{e^{3x}\cos 4x}{4} + \frac{3}{4}\left(e^{3x}\frac{1}{4} sen\ 4x - \frac{3}{4}\int e^{3x} sen\ 4x\ dx\right)$

$\mathrm{I} = -\frac{e^{3x}\cos 4x}{4} + \frac{3}{16} e^{3x} sen\ 4x - \frac{9}{16}\int e^{3x} sen\ 4x\ dx$

$$\mathrm{I} = \frac{-e^{3x}\cos 4x}{4} + \frac{3}{16} e^{3x} sen\ 4x - \frac{9}{16}\mathrm{I}$$

$$\mathrm{I} + \frac{9}{16}\mathrm{I} = \frac{e^{3x}\cos 4x}{4} + \frac{3}{16} e^{3x} sen\ 4x$$

$$\frac{25}{16}\mathrm{I} = \frac{e^{3x}\cos 4x}{4} + \frac{3}{16} e^{3x} sen\ 4x$$

$$\mathrm{I} = \frac{16}{25}\left(\frac{e^{3x}\cos 4x}{4} + \frac{3}{16} e^{3x} sen\ 4x\right) + C$$

Logo $\int e^{3x} \cos 4x \, dx \ = \frac{16}{25}\left(\frac{e^{3x}\cos 4x}{4} + \frac{3}{16} e^{3x} sen\ 4x\right) + C.$

3.2 INTEGRAL DEFINIDA

LIMITES DE SOMAS DE RIEMANN

A ideia de integral definida está associada ao limite de uma função quando a norma da partições de $[a, b]$ tende a zero, os valores do limite da soma de Riemann tente a um certo I, ou seja quanto menor for a norma da partição mais próximo ela ficara de I.

DEFINIÇÃO: A integral definida como limite de somas de Riemann

Seja $f(x)$ uma função definida em um intervalo fechado $[a, b]$. Dizemos que um número I é a Integral definida de f em $[a, b]$ e que I é o limite das somas de Riemann

$$\sum_{k=1}^{n} f(C_k)\, \Delta x_k$$

Se a seguinte condição é satisfeita:

Dado, qualquer número $\epsilon > 0$, existe um número correspondente $\delta > 0$, tal quer, para qualquer partição P= $\{x_{0,}x_1, \dots, x_n\}$ de $[a, b]$ com $\|p\| < \delta$ e qualquer escolha c_k em$[x_{k-1}, x_k]$ temos

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k\right| < \epsilon$$

A notação de integral definida foi por Leibniz definida como o limite das somas de Riemann. Ele viu as somas finitas $\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$, como sendo uma soma infinita de valores da função $f(x)$ multiplicado pela largura dos subintervalos "infinitesimais" dx. Sendo que $\sum$ é substituído no limite pelo símbolo da integral $\int$ e os valores de $f(c_k)$ serão substituídos por uma série continua de valores da função $f(x)$e a largura de subintervalos $f(x)$ torna-se a diferencial dx. Dessa forma é como se estivéssemos somando todos os produtos de $f(x) \cdot dx$ conforme *x* se mova de *a* para *b*.

NOTAÇÃO E EXISTÊNCIA DAS INTEGRAIS DEFINIDAS

O símbolo para o número I na definição da integral definida é:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Que é lido como "integral de *a* até *b* de *f* de *x dx"* ou, às vezes como "integral de *a* até *b* de *f* de *x* em relação a *x*". Os outros componentes do símbolo da integral também têm nomes:

$$\underbrace{\int_b^a f(x)dx}_{\substack{integral \\ de\ f\ de\ a\ a\ b}}$$

a: limite inferior de integração

b: limite superior de integração

$\int$ sinal de integral

f(x): a função é o integrando

dx : x é a variável de integração

Quando essa definição é satisfeita, dizemos que as Somas de Riemann de *f* em $[a, b]$ convergem para a integral definida $I = \int_a^b f(x)dx$, e f é integrável no intervalo $[a, b]$. Independentemente de quais escolhas façamos, para a partição ou para os pontos de partição, dizemos que a integral existe quando obtemos sempre o mesmo limite *I*. Portanto quando o limite existe podemos escrever a integral definida como:

$$\lim_{\|p\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x = I = \int_a^b f(x)dx$$

Quando cada partição tem *n* subintervalos iguais, cada um com largura $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, também escrevemos

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x = I = \int_a^b f(x)dx$$

Tomamos sempre o limite quando a norma da partição tende a zero e o número de intervalo tende ao infinito.

TEOREMA: A EXISTÊNCIA DE INTEGRAIS DEFINIDAS.

Uma função contínua é integrável. Isto é, se uma função *f* é continua em um intervalo $[a, b]$, então sua integral definida em $[a, b]$ existe.

FUNÇÕES INTEGRÁVEIS E NÃO INTEGRÁVEIS

No teorema 3.11.4 vimos que, funções continuas em $[a, b]$ são integráveis nesse intervalo, e as não contínuas podem ou não ser integráveis. Entre as funções descontínuas e integráveis estão aquelas que são crescente em $[a, b]$. Para que uma função não seja integrável é preciso que ela seja tão descontinua a ponto de a região entre a curva e o eixo *x* não poderem ser bem aproximados por retângulos cada vez mais estreitos.

Veremos a seguir um exemplo de função não integrável.

Exemplo 13: Uma função não integrável em [0,1].

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{se } x \text{ é racional} \\ 0, \text{se } x \text{ é irracional} \end{cases}$$

A função não apresenta integral de Riemann no intervalo $[0,1]$, pelo fato da oscilação entre seus números ,ou seja, vai sempre existir entre quaisquer dois números desse função um número racional e outro irracional. Logo a função vai ficar oscilando de cima pra baixo e de baixo pra cima de maneira errada e com isso a região da curva acima do eixo *x* não poder ser aproximada por retângulos. Ou seja, as aproximações dessa soma superior e da soma inferior convergem para valores-limites diferentes.

Pegando-se uma partição P de $[0,1]$ e escolhendo C_k para ser o valor máximo de f em $[x_{k-1}, x_k]$ então a soma de Riemann será:

$$U = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta = \sum_{k=1}^{n} (1)\Delta x_k = 1$$

Isso decorre do fato de que cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ conter um número racional $f(c_k) = 1$, então $\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = 1$. Daí o limite e a soma de Riemann para esse tipo de função será igual a 1.

Por outro lado, se escolhermos c_k para ser o valor mínimo de f em $[x_{k-1}, x_k]$, então a soma de Riemann será:

$$\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} (0)\Delta x_k = 0$$

Cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ contém um número irracional c_k onde $f(c_k) = 0$. O limite das somas de Riemann usando essas escolhas será igual a zero. Como o limite depende das escolhas de c_k, então a função f não é integrável.

PROPRIEDADE DAS INTEGRAIS INDEFINIDAS

Quando f e g são entregáveis no intervalo $[a, b]$, a integral definida satisfazem as seguintes regras:

Propriedades satisfeitas pela integrais definidas

1. Ordem de integração: $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$.
2. Intervalo de largura zero: $\int_a^a f(x)dx = 0$.
3. Multiplicação por constantes: $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

   $$\int_a^b -f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$
4. Soma e subtração: $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.
5. Aditividade: $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$.
6. Desigualdade max-min: Se f tem valor máximo max f e o valor mínimo min f em

$[a.b]$então

$\min f\,(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \;\leq \max f \cdot (b-a\,).$

7. Dominação : $f(x) \geq g(x) em\,[a,b] \Longrightarrow \int_a^b f(x)dx \;\geq\; \int_a^b g(x)dx.$

   $f(x) \geq 0\; em\,[a,b] \Longrightarrow \int_a^b f(x)dx \;\geq 0.$

Vejamos a seguir a interpretação gráfica das propriedades citadas acima:

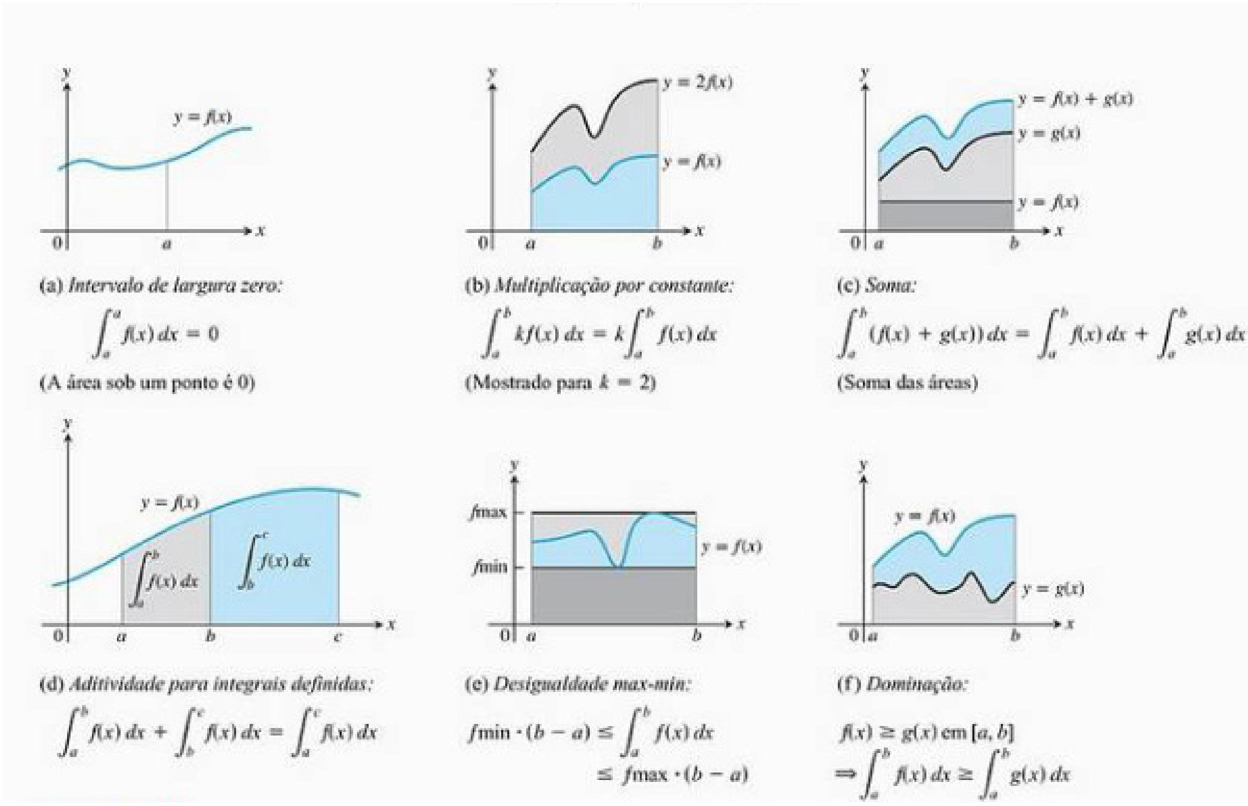

Figura 1: Propriedade da integral definida

Aqui iremos provando apenas a regra 6.

Prova da regra: A regra 6 diz que a integral de f em $[a,b]$ nunca é menor que o valor mínimo de f vezes o comprimento do intervalo e nunca maior que o valor máximo de f vezes o comprimento do intervalo. A razão é que para cada divisão de $[a,b]$ e para cada escolha dos pontos c_k

$\min f \cdot (b-a) = \min f \;\cdot \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k$	$\sum_{k=1}^{n} = \Delta x_k = b-a$
$= \sum_{k=1}^{n} \min f \cdot\; \Delta x_k$	Regra da multiplicação por constante
$\leq \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$	$\min f \leq f(c_k)$
$\leq \sum_{k=1}^{n} \max\, f \;\cdot \Delta x_k$	$f(c_k) \leq \max f$

$= \max f \cdot \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k$ Regra da multiplicação por constante

$= \max f\ (b-a)$

Resumindo, todas as somas de Riemann para f em $[a, b]$ satisfazem a desigualdade

$$\min f \ \cdot (b-a) \leq \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\, \Delta x_k \leq \max f \ \cdot (b-a)$$

Por isso, seu limite, a integral, também a satisfaz.

Exemplo 14: Usando as propriedades das integrais definidas

Supondo-se que

$\int_{-1}^{1} f(x)dx = 8,$ $\int_{1}^{2} f(x)dx = -5,$ $\int_{-1}^{1} h(x)dx = 3$

Então:

I. $\int_{2}^{1} f(x)dx$

Pela regra 1 temos $\int_{2}^{1} f(x)dx = -\int_{1}^{2} f(x)dx = -(-5) = 5$

II. $\int_{-1}^{1} [3\, f(x) + 6\, h(x)]dx$

Pelas regras 3 e 4 temos:

$\int_{-1}^{1} [3\, f(x) + 6\, h(x)]dx = \int_{-1}^{1} 3f(x)dx + \int_{-1}^{1} 6\, h(x)dx$

$$= 3\int_{-1}^{1} f(x)dx + 6\int_{-1}^{1} h(x) = 3(8) + 6(3) = 42$$

III. $\int_{-1}^{2} f(x)dx$

Pela regra 5 temos

$\int_{-1}^{2} f(x)dx = \int_{-1}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{2} f(x)dx = 8 + (-5) = 3$

TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO.

Apresentaremos o teorema fundamental do cálculo que foi dividida em duas parte, e será enunciada como dois teoremas (1ª Parte e 2ª Parte), este é o mais importante Teorema do cálculo Integral. Ele nos permite relacionar integração e derivação. Afirmando que conhecemos a primitiva de uma função contínua, podemos calcular sua integral definida. De forma a obter uma maneira rápida e simples de resolver problema práticos que envolvem integral definida.

Antes de enunciarmos o Teorema Fundamental do Cálculo, mostraremos o Teorema do Valor médio para Integral que será de suma importância para a compreensão de sua demonstração.

TEOREMA DO VALOR MÉDIO PARA INTEGRAIS

Suponhamos que *f* seja uma função contínua no intervalo $[a, b]$. Então, existe um número *c* em $[a, b]$tal que

$$f(c) \cdot (b - a) = \int_a^b f(x)dx$$

Antes de fazermos a prova do teorema iremos recorrer ao conceito de máximo e mínimo absolutos. Suponhamos que a função *f* seja definida (pelo menos) no intervalo *I*, e seja *c* um ponto do intervalo *I*. Se $f(c) \geq f(x)$(respectivamente, $f(c) \leq f(x)$) Vale para todos os valores de *x* em *I*, então dizemos que, no intervalo *I*, a função *f* atinja o seu valor máximo absoluto(respectivamente, seu valor mínimo absoluto) $f(c)$ no ponto *c*.

Se *f* atinge um valor máximo absoluto ou mínimo absoluto em *c*. Então dizemos que possui um extremo absoluto em *c*. E pelo teorema da existência de extremos absolutos temos que; Se uma função *f* definida e contínua no intervalo fechado$[a, b]$, então *f* atinge um valor máximo absoluto em algum ponto em $[a, b]$ e *f* atinge um valor mínimo absoluto em algum ponto em $[a, b]$.

Prova: Vimos que uma função contínua *f* num intervalo fechado$[a, b]$ assume um valor máximo (digamos) B e um valor mínimo (digamos) *A*. Assim, $A \leq f(x) \leq B$ é válido para todos valores de *x* em $[a, b]$. Pelo teorema da comparação (se *f* e *g* são funções Riemann-integráveis no intervalo $[a, b]$ se $f(x) \leq g(x)$ é válido para todos os valores de *x* no intervalo $[a, b]$, então $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)dx$), então$\int_a^b A\,dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b Bdx$.

Pelo Teorema da integral de uma função constante (seja f função constante definida pela equação $f(x) = K$ onde K é um número constante. Então $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b K\,dx = K(b-a)$) $\int_a^b A\,dx = A(b-a)$ e $\int_a^b B\,dx = B(b-a)$; assim $A(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq B(b-a)$. Mas $b-a > 0$, então a última desigualdade pode ser reescrita como $A \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq B$. O teorema do valor intermediário para funções contínuas afirma que *f* assume todos valores entre dois quaisquer de seus valores. Assim já que A e B são dois desses valores de f e como $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ está entre estes dois valores , deve existir um número *c* em $[a,b]$ tal que $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$; isto é

$$f(c)(b-a) = \int_a^b f(x)dx.$$

A condição $f(c)(b-a) = \int_a^b f(x)dx$ significa que a área sob a curva $y = f(x)$ então $x = a$ e $x = b$ é igual à do retângulo cuja base é o intervalo $[a,b]$ e cuja altura é $f(c)$.

Assim, se a curva $y = f(x)$ fosse " horizontalizada" entre $x = a$ e $x = b$ de tal forma que tivesse uma altura constante $f(c)$, então a área sob a curva permaneceria a mesma. Neste sentido $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ representa um "valor médio" ou um " valor intermediário" da função *f* entre $x = a$ e $x = b$.

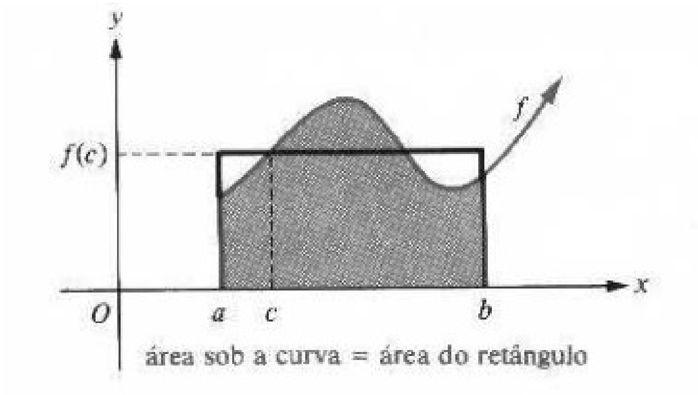

Figura 2: Teorema do Valor médio para integrais.

TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO – PRIMEIRA PARTE

Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[b,c]$ e suponhamos que *a* é um número fixo neste intervalo. Define-se domínio $[b,c]$ por:

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Para x em $[b, c]$. Então g é diferenciável no intervalo aberto (b, c)e $g'(x) = f(x)$ é valido para todo x em (b, c). Além disso, $g'_+(b) = f(b)$ e $g'_-(c) = g(c)$.

Prova:

Suponha que x pertence ao intervalo aberto (b, c) e que Δx é suficientemente pequeno de modo que $x + \Delta x$ também pertence (b, c). Então $g(x) = \int_a^x f(t)dt$ e

$g(x + \Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\, dt$. Segue que

$g(x + \Delta x)$- $g(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\, dt$ - $\int_a^x f(t)dt$

$= \int_a^{x+\Delta x} f(t)\, dt + \int_x^a f(t)dt$

Pela Definição integral definida. Logo pela propriedade da aditividade.

$$g(x + \Delta x)\text{- } g(x) = \int_x^a f(t)\, dt + \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

Já que f é continua no intervalo $[b, c]$, é também contínua em qualquer subintervalo fechado entre x e $x + \Delta x$. Pelo Teorema do valor médio para integrais, segue que existe um número x^*no intervalo fechado entre x e $x + \Delta x$ tal que

$\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = f(x^*)[(x + \Delta x) - x] = f(x^*)\Delta x.$

Consequentemente,

$$\mathrm{g}(x + \Delta x) - \mathrm{g}(x) = f(x^*)\Delta x \text{ ou } \frac{\mathrm{g}(x + \Delta x) - \mathrm{g}(x)}{\Delta x} = f(x^*).$$

Já que x^*está entre x e $x + \Delta x$ então x^* se aproxima de x quando Δx tende a zero. Então,

$$\mathrm{g}'(x) = \lim_{\Delta x \to o} \frac{\mathrm{g}(x + \Delta x) - \mathrm{g}(x)}{\Delta x} = \lim_{x^* \to x} f(x^*) = f(x),$$

Onde usaremos a continuidade de f na última equação. Isto estabelece o resultado desejado para valores de x no intervalo aberto (b, c).

TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO- SEGUNDA PARTE.

Seja *f* uma função contínua no intervalo fechado$[a, b]$e suponha que *g* é uma função contínua em$[a, b]$ tal que $g'(x) = f(x)$ é válida para todos valores de *x* no intervalo aberto (a, b). Então

$$\int_b^a f(x)dx = g(b) - g(a)$$

Prova:

Define-se uma função *F* com domínio $[a, b]$ por *F(x)*= $\int_a^x f(t)dt$ para *x* em $[a, b]$. Pelo Teorema 3.12.1,$F'(x) = f(x)$ é válido para todos os valores de *x* no intervalo aberto (a, b), enquanto que $F'_+(a) = f(a)$ e $F'_+(b) = f(b)$ valem nos pontos extremos. Já que *F* é diferenciável em(a, b), é continua em (a, b). Visto ter *F* derivadas à direita e à esquerda em *a* e *b*, respectivamente, *F* é continua à direita em *a* e *F* é continua à esquerda em *b*. Segue que *F* é contínua no intervalo fechado$[a, b]$. No intervalo aberto(a, b), temos *F' = f = g'*; logo, $(F - g)' = 0$. Segue do Teorema 3.3, que $F(x) - g(x) = C$ é valido para todos os valore de *x* no intervalo aberto (a, b), onde *C* é um número constante.

Já que *F* e *g* são continuas à direita de *a*, a igualdade $C = F(x) - g(x)$ para *a<x< b* implica que

$$C = \lim_{x \to a^+} C = \lim_{x \to a^+}[F(x) - g(x)] = \lim_{x \to a^+} F(x) - \lim_{x \to a^+} g(x) = F(a) - g(a).$$

Mas, *F(a)*=$\int_a^a f(t)dt = 0$, logo $C = -g(a)$. Logo, a equação $C = F(x) - g(x)$ para *a<x<b* pode ser reescrito como $F(x) = g(x) - g(a)$. Visto serem *F* e *g* contínuas à esquerda de *b*, a última igualdade implica que

$$F(b) = \lim_{x \to b^-} F(x) = \lim_{x \to b^-}[g(x) - g(a)] = \lim_{x \to b^-} g(x) - \lim_{x \to b^-} g(a) = g(b) - g(a).$$

Já que $F(b) = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(x)dx$, temos portanto que $\int_a^b f(x)dx = g\,(b) - g(a)$.

De agora em diante quando nos referimos ao “Teorema Fundamental do Cálculo” não especificaremos se estamos nos referindo a primeira ou segunda parte, pois o Teorema fundamental do cálculo tanto relaciona-se com diferenciação como integração, por isso cabe a nós enquanto estudantes distinguir pelo contexto a qual parte do Teorema estamos nos referindo.

Exemplo 15: Utilizando o teorema Fundamental do cálculo calcule as integrais a seguir.

a) $\int_1^e x^2 \ln x \, dx$.

Solução:

Faça $u = u = ln\ x$ e $dv = x^2dx$. Então $du = \frac{1}{x}dx$, $v = \int x^2\ dx = \frac{x^3}{3}$, e

$\int_1^e x^2 \ln x \, dx = \int_1^e u\, dv = (u \cdot v)]_1^e - \int_1^e vdu = (\ln x)\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big]_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3} \cdot \frac{dx}{x}$

$= \left(\frac{x^3 \ln x}{3}\right)\Big]_1^e - \left(\frac{x^3}{9}\right)\Big]_1^e$

$\int_1^e x^2 \ln x \, dx\ = \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2e^3+1}{9}$

b) $\int_1^3 x\, dx$.

Solução:

Sabemos que $F(x) = \frac{1}{2}x^2$ é uma primitiva de $f(x) = x$. Portanto,

$\int_1^3 x\, dx = \frac{1}{2}x^2\Big]_1^3 = \frac{1}{2} \cdot 3^2 - \frac{1}{2}1^2 = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\, dt$.

Solução:

A função $F(t) = sen\ t$ é uma primitiva de $f(t) = \cos t$. Logo,

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\, dt = sen\ t]_0^{\frac{\pi}{2}} = sen\ \frac{\pi}{2} - sen\ 0 = 1$

d) $\int_0^1 \frac{x\, dx}{x^2+1}$.

Solução:

Vamos, primeiro, encontrar a integral indefinida

$$I = \int \frac{x\, dx}{x^2 + 1}$$

Para isso, fazemos a substituição $u = x^2 + 1$. Temos, então $du = 2x\,dx$ ou $x\,dx = \frac{du}{2}$.

Portanto,

$$I = \int \frac{\frac{du}{2}}{u} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u| + C = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C.$$

Logo, pelo teorema do cálculo, temos:

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}ln(x^2+1)]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 1 = \frac{1}{2}\ln 2.$$

Para resolvermos essa integral, também podemos fazer a mudança de variável na integral definida, desde que façamos a correspondente mudança nos limites de integração.

Ao efetuarmos a mudança de variável fazendo $u = x^2 + 1$, vemos que:

$$x = 0 \Longrightarrow u = 1$$

$$x = 1 \Longrightarrow u = 2$$

Então

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{x^2+1} = \int_1^2 \frac{\frac{du}{2}}{u} = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u|]_1^2 = \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1) = \frac{1}{2}\ln 2.$$

4. APLICAÇÕES DA INTEGRAL.

A Matemática faz-se presente em nosso cotidiano de diversas formas, podemos perceber suas aplicações na economia, engenharia, direito, física, biologia entre outras áreas do conhecimento humano. Deste modo estaremos a seguir fazendo algumas aplicações do cálculo integral, ou seja, usaremos algumas técnicas de integração para calcularmos volumes, comprimentos de curvas planas e áreas de algumas superfícies de revolução.

Começaremos definindo volumes de sólidos em que suas regiões transversais são regiões planas. Entendemos por seção transversal de um sólido *S* a região plana formada pela interseção entre *S* e o plano.

Vejamos a figura a seguir.

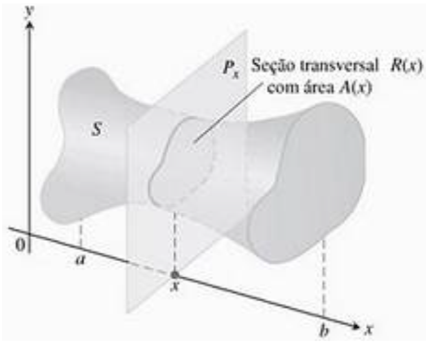

Figura 3:Secção transversal de S.

A figura 3 mostra a Secção transversal do sólido *S* formada pela interseção, entre *S* e um plano perpendicular ao eixo *x* passando pelo ponto *x* no intervalo

Podemos calcular o volume desse sólido utilizando a definição clássica para sólidos com base arbitraria. Quando o sólido cilíndrico possui área da base *A* e altura *h*, ambas conhecidas, então podemos escrever o volume desse sólido como sendo:

, veja na figura abaixo.

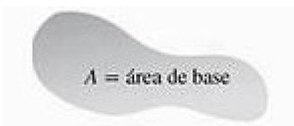

Figura 4:Região plana.

Figura 5:Sólido cilíndrico.

Tomando por base essa equação podemos encontrar o volume de muitos sólidos não cilíndricos, usando o método do fatiamento, método esse que consiste em dividir o sólido em fatias finas tornando assim mais fácil de encontrarmos o volume do sólido desejado.

Esse método funciona da seguinte maneira: Se a seção transversal do sólido S em cada ponto x, no intervalo $[a, b]$ é uma região $R(x)$ de área $A(x)$, e A é uma função contínua de x, então podemos calcular o volume do sólido S como a integral definida, de modo que dividimos $[a, b]$ em subintervalos de largura Δx_k e fatiamos o sólido por planos perpendiculares ao eixo x nos pontos de partição $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Esses planos P_{x_k}, perpendiculares ao eixo x nos ponto de partições dividem S em fatias finas, esses fatos podem verificar na figura abaixo.

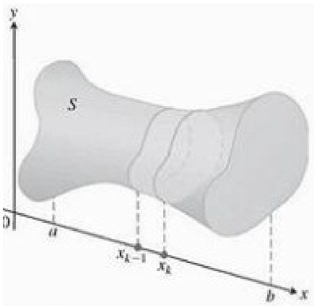

Figura 6:Típica fatia fina do sólido S.

Agora, pegando-se essa fatia situada entre o plano x_{k-1} e o plano x_k e tomando por base um sólido cilíndrico de área da base $A(x_k)$ e altura $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.

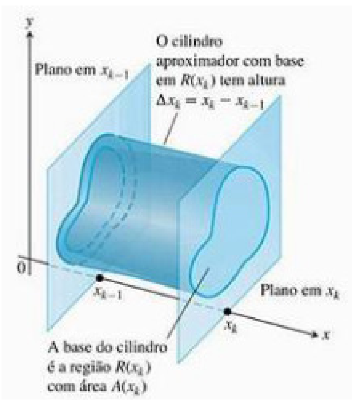

Figura 7: Aproximação do sólido cilíndrico

Como vimos anteriormente que o volume de um sólido é dado pelo produto da área da base pela altura, ou seja, V_k desse sólido será aproximadamente o volume da fatia, e podemos escrevê-lo da seguinte maneira:

Volume da k-ésima fatia $\approx\ V_k = A(x_k)\Delta x_k$

Sendo assim, se quisermos saber o volume aproximado do sólido *S*, podemos calculá-lo através da soma do volume das fatias.

$$V \approx \sum_{k=1}^{n} V_k = \sum_{k=1}^{n} A(x_k)\,\Delta x_k$$

Isto é uma soma de Riemann para a função $A(x)$ em$[a, b]$. A aproximação dessa soma ficará cada vez mais precisa à medida que a norma da partição de $[a, b]$ tender a zero.

Suponhamos que uma partição $[a, b]$ com n subintervalos e a norma dessa partição tende a zero ($\|P\| \to 0$), então temos:

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} A(x_k)\Delta x_k = \int_a^b A(x)\,dx$$

Entretanto, fica entendido que o volume de *S* pode ser expressa pela integral, que é o limite das somas.

DEFINIÇÃO: O volume de um sólido compreendido entre os planos $x = a$ e $x = b$ e cuja área da seção transversal por *x* é uma função integrável $A(x)$ é a integral de a e b de *A*:

$$V = \int_a^b A(x)dx$$

Só podemos aplicar essa definição quando $A(x)$ for contínua e integrável. Para utilizarmos essa fórmula devemos seguir os seguintes passos.

i. Esboce o sólido e uma seção transversal típica.
ii. Encontre uma fórmula para $A(x)$, a área de uma seção transversal típica.
iii. Encontre os limites de integração.
iv. Integre $A(x)$ usando o teorema fundamental.

Exemplo 16: Uma pirâmide com 3 m de altura tem uma base quadrada com 3 m de lado. A seção transversal da pirâmide, perpendicular à altura *x* m abaixo do vértice, é um quadrado com *x* m de lado. Determine o volume da pirâmide.

Solução:

Vejamos o esboço da pirâmide com sua altura ao lado do eixo *x* e seu vértice na origem e incluímos uma seção transversal típica.

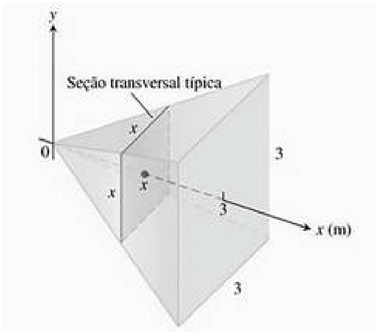

Figura 8: Secção transversais da pirâmide

A seção transversal em *x* é quadrado com *x* metros de lado, portanto sua área será: $A(x) = x^2$

Os quadrados vão de $x = 0$ a $x = 3$.

$$V = \int_0^3 A(x)dx = \int_0^3 x^2 dx = 9\ m^3$$

PRINCÍPIO DE CAVALIERI

O princípio de Cavalieri assegura que sólidos com mesma altura e com áreas de seções transversais iguais em cada altura possuem o mesmo volume. Isso decorre da definição de volume, pois tanto a seção transversal $A(x)$ quanto o intervalo $[a, b]$ são iguais para ambos os sólidos. A figura a seguir ilustra esse fato.

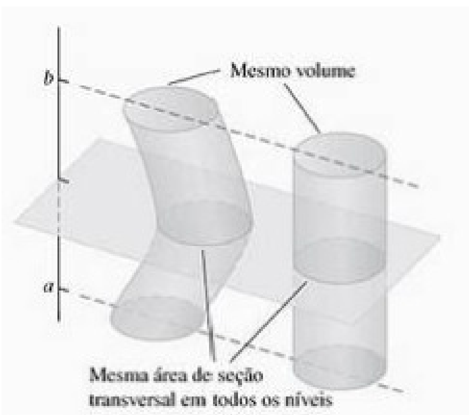

Figura 9: Princípio de Cavalieri.

Observação: Esses sólidos possuem os mesmos valores. Para melhor compreendermos esse fato podemos ilustrá-lo através de uma pilha de moedas.

Exemplo 17: Uma cunha curva foi obtida por meio do corte de um cilindro de raio 3 por dois planos. Um deles é perpendicular ao eixo do cilindro. O segundo cruza o primeiro, formando um ângulo de 45º no centro do cilindro. Determine o volume da cunha.

Solução:

Desenhemos a cunha e esbocemos uma seção transversal típica perpendicular ao eixo de x.

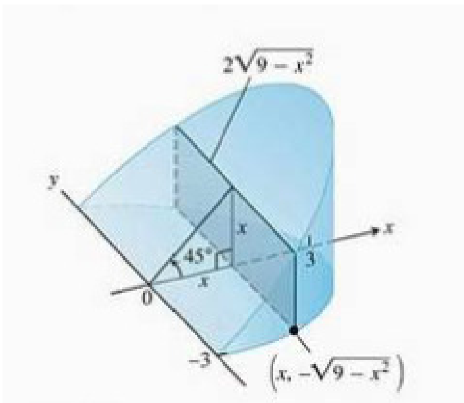

Figura 10: Cunha fatiada.

A secção transversal da cunha é um retângulo de área.

$A(x) = (altura)(largura) = (x)(2\sqrt{9-x^2} = \ 2x\sqrt{9-x^2}$

Os retângulos vão de $x = 0$ e $x = 3$, portanto, temos :

$$V = \int_a^b A(x)dx = \int_0^3 2x\sqrt{9-x^2}\ dx$$

Utilizando o método de substituição consideremos $u = 9 - x^2$ e $du = -2xdx$

$$\int_0^3 2x\sqrt{9-x^2}\ dx = -\int_0^3 \sqrt{u}\ du$$

$= -\int_0^3 u^{\frac{1}{2}}\ du = -\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big]_0^3 = -\frac{2}{3}(9-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big]_0^3 = 0 + \frac{3}{2}(9)^{\frac{3}{2}} = 18$

4.1 SÓLIDO DE REVOLUÇÃO

Um sólido gerado pela rotação de uma região plana em torno de um eixo no plano desse eixo é chamado Sólido de Revolução

SÓLIDO DE REVOLUÇÃO: O MÉTODO DO DISCO

Para determinar o volume de um sólido como mostra a figura a baixo. Precisamos somente observar que a área da seção transversal $A(x)$ é um disco de raio $R(x)$, a distância entre a fronteira da região bidimensional e o eixo de revolução . A área é portanto

$$A(x) = \pi(raio)^2 = \pi[R(x)]^2 dx$$

Assim, graças à definição de volume, temos

$$V = \int_a^b A(x)dx = \int_a^b \pi[R(x)]^2\ dx$$

Esse método para calcular o volume de um sólido de revolução gerado é denominado método de disco, pois uma seção transversal é um disco circular de raio.

Exemplo 18: A região entre a curva $y = \sqrt{x}$, $0 \le x \le 4$, e o eixo x gira em torno desse eixo para gerar um sólido. Determine seu volume.

Solução:.

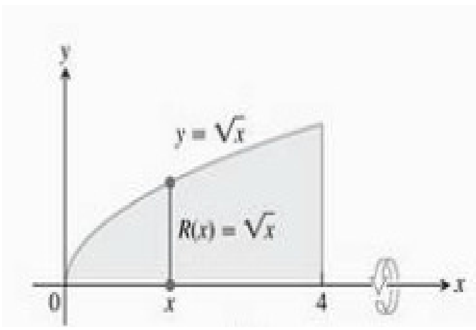

Figura 11: A Região

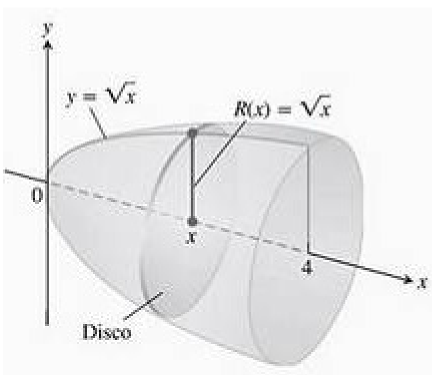

Figura 12:O sólido de Revolução.

Observando as figuras, temos que o volume é dado por :

$$V = \int_a^b \pi[R(x)]^2 dx = \int_0^4 \pi[\sqrt{x}\,]^2 dx = \pi \int_0^4 x\, dx =$$

$$= \pi \frac{x^2}{2}\Big]_0^4 = \pi \frac{(4)^2}{2} = 8\pi\ (u \cdot v)(unidades\ de\ volume)$$

Exemplo 19: O círculo $x^2 + y^2 = a^2$ é girado em torno do eixo *x* para gerar uma esfera. Determine seu volume.

Solução:

Imaginemos a esfera cortada em finas fatias por planos perpendiculares ao eixo *x*. A área de seção transversal em um ponto x entre $-a$ e a é

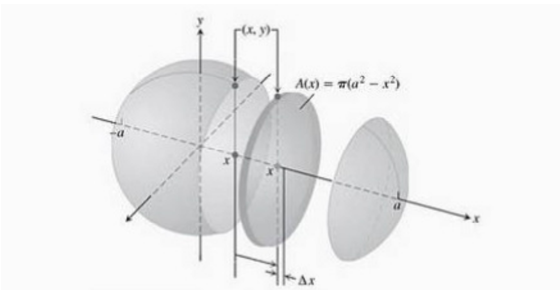

Figura 13: Esfera gerada pela rotação do círculo.

$$A(x) = \pi y^2 = \pi(a^2 - x^2)$$

Portanto, o volume é

$$V = \int_{-a}^{a} A(x)\, dx = \int_{-a}^{a} \pi(a^2 - x^2) dx = \pi \left[a^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_{-a}^{a} = \frac{4}{3}\pi a^3$$

Exemplo 20: Determine o volume do sólido obtido com a rotação em torno da reta $y = 1$, da região definida por $y = \sqrt{x}$ e pelas retas $y = 1$ e $x = 4$.

Solução:

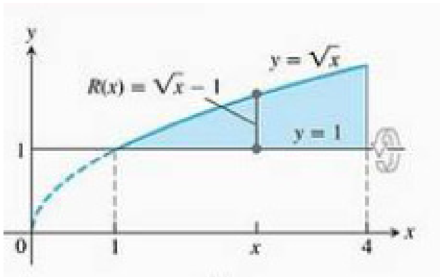

Figura 14: Região do Exemplo 20

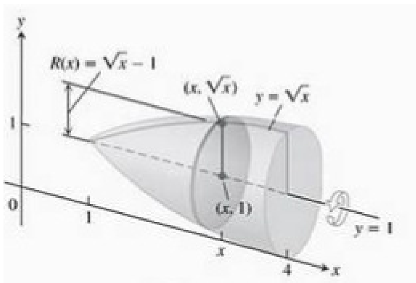

Figura 15: Sólido de Revolução exemplo 20.

Observando as figuras 14 e 15, temos que o volume é:

$$V = \int_1^4 \pi[R(x)]^2 dx = \int_1^4 \pi[\sqrt{x} - 1]^2 dx = \pi \int_1^4 [x - 2\sqrt{x} + 1]\, dx$$

$$= \pi \left[\frac{x^2}{2} - 2 \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + x\right]_1^4 = \frac{7\pi}{6}$$

Quando a rotação da região for em torno do eixo *y*, usamos o mesmo método, apenas substituindo *x* por *y*. Nesse caso, a secção transversal circular é dada por:

$$A(y) = \pi[raio]^2 = \pi[R(y)]^2$$

Exemplo 21: Determine o volume do sólido obtido com rotação, em torno do eixo *y*, da região compreendida entre o eixo *y* e a curva $x = \frac{2}{y}, 1 \leq y \leq 4.$

Solução: Vejamos as figuras 16 e 17.

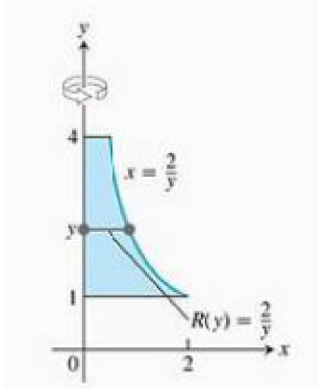

Figura 16: Região do Exemplo 21.

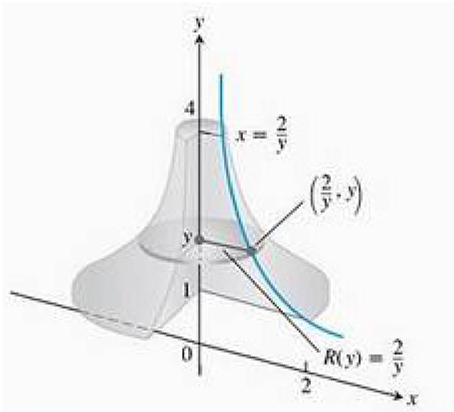

Figura 17: Sólido de Revolução Exemplo 21.

O volume desse sólido é dado por

$$V = \int_1^4 \pi[R(y)]^2 dy = \int_1^4 \pi\left(\frac{2}{y}\right)^2 dy$$

$$= \pi \int_1^4 \frac{4}{y^2} dy = 4\pi\left[-\frac{1}{y}\right]_1^4 = 4\pi\left[\frac{3}{4}\right] = 3\pi.$$

Exemplo 22: Determine o volume do sólido obtido com a rotação, em torno da reta $x = 3$, da região compreendida entre a parábola $x = y^2 + 1$ e a reta $x = 3$.

Solução: Observando as figuras 18 e 19, vemos que as secções transversais são perpendiculares a reta $x = 3$ e tem coordenadas $y = -\sqrt{2}$ e $y = \sqrt{2}$, logo o volume será:

$$V = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \pi[R(y)]^2\, dy = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \pi[2 - y^2]^2\, dy$$

Sendo $R(x) = 3 - (y^2 + 1) = 2 - y^2$

$$= \pi \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} [4 - 4y^2 + y^4] dy$$

$$= \pi \left[4y - \frac{4}{3}y^3 + \frac{y^5}{5}\right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} = \frac{64\pi\sqrt{2}}{15}.$$

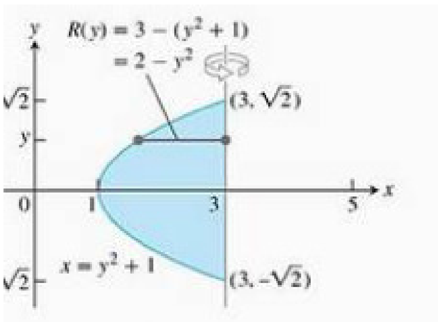

Figura 18: A região do Exemplo 22.

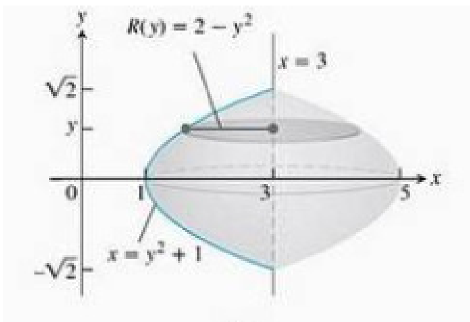

Figura 19:Sólido de Revolução Exemplo 22.

SÓLIDO DE REVOLUÇÃO: O MÉTODO DO ANEL

Se ao girarmos a região para gerar o sólido não traçarmos ou cruzarmos o eixo de revolução, o sólido terá um orifício em seu meio. Assim sendo as secções transversais não serão discos e sim anéis, como mostra a figura 20. As dimensões de um anel típicos são: Raio externo: $R(x)$ e Raio interno: $r(x)$

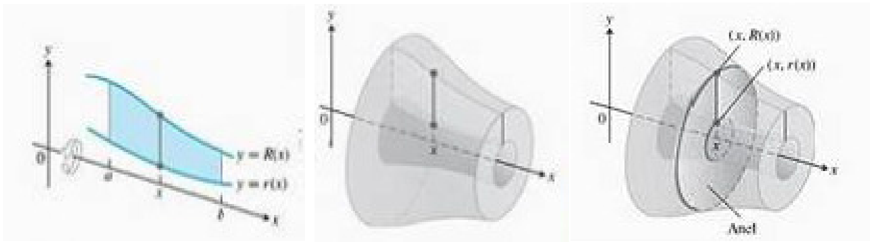

Figura 20: Anéis gerados.

A área do anel é:

$$A(x) = \pi[R(x)]^2 - \pi(R(x)]^2 = \pi([R(x)^2] - [r(x)]^2)$$

Consequentemente, o volume será dado por:

$$V = \int_a^b A(x)dx = \int_a^b \pi([R(x)]^2 - [r(x)]^2)\, dx$$

Esse método é chamado método do anel, pois a fatia é um anel circular de raio exterior $R(x)$ e raio interior $r(x)$.

Exemplo 23: A região limitada pela curva pela curva $y = x^2 + 1$ e pela reta $y = -x + 3$ gira em torno do eixo *x* para geral um sólido. Determine o volume do sólido.

Solução

Observe as figuras 21 e 22. Vemos que:

Raio externo:$R(x) = -x + 3$

Raio interno: $r(x) = x^2 + 1$

.Determinemos os limites de integração, encontrando as abcissas dos pontos de interseção da curve com a reta.

$$x^2 + 1 = -x + 3$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$(x + 2)(x - 1) = 0$$

$$x = -2 \qquad x = 1$$

Portanto, o volume será:

$$V = \int_a^b \pi([R(x)]^2 - [r(x)]^2)dx$$

$$= \int_{-2}^{1} \pi((-x+3)^2 - (x^2+1)^2)dx$$

$$= \int_{-2}^{1} \pi(8 - 6x - x^2 - x^4)dx$$

$$= \pi\left[8x - 3x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_{-2}^{1} = \frac{117\pi}{5}\ (u \cdot v)$$

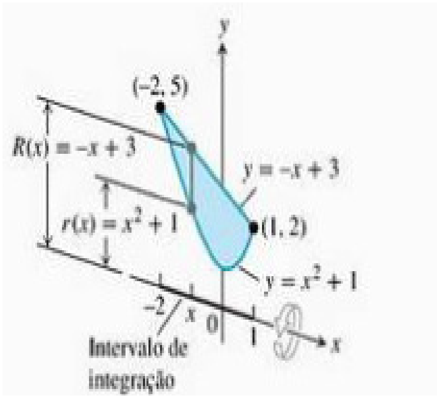

Figura 21: Região do exemplo 23..

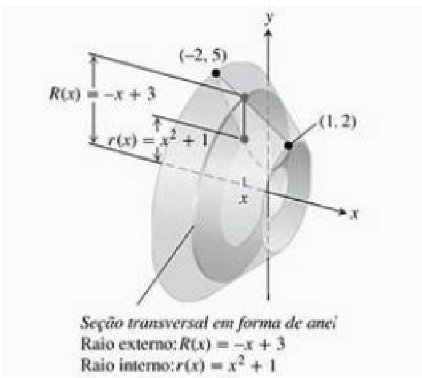

Figura 22: Anel gerado pelo segmento de reta.

Exemplo 24: A região compreendida entre a parábola $y = x^2$ e a reta $y = 2x$ no primeiro quadrante gira em torno do eixo *y* para gerar um sólido. Determine o volume do sólido.

Solução: Usaremos a mesma definição de volumes, mas fatiaremos o sólido de cima pra baixo, usando cilindros circulares, cujo eixo vertical será sempre a mesma reta, mas o raio dos cilindros aumenta a cada fatia. O sólido fatiado em cascas cilíndricas de espessuras constantes, que cresce de dentro pra fora a partir de um eixo comum. Como a rotação ocorre em torno do eixo *y*, procedemos da mesma forma. Porém integrando em relação a *y*, em vez de *x*. Assim, os raios do anel gerado pelo segmento de reta são $R(y) = \sqrt{y}$, $r(y) = \frac{y}{2}$. As pontos de interseção entre a reta e a parábola são $y = 0$ e $y = 4$.

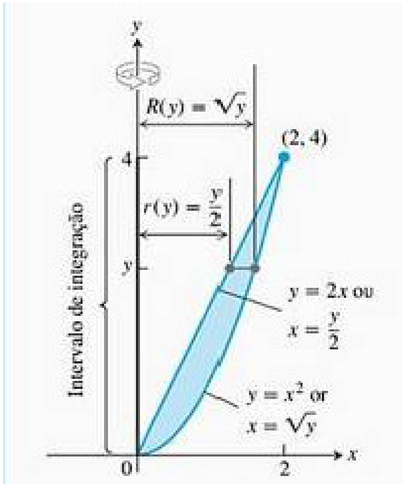

Figura 23: Região do exemplo 24.

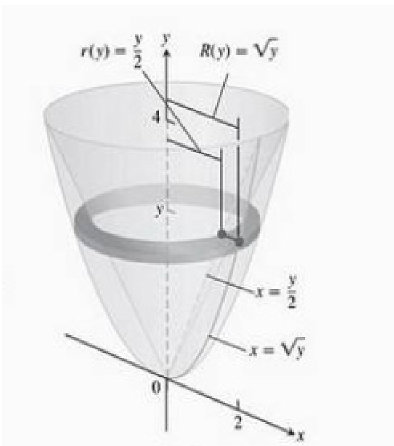

Figura 24: Anel gerado pela rotação do segmento de reta..

Assim o volume será:

$$V = \int_c^d \pi([R(y)]^2 - [r(y)]^2)dy$$

$$= \int_0^4 \pi\left(\left[\sqrt{y}\right]^2 - \left[\frac{y}{2}\right]^2\right)dy$$

$$= \pi\int_0^4 \left(y - \frac{y^2}{4}\right)dy = \pi\left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{12}\right]_0^4 = \frac{8}{3}\pi$$

VOLUMES POR CASCAS CILÍNDRICAS

Anteriormente definimos o volume de um sólido S como a integral definida

$$V = \int_a^b A(x)dx$$

.

Exemplo 25: A região compreendida pelo eixo x e pela parábola $y = f(x) = 3x - x^2$ gira em torno da reta vertical $x = -1$, para gerar o formato de um sólido. Determine o volume do sólido.

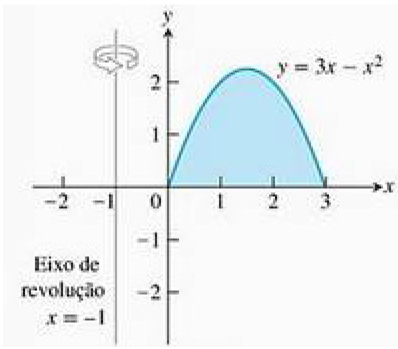

Figura 25:O gráfico antes da revolução

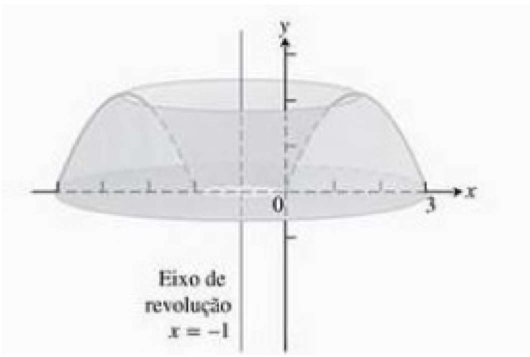

Figura 26:Sólido Gerado pelo exemplo 25.

Solução: Em vez de girar uma faixa horizontal de espessura Δy, giramos uma faixa vertical de espessura Δx. Essa rotação produz uma casca cilíndrica de altura y_k que se ergue acima de um ponto x_k, situado na base da faixa vertical e da região Δx. A região sombreada na figura 27 representa um exemplo de casca cilíndricas. Deste modo pensaremos na casca cilíndrica mostrada na figura como uma fatia do sólido que obteríamos cortando-o diretamente para baixo, paralelamente ao eixo de revolução, em toda volta, próximo à borda do orifício. Depois, cortaríamos outra fatia cilíndrica em torno do orifício aumentado, então outra, e assim por diante, até obter n cilindros. O raio dos cilindros aumenta gradualmente e sua altura segue o contorno da parábola: do menor para o maior e novamente para o menor.

Cada fatia se situa ao longo de um subintervalo do eixo x de comprimento (largura)Δx. Seus raio é aproximadamente $(1 + x_k)$ e sua altura, cerca de $3x_k - x_k^2$. Se desenrolarmos o cilindro verticalmente em x_k e o achatarmos, ele se tornará (aproximadamente) uma fatia retangular com espessura Δx. A circunferência interna do cilindro será $2\pi \cdot raio = 2\pi(1 + x_k)$, e esse é o comprimento da fatia retangular desenrolada. Seus volume é aproximado pelo volume de um sólido retangular,

$$\Delta V_k = circunferência \times Altura \times Espessura$$

$$= 2\pi(1 + x_k) \cdot (3x_k - x_k^2) \cdot \Delta x$$

Somando o volume ΔV_k das cascas cilíndricas individuais ao longo do intervalo [0,3], obtemos a soma de Riemann:

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta V_K = \sum_{k=1}^{n} 2\pi(x_k + 1)\,(3x_k - x_k^2)\Delta x$$

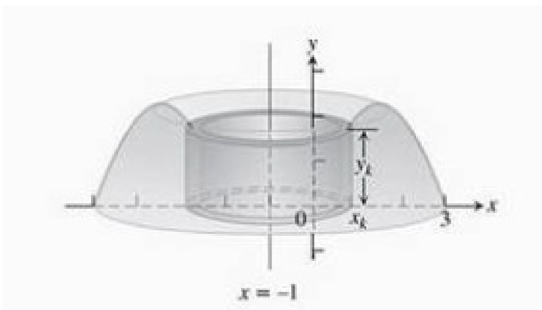

Figura 27: Casca Cilíndrica.

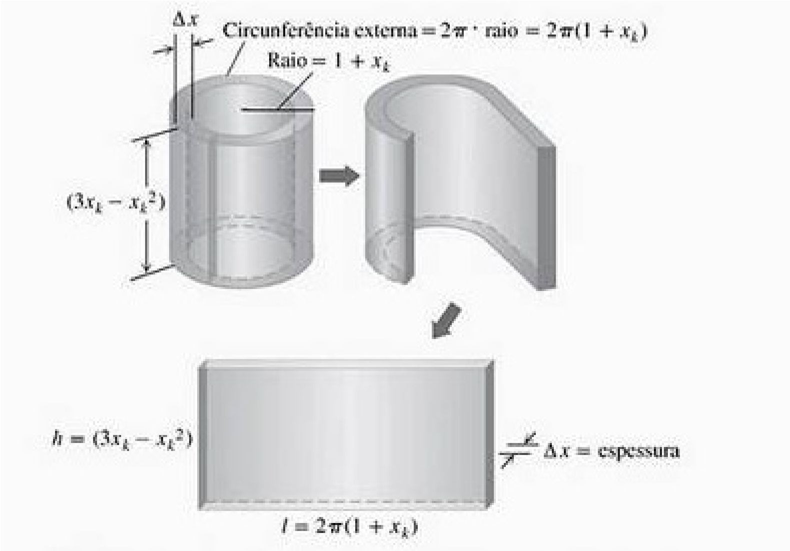

Figura 28: Processo de desdobramento de uma casaca cilíndrica.

Considerando o limite com espessura $\Delta x \rightarrow 0$, teremos a integral do volume

$$V = \lim_{n\rightarrow\infty} \sum_{k=1}^{n} 2\pi(x_k + 1)\,(3x_k - x_k^2)\Delta x$$

$$= \int_0^3 2\pi(x+1)(3x - x^2)dx$$

$$= \int_0^3 2\pi(3x^2 + 3x - x^3 - x^2)\,dx$$

$$= \ 2\pi\ \int_0^3 (2x^2 + 3x - x^3)dx$$

$$= 2\pi\left[\frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^3 = \frac{45\pi}{2}$$

Imagine que estamos cortando e “desenrolando” uma casca cilíndrica para obter um sólido plano(aproximadamente) retangular.

O MÉTODO DA CASCA

Suponha que a região delimitada pelo gráfico de uma função contínua não negativa $y = f(x)$e o eixo *x* ao longo do intervalo fechado finito $[a, b]$fique à direita da reta vertical $x = L$. Pressupomos $a \geq L$, portanto a reta vertical pode tocar a região, mas não atravessá-la. Geramos um sólido *S* girando essa região em torno da reta vertical *L*.

Seja P uma partição do intervalo $[a, b]$ formada pelos seguintes pontos: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, e seja c_k o ponto médio do k-ésimo subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$. Aproximaremos a região na figura 29 usando retângulos com base nessa partição de $[a, b]$. O retângulo típico para aproximação tem altura $f(c_k)$ e largura $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Se girado esse retângulo em torno da reta vertical $x = L$, então a casca será gerada, como mostra a figura 30. Geometricamente o volume da casca gerado pelo retângulo será:

$$\Delta V_K = 2\pi \times Raio\ médio\ da\ casca \times Altura\ da\ casca\ \times Espessura$$

$$\Delta V_K = 2\pi \cdot (c_K - L) \cdot f(c_k) \cdot \Delta x_k$$

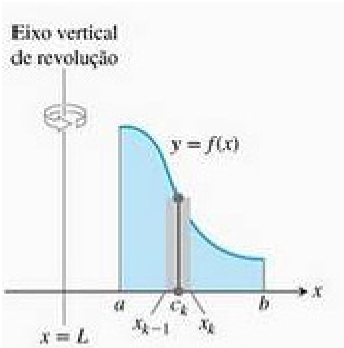

Figura 29: A Região

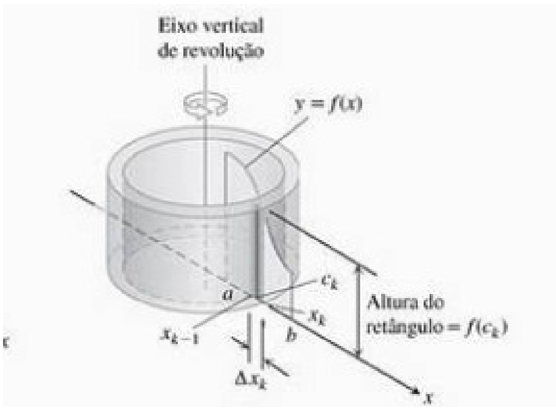

Figura 30: Sólido Fatiado em cascas cilíndricas

.

Fazemos uma aproximação para o volume do sólido S somando os volumes das cascas geradas pelos n retângulos com base em P:

$$V \approx \sum_{k=1}^{n} \Delta V_k$$

O limite dessa soma de Riemann quando$\|P\| \to 0$ fornece o volume do sólido como uma integral definida:

$$V = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \Delta V_k = \int_a^b 2\pi(raio\ da\ casca)(altura\ da\ casca)dx$$

$$= \int_a^b 2\pi(x - L)f(x)\,dx$$

Chamamos essa variável de integração, nesse caso *x*, de variável de espessura. Usamos a primeira integral, e não a segunda, que contém uma fórmula para o integrando, a fim de enfatizar o processo do método da casca. Isso também permite rotações em torno de uma horizontal *L*.

FÓRMULA DA CASCA PARA REVOLUÇÃO EM TORNO DE UMA RETA VERTICAL.

O volume do sólido obtido com a rotação, em torno de uma reta vertical $x = L$, da região compreendida entre o eixo *x* e o gráfico de uma função contínua $y = f(x) \geq 0 = L, \leq a \leq x \leq b$, é :

$$V \int_a^b 2\pi(raio\ da\ casca)(altura\ da\ casca)\,dx$$

Exemplo 26: A região limitada pela curva $y = \sqrt{x}$, pelo eixo *x* e pela reta $x = 4$ é girada em torno do eixo *y* gerando um sólido. Determine o volume do sólido.

Solução:

Vejamos um esboço da região e em seguida um esboço das cascas geradas pelo segmento vertical.

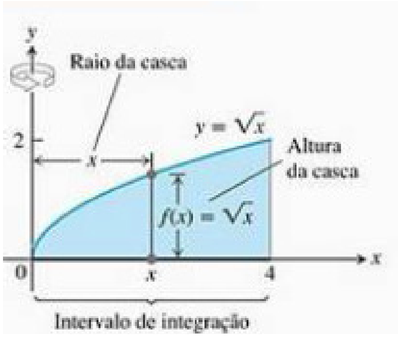

Figura 31: A região do Exemplo 26.

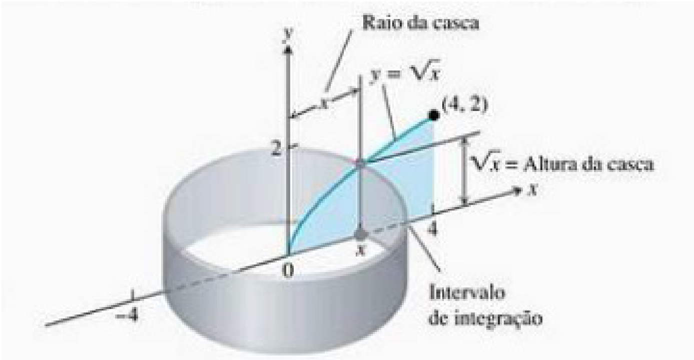

Figura 32: Casca gerada pelo segmento vertical.

Como a variável de espessura da casca é *x*, os limites de integração para a fórmula da casca são $a = 0$ e $b = 4$. O volume é portanto

$$V = \int_a^b 2\pi(raio\ da\ casca)(altura\ da\ casca)dx$$

$$= \int_0^4 2\pi(x)(\sqrt{x})\,dx$$

$$= 2\pi\int_0^4 x^{\frac{3}{2}}\,dx = 2\pi\left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right]_0^4 = \frac{128\pi}{5}.$$

Até aqui, usamos eixos verticais de revolução. Para eixos horizontais, substituímos *x* por *y*.

Exemplo 27: A região limitada pela curva $y = \sqrt{x}$, pelo eixo e pela reta $x = 4$ gira em torno do eixo *x*, gerando um sólido. Determine o volume do sólido.

Solução: Nesse caso, a variável espessura é *y*, logo os limites de integração para o método da fórmula da casca são $a = 0$ e $b = 2$ (ao longo do eixo *y*). O volume do sólido é:

$$V = \int_a^b 2\pi(raio\ da\ casca)(altura\ da\ casca)\ dx$$

$$= \int_0^2 2\pi(y)\,(4 - y^2)dy$$

$$= \int_0^2 2\pi(4y - y^3)\ dy$$

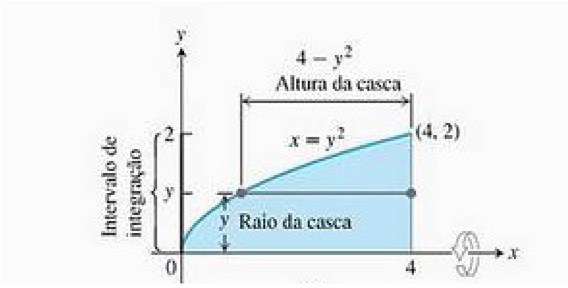

Figura 33: A Região do Exemplo 27

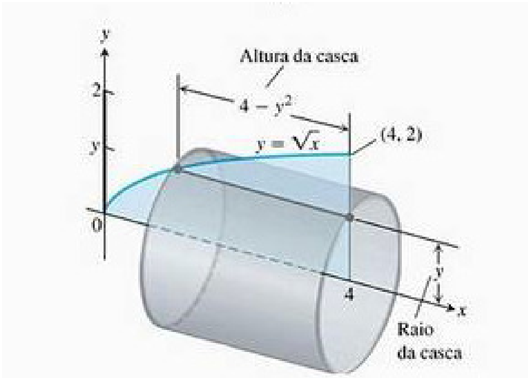

Figura 34: Casca gerada

4.2 APLICAÇÃO NA ECONOMIA

Na sociedade fortemente capitalista em que nos encontramos, qualquer indivíduo, em algum momento de sua vida assume o papel de consumidor ou fornecedor nas relações de mercado onde os conceitos abordados na aplicação da integral definida pesquisados durante a realização desse trabalho estão inseridos. Tal aplicação abordará os conceitos ligados ao mercado, tais como o lucro obtido em determinada compra, análise de valor pago por unidade de mercadoria e a demanda consumida que resultará no benefício ao consumidor.

O valor do benefício ao consumidor ou o lucro que o consumidor obtém quando paga um preço inferior ao que realmente estaria disposto a pagar é obtido a partir da curva de demanda1.

Para ilustrar consideremos a função da demanda de um certo produto, produzido por uma empresa, dada por $p = f(x)$, onde p é o preço unitário quando x unidades são demandadas. A figura 35 representa uma curva de demanda $p = f(x)$, sendo que no eixo das abscissas está fixada a quantidade do produto e no eixo das ordenadas o preço por unidade do produto. Assim ao comprar uma quantidade x de um produto o valor pago pelo consumidor por cada unidade é de $p = f(x)$. Assim, a função que representa o valor pago (que denominaremos v) para adquirir x unidades de produto será dada por $v = x\, f(x)$. Observa-se na figura 35 que a função que representa a curva de demanda tem um comportamento decrescente, isso ocorre na maioria dos casos, pois conforme Larson e Edwards (2008) quanto maior o preço unitário menor o interesse do comprador em adquirir o produto.

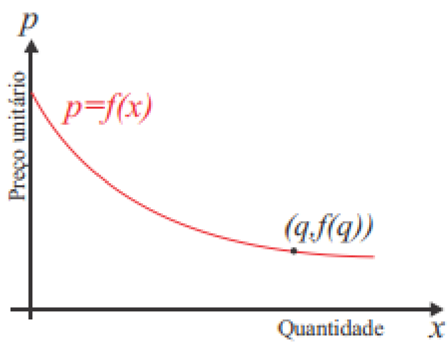

Figura 35: Função demanda

Denotamos por q a quantidade disponível do produto $p = f(q)$ e o preço de venda. Particionaremos o intervalo $[0, q]$ em n subintervalos de comprimento $\Delta x = \frac{q}{n}$, sendo x_i a extremidade direita do i-ésimo intervalo, conforme ilustra a figura 36. Suponhamos que no primeiro subintervalo a quantidade de produtos disponíveis seja x_1, desta forma o preço estipulado por unidade desse produto é dado por $f(x_1)$. Se todas x_1 as unidades disponíveis forem vendidas pelo preço fixado $p = f(x_1)$, então o valor pago v_1 da venda dessas unidades será dado por: $v_1 = x\, f(x_1) = f(x_1)\Delta x$

Se após a venda dessas x_1 unidades, forem disponibilizadas mais unidades, de forma que num determinado momento, a quantidade de produtos produzidos for $x_2(x_2 > x_1)$ e o preço unitário desses produtos for fixado em $f(x_2)$, nessa situação o valor pago v_2 da venda dessas unidades será dado por:

$$v_2 = (x_2 - x_1)\, f(x_2) = f(x_2)\Delta x$$

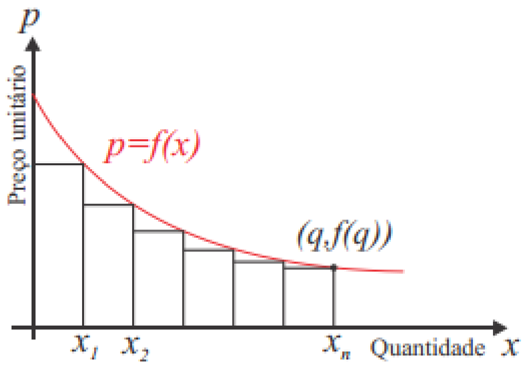

Figura 36: Partição do intervalo

Então, usando o processo indutivo, o montante pago pelos consumidores para o correspondente a q unidades de produtos será dado pela soma dos preços de venda de $x_1, x_2, \cdots x_{n-1}, x_n$ unidades. Ou seja,

$$v = v_1 + v_2 + \cdots + v_n = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x \qquad (1)$$

A equação (1) é uma soma de Riemann da função f no intervalo $[0, q]$. O valor pago pelos consumidores por esses produtos é dado pela integral definida

$$v = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x)\, \Delta x = \int_0^A f(x)\, dx.$$

Note que a integral descrita calcula a área da região sob a curva da demanda no intervalo

$[0, q]$, pois $p = f(x)$ é uma função positiva nesse intervalo.

Porém, no sistema aberto em que esse processo de consumo acontece, essa alteração tão significativa de preços, de acordo com uma alteração mínima na quantidade de produtos(Δx), não acontece, assim todos os consumidores pagam o mesmo preço, ou seja, no caso em que existem unidades q disponíveis, o preço pago por qualquer consumidor, independentemente do número de unidades que esse irá adquirir será $f(q)$.

Portanto o montante pago será:

$$v = f(q)q = [preço\ por\ unidade][número\ de\ unidades]$$

Note que nesse caso, o montante a ser pago é igual a área do retângulo KLMN, conforme ilustra a figura 36.

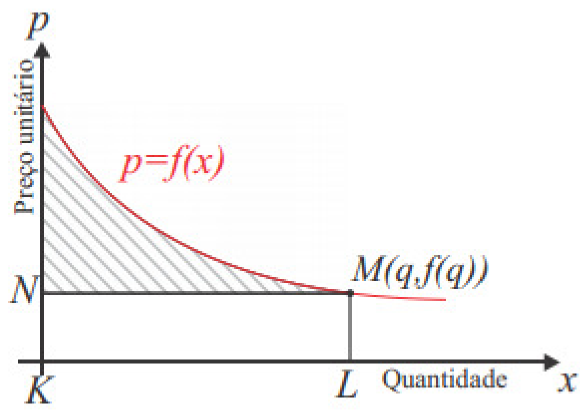

Figura 37:Representação do benefício do consumidor

Assim o valor do benefício ao consumidor, denominado por B_c, é dado pela área hachurada na figura 36, que pode ser aproximada pela soma Riemann dada por:

$$B_c = \big(f(x_1) - f(q)\big)\Delta x + \big(f(x_2) - f(q)\big)\Delta x + \cdots + \big(f(x_n) - f(q)\big)\Delta x$$

e o valor exato pela integral definida:

$$B_c = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \big(f(x) - f(q)\big)\,\Delta x = \int_0^A \big(f(x) - f(q)\big)\Delta x$$

Exemplo 28: Ilustraremos esse processo, com um exemplo adaptado de Goldstein et all (2012): Encontre o benefício do consumidor para a curva de demanda $p = 50 - 0{,}06x^2$ em um nível de venda de 20 unidades.

Solução: Na figura 38 está representando a curva de demanda, o montante que o consumidor irá pagar e o benefício que ele terá.

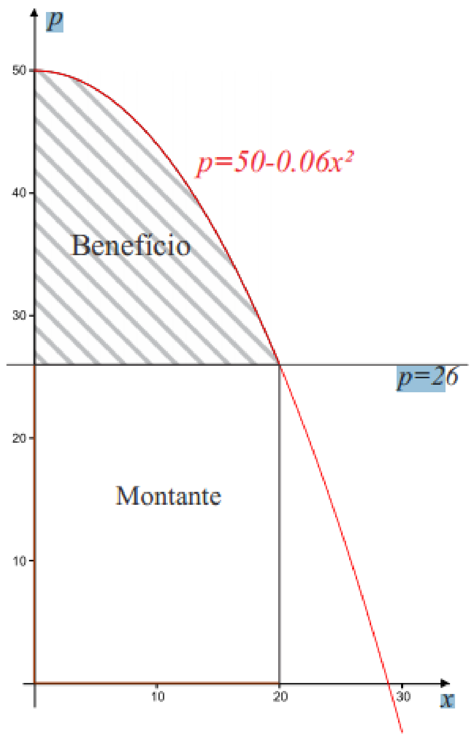

Figura 38:Representação geométrico do problema

Como serão vendidas 20 unidades do produto o preço será:

$$p(20) = 50 - 0{,}06(20)^2 = 50 - 24 = 26$$

Dessa forma, o benefício do consumidor é a área hachurada na figura 4, que é dada pela integral:

$$B_C = \int_0^{20} [(50 - 0{,}06x^2) - 26]\, dx = \int_0^{20} (24 - 0{,}06x^2) dx = (24 - 0{,}02x^3)]_0^{20}$$

$$= 24\,(20) - 0{,}02\,(20)^3 = 480 - 160 = 320.$$

Portanto, o benefício do consumidor é de 320,00 reais.

4.3 APLICAÇÃO NA FÍSICA

Geralmente em Física quando nos referimos a força nos vem à mente de que maneira poderíamos descreve-la. Sendo assim podemos usar como exemplo a ato de empurrar uma carro ou simplesmente levantar um objeto do chão.

No ato de levantarmos um objeto do chão a força exercida será a força constante, ou seja a intensidade dessa força não irá variar quando aplicada no objeto. Já no ato de empurrar um carro a força a ser exercida será a força variável, uma vez que a força aplicada no início do movimento do carro será maior do que a força aplicada quando o carro já estiver em movimento.

Seja *F* uma força aplicada a um objeto, fazendo-o deslocasse a uma distância *d*, na direção da força, podemos determinar o trabalho *W* realizado por *F* sobre o objeto.

Se a força é constante então definiremos *W* por: $W = F \cdot d$

Se a força for variável definiremos *W* usando a integral definida.

TRABALHO REALIZADO SOBRE UMA FORÇA VARIAVÉL.

Suponhamos que um objeto se desloca em um eixo L e esteja sujeita a uma força variável *F*. Sem perda de generalidade seja *L* o eixo dos *x*. Suponhamos que $F = F(x)$ é uma função continua em $[a, b]$.

Definiremos o trabalho realizado pela força *F* sobre o objeto, quando esse se desloca de $x = a$ até $x = b$, com $a < b$.

Considerando uma partição *P* de $[a, b]$ dada por:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b$$

Sejam C_i um ponto qualquer do intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ e $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Então, uma aproximação do trabalho realizado pela força $F = F(x)$ sobre o objeto, quando este se desloca no i-ésimo intervalo, é dado por:

$$W_i = F(C_i)\Delta x_i$$

Assim uma aproximação do trabalho realizado pela força $F = F(x)$ sobre o objeto, quando este se desloca de a até b dado por:

$$\sum_{i=1}^{n} F(C_i)\, \Delta x_i \tag{1}$$

Podemos observar que a medida que n cresce muito e $\Delta x_i \to 0$ a soma (1) se aproxima do que intuitivamente entendemos como trabalho total W, realizado pela força $F(x)$ sobre o objeto, quando este se desloca de a até b.

Como (I) é uma Soma de Riemann da função contínua $F(x)$ podemos definir W por:

$$W = \int_a^b F(x)dx \tag{2}$$

Exemplo 28: Uma criança rolando uma pedra utiliza uma força de $120 + 25\, sen\, x$ Newtons sobre ela, quando esta rola x metros. Quanto trabalho deve a criança realizar, para fazer a pedra rolar 2 m?

Solução: Vejamos a figura a seguir. No ponto 0 inicia-se o movimento. Queremos calcular W realizado pela força, $F(x) = 120 + 25\, sen\, x$ sobre a pedra, quando se desloca de 0 até 2.

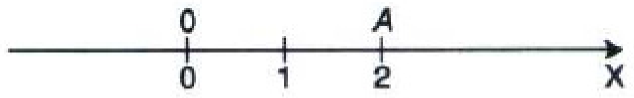

Figura 39:Ilustração do exemplo 28.

Usando (2) temos :

$$\begin{aligned} W &= \int_0^2 (120 + 25\, senx)\, dx \\ &= 120x - 25\cos x]_0^2 \\ &= (120 \cdot 2 - 25\cos 2 - 120 \cdot 0 + 25\cos 0) \\ &= 240 - 25\cos 2 + 25 \\ &= (265 - 25\cos 2)N \cdot m(Newtons\ \cdot metros = Joules\ ) \end{aligned}$$

TRABALHO RESULTANTE DE DESTENSÃO E COMPRESSÃO DE UMA MOLA.

A força $F(x)$ necessária para distender uma mola x unidades além de seu comprimento natural é dado por

$$F(x) = kx \tag{3}$$

Onde k é uma constante, chamada constante de mola.

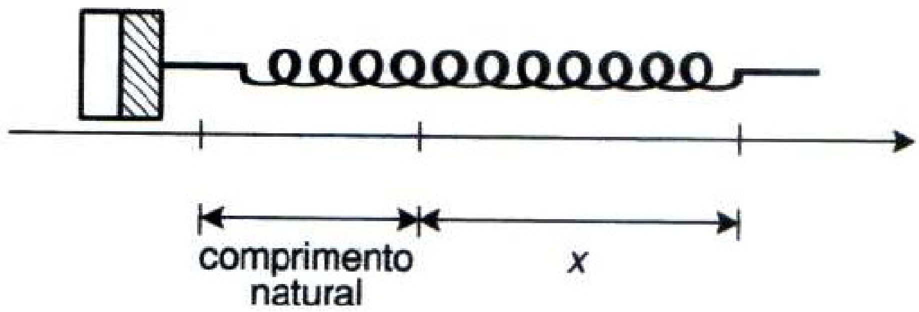

Figura 40: A mola

As molas reais obedecem a equação (3) que é chamada como Lei de Hooke.

Colocamos a mola ao longo dos x com a origem no ponto onde começa o esticamento.

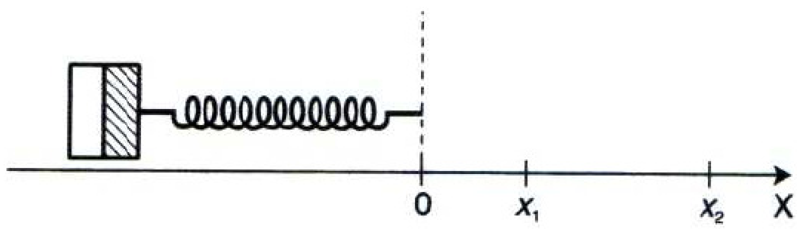

Figura 41:Esticamento da mola.

O trabalho realizado para que a mola se estenda de x_1 até x_2 é dada por :

$$W = \int_{x_1}^{x_2} kx\, dx \tag{4}$$

Observação: Essa fórmula tanto pode ser usada para compressão quanto para o esticamento de molas.

Exemplo 29:

i) Uma mola tem um comprimento de 0,5 m. Uma força de 4 N é exigida para conservar a mola esticada 0,6 m. Calcule o trabalho realizado para que a mola se estenda de seu comprimento natural até o comprimento de 1,2 m.

Solução: Colocamos a mola ao longo do eixo dos x como mostra a figura a segui.

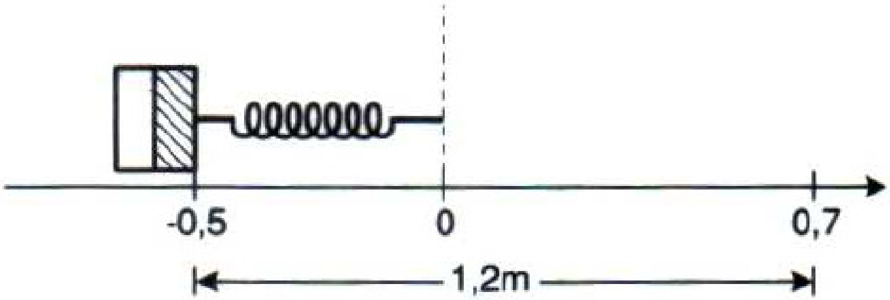

Figura 42: Mola ao longo do eixo x

Inicialmente precisamos encontrar a constante da mola. Pela Lei de Hooke. Vem que:

$F(x) = kx$

Como $F(0{,}6) = 4$ temos

$K \cdot 0{,}6 = 4$

$K = \frac{4}{0{,}6}$

$K = \frac{20}{3}$

Logo $F(x) = \frac{20}{3}\, x$

Portanto usando (4) e visualizando os limites de integração da figura anterior temos:

$$W = \int_0^{0,7} \frac{20}{3}\, x\, dx = \frac{20}{3}\frac{x^2}{2}\Big]_0^{0,7} = \frac{10}{3}(0{,}7)^2 = \frac{49}{30}\, J\ (Joules).$$

ii) A constante da mola de um batente numa estação de carga é de $26 \times\ 10^4\ N/m$. Ache o trabalho efetuado ao se comprimir a mola 10 cm.

Solução: A figura a seguir ilustra esse fato.

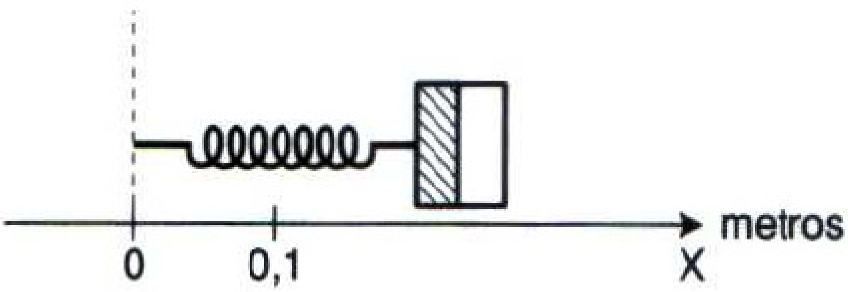

Figura 43: Mola comprimida

Temos que $F(x) = 26 \times\ 10^4 x.$

$$W = \int_0^{0,1} 26 \times 10^4 x\, dx = 26 \times 10^4 \left.\frac{x^2}{2}\right]_0^{0,1} = 13 \cdot 10^4 \cdot (0,1)^2 = 1300 \text{ J}$$

Portanto usando a integral para calcular o trabalho em outras situações práticas. Basta identificar um sistema de coordenadas adequada e definir a força variável para a situação considerada.

5. CONCLUSÃO

Nesse trabalho foi feita uma abordagem sobre o cálculo Integral, tendo por foco duas técnicas de integração (Substituição e Partes), nele também procuramos mostrar suas aplicações em outras áreas, tendo por objetivo compreender na prática as técnicas de Integração bem como ampliar o conhecimento e a capacidade de manipular as fórmula e conceitos.

O primeiro passo foi analisar contextos históricos sempre fazendo referência ao desenvolvimento do cálculo e aos matemáticos que tanto contribuíram. Em seguida foram expostos os teoremas e definições para nesse caminho chegarmos nas aplicações. Depois de analisados todos esses aspectos matemáticos e as aplicações que estão contidas neste trabalho podemos perceber que os objetivos aqui foram alcançados, pelo fato da pesquisa ser apenas bibliográfica não aplicamos em sala de aula, esperamos que este estudo seja fonte de contribuição para a comunidade acadêmica ou até instigue colegas e apreciadores da matemática.

Desse trabalho fica uma contribuição muito positiva, pois colaborou de maneira significativa para ampliação do conhecimento proporcionando-me maior domínio sobre o conteúdo e ao mesmo tempo em que nos possibilitou compreender sua importância nos cursos da área das ciências exatas.

6. REFERÊNCIAS

FLEMMING, Diva Marília; Gonsalves, Mirian Buss. Cálculo A, 6ª edição, São Paulo-SP: Pearson, Prentice Hall, 2007.

GEORGE B. Tomas, Cálculo, volume 1,11ª edição, editora Addison Wesley,2009, São Paulo-SP.

MUNEM, Foulis, Cálculo, Volume 1, Editora Guanabara Dois S.A.,1982, Rio de Janeiro-RJ.

SITES REFERIDOS:

http://ecalculo.if.usp.br/historia/historia_integrais.htm, acessado 23 de Abril de 2014 às 11:11 hs.

http://ecalculo.if.usp.br/historia/leibniz.htm acessado em 10 de junho de 2014

http://www.leibnizbrasil.pro.br/leibniz-vida.htm acessado em 10 de junho de 2014. http://www.ebah.com.br/content/ABAAABhssAG/historia-integral, acessado em 01 de Setembro de 2014

http://w3.ufsm.br/ceem/eiemat/Anais/arquivos/ed_4/CC/CC_Valle_Jaqueline.pdf

acessado dia 19/11/2014