UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA

CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

MARCOS ALEXANDRE DE OLIVEIRA

O USO DOS CONTEÚDOS TRIGONOMÉTRICOS NO ENSINO DO CÁLCULO

Campina Grande – PB

Outubro / 2012

MARCOS ALEXANDRE DE OLIVEIRA

O USO DOS CONTEÚDOS TRIGONOMÉTRICOS NO ENSINO DO CÁLCULO

Monografia apresentada no Curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências para obtenção do Título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Ms. Fernando Luiz Tavares da Silva

Campina Grande - PB

Outubro / 2012

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL – UEPB

O48u Oliveira, Marcos Alexandre de.

O uso dos conteúdos trigonométricos no ensino do cálculo [manuscrito] / Marcos Alexandre de Oliveira. – 2012.

31 f.: il. color.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2012.

“Orientação: Prof. Me. Fernando Luiz Tavares da Silva, Departamento de Matemática”.

1. Cálculo. 2. História da matemática. 3. Trigonometria. I. Título.

21. ed. CDD 510.1

MARCOS ALEXANDRE DE OLIVEIRA

O USO DOS CONTEÚDOS TRIGONOMÉTRICOS NO ENSINO DO CÁLCULO

Monografia apresentada no Curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências para obtenção do Título de Licenciado em Matemática.

Aprovada em 05 de novembro de 2012.

BANCA EXAMINADORA:

Fernando Luiz Tavares da Silva

Prof. Ms. Fernando Luiz Tavares da Silva
Departamento de Matemática – CCT/UEPB
(Orientador)

Maria da Conceição Vieira Fernandes

Prof.ªMs. Maria da Conceição Vieira Fernandes
Departamento de Matemática – CCT/UEPB
Examinadora

Kátia Suzana medeiros graciano

Prof.ªMs. Kátia Suzana Medeiros Graciano
Departamento de Matemática – CCT/UEPB
Examinadora

DEDICATÓRIA

A todos aqueles que, orientados por DEUS, contribuíram para a realização desse trabalho em especial aos meus pais que tanto me incentivaram a estudar.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela força espiritual para a realização desse trabalho**.**

Aos meus pais Alexandre Tomé de Oliveira e Maria dos Santos Oliveira, pelo eterno orgulho de nossa caminhada, pelo apoio, compreensão, ajuda, e, em especial, por todo carinho ao longo deste percurso.

A minha esposa Gésica Pricila da Silva Oliveira pelo carinho, compreensão e pela grande ajuda.

Aos meus amigos e colegas de curso, pela cumplicidade, ajuda e amizade.

A todos meus professores principalmente a Fernando Luiz, pela orientação deste trabalho.

Deus não escolhe os capacitados, mas capacita os escolhidos.

(Albert Einstein)

RESUMO

Iniciamos esse trabalho através de um breve relato histórico sobre o desenvolvimento do *Cálculo,* e também, da *Trigonometria.* Em seguida, apresentamos o conteúdo teórico que julgamos necessário ao desenvolvimento da nossa proposta. A ultima etapa está reservada aos exemplos e aplicações, que evidenciam o uso da *Trigonometria* no estudo do *cálculo*.

Palavras-chaves: História, Cálculo, Trigonometria.

ABSTRACT

We began this work with a brief historical account of the development of *Calculus*, of *Trigonometry*. Then, we present the theoretical content that we deem necessary for the development of our proposal. The last step is reserved for examples and applications that demonstrate the use of *Trigonometry* in the study of *Calculus*.

Keywords: History, Calculus, Trigonometry.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Esse trabalho encontra-se estruturado em três etapas: a primeira aborda um pouco da origem e surgimento do *cálculo* e da *trigonometria,* realçando dentre uma infinidade de acontecimentos existentes dentro da História da Matemática, alguns fatos, datas e personagens relevantes ligados a esses ramos de estudo; a segunda etapa, que é de caráter teórico, aborda definições, propriedades, fórmulas e teoremas, tanto do *cálculo*, como da *trigonometria*; por fim, a terceira etapa nos mostra através das atividades escolhidas, o quanto é intenso, o uso da *trigonometria* no desenvolvimento desses estudos.

2. OBJETIVOS

2.1. OBJETIVO GERAL

- Dar visibilidade ao leitor, do uso da *trigonometria* no estudo do *cálculo*.

2.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Estimular o estudo e a pesquisa em *trigonometria*;
- Explicar de forma mais detalhada, alguns resultados que surgem de forma mais brusca ao estudarmos cálculo;
- Mostrar sua constante interação com outras áreas de conhecimento.

3. REVISÃO DE LITERATURA

3.1. HISTÓRIA DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

O Cálculo Diferencial e Integral, também chamado de cálculo infinitesimal ou simplesmente Cálculo, é um ramo importante da Matemática, desenvolvido a partir da Álgebra e da Geometria, que se dedica ao estudo de taxas de variação de grandezas, como a inclinação de uma reta e uma acumulação de quantidades, por exemplo, como a área abaixo de uma curva ou o volume de um sólido. O Cálculo é empregado, entre outros, onde há movimento ou crescimento e forças variáveis agem produzindo aceleração. Quando se fala em origem do Cálculo Diferencial e Integral, os primeiros nomes que aparecem são Isaac Newton e Gottifried Leibniz. Entretanto, se retomada desde o começo, a história do Cálculo primeiramente se confronta com o nome do considerado maior matemático do período helenístico e de toda a antiguidade, Arquimedes (287-212 a.C). Suas maiores contribuições foram feitas no campo que hoje denominamos “Cálculo Integral”, por meio do método que ficou conhecido como Método de Exaustão. Os escritos matemáticos de Arquimedes foram divulgados na Europa, em várias edições impressas em 1550 d.C, fazendo com que fosse retomado o estudo do Cálculo Infinitesimal. Historicamente, o primeiro método a utilizar o Cálculo foi através das Infinitesimais. Nomes como Comandino, Maurolico, Luca de Valerio, e Stevin (1570-1585), destacaram-se, pois continuaram a tradição arquimediana aplicando seus métodos na determinação de áreas, volumes e centros de gravidade. Alguns dados históricos mostram que as primeiras aplicações do Cálculo foram para determinar áreas, volumes e centros de gravidade, utilizando a Integral, mais propriamente a Integral Definida. Contudo, pode-se concluir que a noção de Integração surgiu primeiro que a noção de diferenciação. Foi só com o advento do Teorema Fundamental do Cálculo, de Barrow, que se estabeleceu uma conexão entre os dois ramos do Cálculo: o Cálculo Diferencial e o Cálculo Integral. Em 1620, Galileu, um renascentista, procurou ir além dos gregos, os quais se limitavam a estudar as grandezas geométricas da Astronomia, Óptica e Estatística. Galileu é oprimeiro a estudar áreas do conhecimento não abordadas pelos gregos clássicos, como Cinemática, Dinâmica, Elasticidade. Foi assim que o Cálculo passou a ser aplicado a outras áreas, como por exemplo, na Física.

Depois de quase 100 anos desde a divulgação dos escritos de Arquimedes surgem Newton e Leibniz, encontrando uma grande base matemático-física com cerca de 1000 resultados sobre Cálculo Infinitesimal. Assim surge a questão: será que então não se deve atribuir a Newton e a Leibniz o surgimento do Cálculo? Observando os dados históricos acima relatados, há muitos outros nomes, como os citados anteriormente, envolvidos nessa descoberta antes de Newton e Leibniz, nomes que muitas vezes quando se fala sobre a origem do Cálculo, quase nem são mencionados. De modo bastante simplificado pode-se dizer que Leibniz, em 1684, iniciou essencialmente o Cálculo Diferencial. Já Newton foi o primeiro a usar sistematicamente o Teorema Fundamental do Cálculo Integral elaborado por Barrow, e demonstrou sua utilidade na descoberta de grande quantidade de resultados em Matemática e Física. Essas descobertas foram feitas entre 1666 e1676, mas a maioria só foi publicada após 1700. As gerações de matemáticos que vieram após Newton, em grande parte, seguiram seus passos, procurando novos resultados tanto nos aspectos técnicos como nas aplicações do Cálculo a aspectos teóricos da Mecânica. Em 1700 ainda, apareceram oportunidades para um uso mais prático do Cálculo na análise estática, dinâmica e termodinâmica das máquinasindustriais, das quais a cada dia eram solicitadas maior potência e velocidade. Nesse mesmo ano, o Cálculo Infinitesimal desenvolveu-se principalmente através das descobertas de Euler, o qual escreveu um livro sobre Cálculo Infinitesimal. Nessa época, entretanto, o padrão científico do Cálculo ainda era muito baixo. No século XIX, as infinitesimais foram substituídas pelos limites, os quais descreveram o valor de uma função em certo ponto em termos de valores de pontos. Ainda nesse século, o cálculo foi abordado por Cauchy, Riemann e Weierstrass com um formalismo mais rigoroso. Foi também durante este período que ideias do cálculo foram generalizadas no espaço euclidiano e no plano complexo. Dessa época até os dias atuais o Cálculo não cessou de se desenvolver teoricamente ede ser aplicado a novas situações, sendo um instrumento matemático absolutamente imprescindível para muitas áreas do conhecimento.

3.2. HISTÓRIA DA TRIGOMOMETRIA

O surgimento da trigonometria está diretamente ligado aos povos babilônicos e egípcios, sendo desenvolvida pelos gregos e indianos. Hiparco de Niceia (190 a.C– 125 a.C) foi um astrônomo grego que introduziu a Trigonometria como ciência, por meio de estudos ele implantou as relações existentes entre os elementos do triângulo. O Teorema de Pitágoras possui papel importante no desenvolvimento dos estudos trigonométricos, pois é através dele que desenvolvemos fórmulas teóricas comumente usadas nos cálculos relacionados a situações práticas cotidianas.

De acordo com EVES (1997), temos que:

> *“Um certo número de papiros egípcios de algum modo resistiu ao desgaste do tempo por mais de três milênios e meio. O mais extenso dos de natureza matemática é um rolo de papiro com cerca de 0,30 m de altura e 5 m de comprimento, que está agora no British Museum, exceto uns poucos fragmentos que estão no Brooklin Museum. Foi comprado em 1858 numa cidade à beira do Nilo, por um antiquário escocês, Henry Rhind, que lhe emprestou o nome. Às vezes, é chamado Papiro Ahmes em honra ao escriba que o copiou por volta de 1650 a.C. O escriba conta que o material provém de um protótipo do Reino do Meio, de cerca de 2000 a 1800 a.C., e é possível que parte desse conhecimento tenha provindo de Imhotep, o quase lendário arquiteto e médico do Faraó Zoser, que superintendeu a construção de sua pirâmide há cerca de 5000 anos. De qualquer modo, a matemática egípcia parece ter ficado estagnada por cerca de 2000 anos, após um início bastante auspicioso. Talvez a mais notável das tabulas matemáticas babilônias já analisadas. O nome indica tratar-se da tabula da coleção G.A. Plimpton da universidade de Colúmbia, catalogada sob o número 322. A tabula foi escrita no período Babilônico Antigo -*

> *aproximadamente entre 1900 e 1600 a.C. - e os primeiros a descrever seu conteúdo foram Neugebauer e Sacs em 1945".*

A trigonometria toma a sua forma atual quando Euler(1707-1783) adota a medida do raio de um círculo como unidade e define funções aplicadas a um número e não mais a um ângulo como era feito até então, em 1748. A transição das razões trigonométricas para as funções periódicas começou com Viète no século XVI, teve novo impulso com o aparecimento do Cálculo Infinitesimal no século XVII e culminou com a figura de Euler.

Sir Isaac Newton (1642-1727) também deu sua contribuição à trigonometria, pois, paralelamente aos seus estudos de cálculo infinitesimal apoiados fortemente na geometria do movimento, trabalhou com séries infinitas, tendo expandido arcsen x em séries e, por reversão, deduzido a série para sen x. Além disso, comunicou a Leibniz a fórmula geral para sen(nx) e cos(nx) tendo, com isso, aberto a perspectiva para o sen x e o cos x surgirem como números e não como grandezas, sendo Kastner, em 1759, o primeiro matemático a definir as funções trigonométricas de números puros.

Devemos ressaltar que a Trigonometria objetivou a elaboração dos estudos das funções trigonométricas, relacionadas aos ângulos e aos fenômenos periódicos. A partir do século XV, a modernidade dos cálculos criou novas situações teóricas e práticas relacionadas aos estudos dos ângulos e das medidas. Com a criação do Cálculo Diferencial e Integral, pelos cientistas Isaac Newton e Leibniz, a Trigonometria não se limita apenas a estudar os triângulos,e ganha moldes definitivos no cenário da Matemática, sendo constantemente aplicada em outras ciências, como Medicina, Engenharia, Química, Geografia, Astronomia, Biologia, Navegação, enfim, em muitos outros campos da actividade humana. Essas aplicações envolvem conceitos que dificilmente lembram os triângulos que deram origem à trigonometria.

4. **FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA**

4.1. FUNDAMENTOS

Identidades Trigonométricas

Vejamos agora algumas identidades trigonométricas:

1) $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$.

2) $1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$.

3) $1 + \operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$.

4) $\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$.

5) $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$.

6) $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$.

7) $2 \operatorname{sen} x \cos y = \operatorname{sen}(x - y) + sen(x + y)$.

8) $2 \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = \cos(x - y) - \cos(x + y)$.

9) $2 \cos x \cos y = \cos(x - y) + \cos(x + y)$.

10) $1 \pm \operatorname{sen} x = 1 \pm \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$.

Paridade de uma função

Uma função f cujo domínio D é um conjunto simétrico é dita par se, e somente se, para todo x, x ∊ D, tivermos que $f(-x) = f(x)$.

Uma função f cujo domínio D é um conjunto simétrico é dita impar se, e somente se, para todo x, x ∊ D, tivermos que $f(-x) = -f(x)$.

Chamamos de função sem paridade aquela que não é nem par nem impar.

Por exemplo, o cosseno é uma função par, $\cos(-x) = \cos x$, e o seno é uma função impar: $sen\,(-x) = -sen\, x$. Mas $f(x) = x + 1$ não é nem par nem impar. De fato basta achar um ponto no qual a propriedade não é verificada. Por exemplo, $f(-1) = 0$, que não é igual nem a $f(1)$, nem a $-f(1)$.

4.2. LIMITES

Definição:

Diz-se que $f(x)$ tende a ℓ quando x→ ∞, e escreve-se

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \ell$$

(ou ás vezes $f(x) \to \ell$ se não tiver ambiguidade) se para todo $\epsilon\ > 0$ existir um Ntal que se $x \geq N$, então

$$|f(x) - \ell| \leq \epsilon$$

A definição de

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ \ell$$

é parecida, mas "$x \geq N$" é trocado por "$x \leq -N$".

Limite Fundamental:

Esse é um dos limites fundamentais

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen\ x}{x} = 1$$

4.3. DERIVADAS

Definição:

Considere uma função f definida num ponto **a** e na sua vizinhança.
Se o limite

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

existir e for finito, diremos que f é derivável (ou diferenciável) em a. O valor de $f'(a)$ é chamado de derivada de f no ponto a, e representa a inclinação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $P = (a, f(a))$.

Observe que com a mudança de variável $h = x - a,\ x \to a$ implica $h \to 0$, logo a derivada pode ser escrita também como

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Vejamos a seguir algumas derivadas trigonométricas:

Sejam u e v funções deriváveis de x e n constante.

1. $y = u^n \quad \Rightarrow y' = n\,u^{n-1}u'$.
2. $y = u\,v \quad \Rightarrow y' = u'v + v'u$.
3. $y = \dfrac{u}{v} \quad \Rightarrow y' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$.
4. $y = a^u \quad \Rightarrow y' = a^u(\ln a)\,u', \quad (a > 0,\ a \neq 1)$.
5. $y = e^u \quad \Rightarrow y' = e^u u'$.
6. $y = \log_a u \quad \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{u}\log_a e$.
7. $y = \ln u \quad \Rightarrow y' = \dfrac{1}{u}u'$.
8. $y = u^v \quad \Rightarrow y' = v\,u^{v-1}\,u' + u^v(\ln u)\,v'$.
9. $y = \operatorname{sen} u \quad \Rightarrow y' = u'\cos u$.
10. $y = \cos u \quad \Rightarrow y' = -u'\operatorname{sen} u$.
11. $y = \operatorname{tg} u \quad \Rightarrow y' = u'\sec^2 u$.
12. $y = \operatorname{cotg} u \quad \Rightarrow y' = -u'\operatorname{cosec}^2 u$.
13. $y = \sec u \quad \Rightarrow y' = u'\sec u\operatorname{tg} u$.
14. $y = \operatorname{cosec} u \quad \Rightarrow y' = -u'\operatorname{cosec} u\operatorname{cotg} u$.
15. $y = arc\operatorname{sen} u \quad \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.
16. $y = arc\cos u \quad \Rightarrow y' = \dfrac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$.
17. $y = arc\operatorname{tg} u \quad \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{1+u^2}$.
18. $y = arc\ cotg\ u \Rightarrow y' = \frac{-u}{1+u^2}$
19. $y = arc\sec u, |u| \geq 1 \quad \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}, |u| > 1$.
20. $y = arc\operatorname{cosec} u, |u| \geq 1 \Rightarrow y' = \dfrac{-u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}, |u| > 1$.

4.4. INTEGRAIS

Definição:

A função $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ é integrável se o limite

$$\lim_{n\to\infty} I_n$$

existir, qualquer que seja a sequência de partições em $max_j \Delta x_j \to 0$ e qualquer que seja a escolha de $x_j^* \in [x_{j-1}, x_j]$. Quando f é integrável, o limite

$$\lim_{n\to\infty} I_n$$

é chamado de integral de f, ou integral definida de f e denotado

$$\lim_{n\to\infty} I_n \equiv \int_a^b f(x)dx.$$

Os números a e b são chamados os limites de integração.

Método de integração por partes:

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções deriváveis no intervalo I. Temos,

$$[f(x).g(x)]' = f(x).g'(x) + g(x).f'(x)$$

ou,

$$f(x).g'(x) = [f(x).g(x)]' - g(x).f'(x).$$

Integrando ambos os lados dessa equação, obtemos

$$\int f(x).g'(x)\,dx = \int [f(x).g(x)]'\,dx - \int g(x).f'(x)\,dx,$$

ou ainda,

$$\int f(x).g'(x)dx = f(x).g(x) - \int g(x).f'(x)\,dx.$$

Observamos que deixamos de escrever a constante de integração. Todas elas podem ser representadas por uma única constante c, que introduziremos no final do processo.

Na prática, costumamos fazer

$u = f(x) \quad \Longrightarrow \quad du = f'(x)dx$ e

$v = g(x) \quad \Longrightarrow \quad dv = g'(x)dx$

Temos:

$$\int \boldsymbol{u\,dv} = \boldsymbol{uv} - \int \boldsymbol{v\,du}.$$

Vejamos agora algumas integrais trigonométricas

1. $\int du = u + c$.

2. $\int u^n du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1$.

3. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + c$.

4. $\int a^u du = \dfrac{a^u}{\ln a} + c, \quad a > 0, a \neq 1$.

5. $\int e^u du = e^u + c$.

6. $\int \text{sen}\, u\, du = -\cos u + c$.

7. $\int \cos u\, du = \text{sen}\, u + c$.

8. $\int \text{tg}\, u\, du = \ln|\sec u| + c$.

9. $\int \text{cotg}\, u\, du = \ln|\text{sen}\, u| + c$.

10, $\int \sec u\, du = \ln|\sec u + \text{tg}\, u| + c$.

11. $\int \text{cosec}\, u\, du = \ln|\text{cosec}\, u - \text{cotg}\, u| + c$.

12. $\int \sec u\, \text{tg}\, u\, du = \sec u + c$.

13. $\int \text{cosec}\, u\, \text{cotg}\, u\, du = -\text{cosec}\, u + c$.

14. $\int \sec^2 u\, du = \text{tg}\, u + c$.

15. $\int \text{cosec}^2 u\, du = -\text{cotg}\, u + c$.

16. $\int \dfrac{du}{u^2 + a^2} = \dfrac{1}{a} arc\ \text{tg} \dfrac{u}{a} + c$.

17. $\int \dfrac{du}{u^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{u-a}{u+a}\right| + c, \quad u^2 > a^2$.

18. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 + a^2}\right| + c$.

19. $\int \dfrac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \dfrac{1}{a} arc\ \sec\left|\dfrac{u}{a}\right| + c$.

20. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right| + c$.

21. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = arc\ \text{sen} \dfrac{u}{a} + c, \quad u^2 < a^2$.

Fórmulas de Recorrências

1. $$\int \operatorname{sen}^n au\, du = -\frac{\operatorname{sen}^{n-1} au \cos au}{an} + \left(\frac{n-1}{n}\right)\int \operatorname{sen}^{n-2} au\, du\,.$$

2. $$\int \cos^n au\, du = \frac{\operatorname{sen} au \cos^{n-1} au}{an} + \left(\frac{n-1}{n}\right)\int \cos^{n-2} au\, du\,.$$

3. $$\int \operatorname{tg}^n au\, du = \frac{tg^{n-1} au}{a(n-1)} - \int \operatorname{tg}^{n-2} au\, du\,.$$

4. $$\int \operatorname{cotg}^n au\, du = -\frac{\operatorname{cotg}^{n-1} au}{a(n-1)} - \int \operatorname{cotg}^{n-2} au\, du\,.$$

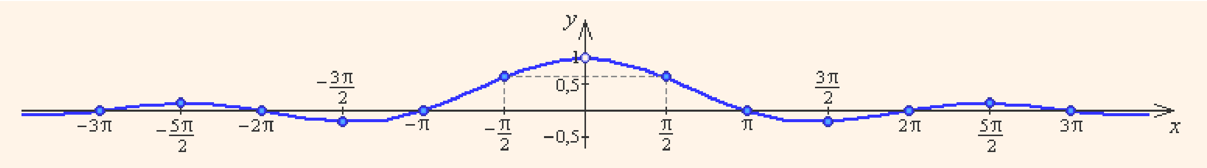
5. $$\int \sec^n au\, du = \frac{\sec^{n-2} au\; tg\; au}{a(n-1)} + \left(\frac{n-2}{n-1}\right)\int \sec^{n-2} au\, du\,.$$

6. $$\int \operatorname{cosec}^n au\, du = -\frac{\operatorname{cosec}^{n-2} au \operatorname{cotg} au}{a(n-1)} + \left(\frac{n-2}{n-1}\right)\int \operatorname{cosec}^{n-2} au\, du\,.$$

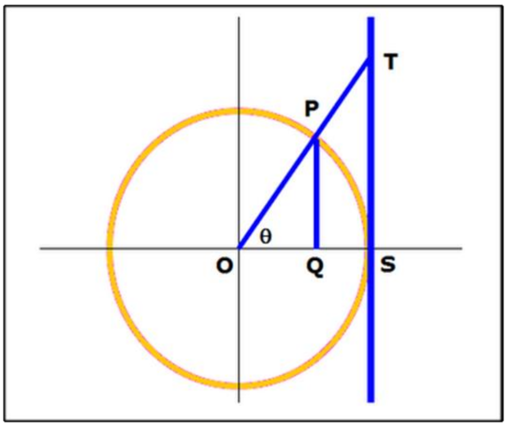
4.5. APLICAÇÕES

LIMITES TRIGONOMÉTRICOS

Vamos observar o gráfico da função $f(x) = \frac{sen\, x}{x}$



Note que esta função não está definida no zero e observe que seu gráfico sugere que $\lim_{x \to 0} \frac{sen\, x}{x} = 1$



Na figura acima, temos um círculo de raio unitário.

Denotemos por A_1 e A_2 as áreas dos triângulos QOP e SOT respectivamente e por A a área do setor circular.

Claramente, $A_1 < A < A_2$. Portanto se $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, temos:

$A_1 = \frac{1}{2} sen\, \theta \cos\theta$ $\quad A_2 = \frac{sen\, \theta}{2\cos\theta}$ $\quad$ e $\quad A = \frac{\theta}{2}$

Da desigualdade acima, $sen\, \theta \cos\theta < \theta < sen\theta \sec\theta$.

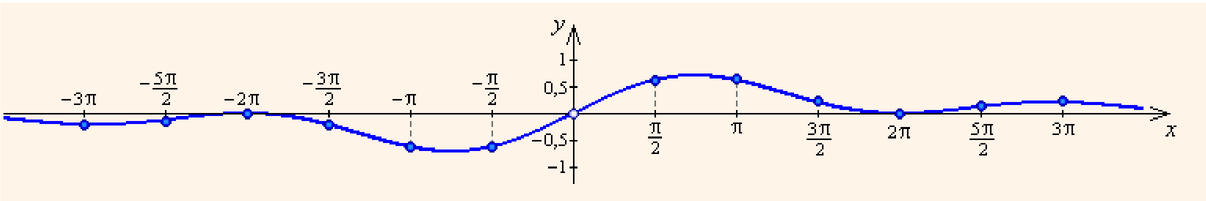
Sendo $sen\, \theta > 0$ para $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, temos: $\cos\theta < \frac{\theta}{sen\, \theta} < \sec\theta$ ou $\cos\theta < \frac{sen\, \theta}{\theta} < \sec\theta$ se $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Como $\lim_{\theta \to 0^+} \cos\theta = \lim_{\theta \to 0^+} \sec\theta = 1$ segue que:

$\lim_{\theta \to 0^+} \frac{sen\, \theta}{\theta} = 1$. Sendo $\frac{sen\, \theta}{\theta}$ uma fração par então $\lim_{\theta \to 0^-} \frac{sen\, \theta}{\theta} = 1$.

Portanto,

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen\,x}{x}=1$$

Vamos observar o gráfico da função $f(x)=\frac{1-cos\,x}{x}$



Note que esta função não está definida no zero e observe que seu gráfico sugere que $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0$.

Multiplicando e dividindo o limite acima por $(1-\cos x)$, temos:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-cos^2 x}{x(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{sen^2 x}{x(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{sen\,x}{x}.\frac{sen\,x}{1+\cos x}=1.\frac{0}{1+1}=0$$

Portanto,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0$$

DERIVADAS TRIGONOMÉTRICAS

Seja $f(x) = sen\, x$. Obter $f\,'(x)$ através de “Werner”.

Por definição, temos:

$$f\,'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Assim,

$$f\,'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{sen(x+h) - sen\, x}{h}$$

Sabemos que:

$$sen\, p - sen\, q = 2\, sen\, \frac{p-q}{2}\, .\, cos\, \frac{p+q}{2}$$

Logo,

$$f\,'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{2\, sen \frac{x+h-x}{2} cos\, \frac{x+h+x}{2}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{sen\, \frac{h}{2} \cos \frac{2x+h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{sen\, \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} . \lim_{h \to 0} cos\, \frac{2x+h}{2}$$

Usando o limite trigonométrico fundamental, $\lim_{x \to 0} \frac{sen\, x}{x} = 1$.

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cos 2x + h}{2}$$

$$= cos\, x$$

$$\boldsymbol{f\,'(x) = cos\, x}$$

Seja $f(x) = cos\, x$. Obter $f\,'(x)$ através de “Werner”.

Por definição, temos:

$$f\,'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f\,'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{cos(x+h) - cos\, x}{h}$$

$$cos\, p - cos\, q = -2\, sem\, \frac{p+q}{2}\, .\, sen \frac{p-q}{2}$$

$$f\,'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{-2\, sen\, \frac{(x+h+x)}{2}\, sen\, \frac{x+h-x}{2}}{h}$$

$$f\,'(x) = -\lim_{h \to 0} \frac{2\, sen \frac{2x+h}{2} sen \frac{h}{2}}{h}$$

$$f\,'(x) = -\lim_{h \to 0} \frac{sen \frac{2x+h}{2} \lim_{h \to 0} sen \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

$$f\,'(x) = -\lim_{h \to 0} sen\, \frac{2x+h}{2}\, .\, \lim_{h \to 0} \frac{sen\, \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

Como

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen\, x}{x} = 1$$

Temos:

$$f\,'(x) = -\lim_{h \to 0} sen \frac{2x+h}{2}$$

$$\boldsymbol{f\,'(x) = -\, sen\, x}$$

Seja $f(x) = tg\ x$. Vamos obter $f'(x)$ através de “Werner”.

Por definição, temos:

$$f\,'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Sabemos que

$$tg\ p - tg\ q = \frac{sen\ (p-q)}{cos\ p\ .\ cos\ q}$$

Assim:

$$f\,'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{sen\ (x+h-x)}{cos(x+h).\ cos\ x}}{h}$$

$$f\,'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{sen\ h}{h\ .cos(x+h).cos\ x}$$

$$f\,'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{sen\ h}{h}\ .\lim_{h \to 0} \frac{1}{cos(x+h).\ cos\ x}$$

$$f\,'(x) = \frac{1}{cos\ x\ .\ \ cos\ x}$$

$$f\,'(x) = \frac{1}{cos^2 x}$$

$$\boldsymbol{f\,'(x) = sec^2\ x}$$

Seja $f(x) = \sec x$. Vamos obter$f'(x)$ através de “Werner”.

Por definição, temos:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{sec(x+h) - \sec(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{\cos(x+h)} - \frac{1}{\cos x}}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\cos x - \cos(x+h)}{\cos(x+h)\cos x}}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\cos x - \cos(x+h)}{h\cos(x+h)\cos x}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{-2\ sen\ \frac{(x+x+h)}{2}\ sen\ \frac{[x-(x+h)]}{2}}{h\cos(x+h)\cos x}$$

$$f'(x) = -\lim_{h\to 0} \frac{sen\frac{(2x+h)}{2} sen\ (-\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}\cos(x+h)\cos x}$$

Lembre-se que: $\boldsymbol{sen\ (-x) = -sen\ x}$

$$f'(x) = -\lim_{h\to 0} \frac{sen\ \frac{(2x+h)}{2} . \left(-sen\ \frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}\cos(x+h)\cos x}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{sen\ \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} . \lim_{h\to 0} \frac{sen\ (\frac{2x+h}{2})}{\cos(x+h)\cos x}$$

$$f'(x) = \frac{sen\ x}{\cos x \cos x} = \frac{sen\ x}{\cos x} . \frac{1}{\cos x} = tg\ x \sec x$$

$$\boldsymbol{f'(x) = tg\ x \sec x}$$

INTEGRAIS TRIGONOMÉTRICAS (*FÓRMULAS DE REDUÇÃO*)

$$\int sen^n x dx = \int sen^{n-1} x \,.\, sen x dx$$

Usar "Partes"

$$\int u\, dv = uv - \int v du$$

Chame

u = $sen^{n-1}x$

du = $(n-1)sen^{n-2}x \cos x dx$

v = - cos x

$\int sen^n x dx = -\, sen^{n-1}$x cos x - $\int (n-1)\, sen^{n-2}\, x \cos x\, (-\cos x)\, dx$

$$= -\, sen^{n-1}x \cos x + (n-1) \int sen^{n-2}x \;\; cos^2 x\; dx$$

$$= -\, sen^{n-1}x \cos x + (n-1) \int sen^{n-2}x\, (1 - sen^2 x)\, dx$$

$$= -\, sen^{n-1}x \cos x + (n-1) \int (sen^{n-2}x - sen^n x)\, dx$$

$$= -\, sen^{n-1}x \cos x + (n-1) \int sen^{n-2}x\, dx - (n-1) \int sen^n x\, dx$$

$$(1 + n - 1) \int sen^n x\, dx = -sen^{n-1}x \cos x + (n-1) \int sen^{n-2}x\, dx$$

$$n \int sen^n x\, dx = \; -sen^{n-1}x \cos x + (n-1) \int sen^{n-2}x\, dx$$

$$\boldsymbol{\int sen^n x\, dx = -\frac{1}{n} sen^{n-1}\, x \cos x + \; \frac{n-1}{n} \int sen^{n-2} x\, dx}$$

$$\int cos^n x\ dx = \int cos^{n-1}x \cos x\ dx$$

Usar Partes

$$\int u\ dv = uv - \int vdu$$

Chame

$u = cos^{n-1}x$

$du = (n-1)cos^{n-2}x(-sen\ x)\ dx$

$dv = \cos x\ dx$

$v = sen\ x$

$$\int cos^n x\ dx = sen\ x\ cos^{n-1}x - \int (n-1)cos^{n-2}x(-sen\ x)\ sen\ x\ dx$$

$$= sen\ x\ cos^{n-1}x + (n-1)\int cos^{n-2}x\ sen^2 x\ dx$$

$$= sen\ x\ cos^{n-1}x + (n-1)\int cos^{n-2}x\ (1 - cos^2 x)\ dx$$

$$= sen\ x\ cos^{n-1}x + (n-1)\int (cos^{n-2}x - cos^n x)\ dx$$

$$= sen\ x\ cos^{n-1}x + (n-1)\int cos^{n-2}x\ dx - (n-1)\int cos^n x\ dx$$

$$(1+n-1)\int cos^n x\ dx = sen\ x\ cos^{n-1}x + (n-1)\int cos^{n-2}x\ dx$$

$$n\int cos^n x\ dx = sen\ x\ cos^{n-1}x + (n-1)\int cos^{n-2}x\ dx$$

$$\boldsymbol{\int cos^n x dx = \frac{1}{n} sen x cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int cos^{n-2} x dx}$$

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A *trigonometria* posta como ferramenta a ser utilizada na obtenção de resultados dentro do estudo do cálculo. Esse foi o propósito desse trabalho, com a devida compreensão de que a quantidade de atividades trabalhadas representa uma amostra extremamente pequena, diante da infinidade de exemplos existentes. A trajetória acadêmica de um estudante deveria contemplar um maior número de momentos, que fossem semelhantes a esses que particularmente pude vivenciar. Momentos que nos proporcionam reflexões, investigações, erros, correção de rumo, crescimento. Bem diferente de decorar algumas fórmulas para a resolução de exercícios que logo serão esquecidos. À exemplo da inserção no estudo do *cálculo* em diversas fases, a *trigonometria* é utilizada em outros ramos da Matemática no desenvolvimento de conhecimentos em Geometria Plana, Geometria Espacial, Geometria Analítica, Números Complexos, dentre outros.

Se, estudar a *trigonometria* por si própria, já é uma atividade por demais interessante, não menos interessante se torna sua investigação, diante da possibilidade de se obter cada fórmula passo a passo e poder aplicar seus resultados no dia a dia em conexão com outras áreas de estudo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOULOS, P. & ABUD Z. I. **Cálculo Diferencial e Integral.** Volumes: 1 e 2. SãoPaulo. Makron Books, 2000.

BOYER, C.B. **História da Matemática**, Editora Blucher, São Paulo, SP, 1974.

EVES, H.: **Introdução à História da Matemática**, Editora da UNICAMP, Campinas, SP, 1997.

FATOS MATEMÁTICOS, **Cálculo de Limites Trigonométricos**. Disponíveis em: <http://fatosmatematicos.blogspot.com.br/2011/04/calculo-de-limites-trigonometricas.html>, Acesso em: 10 de outubro de 2012.

GONÇALVES, M. B. & FLEMMING, D. M.. **Cálculo A.** São Paulo. Makron Books, 2000.

LÚCIA QUINTANILHA DE LIMA, Regina. **Cálculo Diferencial e Integral I**. Disponíveis em: <http://www.uff.br/webmat/Calc1_LivroOnLine/index.html>, Acesso em 10 de outubro de 2012

STEWART, J. **Cálculo. Vol. I.** São Paulo. Thomson. 2002.

THOMAS, G. B. **Cálculo. Vol. I.** São Paulo. Addison Wesley. 2003.